FASES EN LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA DE LA DERIVADA: COMPRENSIÓN EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS

Phases in the Thematization Derivative Schema: Understanding in University Students

Fuentealba, C.[a], Badillo, E.[b], Sánchez-Matamoros, G.[c]

[a]Universidad Austral de Chile, [b]Universidad Autónoma de Barcelona, [c]Universidad de Sevilla

Resumen

El estudio que presentamos es parte de una investigación más extensa que aborda la comprensión del concepto de derivada en estudiantes universitarios con instrucción previa en cálculo diferencial. En particular, nos centramos en el análisis de la tematización del esquema de la derivada. Para ello se utilizan los niveles de comprensión de un esquema intra-inter-trans (propuestos por Piaget y García) ajustados al concepto de derivada en términos de elementos matemáticos, relaciones lógicas y modos de representación utilizados por los estudiantes a la hora de resolver una determinada tarea.

Palabras clave: *derivada, esquema de derivada, nivel de comprensión, tematización*

Abstract

The present paper is part of a larger research study that addresses the understanding of the concept of derivative by college students with prior instruction in differential calculus. In particular, in this work we focus on the analysis of the thematization derivative schema. With this aim, we use the understanding levels of intra-inter-trans schema (proposed by Piaget and Garcia) adjusted to the concept of derivative in terms of mathematical elements, logical relations and modes of representation used by students when solving a task.

Keywords: *derivative, derivative schema, understanding level, thematization*

INTRODUCCIÓN

El cálculo es, sin lugar a dudas, uno de los mayores logros del intelecto humano. Sin embargo, a pesar de su gran importancia, un problema aún sin solución es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de la diferenciación o la integración que corresponden a los conceptos fundamentales del curso. Según Artigue (1995) la enseñanza tradicional y en particular la universitaria, aún si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Esta práctica ha afectado de forma especial al cálculo diferencial, y específicamente al concepto de derivada que corresponde a uno de los puntos centrales del currículum obligatorio de la gran mayoría de los estudiantes universitarios de matemáticas y ciencias.

Dada la importancia del concepto y las dificultades presentes en su comprensión, se han realizado numerosas investigaciones que abordan la problemática desde diversos enfoques teóricos (Asiala et al, 1997; Aspinwall, Shaw y Presmeg, 1997; Azcárate,1990; Badillo, Font y Azcárate, 2011; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Clark et al., 1997; Cooley, Trigueros y Baker, 2007; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Font, 1999; Font, Badillo, Trigueros y Rubio, 2012; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006, 2007; Starf, 1992; Tall, 1989; Zandieh, 2000). Dichos estudios según Sánchez-

Fuentealba C., Badillo E. y Sánchez-Matamoros G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 259-268). Alicante: SEIEM.

Matamoros, García y Llinares (2008) aportan información sobre aspectos muy importantes como son:

- Errores y dificultades en la comprensión del concepto de derivada.
- Relación entre razón de cambio y cociente incremental.
- Los sistemas de representación como herramientas para pensar sobre las derivadas
- La relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$.
- El desarrollo del *esquema* de derivada.
- La aplicación del concepto: el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena.

Los resultados de estas investigaciones, sin duda, han tenido implicaciones directas en el desarrollo del currículo de cálculo y específicamente sobre el concepto de derivada; sin embargo, es necesario ahondar en la comprensión del concepto considerando la multidimensionalidad que lo configura. Es por ello que nos planteamos como objetivo caracterizar la *tematización* del *esquema* de la derivada con el propósito de observar posibles diferencias o fases.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo empírico se basa en el marco de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997). El cual, aporta elementos teóricos y analíticos para describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En este marco se considera que el principal mecanismo de construcción de conocimiento matemático es la abstracción reflexiva y que la comprensión de un concepto por parte de un estudiante comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de *acciones*. Las *acciones* se interiorizan para formar *procesos* que se encapsulan para formar *objetos*. Finalmente, las *acciones*, los *procesos* y los *objetos* se pueden organizar en *esquemas* (Dubinsky, 1991). Los cuales, según Asiala et al. (1997) corresponden a una colección de *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas* que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. En este sentido Trigueros (2005) indica que cuando un estudiante se encuentra frente a un problema matemático evoca un *esquema* para abordar su resolución. Ante un mismo problema diferentes estudiantes utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. Al considerar esas relaciones, es posible identificar en las acciones de los estudiantes que resuelven un mismo problema, *esquemas* con distinto grado de comprensión. Piaget y García (1983, 1989) definen estos grados de comprensión en tres niveles: *intra-inter-trans*, que denominan triada. Estos niveles suceden siguiendo un orden fijo, y se caracterizan por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto.

Con respecto a la derivada Sánchez-Matamoros et al. (2006) plantean que el concepto posee elementos matemáticos estructurantes de distinta naturaleza, caracterizados por los modos de representación (analítico/grafico) y el carácter de dichos elementos (puntual/global). De esta forma, para caracterizar el *esquema* de la derivada es necesario considerar: los elementos matemáticos, los modos de representación y las relaciones lógicas que se establecen entre dichos elementos.

En relación a la *tematización* de un *esquema,* Trigueros (2005) indica que implica la coherencia del *esquema*; es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el *esquema* y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el *esquema* y cuál no. Esta coherencia se observa en la capacidad del estudiante de desagrupar o reagrupar las partes que componen el *esquema* llegando incluso a realizar acciones sobre el *esquema*; es decir, utilizarlo como *objeto* en la solución de nuevos problemas.

Por otra parte, consideramos relevantes los aportes realizados por García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que indican que la *tematización* del esquema de la derivada se evidencia en las estructuras subyacentes que se observan cuando un estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f'') y así sucesivamente; es decir, el estudiante toma conciencia que el operador derivada corresponde a una transformación lineal que se puede generalizar.

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

El presente estudio es cualitativo con carácter descriptivo. Participaron 25 estudiantes universitarios de la provincia de Barcelona, de los cuales, 17 eran estudiantes del tercer curso de Ingeniería en Organización Industrial de una universidad privada y 8 del primer curso del grado de Matemáticas y Física de una universidad pública. Es importante señalar que todos los estudiantes poseían instrucción previa en cálculo diferencial.

Instrumentos de recolección de datos

El primer instrumento aplicado correspondió a un cuestionario en el cual se planteaban tres tareas sobre la comprensión del concepto de derivada; dichas tareas tenían como base investigaciones previas realizadas (Baker et al., 2000; García et al., 2011). La resolución de las tareas involucraba el uso de los elementos matemáticos que configuran el concepto.

En la tarea N°1 (Figura 1) se proporciona información analítica de la función f en términos de f' y f''. El objetivo de la tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones que asocian: el signo de f' con la monotonía de f, el signo de f'' con la convexidad de f y los ceros de f' con la posible existencia de valores extremos o puntos de inflexión. Por otra parte, se pretendía observar si los estudiantes eran capaces de apreciar las contradicciones presentes en las condiciones entregadas y plantear una modificación que les permitiera dar una solución adecuada de la tarea mostrando de esta forma coordinación de elementos matemáticos.

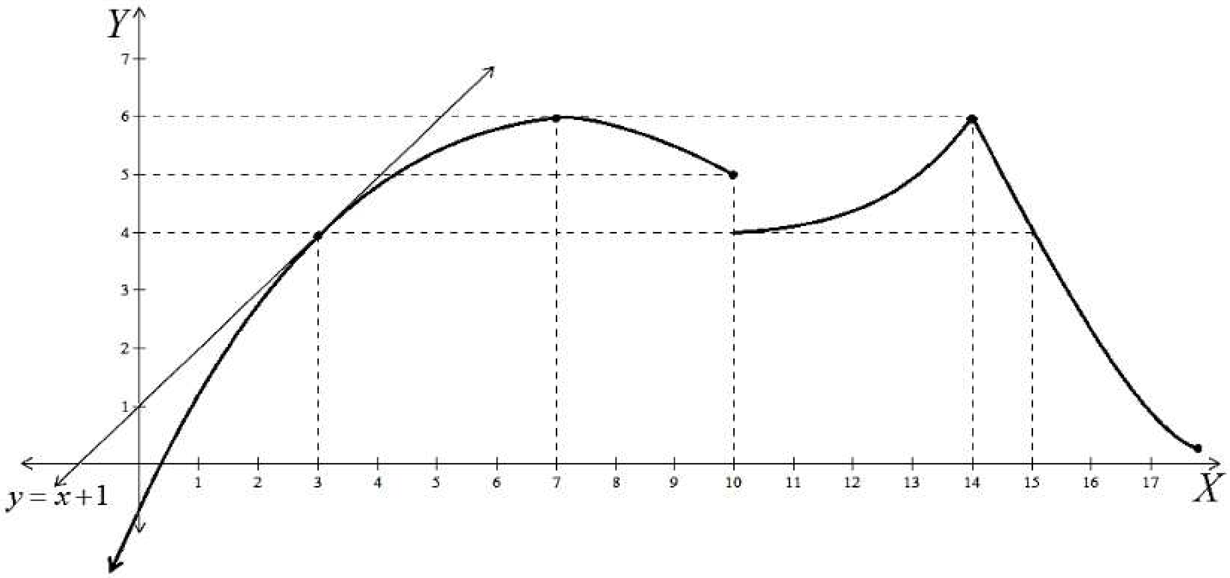
Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua	b) $f(2)=0$
c) $f'(3)=f'(5)=0$	d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$
e) $\lim_{x\to 8^-} f(x)=-\infty$	f) $f'(x)<0$ cuando $5<x<8$
g) $f'(x)>0$ cuando $x<5$	h) $f''(x)<0$ cuando $3<x<8$
i) $f''(x)>0$ cuando $x<3$	

Figura 1. Enunciado Tarea N°1

La tarea N°2 (Figura 2), presentada en modo gráfico, poseía dos partes. La primera se centraba en comportamiento local de la función f. El objetivo de esta primera parte, fue observar si los estudiantes eran capaces de calcular la derivada en puntos con distintos comportamientos. En la segunda parte se les solicitó esbozar el gráfico de f' a partir del gráfico de f. En este caso pretendíamos observar si los estudiantes manejaban los elementos matemáticos que surgen de la implicaciones contrarias a las utilizadas en la Tarea N°1.

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10), f'(14)$ y $f'(15)$. Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido.

Figura 2. Enunciado Tarea N°2

En la tarea N°3 (Figura 3), presentada en modo gráfico, se les solicitó a los estudiantes construir el gráfico de f a partir de la gráfica de f'. El objetivo de la tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones lógicas que vinculan: el crecimiento de f' con la convexidad de f, el signo de f' con la monotonía de f, los ceros y valores extremos de f' con los valores extremos y puntos de inflexión de f.

La figura muestra la gráfica de la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.

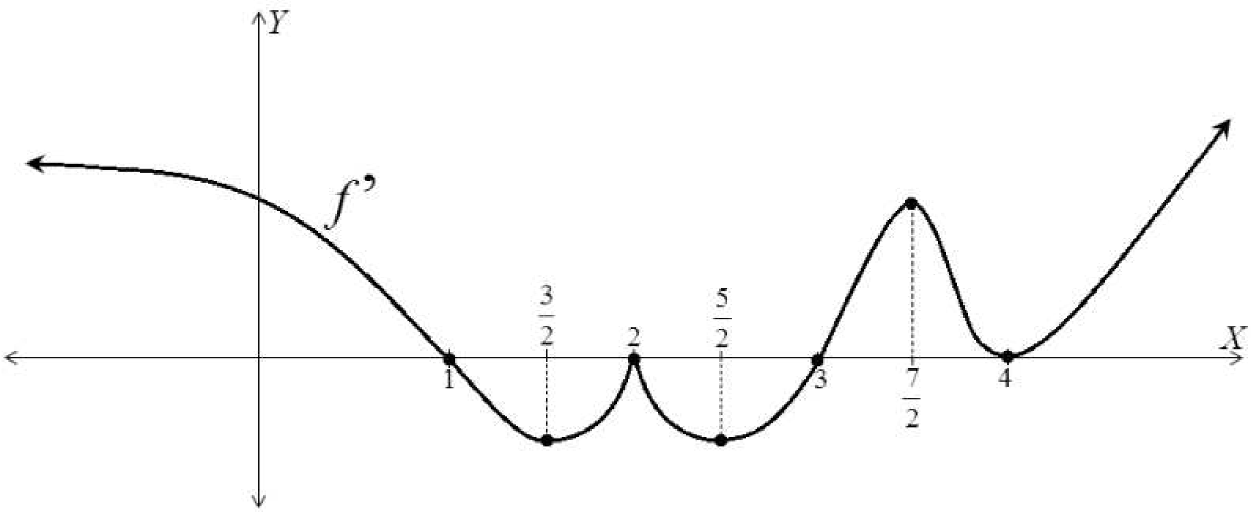
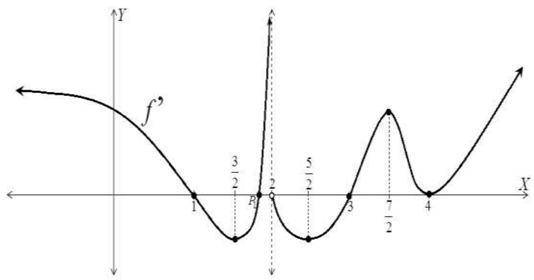


Figura 3. Enunciado Tarea N°3

El primer instrumento nos permitió, a través del análisis de los protocolos de resolución, clasificar a los estudiantes en los distintos niveles de comprensión del *esquema* de la derivada y nos sirvió como insumo para la elaboración del segundo instrumento que fue aplicado a los estudiantes asignados a nivel de comprensión *trans* del *esquema*. Este segundo instrumento correspondió a una entrevista clínica que tenía dos finalidades: (i) profundizar en el proceso de resolución de las tareas e (ii) indagar en la *tematización* del *esquema* de la derivada. Para esto último, realizamos modificaciones a las condiciones de las tareas del cuestionario (Tabla 1) con el propósito de identificar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, a una situación nueva.

Tabla 1. Modificaciones de las tareas del cuestionario

Tarea	Modificación	Pregunta
1	Eliminamos la condición c.	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de si eliminamos la condición c?
2	Suponiendo que la gráfica corresponde a f'.	Si la gráfica corresponde a f' ¿Qué sucedería con la gráfica de f en los puntos de abscisas $x=7$ y $x=14$?
3	Modificamos la gráfica de f' 	¿Qué sucedería con la gráfica de f en los puntos P_1 y $x=2$, si sabemos que f es continua?

La información obtenida en la entrevista clínica nos permitió ahondar en la caracterización del nivel de comprensión *trans* del *esquema* de la derivada y además, nos aportó información referente a la *tematización*. Sin embargo, para profundizar en la caracterización de la *tematización* del *esquema* de la derivada y la posible manifestación de fases de *tematización*, construimos una segunda entrevista clínica tomando como insumo la información aportada por los dos instrumentos anteriores. Este último instrumento fue aplicado a los estudiantes que identificamos que habían *tematizado* el e*squema*. Algunas de las interrogantes planteadas en la segunda entrevista se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Algunas interrogantes planteadas en la 2ª entrevista

Tarea	Pregunta
1	Atendiendo los elementos matemáticos del enunciado, me podrías ampliar en que te basas cuando consideras que $f'(3)\neq 0$. Y cómo influye esto con las otras condiciones de la tarea.
2	Al modificar la condición de que la gráfica dada es la de la función derivada y no la de la función qué pasa en los puntos $x=7$, $x=10$ y $x=14$.
3	Explica cómo interpretas la información de x_0. ¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas derivadas sucesivas (f' , f'' y f''') en $x=1$, $x=3$ y x_0? Justifícalo. (x_0 correspondía a un punto de inflexión de f')

ANÁLISIS

En una primera etapa realizamos el análisis de los protocolos de resolución de los 25 estudiantes considerando como criterio de valoración, la completitud de las tareas y del cuestionario en general. A partir del análisis redujimos el número de sujetos a solo nueve casos y utilizando como referencia los niveles de comprensión del *esquema* de la derivada descritos por Sánchez-Matamoros et al.

(2006) clasificamos a los estudiantes. Luego, nos centramos en los tres estudiantes (A1, A3 y A4) asignados al nivel de desarrollo *trans* para aplicar el segundo instrumento (Tabla 1) y confirmar que estos estudiantes ponían de manifiesto en sus respuestas, características del nivel comprensión *trans* y la *tematización*. En particular, para el análisis de la *tematización* consideramos dos propuestas: (i) la primera planteada por García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que indican que la *tematización* del *esquema* se evidencia en las estructuras subyacentes que se observan cuando un estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f'') y así sucesivamente; y, (ii) la propuesta planteada por Baker et al. (2000) y Trigueros (2005) que se relaciona con la modificación de alguna condición de las tareas planteadas. Según estas investigadoras, un estudiante que ha *tematizado* el *esquema* es capaz de desagrupar el *esquema* para utilizar las partes que lo componen cuando esto es necesario y reagrupar, nuevamente las partes que se necesitan en la solución de un problema, es decir, que puede movilizar las partes que requiere del *esquema* para dar respuesta a una nueva situación. Posteriormente, tras confirmar que estos estudiantes tenían *tematizado* el *esquema* de derivada, aplicamos un tercer instrumento (Tabla 2) que correspondió a una nueva entrevista para profundizar en la posible existencia de fases de *tematización* del *esquema*.

RESULTADOS

Presentamos la sección de resultados en dos apartados, en un primer apartado mostramos evidencia de la *tematización* del e*squema* y en el segundo mostramos las diferentes fases de la *tematización* del *esquema*, puesta de manifiesto por los estudiantes en el tercer instrumento.

Tematización del esquema de derivada

Una característica común en los estudiantes que habían *tematizado* el *esquema* se relaciona con la capacidad de coordinación de los elementos matemáticos puntuales y globales entregados en la Tarea N°1, lo cual les permitió apreciar la contradicción presente en las condiciones y modificar la tarea con el propósito de resolverla correctamente. Lo anterior, es un indicador de la coordinación de los elementos matemáticos correspondientes a un segundo nivel, es decir, al par $f' - f''$. Esto es un elemento diferenciador de los estudiantes con el *esquema tematizado*, pues el coordinar solo los elementos matemáticos puntuales y globales en un primer nivel correspondiente al par $f - f'$ también podía llevar a la resolución correcta de la tarea. Para ilustrar lo anterior se presenta, a modo de ejemplo, un fragmento de la tercera entrevista del estudiante A1.

E: ¿Qué es creciente por $x < 3$?

A1: La derivada primera. Es creciente por $x < 3$ porque f'' es estrictamente positiva. Es estrictamente creciente. Es positiva por aquí (indicando a la izquierda de $x = 3$) tiene un máximo en $x = 3$, que estará por aquí.

E: ¿Quién tiene un máximo en $x = 3$?

A1: La derivada primera tiene un máximo en $x = 3$.

E: Ah, vale.

A1: Porque f'' cambia de signo, de positivo a negativo. Por lo tanto, pasa de crecer a decrecer.

E: ¿Y éste es el argumento que tú utilizas para decir que no puede ser $f'(3) = 0$?

A1: Sí porque, por aquí es positiva y va creciendo (indicando a la izquierda $x = 3$). Por lo tanto, no puede cortar aquí, o sea no es posible.

Como se observa, el estudiante A1 establece conexiones entre los elementos matemáticos que vinculan el signo de f'' con la monotonía de f'. De esta forma, es capaz de observar la contradicción entre los elementos matemáticos.

Fases de la tematización del esquema

En relación al estado de *tematización* manifestado por los estudiantes, logramos observar variadas evidencias relacionadas con la identificación de la contradicción y la resolución correcta tanto de las tareas como de las modificaciones del cuestionario. Sin embargo, observamos diferencias en el uso que los estudiantes hacían de las derivadas sucesivas mostrando matices en cuanto a la forma de establecer y argumentar dichas relaciones. De esta forma, los datos nos permiten definir tres fases de la *tematización* del e*squema* relacionados con el establecimiento de dichas relaciones (Tabla 3) y que hemos denominado como: inicial, intermedia y avanzada.

Tabla 3. Fases de la *tematización* del *esquema*

Inicial	Intermedia	Avanzada
Presenta dificultades al establecer conexiones entre los elementos matemáticos de las derivadas sucesivas	Establece las conexiones que vinculan los elementos matemáticos de las derivadas sucesivas, utilizando funciones auxiliares para establecer dichas relaciones	Establece directamente las conexiones entre los elementos matemáticos de las derivadas sucesivas

A modo de ejemplo, en los siguientes párrafos se muestran fragmentos de la segunda entrevista que dan cuenta de las distintas fases de *tematización*. En una fase inicial se encontraría el estudiante A3 que, tal y como se muestra en el siguiente fragmento de la segunda entrevista, presenta dificultades y dudas al referirse a las derivadas sucesivas en el análisis de un punto de inflexión de la primera derivada.

E: El signo o el valor numérico, si puedes establecerlo.

A3: A ver, en uno, $f'(1)=0$ claramente, f'' va ser un valor negativo porque es como la pendiente de esta función y no lo sé, para saberlo [...]

E: Bueno pero ¿qué signo tendría $f''(1)$?

A3: Negativo

E: ¿Por qué?

A3: Decrece entonces es negativo.

E: ¿Y $f'''(1)$?

A3: $f'''(1)$, a ver si mi punto de inflexión está en $x=1$, entonces claro aquí hay un cambio de pasar de creciente a decreciente con lo que la $f'''(1)$ será cero, supongo. Tenemos un cambio de sentido de f'' (indicando cambio de signo).

E: ¿Y en $x=3$?

A3: En $x=3$ pasa lo mismo, porque tenemos un..., primero es cóncava después convexa, cambia de sentido, cambia de... no sé cuánto, no estoy muy segura de esto, f''' ... está muy lejos.

Esta evidencia pone de manifiesto que para algunos estudiantes que han *tematizado* el *esquema* de derivada, no siempre les es posible establecer las conexiones necesarias entre las derivadas sucesivas para justificar, en la entrevista, las respuestas de una resolución correcta de la tarea realizada.

Por su parte el estudiante A4 logra establecer las relaciones entre f', f'' y otras derivadas sucesivas considerando una nueva función F. Esto nos indica que este estudiante, para poder hacer uso de las relaciones $f''-f'''$, ha debido utilizar una función auxiliar F que se correspondiera con f', con lo cual F'' se corresponde con f''' y, por tanto, el análisis del punto de inflexión de f' lo realiza a través de F'', no siendo capaz de resolver el problema directamente. Esta evidencia corresponde a una manifestación de un nivel intermedio de *tematización* del *esquema* como se muestra en el siguiente fragmento de la segunda entrevista del estudiante A4.

E: Ese punto x_0 que está ahí que correspondería a punto de inflexión de f', porque estaría cambiando de concavidad, no es cierto ¿Qué cosas podrías decir sobre este punto x_0 con respecto a f'' o f'''?

A4: Ah, si cogemos la función ésta como la función normal digamos […].

E: O sea ¿cómo es eso de la función normal? Estás tomando que ésta…

A4: Sí eso es F ya no es f', le llamo F.

E: La estás llamando F, ok.

A4: Porque puedo llamarla así, básicamente. Con lo cual ahora, yo estoy hablando de un punto de inflexión normal, en la función primitiva, simplemente es un punto de inflexión. Me indica que la f'' será cero.

E: ¿Pero tú f'' sería…?

A4: La f'''.

E: ¿Sería la f'''?

A4: Sí, si yo digo que F, digamos f' la llamo F, con lo cual $f^{(n)} = F^{(n-1)}$, me voy ahí, y yo trabajo con la función que estoy acostumbrado y no cambio funciones, me es más fácil así.

Por otro lado, el estudiante A1 para responder a las interrogantes relativas a las derivadas sucesivas, no necesita considerar esta función auxiliar, tal y como le sucedía al estudiante A4. Este hecho muestra una manifestación distinta de la *tematización* del *esquema* de derivada relacionada con establecimientos de vínculos directos entre las derivadas sucesivas, lo cual puede observarse en el siguiente fragmento de la segunda entrevista del estudiante A1.

E: Ya ¿y cuál sería su valor o cuánto valdría f'…, f'' en x_0?

A1: La f'', está creciendo por lo que también es positiva. La f''' ya estaría anulada.

E: ¿Y por qué estaría anulada?

A1: Porque hay un punto de cambio de concavidad.

E: Ah, ok. O sea tú lo que estás haciendo es trasladar relaciones que…

A1: En cambio de mirar lo, lo…, la f'' en función de la…, o sea, en cambio de mirar la f'' en función de la primera función, veo la f''' en función de f'.

CONCLUSIONES

Los objetivos de este trabajo estaban enfocados en caracterizar la *tematización* del *esquema* de la derivada con el propósito de observar posibles diferencias o matices. Hemos encontrado evidencia que los estudiantes que han *tematizado* muestran coherencia y flexibilidad en el uso de los elementos matemáticos que asocian la función con f' y f'', tanto en las relaciones directas como contrarias pudiendo, además, extrapolar dichas relaciones a otros pares de derivadas sucesivas. Sin embargo, logramos identificar diferencias en cuanto al establecimiento de estas conexiones y a la forma en que se usan los elementos matemáticos y las relaciones lógicas en la *tematización* del *esquema* de derivada por parte de los estudiantes, ya que un estudiante presenta dificultades al establecer las relaciones entre f', f'' y f''', otro es capaz de hacer uso directo de estas relaciones, mientras que un tercer estudiante necesita referirse a una función auxiliar F que hace corresponder con f' y partir de las relaciones entre F, F' y F'' resuelve las tareas y traslada sus respuestas a f', f'' o f'''.

Finalmente, los resultados indican que la *tematización* del *esquema* de la derivada no es fácil de alcanzar, lo que queda de manifiesto en que, de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en cálculo diferencial, solo tres habían logrado *tematizar* el *esquema*.

Agradecimientos: Al Ministerio de Economía y Competitividad, por la financiación del Proyecto EDU2012-31464 y al equipo de GIPEAM–Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, con referencia 2014 SGR 972 de la Generalitat de Catalunya. Igualmente, a la Dra. Carmen Azcárate Giménez por su implicación y asesoría.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlin, Alemania: Springer.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA NOTES*, 37–54.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. y Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301–317.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(2), 191-206.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovic D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(4), 345-364.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. En J. J. Kaput *y* E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 31-46). Washington, D. C.: The Mathematical Association of America.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a las derivadas*. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., y Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Actas del XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 239-247). Jaen, España: SEIEM.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, *9*(5), 1023-1045.

Piaget, J. y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, S.A.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2007). Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Actas del XI Simposio de la SEIEM* (pp. 229-238). La Laguna, España: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *11*(2), 267–296.

Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification-the case of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The Concept Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. (Volumen XXV, pp. 59-84). Washinton, D.C: Mathematical Association of America.

Tall D. (1989). Concept image, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 37-42.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5–31.

Zandieth M., (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. En E. Dubinsky, A. H. Shoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education*, *8,* 103-127.