

EVOLUCIÓN DE LOS NIVELES DE ÉXITO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Evolution of the levels of success in solving multiplicative structure problems along Primary Education

Ivars, P. y Fernández, C.
Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio se centra en examinar la evolución en los niveles de éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa por estudiantes de Educación Primaria (desde 1º a 6º curso, alumnos de 6 a 12 años). Los resultados indican que, en función de las categorías, los problemas de producto de medida fueron los más difíciles en todos los cursos y los problemas de isomorfismos de medida los más fáciles, mientras que los de comparación multiplicativa se mantuvieron entre ambos. Por el contrario, la evolución de los niveles de éxito en función de la clase de problema, no fue uniforme a lo largo de la educación primaria para los problemas de isomorfismo de medida pero sí en las otras dos categorías.

Palabras clave: *Problemas de estructura multiplicativa, niveles de éxito, educación primaria*

Abstract

This study focuses on examining the evolution of the levels of success in solving multiplicative structure problems by primary school students (from 1st to 6th grade, 6 to 12 year-old students). Results indicate that product of measures problems were the most difficult in all grades and isomorphism of measures the easiest whereas multiplicative comparison problems were between both. By contrast, the evolution of the level of success depending on the type of problem was not uniform throughout primary education for isomorphism of measures problems but it was uniform in the other two categories.

Keywords: *Multiplicative structure problems, level of success, primary school education*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas del siglo XX se generó un gran florecimiento en cuanto a investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales. Mientras que para los problemas de estructura aditiva se consiguieron alcanzar importantes avances, como el establecimiento de categorías semánticas consensuado por la comunidad científica, para los problemas de estructura multiplicativa estos avances no fueron tan relevantes ni adquirieron la misma repercusión (Castro, 2008; Greer, 1992; Ramírez y de Castro, 2014).

En el campo de la estructura multiplicativa, Vergnaud (1983 y 1997) identifica tres tipos de problemas: isomorfismo de medidas, un solo espacio de medidas (comparación multiplicativa) y producto de medidas. Nesher (1992) estableció que para alumnos de tercero a sexto curso los problemas de isomorfismo de medidas eran los más fáciles mientras que los de producto de medidas (a los que denomina de producto cartesiano) eran los más difíciles y los de comparación multiplicativa se hallarían entre ambos. Con un foco particular sobre los problemas de isomorfismo de medidas con alumnos de 11 a 16 años, Hart (1981) indicó que era más difícil identificar un

problema de multiplicación que uno de división, mientras que Bell, Fischbein y Greer (1984) indicaron que eran más difíciles los problemas de división medida que los de división partitiva. Estos niveles de dificultad entre los problemas de isomorfismo de medida se reproducen con estudiantes de 5 a 7 años (Kornilaki y Nunes, 1997), y entre estudiantes de 5 a 8 años (Squire y Bryant, 2002). Sin embargo, Kinda (2013) en un estudio con alumnos de 8 a 10 años de Japón no encontró diferencias significativas en la resolución de problemas de división medida y partitiva en alumnos de 3º, 4º y 5º curso aunque a partir de 6º curso los problemas de división partitiva resultaban más fáciles para este alumnado lo que mantiene el patrón relativo al nivel de dificultad.

En los demás tipos de problemas ha habido menos investigaciones. Para problemas de comparación (un solo espacio de medidas), Castro (1995), en un estudio con alumnos de 5º y 6º curso, mostró que era más sencillo resolver los problemas en los que se busca la cantidad comparada que en los que se debe hallar la cantidad referente o el escalar (factor de comparación). Para problemas de producto cartesiano, se ha llegado a un consenso en establecer esta categoría de problemas como la más difícil para el alumnado de Educación Primaria (Mulligan y Mitchellmore, 1997; Nesher, 1992)

Aunque estas investigaciones han mostrado los niveles de éxito en la resolución de problemas en las categorías de problemas particulares, no tenemos información sobre la evolución de los niveles de éxito en las distintas categorías en el periodo de Educación Primaria (alumnos de 6 a 12 años).

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

En esta investigación hemos adoptado la terminología de Vergnaud en relación a los tipos de problemas multiplicativos: i) Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2; ii) Un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra “veces” y iii) Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3.

En los problemas de isomorfismo de medida existe una relación entre cuatro cantidades, dos cantidades son medidas de un cierto tipo y el resto son medidas de otro tipo (Vergnaud, 1997). Vergnaud (1983) distingue cuatro tipos de problemas dentro de los problemas de isomorfismo de medidas: multiplicación, división partitiva, división medida y problemas de reglas de tres. Estos últimos no se estudiarán en el presente trabajo ya que implica una generalización de esta situación al caso en el que las cuatro cantidades son diferentes de 1.

En los problemas de multiplicación se debe trasladar la relación entre l y a a la relación entre b y x para encontrar la incógnita (que es el total de objetos). En los problemas de división partitiva, hay que encontrar el valor de la unidad (o número de objetos por grupo). En los problemas de división medida, la incógnita es el número de grupos que se forman (Figura 1).

M1	M2	M1	M2	M1	M2
1	a	1	x	1	a
b	x	a	b	x	b
<i>Problemas tipo multiplicación</i>		<i>Problemas tipo división partitiva</i>		<i>Problemas tipo división medida</i>	

Figura 1. Estructura general de los problemas de isomorfismo de medida (Vergnaud, 1997)

En los problemas denominados de un único espacio de medidas (Vergnaud, 1997) o de comparación multiplicativa (Nesher, 1992), aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar que normalmente viene designado por la

expresión lingüística “veces”. Una de estas cantidades actúa como referente y la otra como comparado y la comparación entre ambas se realiza mediante un escalón (b).

La estructura general de este tipo de problemas, en función de cuál sea la incógnita, se presenta en la Figura 2, y la dirección de la comparación puede ser “veces más que” y “veces menos que”. En los problemas de multiplicación de esta categoría, la incógnita X es una medida (la cantidad comparada). En los problemas de división, la incógnita X es una medida (la cantidad referente) o un escalón (Figura 2) (las veces que se repite la cantidad referente para igualar la cantidad comparada).

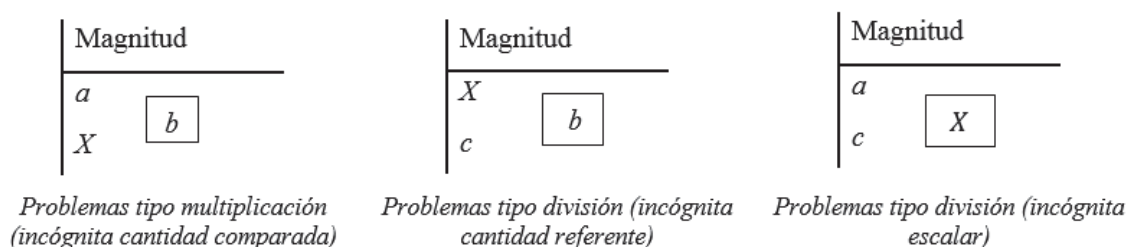


Figura 2. Estructura general de los problemas de un único espacio de medida

La categoría producto de medidas está formada por la relación multiplicativa entre dos medidas elementales ($M1$ y $M2$) que da como resultado la creación de una nueva medida producto ($M3$). Se distinguen dos tipos de problema: los de multiplicación en los que se conocen las dos medidas iniciales (a , b) y se busca la medida producto X y los de división en los que se conoce la medida producto c y una de las dos medidas iniciales y se busca la otra medida X (Figura 3).



Figura 3. Estructura general de los problemas de producto de medidas

Estos problemas han sido reclasificados por otros autores (Greer, 1992), aunque en este trabajo vamos a adoptar la terminología de Vergnaud y considerar las categorías descritas en la Tabla 1.

El objetivo de nuestro estudio es examinar la evolución a lo largo de la Educación Primaria de los niveles de éxito en la resolución de problemas de estructura multiplicativa considerando las tres categorías de problemas anteriores.

Tabla 1. Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa

Categoría	Clases	Incógnita
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	Total de objetos
	División Partitiva	Número de objetos por grupo
	División medida	Número de grupos
Comparación multiplicativa Un único espacio de medidas	Multiplicación	Una medida (comparado)
	División	Una medida (referente)
	División	Un escalón
Producto de medidas	Multiplicación	Medida Producto (cantidad compuesta. Se conocen las 2 medidas elementales o componentes)
	División	Una medida elemental (uno de los componentes)

MÉTODO

Participantes

Los participantes fueron 273 estudiantes de Educación Primaria. 42 estudiantes de primer curso, 44 estudiantes de segundo curso, 47 estudiantes de tercer curso, 47 estudiantes de cuarto curso, 52 estudiantes de quinto curso y 41 estudiantes de sexto curso. Los participantes contestaron a un cuestionario formado por 8 problemas, uno de cada clase de los descritos en la Tabla 1.

Instrumento

Se diseñaron tres modelos de cuestionario, uno para los alumnos de 1º y 2º curso, otro para el 3º y 4º y otro para 5º y 6º curso, diferenciándolos por el tamaño de los números usados. Para los cursos 1º y 2º se emplearon números enteros menores de 20, para 3º y 4º, números menores de 50 y para 5º y 6º curso, números menores de 200. En la redacción de los problemas se procuró usar frases simples y reflejando la estructura de las cantidades consideradas manteniendo contextos familiares para los estudiantes. En la Figura 4 se presentan los enunciados propuestos para el 1º y 2º curso.

Análisis

Categoría	Clases	Problema
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	En el patio del colegio hay 4 farolas. Si en cada farola hay 3 bombillas. ¿Cuántas bombillas hay en total?
	División Partitiva	Juan tiene 10 caramelos que quiere repartir en partes iguales entre sus 5 mejores amigas. ¿Cuántos caramelos les dará a cada una de ellas?
	División medida	Ana quiere repartir 8 caramelos entre sus amigas. Si le da 2 caramelos a cada una de ellas, ¿cuántas amigas tiene Ana?
Comparación multiplicativa	Multiplicación	La clase de 1º A para confeccionar sus disfraces de superhéroes ha utilizado 8 metros de tela. La clase de 5º B ha utilizado 3 veces más de tela que la de 1º A. ¿Cuánta tela ha empleado la clase de 5ºB?
	División	Este año los alumnos de 5º B para realizar un mural han utilizado 2 veces más de papel continuo que utilizaron el año pasado. Si este año se han utilizado 8 metros de papel. ¿Cuántos metros de papel se utilizó el año pasado?
	División	Julián tiene 12 años y Marta tiene 6. ¿Cuántas veces más años tiene Julián que Marta?
Producto de medidas	Multiplicación	El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 2 primeros platos y 3 segundos. ¿Cuántos menús diferentes puede realizar?
	División	La empresa escolar combinando los primeros y los segundos platos ofrece 24 menús diferentes. Si hay 6 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos hay?

Figura 4. Problemas del cuestionario para 1º y 2º curso

Las respuestas de los estudiantes fueron consideradas correctas e incorrectas en cada tipo de problema (nivel de éxito). Se asignó el valor 1 a los problemas correctos y 0 para los incorrectos. Para la determinación de los problemas correctos no se tuvieron en cuenta las respuestas erróneas a causa de errores de cálculo. También se analizaron y categorizaron las estrategias usadas por los estudiantes en cada tipo de problema y cómo iban evolucionando estas estrategias a lo largo de los 6 años de educación primaria. Esta última parte de la investigación no se describirá aquí.

RESULTADOS

Presentamos los resultados en dos apartados. En el primero, la evolución de los niveles de éxito en las diferentes clases de problemas a lo largo de la Educación Primaria y, en el segundo, una clasificación de los problemas en función de su nivel de dificultad.

Evolución de los niveles de éxito en los diferentes problemas en Educación Primaria

La Tabla 2 muestra los niveles de éxito de los estudiantes en cada clase de problemas por curso.

Tabla 2. Niveles de éxito en cada una de las clases de problemas por curso

CURSO	Isomorfismo de Medidas			Comparación multiplicativa			Producto de Medidas		Total
	Multiplica.	División Partitiva	División Medida	Multiplica. Incóg. Comp.	División Incóg. Refer	División Incóg. Esc.	Multiplica.	División	
1º	36%	19%	26%	0%	0%	0%	0%	0%	10%
2º	50%	20%	30%	7%	9%	0%	0%	0%	14%
3º	72%	68%	55%	51%	15%	15%	17%	15%	39%
4º	81%	89%	87%	72%	43%	21%	21%	26%	55%
5º	87%	98%	77%	92%	65%	23%	19%	31%	62%
6º	93%	100%	95%	88%	61%	49%	24%	34%	68%

Considerando los resultados globalmente (Tabla 2) hubo un aumento progresivo del nivel de éxito en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa, desde un 10% en 1º curso hasta el 68% en 6º curso; la progresión no fue uniforme en las diferentes categorías consideradas, ni en las diferentes clases de problemas dentro de cada categoría. Por otra parte, los porcentajes de éxito en 5º y 6º curso (62% y 68% respectivamente) se consideran relativamente bajos y muestran las dificultades en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en Educación Primaria.

Haciendo el análisis por cursos, para los alumnos de primer curso los problemas más fáciles fueron los de isomorfismo de medidas que son los únicos que pudieron resolver (36% multiplicación, 19% división partitiva y 26% división medida). En segundo curso, los problemas más fáciles fueron, al igual que en primer curso, los de isomorfismo de medidas (50% multiplicación, 20% división partitiva y 30% división medida), seguidos de los de comparación multiplicativa (7% multiplicación con incógnita el comparado y 9% multiplicación con incógnita el referente) y los de producto de medidas. Ningún estudiante de 2º curso fue capaz de resolver correctamente los problemas de esta última clase. A partir de tercer curso, los alumnos muestran capacidad para resolver con éxito problemas de todas las categorías y clases presentadas y siguen el mismo patrón de dificultad en cuanto a tipología de problemas: los problemas más fáciles son los de isomorfismo de medidas, seguidos de los de comparación multiplicativa y por último los de producto de medidas (con un 24% de éxito en el de multiplicación en 6º curso y un 34% en el división en 6º curso).

Si analizamos la evolución en el nivel de éxito a lo largo de Educación Primaria de las categorías de problemas, en la categoría isomorfismo de medidas para los tres primeros cursos, los problemas de multiplicación alcanzan el mayor nivel de éxito (frente a los dos tipos de división), siendo los problemas de división medida más fáciles en primer y segundo curso y los de división partitiva más fáciles en tercer curso. Esta tendencia se invierte en los tres últimos cursos siendo los problemas de división partitiva los más fáciles, seguidos de los de división medida y los de multiplicación (a excepción de 5º curso donde disminuye el porcentaje de éxito en los de división medida).

En relación a la evolución del nivel de éxito en los problemas de comparación multiplicativa se mantiene el mismo patrón a partir de tercer curso (en segundo el porcentaje de éxito fue muy bajo),

los problemas de multiplicación fueron los más fáciles en todos los cursos mientras que entre los problemas que implicaban una división, los problemas con incógnita el escalar eran más difíciles que los problemas con la incógnita el referente.

Por último, en la evolución del nivel de éxito de los problemas de producto de medidas se produce un cambio en cuarto curso. Los problemas de multiplicación fueron más fáciles en tercero pero a partir de cuarto curso los problemas más fáciles en esta categoría fueron los de división.

Clasificación de los problemas en función de su nivel de dificultad

Por otra parte, si analizamos cómo de rápido crecieron los niveles de éxito a lo largo de Educación Primaria, los resultados muestran que el problema que más rápidamente creció fue el de división partitiva (pasando de 0-25% en 1º ciclo a 76-100% en 2º ciclo) y el de isomorfismo de medida de multiplicación (pasando de 26-50% en 1º ciclo a 76-100% en 2º ciclo). Continúan el problema de división medida (pasando de 26-50% en 1º ciclo a 76-100% en 3º ciclo) y el de comparación de multiplicación (pasando de 0-25% en 1º ciclo a 51-75% en 2º ciclo y 76-100% en 3º ciclo). Por último el problema de comparación de división con incógnita el referente que llega a 51-75% en 3º ciclo. Los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división alcanzan un 26-50% en 3º ciclo y los de producto de medidas de multiplicación se quedan en 0-25% en 3º ciclo.

Considerando cómo de rápido crecieron los niveles de éxito a lo largo de la educación primaria por ciclos educativos (6-8 años; 9-10 años; 11-12 años) podemos establecer una jerarquía en cuanto al nivel de dificultad de los problemas de estructura multiplicativa (Tabla 3).

Tabla 3. Niveles de dificultad de los problemas por ciclo

CICLO / PORCENTAJE	0-25%	26-50%	51-75%	76-100%
1º	Is. Med. Div. Partitiva Comp. Incóg Comp. (Mult.) Comp. Incóg. Referen (Div.)	Is. Med. Multiplic. Is. Med. Div. Medida		
2º	Comp. Incóg Escalar (Div) Prod. Med. Multiplic Prod. Med. Div	Comp. Incóg. Referen (Div.)	Is. Med. Div. Medida Comp. Incóg Comp. (Mult.)	Is. Med. Multiplicación Is. Med. Div. Partitiva
3º	Prod. Med. Multiplic	Comp. Incóg. Escalar (Div) Prod. Med. Div	Comp. Incóg. Referen (Div.)	Is. Med. Multiplicación Is. Med. Div. Partitiva Is. Med. Div. Medida Comp. Incóg Comp. (Mult.)

Las evidencias sugieren que en un primer nivel estarían los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación y de división partitiva (que alcanzan en segundo ciclo entre un 75 y un 100% de éxito). En un segundo nivel estarían los problemas de división medida y los de comparación de multiplicación (que alcanzan en segundo ciclo entre un 51 y un 75% de éxito). En un tercer nivel estarían los problemas de comparación de división con incógnita el referente (que alcanza en segundo ciclo entre un 26% y un 50% de éxito y en tercer ciclo entre un 51% y un 75%) de éxito. En un cuarto nivel estarían los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división (que solo alcanzan entre un 26% y un 50% de éxito en segundo ciclo). Por último en un quinto nivel estarían los problemas de producto de medidas de multiplicación (alcanzando entre un 0% y un 25% de éxito en tercer ciclo).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es examinar la evolución de los niveles de éxito de los estudiantes en la resolución de problemas de estructura multiplicativa a lo largo de la Educación Primaria (desde primero a sexto curso). Los resultados nos han permitido examinar cómo evolucionan los niveles de éxito a lo largo de la Educación Primaria en cada una de las clases de problemas y realizar una clasificación de los problemas en función del nivel de dificultad.

Observando cómo van evolucionando los porcentajes de éxito por clase de problema y curso, nuestros resultados muestran que los estudiantes presentaron un mayor porcentaje de éxito en los problemas de isomorfismo de medidas seguidos de los problemas de comparación multiplicativa. La categoría de problemas de producto cartesiano son los que presentan mayor dificultad a lo largo de toda la Educación Primaria. Este resultado confirma el obtenido por Nesher (1992) con alumnos de 5º y 6º curso y lo amplía desde 1º a 6º curso.

En la categoría de problemas de isomorfismo de medidas, nuestros resultados complementan los estudios con estudiantes de 11 a 16 años de Hart (1981) que afirmaba que los alumnos identifican más fácilmente un problema de división que uno de multiplicación, y de Bell et al. (1984) que defendían que son más difíciles los problemas de división medida que los de división partitiva. En nuestro caso a partir de 4º curso (9 años) los resultados, en esta clase de problema, coinciden con estos autores. Sin embargo los alumnos entre 6 y 9 años tuvieron más éxito en la identificación de los problemas de multiplicación que los de división y obtuvieron un porcentaje mayor en los problemas de división medida que en los de división partitiva. Este cambio en el patrón de evolución del nivel de éxito en esta edad genera la cuestión de indagar desde una perspectiva más cualitativa las razones de este cambio (posiblemente a través de entrevistas clínicas). Por lo que respecta a la categoría de problemas de comparación multiplicativa se confirma: que son más sencillos los problemas en los que la incógnita es la cantidad comparada (multiplicación) que en los que se busca la cantidad referente o escalar (ambos de división) (Castro, 1995). En esta categoría los problemas de división en los que se busca el escalar son tan difíciles como los de producto de medidas. En cuanto a la categoría de producto de medidas, el análisis nos muestra que resulta más sencillo resolver los problemas de división (en los que la incógnita es uno de las medidas elementales) que los de multiplicación (en los que se busca la medida producto).

Los resultados relativos a la evolución del éxito por problema y curso proporcionan información sobre los cambios de curso a curso en los patrones de los niveles de éxito. Nuestros datos indican que cuando miramos las categorías de problemas globalmente, el patrón de nivel de éxito se mantiene. Es decir, los problemas que resultan más fáciles en el primer ciclo son los más fáciles en tercer ciclo, y lo mismo con los problemas más difíciles. El patrón en la evolución de éxito no se mantiene cuando miramos dentro de las categorías. Los problemas que crecen más rápido en cuanto al nivel de éxito a lo largo de la educación primaria fueron el de división partitiva y el de isomorfismo de medida de multiplicación (primer nivel). Continúan el problema de división medida y el de comparación de multiplicación (segundo nivel) y después el problema de comparación de división con incógnita el referente (tercer nivel). Por último los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división (cuarto nivel) y el problema de producto de medidas de multiplicación (quinto nivel). Estos resultados han llevado a clasificar los problemas según su nivel de dificultad estableciendo 5 niveles.

Aunque nuestra muestra es pequeña, nos ha permitido identificar aspectos que necesitan mayor investigación y patrones en los que se necesitaría realizar un estudio estadístico que mostrara si hay diferencias significativas. Nuestros resultados dan un paso más en cuanto a la evolución del nivel de éxito en los problemas de estructura multiplicativa a lo largo de educación primaria.

Referencias

- Bell, A., Fischbein, E. y Greer, G. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 129-148
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-240). Badajoz: SEIEM.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Nueva York: Macmillan.
- Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16. A report of concepts in secondary mathematics and science*. Londres: John Murray.
- Kinda, S. (2013). Generating scenarios of division as sharing and grouping: A study of Japanese elementary and university students. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(3), 190-200.
- Kornilaki, E. y Nunes, T. (1997). What do young children understand about division? En E. Pehkonen (Eds.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 243). Lahti, Finlandia: PME.
- Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309-330.
- Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrop (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189-219). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ramírez, M. y de Castro, C. (2014). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Didácticas Específicas*, 11, 40-66.
- Squire, S. y Bryant, P. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal of Experimental Child Psychology*, 81(1), 1-43.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México DF: Trillas.