SOBRE LA RECUPERACIÓN DE LA CERTEZA

On Recovering Certainty

Martínez, B. y Rigo, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En el documento se examinan cualitativamente algunos aspectos y condiciones relacionadas con el proceso por el cual los estudiantes abandonan el estado de duda y recuperan su certeza en torno a proposiciones de contenido matemático; los sujetos que intervienen en el estudio participan en un diplomado de enseñanza del álgebra en línea. Se argumenta que la recuperación de la certeza puede estar ligada tanto a sustentos extra-matemáticos como a los de tipo matemático y que la primera vía suele conducir a la incomprensión mientras que la segunda puede llevar a un aumento de la comprensión. Esto desvela que la duda no siempre genera condiciones necesarias para el aprendizaje. Para el análisis se recurre a una interpretación de los argumentos basada en el Modelo de Toulmin.

Palabras clave: *recuperación de la certeza, duda, sustentos matemáticos, comprensión, Modelo de Toulmin*

Abstract

The paper quantitatively examines several aspects and conditions related to the process by which students abandon the state of doubt and recover their certainty concerning propositions of mathematics content. The subjects involved in the study take part in an online diploma course on teaching algebra. The authors argue that recovering certainty may be linked to extra-mathematical backings and that the first option usually leads to incomprehension, while the second may lead to increased comprehension. This reveals that doubt does not always generate the conditions needed for learning. For the analysis, the authors resort to an interpretation of the arguments based on the Toulmin Model.

Keywords: *recovering certainty, doubt, mathematical backings, comprehension, Toulmin Model.*

ANTECEDENTES Y OBJETIVO

Desde Sócrates en el Menón (1981); siglos después en la epistemología piagetiana (Piaget, 1990), y aún hoy en día, en la teoría social del conocimiento de Wenger (2001), se plantea que la contradicción y la duda representan un papel central en el proceso de aprendizaje y la construcción de conocimientos. Sin embargo, algunos investigadores del ámbito de la psicología (como Gilbert, 1991) han advertido que "no sólo parece que la duda puede ser la última operación en surgir, sino la primera en desaparecer" (p. 111) y otros, pertenecientes al terreno de la educación matemática (Inglis, Mejia-Ramos y Simpson, 2007), han insinuado que los estudiantes suelen experimentar certeza en torno a afirmaciones o argumentos de los que debieran dudar. Varias preguntas surgen entonces, específicamente en la esfera de la matemática educativa: ¿Bajo qué procesos se da el abandono de la duda y la recuperación de la certeza? ¿La duda genera siempre condiciones suficientes para el conocimiento y el aprendizaje? En este reporte se suscriben evidencias de que no siempre es así y con el fin de ofrecer una explicación inicial, se adelantan algunos elementos asociados a este fenómeno.

Martínez, B. y Rigo, M. (2015). Sobre la recuperación de la certeza. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 361-370). Alicante: SEIEM.

MARCO TEORICO

Los esquemas y estados epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2013) ha propuesto una clasificación de estos recursos de sustentación a los que llama “esquemas epistémicos”. Según la autora mientras algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas (como las instanciaciones y los esquemas de prueba empíricos de tipo inductivo o perceptual), otros se vertebran en torno a consideraciones extra-matemáticas como los que se basan en la familiaridad (cuando alguna creencia se apoya en un aprendizaje originado por la repetición y la memoria), en la autoridad (cuando se respalda la veracidad de un enunciado matemático en la autoridad del profesor o en la de las matemáticas; en este último caso, se habla de ‘razones operatorias’), o en razones prácticas (cuando las personas orientan y justifican las resoluciones persuadidas por una actitud de facilismo). Asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, continúa la autora, los sujetos pueden experimentar “estados epistémicos” de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). En este documento se usa el Modelo de Toulmin para identificar el tipo de argumentos que usan los estudiantes, la comprensión que ellos muestran en un argumento y los estados epistémicos que experimentan en torno a las proposiciones de dicho argumento.

El Modelo de Toulmin

En el Modelo de Toulmin (Toulmin, Rieke y Janik, 1984), un argumento está compuesto por una afirmación (C), datos (D) que apoyan la afirmación, garantías (W) que pueden ser expresadas como reglas generales que actúan como un puente entre C y D, un soporte (B) que incluye una teoría general sobre la que descansa la garantía, y los calificadores (Q).

Para identificar aquí la comprensión o incomprensión se aplican criterios de la Tabla 1 (Martínez y Rigo, 2014) complementados con el Modelo de Toulmin.

Tabla 1. Criterios para identificar comprensión o incomprensión

	Descripción	Identificación del criterio en el Modelo de Toulmin
S1	Se confiere a conceptos matemáticos interpretaciones que son acordes con la acepción matemática aceptada (disciplinar o escolar); /En discordancia.	C, D, W, B en concordancia con la acepción matemática aceptada; /C, D, W, B en discordancia.
S2	Perspectiva de experto: Se consideran visiones adicionales al punto de vista; /Sesgo de exploración: Se centra la atención sólo en un punto de vista.	D suficiente, W general; /D insuficiente, W *ad hoc.*
S3	Se explicita un punto de vista; /Punto de vista implícito.	Se explicitan D, W y/o B; /Los D, W y/o B quedan implícitos.
S4	Se muestra conocimiento mayor que el promedio; /Se muestra un conocimiento menor que el promedio.	Los C, D, W o B son más frecuentemente correctos o completos en relación con sus compañeros; /Incorrectos o incompletos.

En el Modelo de Toulmin los calificadores (Q) “determinan el grado de fuerza que los datos confieren sobre la afirmación en virtud de la garantía” (p. 101). Partiendo de una perspectiva de investigación cualitativa (Corbin y Strauss, 2008) y de corte etnográfico (Berteley, 2000), conforme a la cual se trata de recuperar la voz y la participación directa del sujeto mediante el examen de sus estados epistémicos, en este escrito se consideran otro tipo de calificadores (Q) que determinan la fuerza del argumento pero que no están dados a partir de la 'estructura' argumental sino de los estados epistémicos que experimenta el sujeto cuando argumenta (en especial cuando enuncia evidencias o afirmaciones). Así entonces, aquí se habla de la fuerza que el propio sujeto (parece) conferirle al argumento. En este trabajo los calificadores indicarán los estados epistémicos que experimentan los sujetos.

Para identificar estos calificadores se recurrió al carácter etnográfico de la investigación la cual plantea una triangulación sucesiva entre las producciones de las estudiantes, la interpretación de los investigadores y estudios realizados por otros autores. En un primer momento, se inscribieron distintas producciones de los estudiantes en tablas de análisis y se identificaron los elementos léxicos que a juicio de los investigadores denotaban estados de duda o certeza. Todos los elementos fueron analizados sistemáticamente por ambos autores que trabajaron de forma independiente para asegurar que las expresiones de acuerdo al contexto correspondieran a esos estados. En un segundo momento, se revisó en la literatura una lista de los elementos léxicos que suelen usar los estudiantes para expresar duda o certeza. Hyland (1998) llamó mitigadores a los elementos léxicos que ubicó en la categoría epistémica de duda (e.g., would y should) y nombró enfatizadores a los elementos que ubicó en la categoría de certeza (e.g., will). Beke (2005) encontró que en español el morfema verbal –ía y elementos léxicos como "creo" o "puede" se ubican en la categoría epistémica de duda, mientras que el modo indicativo de los verbos y expresiones como "hay que" o "debe" se ubican en la categoría de certeza. Este proceso de triangulación se realizó sistemáticamente en varios fragmentos (y no sólo en los aquí analizados) en los que participaron las estudiantes elegidas para esta investigación (ver Martínez, 2014). Lo anterior permitió encontrar que las estudiantes utilizan de forma predominante el modo indicativo de los verbos como enfatizador y el morfema verbal –ía como mitigador.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación cualitativa (Corbin y Strauss, 2008) que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso (Stake, 1999) de tipo interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994) y de corte etnográfico (Berteley, 2000). El estudio empírico se llevó a cabo en un diplomado cuyo propósito es fortalecer la formación de asesores que enseñan álgebra a adultos. Las actividades de enseñanza se desarrollaron a distancia mediante el uso de la plataforma Moodle. En esa plataforma quedó registrada para su posterior análisis la interacción entre los estudiantes y un tutor quien propuso y guió las actividades relacionadas con los temas. La interacción se organizó en episodios que están conformados por todas las participaciones de los estudiantes y del tutor que giran en torno a una misma actividad iniciada por este último. Una vez que las participaciones se organizaron en episodios, éstos se dividieron en argumentos considerando las necesidades del análisis. Para este reporte se seleccionaron participaciones de dos estudiantes que en trabajos anteriores (Martínez, 2014) habían mostrado comportamientos distintos. Mientras Jeymi tendía a asociar certeza a su comprensión y duda a su incomprensión, Mariana solía asociar su certeza a una profunda incomprensión. Martínez (uno de los autores) fungió como tutor del grupo, quien instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones. La selección de los episodios que se analizan en este escrito obedece a que las estudiantes parecían transitar de la duda a la certeza. Esto permitirá averiguar las condiciones bajo las cuales se da el abandono del estado de duda y si ese estado genera condiciones suficientes para el aprendizaje. Los episodios pertenecen al momento del Diplomado en el que los estudiantes debían usar las propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones lineales (esto es, ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación). Hasta ese momento todos los estudiantes sabían resolver ecuaciones lineales haciendo uso de la trasposición de términos (i.e., "cambiar de lado-cambiar de signo", ver Kieran y Filloy, 1989), la cual habían aprendido y utilizado a lo largo de su labor como asesores. Para el análisis se organizaron los argumentos de las estudiantes en tablas: la primera columna incluye un numeral para fines de organización, la segunda los argumentos textuales de las estudiantes y la tercera el análisis de cada argumento usando el Modelo de Toulmin (Tabla 1).

ANALISIS DE RESULTADOS

El caso de Mariana: La recuperación de la certeza vía razones prácticas

El tutor colocó en la plataforma la siguiente situación problemática: El río Amazonas tiene una longitud del doble de la del río Bravo más 332 km. Si la suma de la longitud de los dos ríos es de 9 434 km. ¿Cuál es la longitud de cada río? a) ¿Cuántas incógnitas tienes? b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? c) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema. La solución a la ecuación que un estudiante llamado Jesse planteó para obtener la longitud del río Bravo se muestra a continuación:

1.4 Resolviendo la ecuación: x + 2x + 332 = 9434; 3x + 332 = 9434; 3x + 332 - 332 = 9434 – 332; 3x ~~+ 332 - 332~~ = 9432 ~~-332~~; 3x = 9102; 3x/3 = 9102/3; x = 3034.

A esta respuesta, una estudiante de nombre Mariana reaccionó como se describe en la Figura 1.

2.1	En cuanto a tu ecuación no entiendo esa parte donde tienes 3x + 332 - 332 = 9434 – 332; 3x = 9102.	**Argumento 2** D2 → C2 D2: a: no entiendo enredas demasiado; b: 3x+332-332 = 9434; c: 3x+-332+332=9434; d: despejamos 3x (incorrecto y explícito) C2: 3x=9434-0 Lo demás sale sobrando (incorrecto) W2 a: Si se tienen expresiones que enreden y no entienda se cambian por expresiones que parezcan más fáciles (incorrecto e implícito); b: expresión modificada de 1.4 (incorrecta y ad-hoc); c: propiedad conmutativa de la suma (correcto e implícito); d: trasposición de términos (correcto e implícito) B2 a y d: Razones prácticas (referencia a la facilidad en relación a la trasposición de términos); c: Familiaridad (con la propiedad conmutativa de la suma en aritmética)
2.2	Como que enredas demasiado (ahí)	
2.3	porque si se (tiene) 3x + 332 - 332 = 9434	
2.4	yo creo que quedaría así 3x+-332+332=9434	
2.5	despejamos 3x y nos quedaría 3x=9434-0	
2.6	y lo demás sale sobrando	

Figura 1. Análisis de la primera parte de la primera participación de Mariana usando el Modelo de Toulmin

Desde el inicio del argumento 2 (en 2.1 y 2.2), Mariana mostró su desacuerdo con el procedimiento que empleó Jesse para resolver una ecuación, el cual involucra propiedades de la igualdad. Aun así, la estudiante intentó aplicar dicho procedimiento cuando con duda (calificador que manifiesta a través del uso de los mitigadores “creo” y “quedaría”, ver 2.4) y apoyándose en propiedades que le son familiares (posiblemente provenientes de la aritmética, ver B2c), ella acudió de forma implícita (ver W2c, *S3*) a la propiedad conmutativa de la suma (en 2.4) para obtener una expresión equivalente a 2.3. Como ya se dijo, sobre el procedimiento de Jesse, Mariana expresó explícitamente su incomprensión e incertidumbre, las que atribuyó (en 2.2) a lo “enredado” que resulta esa forma de obtener el valor de la incógnita, apelando así a una consideración extra-matemática del proceder de su compañero, en particular, a razones prácticas (ver D2a, W2a, B2a). En este proceso, la estudiante no se percató de las razones matemáticas de su incomprensión (como tampoco cayó en la cuenta de que, con un sesgo de exploración —ver D2b, W2b, *S2*—, ella modificó, en 2.3, la expresión que usó Jesse en 1.4). Ya en 2.5, ella acudió a la trasposición de términos (cuando enunció la regla ‘despejamos 3x’ y con base en ella pasó al otro lado de la ecuación el resultado -0); con esto, recuperó su confianza que dejó ver cuando con seguridad y firmeza (que manifestó por el uso del modo indicativo de los verbos) remató su participación con la afirmación “lo demás sale sobrando” (en 2.6). En suma, para abandonar su estado de duda la estudiante redimió el método de la trasposición de términos, por la ruta de las razones extra-matemáticas (ver D2d, W2d, B2d), por ser para ella el procedimiento “que no enreda”. Pero en esa trayectoria, ella pasó por alto el hecho de que dejó de obtener un valor para la literal (ver C2, *S1*), mostrando un conocimiento menor que el promedio (S4) porque sus demás compañeros, incluso ella misma, suelen centrar sus esfuerzos en obtener un valor para la literal aunque fuese incorrecto.

2.7 2.8	De acuerdo a mi opinión yo creo que la ecuación sería. El río Amazonas tiene una longitud del doble de la del río Bravo más 332 km. Si la suma de la longitud de los dos ríos es de 9 434 Km., ¿cuál es la longitud de cada río? Y=2x+332	**Argumento 3** D3 → C3 D3: a: Enunciado textual del problema (correcto y explícito) C3: y=2x+332 (correcto) W3 a: Relaciones entre los datos del problema (correcto e implícito) y b: Dejar de interpretar las literales que se usan para plantear la ecuación B3 a: Razones matemáticas (para obtener correctamente la ecuación) y b: Familiaridad (para traducir literalmente el enunciado del problema al lenguaje algebraico)
2.9	Y comenzamos 2x+332=9434	**Argumento 4** D4 → C4 D4: a: y=2x+332; b: y=9434 (incorrecto e implícito) C4: 2x+332=9434 (incorrecto) W4 b: Sustitución (ad-hoc, incorrecto e implícito); c: malinterpretación de la segunda relación entre los datos del problema B4 b: Esquema operatorio (para introducir una expresión sin sustento) y c: Familiaridad (para obtener una ecuación cuya forma es conocida)
2.10 2.11 2.12	esto a su vez es igual a 2x=9102 se despeja por completo x y nos queda x=9102/2=4551 Deduciendo que y=4551	**Argumento 5** D5 → C5 D5: a: 2x+322=9434; b: 2x=9102; c: x=9102/2=4551 (incorrecto y explícito) C5: y=4551 (incorrecto) W5 b y c: Trasposición de términos (incorrecto y explícito); d: Ignora contradicción entre C5 y D4b B5 b y c: Razones prácticas (para usar la trasposición porque es más fácil); Esquema operatorio (para usar la trasposición sin sustento matemático) y Familiaridad (para memorizarla)

Figura 2. Análisis de la segunda parte de la primera participación de Mariana usando el Modelo de Toulmin

En los argumentos 3, 4 y 5, Mariana optó por proponer una solución propia. En el argumento 3 la estudiante comenzó por plantear, con duda (que muestra mediante el uso de los mitigadores “creo” y “sería” en 2.7), una de las ecuaciones que resuelven el problema (en 2.8), apelando a su enunciado textual. En este caso, la estudiante dejó de explicitar las razones de su vacilación, pero mostró sus dificultades algebraicas cuando dejó implícita la interpretación de las literales y la relación entre los datos (ver W3a y W3b, *S3*). En este proceso, ella apeló a la activación predominante de esquemas basados en la familiaridad, por sobre la activación de esquemas matemáticos (ver B3b). Pese a esas dificultades, Mariana comenzó a recuperar su certeza en el argumento 4 cuando obtuvo una ecuación lineal con una incógnita (en 2.9, certeza que se deja ver porque la estudiante volvió a utilizar el modo indicativo del verbo “comenzar”). Esa ecuación resultó del intento por considerar la otra condición del problema, lo cual Mariana concretó mediante la sustitución de la literal “y” (de C3) por la suma de la longitud de los ríos (9434); esto, por cierto, lo hizo sin ninguna explicación (que revela razones operatorias, ver B4b) pero muy probablemente de manera semejante a lo que había hecho antes en problemas similares a lo largo de su labor como asesora (apelando así a la familiaridad, ver B4c). Así, la estudiante comenzó otra vez a recuperar su certeza por el camino de las razones extra-matemáticas y asociada a una profunda incomprensión; ésta se hace visible porque, como ya se ha dicho, con el propósito de obtener una ecuación lineal con una incógnita, la estudiante, con un sesgo de exploración (ver W4b, *S2*), malinterpretó los datos del problema (ver W4c, *S1*) e ignoró las relaciones y condiciones que ahí se establecen, dando lugar a una ecuación incorrecta (en C4, *S1*).

Una vez que Mariana obtuvo la ecuación buscada (en 2.9, sin ser consciente de que fuese incorrecta, *S1*), en el argumento 5 recurrió a la trasposición de términos (por las razones prácticas en las que basa su razonamiento, ver W2a, B5b y c), en algunos casos anunciando el método (2.11) y en otros sólo aplicándolo (en 2.10) sin reparar en que lo hizo de forma incorrecta (*S1*); de ello obtuvo un resultado numérico (en C5), también incorrecto y contradictorio con resultados previos (a D4b). Y es que pareciera que lo que más le importaba a Mariana en ese trayecto no era tanto la trasposición de términos por sí misma, sino el hecho de que no "enreda" a los alumnos (ver W5b y c, B5b y c, *S2*). En este proceso ella recuperó su certeza (que manifestó al usar el modo indicativo de los verbos sobre todas las proposiciones de ese argumento: es, despeja, queda; ver 2.10-2.11), pero nuevamente lo consiguió mediante razones extra-matemáticas, dejándose de percatar de su propia incomprensión.

De todo lo anterior se desprende que a lo largo de su resolución Mariana tendió a soportar sus procedimientos en razones extra-matemáticas, a partir de las cuales en cada caso ella recuperó su certeza (ver B2d, B4b, B4c, B5b, B5c), y que esto no sólo la llevó sistemáticamente a conclusiones erróneas (ver C2, C4, C5) sino a la imposibilidad de incrementar sus conocimientos. Esta interpretación se constata con la respuesta que Mariana da a propósito del cuestionamiento y solicitud de rectificación por parte del tutor la cual se describe y analiza en la Figura 3.

Sé que tal vez mis planteamientos son muy cortos y algunos sienten que me falta explicar un poco más pero a mí me funcionan ya que de esta manera hago que los educandos no se enreden y desesperen debido a que el procedimiento los enreda.	**Argumento 6** D6 $\rightarrow$ C6 a: Mis planteamientos son muy cortos; b: Los educandos no se enredan y desesperan → Mis planteamientos funcionan W6 Si los planteamientos son muy cortos y los educandos no se enredan y desesperan entonces funcionan B6 Razones prácticas

Figura 3. Análisis de la segunda participación de Mariana usando el Modelo de Toulmin

En esta participación, Mariana defendió su procedimiento con seguridad y de manera más contundente y definitiva (lo que se deja ver por el uso del modo indicativo de los verbos en todas las proposiciones de su argumento: enredan, funcionan) apelando nuevamente y de forma explícita a razones prácticas (ver W6, B6). Esto sólo confirma lo que antes se ha reiterado: que la confianza de Mariana en sus procedimientos se soporta en consideraciones extra-matemáticas, lo que parece llevarla a desconocer su propia incomprensión y a no considerar siempre como prioritario el contenido matemático de esos procedimientos.

En lo que sigue, se muestra y analiza un caso de otra asesora, llamada Jeymi, quien muestra un comportamiento distinto al de Mariana.

El caso de Jeymi: La recuperación de la certeza por razones matemáticas

En el episodio que se expone en este apartado, el tutor solicitó a los estudiantes que resolvieran ecuaciones en un interactivo en el que ellos debían usar las propiedades de la igualdad. La respuesta textual de una estudiante llamada Jeymi aparece en la Figura 4, que se expone en lo que sigue.

7.1

Lado izquierdo de la balanza (Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
2x-8	=	5x-2

Para “dejar sola a la x” realizo lo siguiente:

7.2 1.-Sumo a ambos miembros. La ecuación nos queda:

2x	=	5x

7.3 2.-Sumo a los dos miembros 2.La ecuación nos queda:

-6	=	3x

7.4 3.-Divido a los dos miembros entre 3.La ecuación nos queda:

-2	=	x

Argumento 15

D15
a: 2x-8=5x-2; b: Sumo a ambos miembros: 2x=5x.; c: Sumo a los dos miembros 2: -6=3x; d: Divido a los dos miembros entre 3
(incorrecto y explícito)

C15
-2=x
(correcto)

W15
Combinación de la trasposición de términos y propiedades de la igualdad
(incorrecto e implícito)

B15
b: y c:Razones extra-matemáticas (esquemas operatorios y familiaridad) y d:Razones matemáticas (uso de propiedades de la igualdad)

Figura 4. Análisis de la primera participación de Jeymi usando el Modelo de Toulmin

En C15 del Argumento 15 Jeymi obtuvo el valor que hace de D15a un enunciado verdadero. Para obtener ese valor, parece que la estudiante intentó conciliar la trasposición de términos (que ya conocía, y que muestra la activación de esquemas basados en la familiaridad y operatorios, ver B15b y B15c) con las propiedades de la igualdad (novedosas para ella). Pero en el proceso, ella mostró una profunda incomprensión de dichas propiedades de la igualdad al enunciar reglas incorrectas (en D15b y D15c) (*S1*) relacionadas con esas propiedades que parece haberlas construido *ad-hoc* (*S2*) con el fin de obtener el resultado, el cual muy probablemente consiguió sólo mediante la trasposición de términos (de otra forma es difícil explicar el valor correcto de la literal) que además dejó implícita (*S3*). En torno a esta respuesta, la estudiante experimentó un cierto grado de seguridad (que exhibió al usar el modo indicativo de los verbos: sumo, divido o queda, ver 7.2, 7.3 y 7.4) asociado a los esquemas operatorios y basados en la familiaridad que ella activó, pero la seguridad sólo fue relativa porque estuvo también ligada a cierta incomprensión de la que posiblemente ella tuvo cierta conciencia. En lo que sigue se revela cómo la estudiante trató de asirse a razones matemáticas cuando su participación fue cuestionada.

Como respuesta a la participación de Jeymi uno de sus compañeros le hizo ver que sus procedimientos no eran claros y le solicitó que los volviera a explicar. A la petición, la estudiante contestó reformulando su resolución, la cual aparece en la Figura 5.

8.1	Hola, hola creo que me confundí pero aquí les dejo paso a paso mi respuesta corregida 2x - 8 = 5x - 2	**Argumento 16** D16 → C16 a:2x-8=5x-2; b: Hay que pasar el -8 a la derecha y para pasarlo se suma a +8 en ambos miembros: 2x=5x+6; c: Pasamos al 5x al lado izquierdo y para hacerlo tenemos que cambiar el signo: -5x+2x=6; d: Para dejar sola la x tenemos que dividir ambos términos entre -3: -3x/-3=6/-3 (correcto y explícito) C16: -2=x (correcto) W16 b: uso de las propiedades de la igualdad para sustentar la trasposición de términos; c:trasposición de términos; d: propiedades de la igualdad. (correcto y explícito) B16 b y d:Razones matemáticas (uso de las propiedades de la igualdad) y c:Familiaridad (uso de la trasposición de términos)
8.2	primero hay que sumar ambos términos, hay que pasar el -8 al término de la derecha y para pasarlo se suma +8 en ambos miembros y se suman ambos miembros	
8.3	y nos quedaría así 2x= 5x +6	
8.4	ahora hay que poner las x en un sola lado y pasamos al 5x al lado de la izquierda y para hacerlo tenemos que cambiarlo con signo cambiando	
8.5	y nos quedaría así -5x + 2x = 6	
8.6	Y si sumamos los términos quedaría -3x=6	
8.7	Ahora para dejar sola la x tenemos que dividir ambos términos entre -3	
8.8	y nos quedaría así -3x/-3=6/-3	
8.9	y nos quedaría x=-2. Espero y estar bien.	

Figura 5. Análisis de la segunda participación de Jeymi usando el Modelo de Toulmin

En 8.1 Jeymi explicitó la duda a la que se enfrentó (mediante la expresión mitigadora "creo que me confundí") cuando se percató de que la salida al conflicto que propuso en su primera participación (de conciliar las propiedades de la igualdad con la trasposición de términos) era incorrecta, y en seguida mostró una nueva resolución. Pero a diferencia de la anterior, en esta nueva propuesta Jeymi encontró en las propiedades de la igualdad razones matemáticas para sustentar la trasposición de términos y conciliar ambos métodos (ver D16b, W16b, B16b). Asociada a esta salida del conflicto la estudiante aumentó su certeza (la que se manifiesta porque además de usar el modo indicativo de los verbos como "suma", ella usó el enfatizador "hay que") que luego también reveló en torno a las reglas pertenecientes a la trasposición de términos (en 8.4) y a las propiedades de la igualdad (en 8.7). En suma y a diferencia del caso de Mariana, Jeymi transitó de un estado de duda a uno de certeza acompañada y orientada por razones matemáticas. Esto derivó en que la estudiante, también a diferencia del caso anterior, expresara una profunda comprensión (que se deja ver al explicitar garantías generales y correctas; ver D16, W16, *S1, S2 y S3*) para obtener el resultado que hace de D16a un enunciado verdadero (ver C16, *S1*). Ella también exhibió su comprensión porque fue la única estudiante en aplicar correctamente tanto la trasposición de términos como las propiedades de la igualdad (*S4*). De todo lo anterior se puede concluir que Jeymi sostuvo, e incluso aumentó su certeza en torno a las reglas que forman parte de las propiedades de la igualdad con base en razones matemáticas (ver D16b, W16b, B16b) y que este proceso la condujo a incrementar también sus niveles de comprensión.

Pero si bien Jeymi en este pasaje experimentó un estado de certeza en torno a las reglas, ella vivenció un estado de duda en torno a su aplicación (que se desprende del uso del morfema verbal –ía en 8.3, 8.5, 8.6, 8.8, 8.9). El carácter novedoso del procedimiento en el que Jeymi enunció reglas pertenecientes tanto a la trasposición de términos como a las propiedades de la igualdad para resolver una ecuación puede explicar esa duda que la estudiante experimentó al aplicarlas.

En una semana posterior el tutor planteó una situación problemática que puede modelarse con una ecuación lineal. En la Figura 6 se encuentra el fragmento que contiene la resolución propuesta por Jeymi.

9.1	x+(x+7)=61	**Argumento 17** D17 a:x+(x+7)=61 b: Sumar las x: 2x+7=61; c:Pasar el 7 a la derecha y hacer operaciones: 2x=54 ; d: Para dejar sola la x hay que dividir entre 2 ambos miembros (correcto y explícito) C17 Queda x=27 (correcto) W17 c: Trasposición de términos y d: Propiedades de la igualdad (correcto y explícito) B17 c y d: Razones matemáticas (propiedades de la igualdad y trasposición de términos sustentada en las propiedades de la igualdad)
9.2	Sumamos las x,	
9.3	nos queda 2x+7=61;	
9.4	pasemos el 7 a la derecha; se hacen cálculos	
9.5	y queda 2x=54	
9.6	para dejar sola la x hay que dividir entre 2…	
9.7	y queda x=27.	

Figura 6. Análisis de la tercera participación de Jeymi usando el Modelo de Toulmin

Con el propósito de resolver la ecuación que Jeymi planteó para dar solución al problema (en 9.1), ella acudió a reglas pertenecientes tanto a la trasposición de términos (ver 9.4) como a las propiedades de la igualdad (ver 9.6); y lo hizo con seguridad (que mostró al usar el modo indicativo de los verbos y el enfatizador “hay que”). A diferencia de su intervención anterior, esta seguridad también la experimentó al aplicar esas reglas (que se manifiesta por el uso del modo indicativo del verbo “quedar”; ver 9.5 y 9.7). Lo anterior indica que la sustentación de la trasposición de términos vía las propiedades de la igualdad, y la correspondiente comprensión y certeza que ella mostró asociada a las razones por ella esgrimidas al sustentar esa trasposición (ver D16b, W16b, B16b), muy posiblemente coadyuvaron para que en esta tercera participación Jeymi pasara de la duda a la certeza y llevara a cabo una transferencia efectiva, del contexto de la balanza a la resolución de problemas, tanto de las propiedades de la igualdad como de la trasposición de términos no sólo al enunciar las reglas sino también al aplicarlas (ver D17c y D17d, W17c y W17d, B17c y B17d).

CONCLUSIONES

En la comunicación se muestra cómo la recuperación de la certeza en torno a proposiciones de contenido matemático puede estar asociada tanto a razones extra-matemáticas como a razones matemáticas. La recuperación de la certeza por el camino de las razones extra-matemáticas derivó en el caso de Mariana en una profunda incomprensión, mientras que el abandono de la duda siguiendo una trayectoria basada en razones matemáticas condujo a Jeymi a un aumento en su comprensión. Lo anterior revela que la duda no siempre genera condiciones suficientes para el conocimiento. Parece que el aprendizaje está asociado (entre otras cosas) a la coyuntura entre la duda y la recuperación de la certeza vía razones matemáticas. Es importante que esto se tome en cuenta tanto en la enseñanza de las matemáticas como en la investigación.

Referencias

Beke, R. (2005). El metadiscurso interpersonal en artículos de investigación. *Revista signos*, *38*(57), 7-18.

Berteley, M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*. México, D. F.: Paidós.

Corbin, J. y Strauss, A. (2008). *Basics of Qualitative Research* (3ª ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. En N. K. Denzin, y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). Thousand Oaks, CA: Sage.

Gilbert, D. T. (1991). How mental systems believe. *American psychologist*, *46*(2), 107-119.

Hyland, K. (1998). Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics, 30,* 437-455.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 229-240.

Martínez, B. (2014). *¿Certeza implica comprensión? Un estudio etnográfico con adultos en el contexto de un foro virtual*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D. F.

Martínez, B. y Rigo, M. (2014). ¿Certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (Pp. 445-454). Salamanca: SEIEM.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S. A.

Platón (1981). Menón, o de la Virtud. En F. Samaranch (Trad.), *Platón, Obras Completas*. Madrid: Aguilar.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71-91.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Toulmin, S. E., Rieke, R.D. y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York: Macmillan.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Ediciones Paidós América.