LA INFLUENCIA DEL ENUNCIADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE M.C.D. Y M.C.M. DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO

The influence of the statement on the solving of g.c.d. and l.c.m. problems by preservice elementary teachers

Martínez, S., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A.

Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

En esta comunicación se presentan resultados de una investigación con estudiantes para maestro sobre la resolución de problemas verbales ligados a los conceptos de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m). Los principales objetivos de la investigación eran evaluar la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas y analizar la influencia en el proceso de resolución de la presencia en el enunciado de palabras clave. La comunicación se centra en una dificultad que presentan los estudiantes a la hora de decidir entre el m.c.d. y el m.c.m. en la resolución de problemas verbales. En este sentido, resultados, tanto cuantitativos como cualitativos, apuntan a que el origen de la dificultad podría deberse a que los estudiantes no involucran las ideas de múltiplo y divisor en la resolución, sino que se guían por las palabras clave del enunciado para desencadenar el cálculo algorítmico del m.c.d. o del m.c.m.

Palabras clave: *Mínimo común múltiplo, máximo común divisor, formación inicial de profesores, problemas verbales, educación primaria*

Abstract

This paper presents results from a study with preservice elementary teachers on solving word problems related to the concepts of greatest common divisor (g.c.d.) and least common multiple (l.c.m.). The main objectives of the research were to evaluate the students' competence in the resolution of such problems and analyse the influence of the presence of key words in the problem statement on the process of resolution. The paper is focused on a difficulty which the students present when deciding between the g.c.d. and the l.c.m. in solving word problems. In this sense, both quantitative and qualitative results suggest that the origin of the difficulty might be that students do not involve notions of multiple and divider in the resolution but they are guided by the keywords of the statement to continue with the algorithmic calculation of the g.c.d. or the l.c.m.

Keywords: *Least common multiple, great common multiple, initial educational practice, word problems, primary school education*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas señalan la existencia de dificultades en la comprensión y aprendizaje de la divisibilidad en general y, de manera más concreta, en los conceptos de máximo común divisor (m.c.d) y mínimo común múltiplo (m.c.m.). En esta línea, Zazkis y Campbell (1996) realizaron un estudio en estudiantes para maestros (en adelante, EPM), centrado en el concepto de divisibilidad y su relación con la división, multiplicación, números primos y compuestos, factorización y reglas de la divisibilidad. Sus resultados señalaban que la instrucción recibida por los participantes no había facilitado la compresión de estos conceptos.

Martínez, S., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A. (2015). La influencia del enunciado en la resolución de problemas de m.c.d. y m.c.m. de estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 343-350). Alicante: SEIEM.

Además, el estudio atestiguó una tendencia entre los participantes a aplicar un razonamiento procedimental, incluso en situaciones donde los EPM evidenciaban comprensión conceptual.

Otras investigaciones subrayan la importancia en la compresión de la divisibilidad de aspectos como las representaciones decimal y factorial de los números (Zazkis y Campbell, 1996; Zazkis y Liljedahl, 2004) o las relaciones entre conceptos (Bodí, Valls y Llinares, 2007).

Dentro del estudio de la divisibilidad, existen dos conceptos particularmente dificiles de comprender y utilizar por parte de los alumnos: el m.c.d. y el m.c.m. Así, Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (en prensa) caracterizaron el conocimiento matemático sobre números y operaciones de EPM españoles a partir de los resultados del estudio internacional TEDS-M, acreditando un conocimiento matemático insuficiente de las propiedades del m.c.d. y m.c.m.

En esta misma línea y dentro de una investigación más amplia, Bodí (2006) estudió cómo estudiantes de secundaria resolvían problemas verbales que implicaban el uso del m.c.m. o del m.c.d. La realización de entrevistas clínicas le permitió observar que algunos de estos estudiantes actúan de forma mecánica cuando emplean el algoritmo de buscar en la descomposición factorial los factores no comunes y comunes de mayor exponente para el cálculo del m.cm. Así, aunque son capaces de usar el algoritmo adecuadamente para el cálculo del m.c.m., muestran desconocer el significado del número obtenido por este método.

Los resultados de Bodí (2006) respaldaban los señalados por Brown, Thomas y Tolias (2002), quienes habían estudiado la comprensión de la divisibilidad y, en particular, la idea de múltiplo común en un grupo de EPM. En dicho estudio también se observó que, a pesar de la facilidad con que los estudiantes aplicaban el algoritmo basado en la factorización en números primos para la obtención del m.c.m., pocos de ellos eran capaces de explicar el porqué este procedimiento daba lugar al m.c.m. e incluso, no eran capaces de reconocer la implicación de m.c.m. en problemas verbales si no se mencionaba explícitamente la expresión “mínimo común múltiplo” en el enunciado. Del mismo modo que sucede con el m.c.m., el conocimiento sobre el m.c.d. es limitado para los estudiantes en general y para los EPM en particular, lo que provoca graves dificultades en la creación y resolución de problemas de m.c.d. (Noblet, 2013).

Las investigaciones existentes apuntan a que los conocimientos sobre estos conceptos suelen estar basados en reglas que carecen de explicaciones intuitivas para los alumnos (Dias, 2005). Zazkis y Gadowsky (2001) consideran que esto es debido a que las prácticas docentes actuales se centran en el aprendizaje de los cálculos en lugar de la estructura y propiedades de los números.

MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS

Esta investigación se enmarca dentro de la línea de investigación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), el cual constituye una evolución del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). Dentro de este marco, esta comunicación se ubica en el subdominio del conocimiento de los temas (KOT) al centrarse en el conocimiento matemático de EPM. Se planteó una investigación con los objetivos: 1) analizar la competencia de EPM en la resolución algorítmica de problemas verbales en situaciones de divisibilidad que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m. y 2) evaluar la influencia de palabras clave del enunciado de un problema verbal que involucra los conceptos m.c.d. y m.c.m. en las resoluciones algorítmicas de EPM.

En esta comunicación se presentarán resultados preliminares de esta investigación, prestando atención a un conjunto de actuaciones en las que EPM acreditaron dificultades para resolver un tipo de problemas verbales determinado. En particular, estos EPM denotaron una incapacidad para elegir adecuadamente si usar el m.c.m. o el m.c.d. durante la resolución algorítmica de un problema verbal. Los planteamientos de los EPM señalaron que éstos, en vez de apoyarse en las nociones de múltiplo y divisor, se veían influenciados por términos claves del enunciado a la hora de determinar si la solución del problema vendría dada por el m.c.m. o por el m.c.d.

METODOLOGÍA

Para abordar los objetivos propuestos, se diseñó una investigación con dos etapas, una cuantitativa y otra cualitativa. En el estudio cuantitativo participaron 129 EPM de Educación Primaria. Todos los participantes habían cursado ya la asignatura relacionada con números y su didáctica en años anteriores. De este modo, es plausible interpretar que las cogniciones reflejadas durante la investigación, podrían ser las que presentarían al inicio de su ejercicio profesional como docentes.

En esta fase de la investigación los participantes debían resolver una prueba escrita compuesta por cuatro problemas verbales. Estos problemas podrían catalogarse como problemas típicos de m.c.d. y m.c.m. pues, de hecho, están inspirados en problemas presentes en unidades de libros de texto donde se explican los conceptos de m.c.d. y m.c.m. Con antelación a la realización de la prueba escrita, se recordó brevemente los algoritmos de cálculo del m.c.d. y del m.c.m. Aunque este hecho pueda condicionar la toma de decisiones e inducir a la utilización de los algoritmos en la resolución, se encuentra alineado con el propósito de la investigación de estudiar la toma de decisiones de los EPM en resoluciones algorítmicas. Dicha explicación se realizó en una situación totalmente descontextualizada, no ligada a problema verbal alguno, en la que se presentaban tres números naturales y se calculaban su m.c.d. y su m.c.m. a partir de la descomposición de los números en factores primos. Esta explicación pretendía que, durante la resolución de la prueba escrita, las actuaciones de los estudiantes no estuvieran influenciadas por la dificultad de calcular el m.c.d. o el m.c.m. o que cálculos erróneos del m.c.d. o del m.c.m. pudieran hacer que el estudiante modificara sus planteamientos al no dar sentido a la solución en el contexto del problema. Tras esta explicación, se entregaba la prueba escrita a los estudiantes y se les concedía un tiempo de 40 minutos para su resolución. Para evitar que los problemas fueran resueltos en un orden fijo por todos los participantes, se emplearon diferentes versiones de la misma prueba escrita, las cuales sólo diferían en el orden de aparición de los problemas.

Los cuatro problemas se caracterizan por ser problemas verbales en los que hay dos cantidades conocidas y la solución es el m.c.d. o el m.c.m. de los dos únicos datos dados en el enunciado. En concreto, dos problemas tenían como solución el m.c.d. y otros dos como solución el m.cm. A su vez, cada pareja de problemas (de m.c.d. o de m.c.m.) presentaba entre sí la diferencia de contener en su enunciado diferentes palabras clave: *máximo* o *mínimo*. Así, el instrumento empleado en el estudio cuantitativo combina dos factores: 1) problemas cuya solución es el m.c.d. o el m.c.m. y 2) problemas en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo* o la palabra clave *mínimo*. De la combinación de estos dos factores se obtienen los cuatro problemas empleados en la prueba escrita. Por una cuestión de economía usaremos la siguiente notación a la hora de referirnos a los problemas: 1) Problema *divmax* (problema con solución el m.c.d. de los datos del problema y en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo*); 2) Problema *divmin* (solución el m.c.d. y palabra *mínimo*); 3) Problema *mulmax* (solución el m.c.m. y palabra *máximo*); y 4) Problema *mulmin* (solución el m.c.m. y palabra *mínimo*). La Figura 1 muestra los enunciados de los problemas.

El análisis de las producciones de los estudiantes en el estudio cuantitativo debía permitir, además de dar respuesta parcialmente a los objetivos de la investigación, la selección de participantes para la siguiente etapa de la investigación: un estudio cualitativo. Esta fase de la investigación consistió en un estudio de casos, en el que se grabó a parejas de estudiantes resolviendo problemas verbales como los empleados en la prueba escrita. De hecho, los problemas empleados en el estudio de casos eran estructuralmente equivalentes a los empleados en la prueba escrita. A partir de las producciones en lápiz y papel, se pretendía identificar patrones o tendencias de actuación a la hora de resolver los problemas y conformar parejas en que la que ambos miembros ofrecieran líneas de actuación similares. Así, el estudio de casos podría ofrecer información sobre los orígenes de las dificultades o tendencias de los estudiantes durante la resolución individual en lápiz y papel.

Problema Las cuerdas (divmax)

Dos cuerdas, de 18 cm y 24 cm respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales. Calcula el tamaño máximo de estos trozos.

Problema Los cables (divmin)

Se tienen dos cables, uno de 42 metros y otro de 35. Si se quieren cortar en el mínimo número de trozos iguales, ¿Cuál será la longitud de los trozos?

Problema Felipe y Alberto (mulmax)

Felipe y Alberto estudian en la misma universidad y coinciden de vez en cuando en algunas clases, prácticas, etc. Además, pase lo que pase, Felipe va a la cafetería cada 18 días y Alberto cada 15. Si hoy han coincido en la cafetería, ¿cuánto tardarán como máximo en volver a verse?

Problema El faro (mulmin)

Un faro se enciende cada 12 segundos y otro cada 18 segundos. Si se acaban de encender a la vez en este momento, ¿cuál es el mínimo tiempo posible que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir.

Figura 1. Enunciados de los problemas de la prueba escrita

RESULTADOS

Resultados desde el estudio cuantitativo

La Tabla 1 presenta los resultados tras la codificación de las respuestas de los estudiantes en la prueba escrita. Se muestran los resultados desglosados para cada uno de los cuatro problemas. A la hora de codificar las respuestas se han considerado tres categorías diferentes: *m.c.d*, *m.c.m* y *Otros*. La categoría *m.c.d* da cuenta de todas aquellas resoluciones en las que es evidente que el resolutor ha intentado el cálculo del m.c.d., ya sea algorítmicamente o por otro procedimiento (p. ej. mediante el uso de representaciones auxiliares). La situación es totalmente análoga para la categoría *m.c.m*. La categoría *Otros* comprendería aquellas actuaciones erróneas en las que el resolutor no ha abordado el problema o bien en que las resoluciones son erróneas y no pueden ser identificadas con el m.c.d. o con el m.c.m. de los datos del problema.

Tabla 1. Resultados prueba escrita por problema y por tipo de planteamiento

		Planteamiento		
	N	*m.c.d.*	*m.c.m.*	*Otros*
Problema divmax	129	103 (79,84%)	25 (19,38%)	1 (0,78%)
Problema divmin	129	123 (95,35%)	6 (4,65%)	0 (0%)
Problema mulmax	129	22 (17,05%)	107 (82,95%)	0 (0%)
Problema mulmin	129	43 (33,33%)	84 (65,11%)	2 (1,56%)

En consecuencia, en los problemas *divmax* y *divmin* la categoría *m.c.d.* refleja resoluciones que clasificaríamos como correctas, mientras que en los problemas *mulmax* y *mulmin* esta circunstancia se daría para la categoría denominada *m.c.m.* Por otro lado, en la tabla se ha optado por no distinguir el procedimiento por el cual se hacía el cálculo del m.c.d. o del m.c.m. dado que todos los resolutores lo hicieron de forma algorítmica. Sirva como muestra de este hecho el dato de que las 516 resoluciones recogidas, sólo cinco de ellas evidenciaron el cálculo de manera no algorítmica.

Una de las hipótesis investigadoras que motivó el diseño del instrumento se sustentaba sobre la idea de que la palabra *máximo* y la palabra *mínimo* podrían llevar al estudiante al cálculo del m.c.d. y del m.c.m., respectivamente, sin una reflexión de la situación descrita en el enunciado. Sin embargo, a la vista de los resultados obtenidos para el problema *divmin*, parece evidente que este impulso de calcular el m.c.m. ante la aparición de la palabra mínimo, en caso de producirse, no es ni mucho menos una actuación predominante entre los estudiantes para maestro. En cambio, resulta destacable los resultados obtenidos para los problemas *divmax* y *mulmin* donde se observó la existencia de estudiantes que abogaban por ofrecer como solución el m.c.d. ante enunciados con la palabra *mínimo* y como solución el m.c.m. ante enunciados con la palabra *máximo*.

Resultados desde el estudio de casos

Se procedió a la grabación de la resolución de problemas equivalentes a los de la prueba escrita por parejas de estudiantes que hubieran mostrado comportamientos de interés desde el punto de vista investigador al resolver los problemas individualmente en lápiz y papel. Concretamente, en relación con la dificultad que acabamos de presentar en el párrafo anterior, se formaron parejas que hubieran acreditado esta misma tendencia. En esta comunicación se presentarán extractos de resoluciones de la pareja Lola-Carla con el fin de ilustrar la dificultad, así como para ofrecer indicios explicativos del origen de estas actuaciones. Las Figuras 2 y 3 y 4 y 5 muestran las resoluciones de los problemas *mulmin* y *divmax* en la prueba escrita por parte de Carla y Lola, respectivamente.

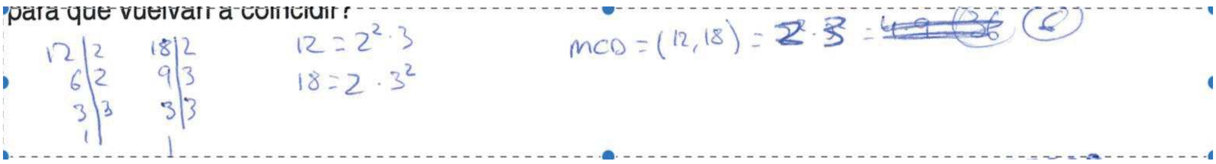

Figura 2. Resolución de Carla del problema *mulmin*

Figura 3. Resolución de Carla del problema *divmax*

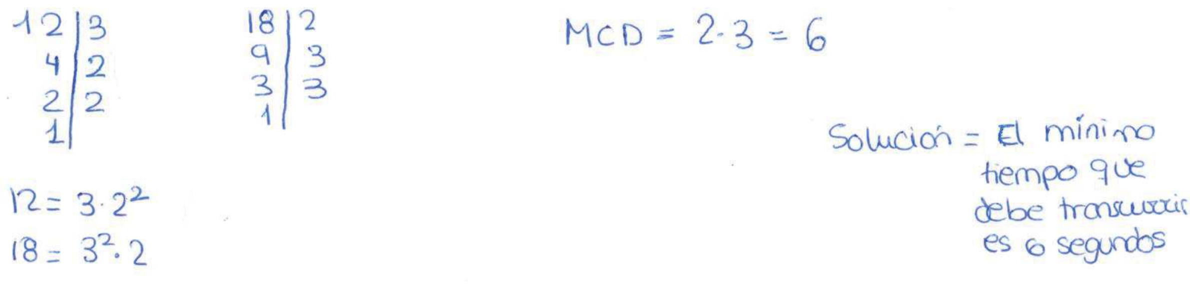

Figura 4. Resolución de Lola del problema *mulmin*

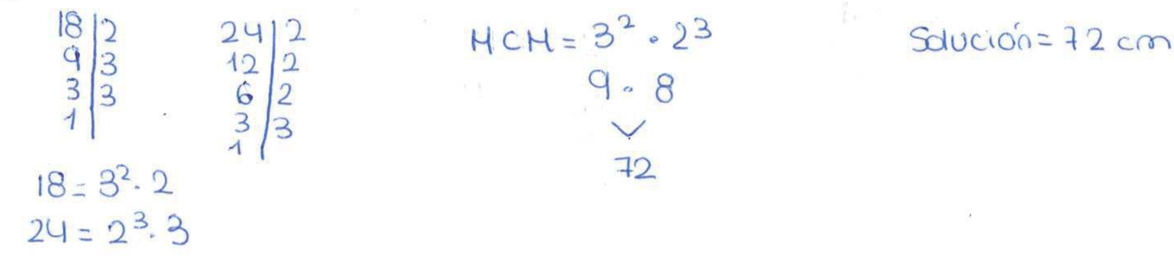

Figura 5. Resolución de Lola del problema *divmax*

Las producciones escritas muestran cómo ambas estudiantes reprodujeron los mismos planteamientos erróneas en la prueba del estudio cuantitativo. En el estudio de casos se les propuso que resolvieran en pareja dos problemas equivalentes a *divmax* y *mulmin*. Las resoluciones debían ser realizadas en la pizarra de un aula donde sólo se encontraban la pareja de alumnas y dos investigadores. El estudio de casos evidenció la tendencia a usar el m.c.d. en problemas donde aparece la palabra *mínimo* y la solución sería el m.c.m. y a usar el m.c.m en problemas donde aparece la palabra *máximo* y la solución sería el m.c.d. Por restricciones de espacio, aquí sólo se presenta un ejemplo del primero de estos casos. En concreto, se muestra un extracto de la resolución de un problema equivalente a *mulmin* por parte de la pareja Lola-Carla. El protocolo se inicia con la lectura del enunciado por parte de Carla.

1. C: Un autobús de la línea B pasa por la parada de la Plaza Mayor cada doce minutos y el de la línea A cada dieciocho minutos. Si acaban de coincidir en dicha parada, ¿cuál es el mínimo tiempo posible que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir? A ver, cada doce minutos… El otro, dieciocho.
2. L: Dieciocho, el A.
3. L: Y nos preguntan cuándo vuelven a coincidir.
4. C: Sí.
5. L: El mínimo tiempo posible para que transcurra. El mínimo tiempo para que vuelvan a coincidir. Pues sacamos... yo creo que el máximo común divisor pero…
6. E: ¿Por qué?
7. L: Porque si acaban de coincidir ahora mismo, hasta que pase otra vez que vuelvan a coincidir, tiene que pasar... nos tiene que dar la mínima cantidad de tiempo.
8. C: Sí.

Las verbalizaciones de Lola señalan que la estudiante considera que para obtener el tiempo mínimo que ha de transcurrir para que los autobuses vuelvan a coincidir han de emplear el m.c.d. (ítems 5 y 7), con lo que Carla se muestra de acuerdo (ítem 8).

9. C: Pues descomponemos, vamos a descomponer.
10. (Inician el cálculo del m.c.d. aplicando el algoritmo para lo que factorizan los números 12 y 18.)
11. C: Dos a la dos por tres.
12. L: Y ahora ¿qué hacemos? ¿Es el máximo común divisor?
13. C: Sí, yo creo que es el máximo común divisor.
14. L: Sí.
15. C: El máximo común divisor sería 2 por 3, ¿no?
16. C: Sí, cada 6 minutos.
17. L: A los 6 minutos vuelven otra vez a coincidir.
18. E: ¿Por qué pensáis que es el máximo común divisor?
19. C: Porque tenemos que encontrar el menor tiempo posible.
20. E: Y el máximo común divisor decías que os da el mínimo, o sea el... si dice el mínimo tiempo posible, ¿por qué os hace pensar que es el máximo común divisor?
21. C: Es que el mínimo común múltiplo no daría.
22. L: Daría mucho más.

23. C: El mayor tiempo en que pueden volver a coincidir.

Tras el cálculo del m.c.d., la pareja expone que los autobuses coincidirían nuevamente en la parada a los seis minutos (ítems 16 y 17). Ninguna de las estudiantes parece evaluar el resultado en el contexto del problema y no parecen presentar dudas sobre la validez de la solución. Al ser cuestionadas por el entrevistador sobre cómo justificarían el uso del m.c.d., Carla incide en que mediante el m.c.d. obtienen el menor tiempo posible (ítem 19). A su vez, entre ella y su compañera justifican que si usasen el m.c.m. estarían calculando el máximo tiempo en el que los autobuses volverían a coincidir (ítems 21 a 23). Al término del estudio de casos, el entrevistador aboga por preguntar directamente a la pareja qué aspectos toman en consideración a la hora de decantarse por el m.c.m. o el m.c.d. durante la resolución de estos problemas (ítem 24):

24. E: Solamente una pregunta para acabar. Si tenéis que tomar una decisión en un tipo de problemas como éstos, para elegir entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, ¿en qué os fijaríais?

25. L: Pues primero si quieren una gran cantidad, o una cantidad más pequeña.

26. E: ¿Y si quieren una gran cantidad?

27. L: Pues coger el mínimo común múltiplo.

Las intervenciones de Lola (ítems 25 y 27) señalan que las estudiantes basan sus planteamientos en el tamaño relativo de las cantidades que obtendrán mediante el cálculo del m.c.d. o del m.c.m. En consecuencia, en situaciones donde tras la lectura del enunciado la pareja interpreta que la solución ha de ser una “gran cantidad”, optarían por calcular algorítmicamente el m.c.m. Si consideraran que la solución del problema viene dada por una cantidad más pequeña, se decantarían por el m.c.d.

CONCLUSIONES

En relación con la competencia en la resolución algorítmica de problemas verbales que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m, los resultados presentados señalan dificultades por parte de los EPM. Así, el estudio ha puesto de manifiesto la dificultad para decidir adecuadamente entre el m.c.d. y el m.c.m. a lo hora de resolver un problema verbal ante la presencia de determinadas palabras clave. En particular, los estudiantes han manifestado la tendencia a emplear mecánicamente el m.c.m. ante enunciados con la palabra *máximo* y, de manera análoga, a usar sistemáticamente el m.c.d. en presencia de la palabra *mínimo*. En la comunicación se han ofrecido evidencias de que este comportamiento tiene su origen en que los estudiantes basan su elección en el tamaño relativo que consideran ha de tener la solución, aspecto fuertemente influenciado por la presencia de determinadas palabras en el enunciado. Este proceder, unido a que los estudiantes recurran al cálculo del m.c.d. y del m.c.m. de manera algorítmica, habilita que en ningún momento del proceso de resolución emerjan razonamientos sobre las ideas de múltiplo y divisor, conduciendo a los estudiantes a la comisión de planteamientos erróneos.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. Tesis doctoral. Universitat d’Alacant.

Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. *Nouveaux apports théoriques à l'analyse statistique implictive et applications: IV Rencontres internationales d'analyse statistique implicative* (pp. 99-100). Nantes, Francia: Régis Gras.

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 41-82). Westport, CA: Ablex Publishing.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Dias, A. (2005). Using lattice models to determine Greatest Common Factor and Least Common Multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 730-738.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (en prensa). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XX1.*

Noblet, K. (2013). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate MAthematics Education* (pp. 219-225). Denver, CO: Sigmaa.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: Preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R. y Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. En A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41–52). Reston, VA: NCTM.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164-186.