CONOCIMIENTO SOBRE LA RECTA DE UNA MAESTRA DE TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Knowledge about straight line of a third grade primary teacher

Liñán, M. M.[a] , Montes, M. Á.[b] y Contreras, L. C.[b]

[a]Universidad de Sevilla, Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU, [b]Universidad de Huelva

Resumen

En el contexto de una investigación doctoral, presentamos el análisis de tres episodios en la observación de una maestra de tercer ciclo de educación primaria cuando enseña geometría. Basándonos en el modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), analizamos el conocimiento de los contenidos no explícitos en los conceptos recta, semirrecta y segmento que muestra la maestra y las consecuencias que estos tienen en el aula. Mostramos cómo el sustento epistemológico del conocimiento sobre estas nociones, pese a ser implícito, genera en el conocimiento explícito de la maestra dificultades y faltas de precisión que transmite a sus alumnos.

Palabras clave: *MTSK, Conocimiento Profesional, Geometría, Recta, Semirrecta, Segmento, Infinito.*

Abstract

In a PhD research context, we present the analysis of the three episodes in the observation of a teacher in third cycle of primary education when teaching geometry. Based on the analytical model about mathematics teachers' specialised knowledge (MTSK) knowledge, we analyse the knowledge of non-explicit content in the concepts of straight line, ray and segment shown by the teacher and the consequences it has in the classroom. We show how epistemological foundations of the knowledge about these concepts, despite being implicit, generates in the teacher's explicit knowledge obstacles and inaccuracies that she transmits to her students.

Keywords: *MTSK, Professional Knowledge, Geometry, Straigth Line, Ray, Segment, Infinite.*

INTRODUCCIÓN

Nuestro sistema educativo no ha conseguido aún enfocar la enseñanza desde un punto de vista globalizador, generando compartimentos estancos de conocimiento con dificultad para ser relacionados entre sí. Esto es especialmente relevante en matemáticas, donde los conceptos están imbricados profundamente unos con otros, directamente o a través de relaciones conceptuales complejas.

En el desarrollo de una tesis doctoral sobre el conocimiento especializado en geometría, las observaciones en el aula nos han permitido constatar cómo la informante lidia con un constructo que emerge al comenzar la geometría con sus alumnos: el concepto de infinito, al tratar las nociones de recta, semirrecta y segmento. Esto nos ha llevado a reflexionar sobre cuál ha de ser el conocimiento matemático que debe tener un maestro sobre los temas a enseñar y cuál sería el efecto que produciría una insuficiente construcción de un concepto que podría parecer irrelevante en el

Liñán, M. M., Montes, M. A. y Contreras, L. C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

desarrollo de los otros, pero que tiene profundas relaciones, así como los errores futuros que su enseñanza podría generar en sus estudiantes.

Siguiendo a Ma (1999), consideramos que los maestros deben tener un conocimiento profundo de la matemática fundamental, pero no tenemos respuesta desde la investigación en educación matemática sobre la delimitación de ese conocimiento; este límite guía nuestra reflexión.

MARCO TEÓRICO

Partiendo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Ball, Thames y Phelps, 2008), el grupo SIDM[i] de la Universidad de Huelva (Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013) ha propuesto un modelo analítico del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK), basado en la especialización como eje del conocimiento del profesor de matemáticas.

El modelo MTSK conserva la dicotomía propuesta por Shulman (1986), y posteriormente refinada por Ball y cols. entre conocimiento didáctico del contenido ─PCK─ y conocimiento del contenido ─SMK─, este último renombrado como Conocimiento Matemático ─MK─. En el modelo desarrollado se proponen seis subdominios, tres de ellos referentes al MK:

- *Conocimiento de los Temas* (KoT), que contempla un conocimiento profundo y razonado de cada tema propio de la matemática escolar, integrando no solo el conocimiento escolar, sino sus fundamentos, propiedades, definiciones o su fenomenología (Montes et al., 2015, Liñán y Contreras, 2013).
- *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM), que abarca el conocimiento matemático desde la perspectiva que permite al profesor conectar unos conceptos con otros, integrándolos en un sistema de conexiones. Esto permitirá comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.
- *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que incluye el conocimiento sintáctico (Schwab, 1978) de las matemáticas, relativo a diferentes formas de definir, argumentar, demostrar y pensar en matemáticas, así como diferentes tipos de razonamientos heurísticos.

Los otros tres subdominios están referidos al PCK:

- *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM), que incluye el conocimiento de cómo aprenden los alumnos el contenido matemático, así como el conocimiento de las características de ese proceso o de los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto.
- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), que supone conocer distintas estrategias de enseñanza que permitan el desarrollo de las capacidades, conocer recursos que ayuden a los alumnos a construir conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar su intuición respecto de algunos conceptos, es decir, el conocimiento de cómo producir aprendizaje.
- *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS), que además del conocimiento del currículo institucional, supone conocer producciones de las distintas investigaciones en educación matemática respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa, o referentes estandarizados de distinta índole que indiquen qué y cómo debe aprenderse el contenido.

Puesto que el interés de esta investigación se centra en el conocimiento sobre geometría que muestra una maestra de 5º de primaria, tomamos como referencia de conocimiento mínimo que esperamos encontrar en un maestro el que figura en el currículum vigente para primaria.

MÉTODO

Al igual que otros modelos que exploran el conocimiento del profesor, la observación de la práctica y su análisis compartido son los elementos básicos con los que accedemos a la información desde MTSK. Nos situamos en un paradigma interpretativo (Bassey, 1995), y planteamos el estudio de caso de tipo instrumental como diseño metodológico. Mostraremos el análisis de un episodio de clase en la observación directa de una maestra cuando enseña geometría en 5º de primaria, apoyada con entrevistas semi-estructuradas cuya finalidad es aclarar algunas de las observaciones. La clase está ubicada en un colegio público de Sevilla y la maestra atesora más de 30 años de experiencia en educación primaria, y toma como apoyo fundamental el libro de texto para diseñar sus clases, utilizando lecturas de divulgación matemática para provocar reflexión en el aula.

El episodio analizado se registró en vídeo, con el consentimiento todos los implicados. Posteriormente se realizó una transcripción literal del mismo y se utilizó un instrumento de análisis basado en el modelo analítico MTSK, que nos permitió identificar los subdominios y categorías de conocimiento puestas en juego, además de reconocer posibilidades de análisis (Flores, Escudero y Aguilar, 2013) que son planteadas a la maestra posteriormente, cuando no quedan claros en la propia transcripción, en la entrevista semi-estructurada.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los episodios tratados corresponden a la primera clase de 5º curso de primaria sobre el primer tema de geometría: sobre rectas y ángulos. Nos centramos en las definiciones de recta, semirrecta y segmento, pues de ellas han emergido otros conocimientos que en sí mismos no están incluidos en el currículum de primaria.

Al comenzar la clase, la maestra presenta el primer concepto que aparece en el libro de texto: la recta, para lo que utiliza un dibujo en la pizarra. Plantea un ejemplo que le parece que permite distinguir entre línea recta y curva, añadiendo después la observación planteada por un alumno para clarificar e intentar mejorar su propio ejemplo.

Define después la semirrecta, partiendo del mismo dibujo de la recta que aparece en la pizarra, señalando un punto en ella. Para afianzar el hecho de que puede tratarse de cualquier punto el que defina las dos semirrectas, dibuja otra recta en la pizarra con un punto ubicado en un lugar diferente al primero, lo que provoca una reacción en el alumnado sobre la igualdad o no de las dos semirrectas generadas. Emerge el concepto de *infinitud de la recta*, apareciendo así la primera conexión importante con este contenido.

Finalmente, en el último episodio aparece la definición de segmento, para lo que utiliza las rectas de la pizarra señalando dos puntos. Emerge aquí la *densidad de la recta*, es decir, dados dos puntos cualesquiera, siempre hay infinitos puntos entre ellos; se muestra así la segunda conexión entre elementos matemáticos.

En todos los casos comienza con una representación, pasando después a la ejemplificación y terminando con la definición dada por el libro (M: Maestra; A: alumnos).

1. M: (dibuja un segmento rectilíneo paralelo a la horizontal con inicio y fin, marcando los puntos) Esto no es (borra los puntos marcados) No tiene principio ni fin (amplía el segmento hasta los extremos de la pizarra y hace un gesto con las manos indicando que continuaría por ambos lados de la pizarra). No sabemos ni dónde empieza ni dónde acaba, no tiene curvas ni ángulos. Es como cuando vamos por la carretera y vemos los cables de la luz, no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos. Los vemos y es una recta que no sabemos dónde empieza ni dónde acaba.
2. A1: La carretera también.
3. M: Bueno las carreteras tienen curvas. Si tienen curvas ya no es una recta. Bueno, pues vamos a poner en el cuaderno: recta, y ponemos las características: es una línea de puntos que no tiene ni principio ni fin y que no tiene líneas curvas ni ángulos.

Observamos cómo la profesora usa su KMT al proponer un ejemplo sobre cuya adecuación podría no haber reflexionado: los cables de la luz. En el momento que lo plantea parece darse cuenta del equívoco que puede generar en sus alumnos (KFLM) y rectifica (1): "*no los que están así (hace un gesto curvo con la mano) sino los que están más tensos*".

Refiriéndonos al MK de la profesora, vemos que usa la representación gráfica de la recta, siendo consciente de que no puede tener límites, así que lo hace de extremo a extremo de la pizarra, considerando que, con su lenguaje no verbal, muestra la ausencia de inicio y fin, apareciendo de forma implícita la idea de infinitud. La maestra define recta como lo hace el libro de texto, usando dos conceptos que no han tratado previamente: línea y punto (noción a la que, en el currículum vigente, no se hace referencia, ni si quiera de forma intuitiva). Podemos observar también un indicio de KPM, ya que la profesora establece condiciones para dar significado y definir la idea de recta como una construcción sin principio ni fin, pese a no dar elementos, más allá de los meramente visuales, que permitan diferenciar una línea recta de una curva.

4. M: Ahora vamos a ver lo que es una semirrecta. Tenemos una recta y la cortamos. Como una recta es infinita, la cortamos y tenemos dos semirrectas. Según esto, ¿qué será una semirrecta?
5. A1: Un punto que divide a la recta en dos partes iguales.
6. M: Entonces, si tengo otra recta y le hacemos un punto aquí (dibuja una recta en la pizarra y un punto, que borra y luego vuelve a pintar en otro lugar). Como es infinita, pues una semirrecta estaría aquí (señala) y la otra desde el punto hasta el infinito, las dos semirrectas. Definiríamos un punto y las dos semirrectas, que son infinitas.

   (Nota: el libro dice, en la definición de semirrecta: "un punto divide a una recta en dos partes iguales, llamadas semirrectas, con principio pero sin fin", y la maestra la lee y la escribe. Obvia, al volver a dibujarla en la pizarra la afirmación "dos partes iguales".)
7. M: Pues así, aquí empieza esta semirrecta y aquí la otra.
8. A2: Pero una es más larga que la otra, ¿no?
9. M: Bueno, es que son infinitas, y el infinito….Por eso he puesto yo distintos puntos, me da igual dónde esté el punto, son infinitas…

La maestra define la semirrecta partiendo del concepto anterior establecido sobre la recta y de una de sus características o propiedades, aunque existe una cuestión subyacente a su argumentación: la recta infinita se divide en dos semirrectas desde el punto señalado hasta el infinito. Podríamos tener aquí una conexión transversal (KSM). Otra posible conexión se presenta al hablar de dos elementos, recta y semirrecta, que son infinitos en ambos casos, con la diferencia de estar acotada la semirrecta en uno de los sentidos. Creemos interesante profundizar en cómo la maestra articula estos conceptos relacionados unos con otros, mostrando una conexión ligada a la complejización de contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2014).

Cuando la maestra decide dibujar una nueva recta, señalar un primer punto aproximadamente en la mitad de la pizarra para luego borrarlo y marcar otro claramente alejado del centro, se muestra un posible conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje (KFLM), pues parece forzar la pregunta del alumno (8), además de generar un posible debate sobre la definición que muestra el libro (KPM). Vemos también una dificultad en la práctica ligada a la Matemática en general, pues la forma en la que está expresada la primera definición genera una incongruencia (5) de la que nadie parece hacerse consciente; idéntico comentario cabría en la definición que aparece en el libro y que todos dan como válida (*"…dos partes iguales"*).

10. M: Tenemos la recta, semirrecta y ahora vamos a ver el segmento. F., ¿qué es el segmento?

11. A3: Es el trozo de recta limitado por dos puntos.

12. M: Pues ahora tenemos el segmento, igual que antes tenemos la recta (dibuja en la pizarra una recta y señala dos puntos de la misma) y esto es el segmento. ¿Qué dice el libro, P., por favor?

13. A4: Es la parte de la recta delimitada por dos puntos.

14. M: Pero los dos puntos no son contiguos, no están juntitos, tiene que haber punto, punto, punto, porque si no, no tenemos segmento. Los puntos se llaman extremos.

15. M: Los extremos (escribe la palabra "extremo" en cada uno de los puntos que ha dibujado en la recta y que delimitan el segmento) Estos extremos delimitan la recta infinita, cortada dos veces, entonces sale un segmento.

Nuevamente observamos KoT, pues la maestra parte de la representación de la recta y construye la definición de segmento partiendo de sus propiedades. Al pedirle al alumno que lea la definición del libro, la maestra incluye un comentario que evidencia una debilidad en su conocimiento acerca de la densidad de la recta, apareciendo además una conexión de complejización (KSM) en la relación con los números reales, emergiendo el concepto de infinito en un conjunto acotado.

Observando transversalmente los tres episodios aparece, subyacente al conocimiento de la maestra, la idea de que la recta y la semirrecta son infinitas, aunque el segmento no. Emerge, de nuevo, conocimiento relacionado con el infinito entendido como cardinal y los diferentes cardinales de conjuntos infinitos numerables y no numerables.

Para profundizar en la explicitación de esta idea, se planteó, en una sesión de entrevista a la maestra, una pregunta relacionada (E: entrevistador; M: maestra):

E: ¿Habéis trabajado alguna vez el concepto de infinito?

M: Cuando hemos dado los números… los números son infinitos, ahí sí que puede ser que hayamos trabajado la cantidad como infinitas cosas. Para ellos es algo que es muy grande muy grande o muy largo muy largo, que no lo pueden abarcar con el pensamiento, ni con la vista ni con las manos… No lo han vivido como un problema, no sé si porque tienen el concepto de número… porque hemos intentado ver números y hemos escrito en la pizarra, que hemos intentado verlos, agruparlos, que seguíamos y seguíamos y no tenía fin, no terminábamos nunca… o el espacio, que ellos saben que es infinito, que se escapa de nuestro conocimiento. Yo creo que no les cuesta, el aproximado a lo que creemos los adultos que es infinito, no creo que les cueste a ellos. De hecho nunca han planteado dificultad cuando se trata el infinito.

La maestra da a los números la propiedad de infinitud, sin reflexionar sobre qué conjunto numérico es infinito, o de qué forma lo es (acotación o cardinal). Asimismo, defiende que sus estudiantes generen el significado de 'muy grande' asociado al infinito pero, en su propia descripción de ese significado, incluye la imposibilidad de abarcarlo y el hecho de que escape del conocimiento, relacionado con un modelo de indefinición al pensar sobre el infinito (Belmonte, 2009). Esta reflexión nos muestra que la profesora posee conocimiento de las características de aprendizaje, KFLM, relacionado con el infinito, si bien coincidimos con Montes (2015) en que gran parte de este conocimiento se basa en cierto nivel de reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje del concepto, ya que ella misma se incluye como parte de las reflexiones sobre sus estudiantes.

EL CONOCIMIENTO DEL INFINITO SUBYACENTE A LA REFLEXIÓN DE LA MAESTRA

En los episodios analizados aparece tanto el concepto actual como potencial del infinito (Moreno y Waldegg, 1991), pues la maestra reconoce, en las entrevistas mantenidas posteriormente, que nunca se ha tratado el concepto infinito más allá de la generación de números (Montes, 2015), donde ella misma parece confundir lo *muy grande* con *lo infinito.*

Cuando la maestra presenta en modo gráfico la recta es consciente de que no puede simbolizar ese "*sin principio ni fin*" (3), así que hace un gesto para remarcar esa falta, que asume como infinitud de la recta. Emerge, más allá de la aparición del concepto infinito, un aspecto de un conocimiento profundo de la matemática: ¿en qué sentido es infinita la recta?, ¿en longitud?, ¿cantidad de puntos?

En el primer caso, infinita en longitud, concepto subyacente tanto en los libros de texto como en este episodio, genera un error conceptual. Una cantidad de magnitud no puede ser infinita por las propias definiciones de magnitud y de medida, una magnitud es un atributo susceptible de aumentar o disminuir, sobre el que se puede definir la igualdad y la suma sobre los números reales positivos (Fiol y Fortuny, 1990), por lo que "infinito" no puede ser una cantidad de una magnitud (Gardiner, 1985); por otro lado, la función *medida* está definida en el intervalo [ ).

¿Está entonces esa *infinitud* de la recta (*línea de puntos sin curvas ni ángulos que no tiene principio ni fin*) referida a su cantidad de puntos? En caso afirmativo, podríamos colocar en idéntica situación a la semirrecta y al segmento; es decir, la profesora usa objetos matemáticos en los que aparece el infinito en conjuntos acotados, aunque parece que sin consciencia de ello.

El uso de este concepto de forma errónea se repite en la respuesta a la cuestión que plantea la alumna "*Pero una es más larga que la otra, ¿no?"* (8) cuando la maestra define semirrecta y señala dos puntos diferentes para mostrar lo que supone distintas semirrectas. Su respuesta incluye nuevamente la referencia al infinito (9), así como en la propia definición del libro (6), subyaciendo la idea de que, sabiendo que cualquier conjunto infinito I tiene la propiedad de poder definir una aplicación inyectiva de I sobre un subconjunto de I, esto puede contradecir el principio holístico "*el todo es mayor que la parte".*

El nombre "semirrecta" puede evocar "mitad" en el sentido matemático de partes iguales, lo que implica la pregunta ¿en qué sentido se da dicha igualdad? Por otro lado, se presenta un nuevo problema didáctico y de concepto con la definición: en la recta aparece la expresión "*sin principio ni fin*" (3) y en la semirrecta "*con principio pero sin fin"* (6). Así, un conjunto *infinito* puede no tener inicio ni fin o solo no tener fin, pero ¿podría tener fin y no inicio? La imprecisión en el uso del lenguaje matemático, tanto del libro como de la maestra, genera obstáculos didácticos que impiden una correcta comprensión de ciertos conceptos que han de construirse por no ser evidentes.

CONCLUSIONES

Autores como Gardiner (1985) plantean que los procesos infinitos son cuestiones que no se tratan explícitamente en la escuela primaria y cuyos fundamentos se dan por hechos al tratar el concepto posteriormente en la educación secundaria. Surgen conexiones estructurales (KSM) entre la geometría y los procesos infinitos que no son abordados, por lo que pueden aparecer problemas entre el infinito matemático (actual o potencial) y el infinito psicológico. Este mismo autor identifica distintos procesos infinitos que surgen de forma natural y que no son tratados como contenido.

¿Qué debería conocer la maestra sobre el infinito? Emerge la necesidad de establecer una conexión entre la recta real y la recta, semirrecta y segmento para identificar esa infinitud con la cantidad de puntos y no con su longitud y, lo que es igualmente importante, la concepción de la densidad de los números reales genera la conexión que permite decir que no existen puntos contiguos en una recta, que es localmente medible pero no globalmente.

Es destacable el conjunto de errores, tanto conceptuales (KoT), como de conexiones (KSM) y procedimiento matemático (KPM), que transmite el libro de texto, y sobre los que la maestra no se cuestiona: "*un punto divide a la recta en dos partes iguales* ─aquí emerge la posibilidad de preguntarse por la naturaleza de esta igualdad (KPM)─ *llamadas semirrectas con principio pero sin fin*"─ en esta expresión, el significado y sentido del principio y fin, podría ser objeto de reflexión a un nivel epistemológico (KoT)─; *"una recta es una línea de puntos, sin curvas ni ángulos,[…]"* ─aquí cabe cuestionar la naturaleza de los elementos que se usan para definir, y su presencia en cursos anteriores (KFLM), ya que contiene definiciones basadas en otros conceptos que nunca se han tratado antes─; *"un segmento es un trozo de recta limitado por dos puntos*"─ esta definición muestra un lenguaje lejano al lenguaje matemático, por lo que cabría preguntarse cómo expresarlo de forma más precisa (KoT, KPM), o si el tipo de lenguaje usado tiene la intencionalidad de fomentar el aprendizaje de los alumnos (KMT, KFLM).

Para terminar, destacamos que MTSK nos ha permitido obtener una visión precisa y detallada de las distintas tipologías de conocimiento emergentes en la discusión de la maestra con sus alumnos en el tratamiento de conceptos como la recta, semirrecta y segmento, consiguiendo una visión más amplia del conocimiento especializado implicado. Más allá de detectar el conocimiento matemático o didáctico, hemos podido identificar elementos que nos hacen pensar en la necesidad de un conocimiento profundo de la matemática escolar, no sólo en términos de conocer "más", sino de conocer "mejor" los contenidos geométricos. Es en este sentido donde observamos ciertas relaciones entre los distintos tipos de conocimiento. Un conocimiento de los temas (KoT) superficial sobre geometría puede bastar para seguir el libro de texto sin cuestionamientos profundos. Sin embargo, para plantear dichos cuestionamientos, entran en juego el conocimiento de la estructura matemática (KSM), para establecer la coherencia de las construcciones matemáticas realizadas, o el conocimiento de la práctica matemática (KPM), al reflexionar sobre la consistencia de definir ciertos conceptos como la recta, sin haber definido previamente los elementos usados en la definición.

Agradecimientos

Los autores son miembros del proyecto de investigación "Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (EDU2013─44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

Agradecemos su colaboración al Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 399-406.

Bassey, M. (1995). *Creating education through research*. Edimburgo, Escocia: British Educational Research Association.

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del Cerme 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía.

Fiol, M. L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad geométrica. La forma y el número.* Madrid: Síntesis.

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Gardiner, A. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children? *The Mathematical gazette, 69*(448), 77-87.

Liñán, M. M., y Contreras, L.C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Tópicos Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawence Erlbaum.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso.* Huelva: Universidad de Huelva.

Montes, M., Contreras, L.C., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación, 367*, 36-62.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2014). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del Cerme 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía.

Moreno, L., y Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity, *Educational Studies in Mathematics, 22*(5) 211-231.

Schwab, J. J. (1978). *Education and the structure of the disciplines*. En I. Westbury y N.J. Wilkof (Ed.). *Science, curriculum and liberal education,* (pp. 229-272). Chicago: University of Chicago Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

---

[i] Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática