REPRESENTACIONES Y FENÓMENOS QUE ORGANIZAN LA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA. UN ESTUDIO EXPERIMENTAL CON MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA BÁSICA

Representations and phenomena that organize the equivalence relation. An experimental study with pre-service teachers in the context of basic geometry

González-Ruiz, I.[a] y Molina, M.[b]

[a]Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria
[b]Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Resumen

Habida cuenta de su amplitud, a la hora de explorar el constructo pensamiento relacional, nos centramos en la noción de relación de equivalencia. Caracterizamos los fenómenos y representaciones a los que recurren maestros en formación inicial para determinar el carácter, o no, de relación de equivalencia de las relaciones de paralelismo, perpendicularidad y ser concéntricas. El estudio realizado advierte de la preferencia por simultanear, coherentemente, representaciones de tipo verbal y gráfico, resultando las últimas irrelevantes en la construcción de sus argumentos. Asimismo, además de considerar fenómenos que guardan relación directa con las relaciones propuestas, recurren a otros, propios de la geometría básica, vinculados a las representaciones gráficas que proponen al elaborar sus argumentos.

Palabras clave: *Formación de maestros, paralelismo, pensamiento relacional, perpendicularidad, relación de equivalencia, ser concéntricas*

Abstract

In this paper we study the aspects that organize pre-service teachers' relational thinking at working with basic geometry topics. We explore their relational thinking through the idea of equivalence relation by characterizing the phenomena and representations used to determine if the binary relations, parallelism, perpendicularity and to be concentric are, or not, equivalence relations. The analysis reveals the preference to combine verbal and graphical representations, although the last ones are irrelevant in order to construct the arguments that propose. Besides appealing to phenomena directly linked to the relations considered, pre-service primary school teachers also resort to using phenomena related to basic geometry ideas, specially connected to the graphic representations that propose when arguing.

Keywords: *Teacher education, parallelism, relational thinking, perpendicularity, equivalence relation, to be concentric*

INTRODUCCIÓN

En la literatura sobre fenómenos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra se manifiestan distintas perspectivas o formas de concebir el álgebra escolar, entre ellas el estudio de patrones y generalización de la aritmética y el estudio de relaciones funcionales (o estudio del cambio) (Drijvers, Goddijn y Kindt, 2011; Kaput, Carraher y Blanton, 2008; Molina, 2012). En ambas concepciones las relaciones son foco de atención del pensamiento algebraico, dando lugar a

González-Ruiz, I. y Molina, M. (2015). Representaciones y fenómenos que organizan la relación de equivalencia. Un estudio experimental con maestros en formación inicial en el contexto de la geometría básica. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 309-316). Alicante: SEIEM.

la distinción del constructo pensamiento relacional, entendido ampliamente como el pensamiento sobre relaciones, o conceptos basados en relaciones.

Si bien los estudios previos que han atendido a este tipo de pensamiento (Mason, 2006) se han centrado en contextos aritméticos o algebraicos, la ubiquidad de las relaciones en matemáticas hace que este constructo sea también aplicable a otros contextos, entre ellos el geométrico.

En este trabajo focalizamos nuestro interés en la figura del profesor de primaria, encargado de la formación matemática de los estudiantes en las primeras etapas, y nos preguntamos por las representaciones y fenómenos que organizan su pensamiento relacional, interesándonos, en particular, por su caracterización. Cabe decir que sendos elementos resultan fundamentales en la configuración del significado de los conceptos matemáticos escolares (Gómez, 2007; Rico, 2012).

El constructo pensamiento relacional es ciertamente amplio, por ello, para llevar a cabo dicha caracterización nos centramos en el trabajo con relaciones binarias y, en particular, en el estudio de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En este sentido, se trata de caracterizar las representaciones y fenómenos en base a los cuales, los futuros maestros justifican el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria. Para proceder con nuestra labor, consideramos relaciones planteadas en el ámbito de la geometría escolar. En base a estos planteamientos formulamos los siguientes objetivos de investigación.

O.1. Caracterizar el tipo de sistemas de representación en torno a los cuales los futuros maestros justifican el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria planteada en un contexto geométrico.

O.2. Caracterizar los fenómenos en torno a los cuales los futuros maestros justifican el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria planteada en un contexto geométrico.

Entendemos que nuestra investigación resulta de interés por su carácter complementario con respecto a otras y por su vocación de relacionar el pensamiento relacional con las ideas geométricas. La mayor parte de las investigaciones previas que estudian el pensamiento relacional versan sobre la relación de igualdad y requieren de la aplicación de propiedades de las operaciones aritméticas. Este es el caso de los trabajos de Carpenter, Frankle y Levi (2003), Carpenter, Levi, Loef y Koehler (2005), Empson, Levi y Carpenter (2001), Molina (2006, 2007), Molina y Castro (2005) y Stephens (2006). En todas ellas se atiende a la relación de igualdad como relación de equivalencia; no siendo ésta la relación que considerados en nuestra investigación. Además, difieren de nuestra propuesta en que sus sujetos de investigación son escolares.

MARCO TEÓRICO

Articulamos el marco teórico en torno a varias ideas clave: la noción de pensamiento relacional y relación de equivalencia, los sistemas de representación y la fenomenología asociada a los conceptos matemáticos.

Noción de pensamiento relacional y relación de equivalencia

El pensamiento relacional es la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo (Molina, 2006, p. 65). El hecho de adoptar esta definición nos advierte que cuando un sujeto piensa relacionalmente, o usa pensamiento relacional, no sólo observa o detecta determinadas relaciones existentes entre los objetos matemáticos que configuran la noción de relación de equivalencia, sino que estas relaciones pasan a ser consideradas objeto de pensamiento para lograr un objetivo determinado. Dicho objetivo puede ser resolver una tarea planteada, adoptar una manera de proceder o profundizar más en los conceptos involucrados. En suma, las relaciones son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del sujeto.

En nuestro trabajo la relación foco de estudio es la relación de equivalencia. Si bien, no tiene presencia explícita en los currículos escolares ni en la formación matemática actual de maestros, es un concepto matemático clave e implícito en las matemáticas escolares. Por ejemplo, la comprensión de la relación de igualdad entre cualesquiera objetos matemáticos requiere de un conocimiento de las propiedades que caracterizan las relaciones de equivalencia.

Sistemas de representación

Entendemos por representación cualquier modo de hacer presente un objeto. Castro y Castro (1997) sostienen que todo tipo de conocimiento, conceptual o procedimental, se hace presente mediante distintos tipos de símbolos gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación.

Arcavi (2003) sostiene que las representaciones juegan un papel crucial a la hora de visualizar un concepto, destacando su interés en las primeras etapas escolares. Las representaciones permiten acceder e interactuar con el conocimiento matemático (Rico, 2012), siendo la comprensión de un concepto matemático más completa cuanto mayor sea el conocimiento que dispongamos de sus sistemas de representación, de la equivalencia entre ellos y de las propiedades del concepto que cada representación explicita (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

Fenomenología

El análisis fenomenológico tiene como principal característica profundizar en el carácter funcional del conocimiento matemático. La idea central de la fenomenología subyace en que los fenómenos son la fuente del pensamiento matemático. Puede decirse que las estructuras matemáticas son abstracciones y el producto de la organización de fenómenos de diversa procedencia. En este sentido Rico et al. (2008) sostienen que la ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han construido por grupos humanos y se han desarrollado a lo largo de la historia, como herramientas para entender y organizar el mundo de los fenómenos y poder trabajar sobre ellos.

Bajo estas ideas, el significado de los conceptos matemáticos toma sentido mostrando su conexión con el mundo real, es decir, con los fenómenos en los que se implica el conocimiento matemático; poniendo el foco en el uso y aplicación de mismos, así como en los medios y en los modos en que se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO Y DE LA MUESTRA

La investigación realizada es de naturaleza exploratoria y descriptiva ya que se dispone de escasa información procedente de estudios previos en conexión con la noción de relación de equivalencia y su trabajo en la formación inicial de maestros. Se trata de una investigación transversal y es de carácter cualitativo, de acuerdo con los objetivos planteados, ya que se realiza un análisis detallado de las manifestaciones los sujetos.

Se consideró una muestra de 19 estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada, matriculados en la asignatura *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria*, de segundo año, en el curso académico 2013-2014. La selección de los mismos fue intencional, atendiendo a la disponibilidad y la facilidad de acceso a ellos para llevar a cabo esta investigación. Todos han cursado la asignatura *Bases Matemáticas Para la Educación Primaria* de primer curso del Grado en Educación Primaria, dedicada al estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos en los bloques de matemáticas de Educación Primaria, sus formas de representación y modelización, fenomenología y aspectos históricos, utilizando materiales y recursos (Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2014). En relación a la geometría se destaca lo siguiente en la guía docente:

> *Elementos fundamentales, del plano y del espacio: relaciones y propiedades. Figuras en el plano (polígonos y círculos) y cuerpos en el espacio (poliedros y cuerpos de revolución): elementos y propiedades.*

Diseño de la recogida de datos

Nuestra propuesta se fundamenta en la elaboración de una prueba escrita individual, a modo de cuestionario, mediante el cual se busca caracterizar el tipo de representaciones y fenómenos, de los que los futuros maestros se sirven parar determinar el carácter, o no, de relación de equivalencia de una relación binaria planteada en un contexto geométrico escolar. Se consideran las relaciones de *paralelismo* (Tabla 1), *perpendicularidad* (Tabla 2) y ser *concéntrico* (Tabla 3). Para ello, se plantean tres ítems que versan, respectivamente, sobre cada una de las relaciones anteriores. Cada ítem se compone de tres cuestiones relativas a las propiedades transitiva, reflexiva y simétrica (en este orden). Mientras que la primera y tercera son relaciones de equivalencia, la relación de perpendicularidad no lo es.

En todas las cuestiones se indica a los sujetos la posibilidad de acompañar sus explicaciones con el tipo de representación que precisen.

Tabla 1. Ítem 1: Estudio de la relación de paralelismo

Consideramos en un plano las rectas r, s y t que cumplen las siguientes propiedades. *La recta r es paralela a la recta s. La recta s es paralela a la recta t.*	
Cuestión 1	¿Qué relación existe entre la recta r y la recta t? Justifica tu respuesta.
Cuestión 2	Fijándonos únicamente en la recta r, ¿Es r paralela a sí misma? Justifica tu respuesta.
Cuestión 3	Teniendo en cuenta que la recta r es paralela a la recta s, ¿es la recta s paralela a la recta r? Justifica tu respuesta.

Tabla 2. Ítem 2: Estudio de la relación de perpendicularidad

Consideramos en un plano las rectas r, s y t que cumplen las siguientes propiedades. *La recta r es perpendicular a la recta s. La recta s es perpendicular a la recta t.*	
Cuestión 1	¿Qué relación existe entre la recta r y la recta t? Justifica tu respuesta.
Cuestión 2	Fijándonos únicamente en la recta r, ¿es r perpendicular a sí misma? Justifica tu respuesta.
Cuestión 3	Teniendo en cuenta que la recta r es perpendicular a la recta s, ¿es la recta s perpendicular a la recta r? Justifica tu respuesta.

Tabla 3. Ítem 3: Estudio de la relación de ser concéntricas

Se dice que dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro. Sean C_1, C_2 y C_3 tres circunferencias distintas del plano que cumplen las siguientes propiedades. *C_1 es concéntrica a C_2. C_2 es concéntrica a C_3.*	
Cuestión 1	¿Qué relación existe entre la circunferencia C_1 y la circunferencia C_3? Justifica tu respuesta.
Cuestión 2	Fijándonos únicamente en la circunferencia C_1, ¿Es la circunferencia C_1 concéntrica a sí misma? Justifica tu respuesta.
Cuestión 3	Teniendo en cuenta que la circunferencia C_1 es concéntrica a la circunferencia C_2, ¿Es la circunferencia C_2 concéntrica a la circunferencia C_1? Justifica tu respuesta.

ANALISIS Y RESULTADOS

Abordamos el análisis de los resultados obtenidos en el cuestionario tras describir las categorías de análisis utilizadas.

Categorías de análisis

Estructuramos en cuatro bloques las categorías utilizadas para el análisis de las respuestas de los estudiantes (Tabla 4). El Bloque Identificación aglutina el conjunto de categorías destinadas a distinguir el tipo de concepción que los sujetos manifiestan sobre las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. El Bloque Representaciones se compone de categorías que indican el tipo de representación empleada en las justificaciones. El Bloque Gráfica-Justificación acoge al conjunto de categorías que valoran el papel de las representaciones gráficas respeto de la verbal en las respuestas dadas por los futuros maestros. Por último, el Bloque Fenómenos se centra en caracterizar el tipo de fenómenos, contextos o situaciones de los que se valen para argumentan la veracidad, o no, de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Estos bloques, salvo el correspondiente a Representaciones, están compuestos por categorías excluyentes.

Tabla 4. Categorías de análisis

Categorías	Definición
	Bloque Identificación
Clara	Se manifiesta una concepción clara de la propiedad.
Condicionada	La veracidad de la propiedad se condiciona a algún fenómeno.
Confusa/Nula	Se manifiesta una concepción confusa o nula de la propiedad.
	Bloque Representaciones
Verbal	Se emplea la representación verbal.
Simbólica	Se emplea la representación simbólica.
Gráfica	Se emplea la representación gráfica.
	Bloque Gráfica-Justificación
Pertinente-Complementaria	Es complemento de la representación verbal.
Pertinente-Integradora	Es necesaria y articula a la representación verbal.
Confusa/Nula	No ayuda o es ajena a la representación verbal.
	Bloque Fenómenos
Convergente-coincidente	Uso de los mismos fenómenos planteados en el enunciado
Convergente-paralelo	Se abstrae la situación planteada reformulando otra con fenómenos distintos a los planteados. Se contribuye al buen desarrollo de los argumentos.
Divergente	Uso de fenómenos ajenos a los planteados. No se contribuye al buen desarrollo de los argumentos.

Resultados de la prueba escrita y discusión

Analizamos conjuntamente, para las relaciones de paralelismo, perpendicularidad y ser concéntricas, la identificación que los sujetos de investigación han realizado sobre las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva (Tabla 5).

Tabla 5. Detección de las propiedades en la relación de paralelismo, perpendicularidad y ser concéntricas

Propiedades	Identificación		
	Clara	Condicionada	Confusa/Nula
	Paralelismo		
Reflexiva	8	4	7
Simétrica	16	1	2
Transitiva	16	2	1
TOTAL	40	7	10
	Perpendicularidad		
Reflexiva	8	7	4
Simétrica	13	3	3
Transitiva	10		9
TOTAL	31	10	16
	Ser concéntricas		
Reflexiva	13		6
Simétrica	18		1
Transitiva	15		4
TOTAL	46	0	11

Las propiedades de la relación de paralelismo han sido mayoritariamente identificadas por los sujetos (40/57, Tabla 5). La propiedad reflexiva es la que cuenta con una menor frecuencia de detección (8/19) (Ej. Identificación confusa/nula: *"Una recta sola no puede ser paralela a sí misma. Para que exista paralelismo debe haber dos rectas, ya que no se pueden cortar paralelamente"*).

De igual modo, la mayoría de los sujetos identificó las propiedades que se verifican para la relación de perpendicularidad (31/57). De entre ellas, destaca que 7 de los 19 sujetos no llegan a identificar con claridad la propiedad reflexiva, frente a los 8 que sí lo hacen (Ej. Identificación correcta: "… para ser perpendicular tiene que cortarse en un solo punto formando cuatro ángulos de 90º y r coincide consigo misma en todos los puntos, no sólo en uno."). Mayor contraste se percibe en la propiedad transitiva, donde de los 19 sujetos 10 la identifican correctamente, frente a 9 que no (Tabla 5) (Ej. Identificación confusa/nula: "Sí, da igual el orden en cómo se digan, las dos son perpendiculares entre sí.")

De la relación ser concéntricas señalamos que las propiedades fueron identificadas por la mayoría de los sujetos (46/57, Tabla 5). De entre ellas, la propiedad reflexiva es la que cuenta con mayor frecuencia de error (Ej. Identificación condicionada: "Sí, porque tienen el mismo centro pero sería necesario que tuviesen el mismo radio."). Este hecho radica en que los sujetos organizan sus argumentos, como se ve en sus representaciones, en torno al fenómeno "tener radios distintos".

En resumen, la mayoría de los sujetos identifica correctamente las propiedades; los errores que manifiestan son fruto de concepciones erróneas o inadecuadas de las relaciones planteadas, o bien de asumir la veracidad de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva en todas ellas. Por ejemplo, varios sujetos identifican el comportamiento de las propiedades de la relación de perpendicularidad con las de paralelismo.

Respecto a las representaciones empleadas, la totalidad de los sujetos recurre a la representación verbal al elaborar sus justificaciones. Se observa también que, en general, simultanean las anteriores con representaciones gráficas (Tabla 6), siendo más frecuentes en la relación paralelismo y menos en la relación ser concéntricas. Es nula la presencia de la representación simbólica.

Tabla 6. Tipología de representaciones para cada relación

Relaciones	Representación		
	Verbal	Simbólica	Gráfica
Paralelismo	19		17
Perpendicularidad	19		15
Ser concéntricas	19		13

Cuando hacen uso de la representación gráfica, ésta suele tener una función complementaria a la verbal (Figura 1), siendo pertinente en tanto que no es ajena a la relación a la que atienden.

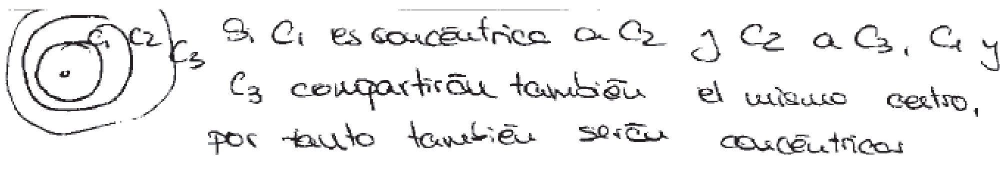

Figura 1. Representación pertinente-complementaria

Mayoritariamente condicionan el desarrollo de sus argumentos a las representaciones gráficas que proponen para cada una de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; al igual que los fenómenos a los que aluden (Figura 2).

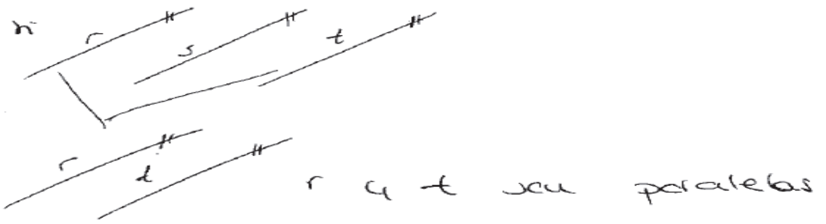

Figura 2. Representación pertinente-integradora

Tabla 7. Adecuación de la representación gráfica a la justificación propuesta

Representación gráfica-Justificación			
Relaciones	Pertinente		Confusa/Nula
	Complementaria	Integradora	
Paralelismo	13	2	2
Perpendicularidad	12		3
Ser concéntricas	11		2

En resumen, el tipo de representación mayoritaria en las justificaciones es la de tipo verbal; si bien, un amplio número de sujetos la combina con la representación gráfica. Destacamos el carácter pertinente, pero claramente complementario de las representaciones gráficas; son coherentes con la representación verbal pero no aportan más información. Se observa además que, en general, el tipo de fenómenos que aportan está íntimamente ligado a la representación gráfica que proponen. Más aún, la representación gráfica que aportan, que obedece a una situación concreta, vertebra su justificación; lo cual es significativo. Más allá de los fenómenos de tipo convergente-coincidente presentes en sus argumentos, cabe destacar los de tipo convergente-paralelo. En este sentido, notamos para la relación de paralelismo *ser iguales* (Ej. "Entonces se tiene que r y t son iguales."), *coincidir* (Ej. "Que las rectas coinciden."), *ser equidistantes* (Ej. "Hay la misma distancia de s a t.") y *no cortarse* (Ej. "Sólo puede ocurrir que las rectas no se cortan."); para la relación de perpendicularidad destacamos *cortarse* (Ej. "Las rectas r y t se cortan."), *formar 90º* (Ej. "Que forman entre sí 90º."), *ser paralelas* (Ej. "La única posibilidad es que r y t sean paralelas.") y *formar un ángulo recto* (Ej. "Se tiene que entre las dos rectas se forma un ángulo recto."). Por último, para la relación ser concéntricas proponen *coincidir* (Ej. "Las dos circunferencias tienen que coincidir entres sí.") y *tener el mismo centro* (Ej. "La relación entre las dos es que tienen el mismo centro, es decir, sus centros son iguales.").

CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos en la investigación así como de los objetivos planteados al inicio de la misma se concluye lo siguiente.

En relación al objetivo número uno, cabe destacar que el contexto geométrico se caracteriza por el dominio de representaciones gráficas que alternan con las de tipo verbal. Sobre esto último observamos que la mayoría de las representaciones que proponen son *pertinentes* de tipo *complementario*, ya que no aportan información extra a la conseguida por medio de la representación verbal; si bien, son coherentes con los planteamientos. Además parten de una representación de este tipo para vertebrar la representación verbal que proponen. En menor medida optan por las de tipo *pertinente integrador*.

En relación al segundo objetivo, en el contexto geométrico construyen los argumentos de sus justificaciones a partir de fenómenos convergentes de tipo coincidente. Sin embargo, en menor medida, también tienen presencia los fenómenos convergentes de tipo paralelo. En este sentido, destacan para la relación de paralelismo *ser iguales, coincidir, ser equidistantes* y *no cortarse*; para la relación de perpendicularidad recurren a fenómenos como *cortarse, formar 90º, ser paralelas* y *formar un ángulo recto*; por último, para la relación ser concéntricas proponen *coincidir* y *tener el mismo centro.* Entendemos que esta última tipología de fenómenos tiene su origen en las concepciones erróneas asociadas a las relaciones anteriormente citadas. Si bien, resulta significativo desde el punto de vista matemático, no desmerecer el vínculo que establecen entre las relaciones propuestas y la tipología de fenómenos que aluden.

A la luz de los resultados obtenidos, entendemos que nuestra investigación puede tomar vías de continuación complementarias, sobre las que trabajamos en la actualidad. En este sentido, destacamos la caracterización de las representaciones y fenómenos sobre los que los futuros maestros justifican el carácter de relación de equivalencia, o no, de una relación binaria planteada en otros contextos matemáticos, como el aritmético-algebraico, o más aún, en contextos generales, ajenos al anterior; de forma que sea posible vislumbrar la influencia que se confiere al contexto, sobre el que se plantean las distintas relaciones, en los argumentos propuestos.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Carpenter, T., Frankle, M. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T., Levi, L., Loef, M. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *ZDM-Mathematics Education, 37*(1), 21-55.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Departamento de Didáctica de la Matemática (2014). *Guía docente de la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria.* Granada: Universidad de Granada.

Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Eds.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam: Sense Publishers.

Empson, S., Levi, L. y Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Berlín: Springer-Verlag.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades.* Londres: Routlege.

Mason, J. (2006). *Role and use of mental imagery in teaching mathematics.* Seminario celebrado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y compresión del signo igual por alumnos de tercero de primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en Educación Primaria. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 53-69). La Laguna: SEIEM.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2057

Molina, M. y Castro, E. (2005). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* IX (pp. 205-213). Córdoba: SEIEM.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58,* 7-23.

Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278.