

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL EN EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL Y VALOR POSICIONALⁱ

Basic mathematical knowledge in a university degree on Primary Education: decimal numbering system and place value

Castro, Á., Gorgorió, N. y Prat, M.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentamos un estudio con futuros maestros sobre su conocimiento conceptual del sistema de numeración decimal (SND) y valor posicional (VP). En primer lugar, establecemos el conocimiento conceptual del SND y de la noción de VP como Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) para iniciar la didáctica de la adición y la sustracción. A continuación, presentamos parte de un instrumento para evaluar la comprensión conceptual del SND y del VP en base a dos dimensiones: el conocimiento de los principios generales y el conocimiento subyacente a los procedimientos. Al aplicarlo a 135 estudiantes del Grado de Educación Primaria observamos que, en su mayoría, ponen de manifiesto una comprensión fragmentada, incompleta y mecánica del SND y del VP.

Palabras clave: *Conocimiento matemático fundamental, formación de maestros, conocimiento conceptual, sistema de numeración decimal y valor posicional*

Abstract

We present a study of future teachers' conceptual knowledge of the decimal numbering system (DNS) and place value (PV). First, we establish the conceptual knowledge of the DNS and place value as Basic Mathematical Knowledge (BMK) to start the study of teaching and learning of addition and subtraction. Next, we introduce part of a research tool that we have designed to assess the conceptual understanding of the DNS and PV based on two dimensions: namely knowledge of general principles, and knowledge of principles underlying the procedures. When applying the assessment tool to 135 students in a university degree on Primary Education we observe that most of them show a fragmented, incomplete and mechanical understanding of the DNS and PV.

Keywords: *Basic mathematical knowledge, teacher education, conceptual knowledge, decimal numbering system, and place value*

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes del Grado de Educación Primaria (GEP) necesitan, al iniciar su formación, ciertos conocimientos matemáticos que incluyen elementos conceptuales y procedimentales. Así, en Castro et al. (2014), tras revisar las diferentes teorías del conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas, se establece el concepto de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF). Entendiendo el CMF como el conocimiento disciplinar básico en matemáticas, necesario para que el estudiante para maestro pueda construir con éxito el conocimiento pedagógico del contenido. Éste incluye el conocimiento de los conceptos, procedimientos y procesos de resolución de problemas que los alumnos del GEP han aprendido durante su etapa de escolarización y que necesitan al iniciar su formación.

La aritmética es una componente básica de las matemáticas en la escuela primaria, por lo que también debiera serlo en la formación matemática de los futuros maestros. Queremos determinar el CMF, en su aspecto conceptual, relativo a la adición y la sustracción para establecer hasta qué punto los estudiantes del GEP poseen dicho conocimiento al iniciar su didáctica.

Los datos presentados son la primera parte de un estudio en desarrollo para definir perfiles de conocimiento conceptual aditivo en los alumnos del GEP. En esta comunicación: (i) Establecemos el conocimiento conceptual del SND y de la noción de VP como CMF para iniciar la didáctica de la adición y la sustracción. (ii) Analizamos cualitativamente las respuestas de 135 alumnos del GEP a 2 de las 4 preguntas que evalúan este conocimiento, sin entrar a explicar los elementos que pueden influir en dicho conocimiento conceptual.

Como Crooks y Alibali (2014), entendemos el conocimiento conceptual cómo: a) conocimiento de los principios generales, que observamos a través la evaluación de tareas en las que se pide reconocer ejemplos, definiciones o afirmaciones de principios; y b) conocimiento subyacente a los procedimientos, que observamos a partir de la aplicación y justificación de tareas de procedimiento.

CONOCIMIENTO CONCEPTUAL EN MATEMÁTICAS

Investigaciones en el área destacan la importancia del conocimiento conceptual para el aprendizaje de las matemáticas pero no parece haber un consenso ni en su definición ni en la mejor manera de cuantificarlo (Star, 2005; Baroody, Feil y Johnson, 2007; Crooks y Alibali, 2014). Diferentes caracterizaciones del término sugieren que es equiparable a un conocimiento profundo, flexible y asociado a conocimiento significativo. En esta línea, una de las más reconocidas y utilizadas es la de Hiebert y Lefevre (1986); quienes lo describen como una rica red de relaciones entre piezas de información que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información –saber qué o porqué. Este conocimiento es flexible, no está vinculado a problemas específicos y es generalizable, siendo o no verbalizable. Visión recogida e interpretada a través de los años por autores como Carpenter (1986), Rittle-Johnson y Alibali (1999) o Rittle- Johnson, Siegler y Alibali (2001).

De las diferentes caracterizaciones del conocimiento conceptual recogemos la propuesta de Crooks y Alibali (2014) que lo organizan en: (i) conocimiento de los principios generales, incluyendo reglas, definiciones, conexiones y aspectos de la estructura del dominio; y (ii) conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, cómo saber porqué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso, sus conexiones y sus fundamentos conceptuales. A pesar que no está claro de qué forma se puede medir el conocimiento conceptual independientemente del conocimiento procedimental con un grado suficiente de validez, se usan diferentes tipos de tareas para evaluarlo, que incluyen tanto indicadores de conocimiento conceptual explícito como implícito.

Partimos de Crooks y Alibali (2014) para evaluar el conocimiento conceptual, tomando como indicadores cuatro tipos de tareas. Para la evaluación del conocimiento de los principios generales consideramos: (1) las tareas de explicación de concepto (definiciones, explicaciones de los elementos de la estructura de un dominio y normas o reglas); y (2) la evaluación de las tareas de ejemplo (ejemplos, definiciones o afirmaciones de principios). Para evaluar el conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, consideramos: (3) la aplicación y justificación de tareas de procedimiento; y (4) la evaluación de tareas de procedimiento, evaluándolas como correctas o incorrectas y juzgando si son apropiados en ciertas situaciones.

CMF CONCEPTUAL DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL Y DEL VALOR POSICIONAL

La numeración y el cálculo son componentes esenciales para el desarrollo del conocimiento matemático. Desde la perspectiva de la matemática escolar, se destaca la importancia del desarrollo del sentido numérico en los niños, señalando el papel clave que desempeñan los maestros en su

desarrollo (Yang, 2007; NTCM, 2000). Un sólido desarrollo del sentido numérico, involucra entre otros componentes, el conocimiento profundo del SND y del VP (Castañeda, 2000; Godino, Font, Konic y Wilhelmi, 2009; NTCM, 2000; Yang, 2007). Entre otros aspectos, estos conceptos son la base para la comprensión de las operaciones fundamentales con números, fracciones y decimales (Nataraj y Thomas, 2009). No obstante, la comprensión del SND y del VP suele representar una gran dificultad, tanto para los estudiantes de primaria, como para los futuros maestros.

Coincidimos con Salinas (2007) que al impartir las asignaturas de matemáticas y su didáctica, uno de los temas en los se detectan más errores conceptuales son los relacionados con el SND y el VP. Estudios que han abordado esta problemática en el contexto de la formación de maestros (McClain, 2003; Salinas, 2007; Ortiz, González y Gallardo, 2013; Montes et al., 2015), señalan que éstos inician su formación con un dominio técnico limitado en la comprensión de estos conceptos. Desde la perspectiva del CMF, el conocimiento disciplinar de partida permitirá construir con éxito el conocimiento pedagógico del contenido. Los futuros maestros deben propiciar espacios de aprendizaje para desarrollar la comprensión de estos conceptos fundamentales en los niños. Estarán difícilmente en condiciones de hacerlo si no cuentan con un conocimiento matemático sólido.

Ante esta situación, considerando algunas de las investigaciones realizadas en el área, tanto las ya mencionadas en el contexto de formación maestros como las desarrolladas con niños (Bedoya y Orozco, 1991; Nunes y Bryant, 2003; Nataraj y Thomas, 2009) y en relación a los libros de texto (Ruesga y Guimaraes, 2011; 2012), establecemos algunos aspectos de índole conceptual que consideramos fundamentales para una correcta comprensión del SND y del VP.

Entre los aspectos de carácter conceptual relacionados con los principios generales consideramos:

- la estructura recursiva multiplicativa en base 10 del SND.
- la escritura basada 10 dígitos.
- el significado del valor relativo y del VP de cada dígito.

Consideramos el conocimiento conceptual de los principios que subyacen a procedimientos como:

- Representar cantidades y números.
- Leer y escribir un número en letras y cifras.
- Comparar y ordenar números.
- Identificar el valor de los dígitos de un número.
- Contar hacia delante y hacia atrás, de 2 en 2, de 10 en 10, de 100 en 100...
- Redondear números.
- Componer, descomponer, combinar, transformar cantidades estructuradas.
- Reconocer y completar particiones y reagrupar números.
- Aplicar el conocimiento de VP para realizar cálculos.

EL ESTUDIO

Se trata de un estudio cualitativo de carácter interpretativo desarrollado con 135 estudiantes del GEP cuyo objetivo es determinar el CMF en su aspecto conceptual, que poseen los alumnos al iniciar la didáctica de la adición y la sustracción. En particular, esta comunicación se centra en el CMF relativo al SND y al VP.

Instrumento

Elaboramos dos cuestionarios, que evalúan los cuatro componentes del CMF aditivo. El primero incluye los bloques temáticos del SND y VP, y el bloque de los significados de la adición y la sustracción. Para cada bloque se elaboran cuatro tipos de preguntas considerando: (i) el contenido a evaluar; (ii) el tipo de conocimiento conceptual que involucra; y (iii) los indicadores de conocimiento conceptual. Un grupo de expertos validaron los bloques de preguntas de los cuestionarios, que fueron distribuidas estratégicamente, antes de fijar su versión final. Cada cuestionario contenía preguntas de bloques que se complementaban entre sí, a fin de triangular las respuestas de los alumnos, para descartar una incorrecta interpretación del enunciado.

Los cuestionarios fueron distribuidos en dos sesiones distintas, con un tiempo de 1 hora para responder cada una de ellas. Las preguntas se respondían individualmente, sin calculadora, y efectuando todos los cálculos en el propio cuestionario.

Tabla 1. Preguntas para evaluar el CMF en su aspecto conceptual del SND y valor posicional

Pregunta	Contenido a evaluar	Conocimiento Conceptual e indicadores
1) Completa y explica por qué. Forma 1: a) 5 centenas son ___ unidades = miles. b) 7 miles son ___ decenas = unidades. Forma 2: a) 50 centenas son ___ unidades = ___ miles. b) 70 miles son ___ decenas = ___ unidades.	Compresión de la estructura recursiva multiplicativa de la base 10 del SND	Principios que subyacen a los procedimientos
2) Escribe la decena más próxima de los siguientes números y explica por qué lo es: a) 43 b) 36 c) 68 d) 65	Redondeo de números para la parte del valor más cercano. Contar hacia delante y hacia atrás en las partes del VP. Valor relativo y de posición.	Aplicación y justificación de las tareas de procedimiento
3) ¿Cuántas centenas hay en el número 130.025? ¿Cómo se escribe en palabras el número 130.025?	Leer y escribir un número en letras y cifras.	
4) ¿Cuál (es) de las siguientes descomposiciones corresponde (n) al número 342? Enciérala (s) en un círculo. a) $3C + 4D + 2U$ b) $30D + 42U$ c) $2C + 14D + 2U$ d) $1C + 2D + 42U$ e) $34D + 2U$	Comparar cantidades estructuradas. Reconocimiento y uso de representaciones equivalentes del mismo número. Componer, descomponer, combinar y transformar cantidades estructuradas.	Principios generales Evaluación de tareas de ejemplo

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para el análisis de datos se organizaron las respuestas de los 135 alumnos en una hoja de cálculo-Excel considerando tanto el contenido a evaluar, el tipo de conocimiento conceptual y sus indicadores. Para describir el conocimiento sobre cada uno de los aspectos evaluados, organizamos las respuestas en 3 categorías dependiendo de la dificultad de la pregunta.

De manera general, observamos que el 64,8 % de los alumnos posee un conocimiento incompleto, y en gran medida insuficiente o inexistente (47,4 %) del SND y del VP. Presentamos el análisis y los resultados de 2 de las 4 preguntas de la Tabla 1 (preguntas 1 y 4), pues son las que poseen un mayor número de los componentes fundamentales a observar.

Análisis y resultados de la Pregunta 1: “Completar transformaciones y explicar por qué”

Esta pregunta evalúa la comprensión de la estructura del SND a través del conocimiento de los principios que subyacen a los procedimientos. Se utiliza como indicador de conocimiento conceptual la aplicación y justificación de tareas de procedimiento (Tabla 1), preguntando por 8 tipos de transformaciones entre unidades del SND, distribuidas de dos formas en el cuestionario. La primera de ellas, administrada a 60 alumnos, incluye transformaciones exclusivamente con números naturales y decimales (5C son __ unidades = __ miles); la segunda administrada a 75 alumnos sólo incluye transformaciones con números naturales (50C son __ unidades= __ miles).

Organizamos las respuestas de los alumnos según el número de transformaciones que realizan correctamente, tal como se muestra en la Tabla 2. Establecemos cuatro categorías: sin conocimiento (SC) cuando no contestan o no realizan ninguna transformación correcta; insuficiente (IS) cuando realizan 1 o 2 transformaciones; incompleto (IC) cuando realizan 3; y adecuado (AD) cuando hacen 4. Para contrastar las categorías establecidas en base a las respuestas correctas, analizamos los argumentos de los alumnos para justificar sus procedimientos, organizándolos en torno a 4 categorías: (1) no argumenta; (2) evidencia incomprensión (“No sabemos cuántas unidades y miles hay”); (3) su argumento se limita a añadir o quitar ceros (“Debes correr la coma o poner ceros”); y (4) establece relaciones de equivalencia (“1 mil son 1000 unidades y 100 centenas”).

Tabla 2. Transformaciones correctas en la pregunta 1 y tipos de argumento

Tipo cuestionario	Número transf. correctas	Tipo de argumento								Nivel Global		Nivel por tipo de cuestionario	
		No argumenta		Evidencia incomprensión		Se limita a añadir o quitar ceros		Establece relaciones equivalencia					
		Nº AL.	%	Nº AL.	%	Nº AL.	%	Nº AL.	%	Nº AL.	%	Nº AL.	%
Sólo números naturales	N/C	9	6,7	2	1,5	*	*	*	*	SC	19	14,1	25,3
	0	3	2,2	5	3,7	*	*	*	*				
	1	3	2,2	*	*	1	0,7	*	*	IS	6	4,4	8
	2	*	*	*	*	1	0,7	1	0,7				
	3	3	2,2	*	*	4	3	5	3,7	IC	12	8,9	16
	4	4	3	*	*	4	3	30	22,2	AD	38	28,2	50,7
Números naturales y decimales	N/C	4	3	2	1,5	*	*	*	*	SC	11	8,2	18,3
	0	1	0,7	2	1,5	2	1,5	*	*				
	1	4	3	2	1,5	1	0,7	*	*	IS	13	9,6	21,7
	2	4	3	*	*	2	1,5	*	*				
	3	5	3,7	4	3	4	3	2	1,5	IC	15	11,1	25
	4	6	4,4	*	*	6	4,4	9	6,7	AD	21	15,5	35
Totales		46	34,1	17	12,6	25	18,5	47	34,8		135	100	

Dependiendo si las preguntas involucran sólo números naturales, o naturales y decimales, vemos que se obtiene un mayor número de respuestas adecuadas cuando se trabaja sólo con naturales (50,7%) que cuando se incluyen decimales (35%).

Considerando las respuestas de los alumnos globalmente, tanto si aparecen naturales como decimales, tenemos:

- El 22,3% no demuestra conocimiento de este principio (SC). 17 no contestan. Los 13 que no realizan correctamente ninguna transformación parecen no ser capaces de transformar cantidades estructuradas utilizando diferentes unidades del sistema y confunden el valor relativo con el VP. Sus argumentos evidencian esta falta de comprensión al señalar, por ejemplo: “No sabemos cuántas unidades y miles hay, y no sabemos cuántas decenas y miles

hay”; o reflejan la idea de un procedimiento mecánico carente de significado para ellos: “Se suman o se restan 0 dependiendo si van a la derecha o la izquierda”.

- El 14% muestra un conocimiento incompleto o fragmentado. Los 19 alumnos que realizan correctamente 1 o 2 transformaciones, demuestran un conocimiento insuficiente (IS), ya sea manifestando una falta de comprensión al aceptar como válida cualquier solución ($7M = 0.007U$; $7M = 7U$; $7M = 700000U$); evidenciando una concepción errónea “No hay unidades ni decenas ni centenas”; o, una mala ejecución de un proceso mecanizado sin comprensión “Debes correr la coma tantos lugares como colocan en =”.
- El 20% muestra un conocimiento incompleto (IC). Logran establecer 3 transformaciones, pero evidencian dificultades cuando éstas se establecen en términos de unidades mayores que la unidad dada ($50C = 0.5M$; $5C = 50M$; $5C = 0.05M$). Este conocimiento fragmentado se asocia a un proceso mecánico de trasladar comas a la derecha o a la izquierda: “Colocamos 5 centenas en el C y luego tenemos que ir añadiendo 0 hasta llegar a la unidad que piden”; o al establecimiento de relaciones erróneas de equivalencia entre unidades del sistema: “Mil son 1000 unidades, por tanto es un cero menos en las decenas”.
- 43.7% parece demostrar una comprensión adecuada (AD), respondiendo correctamente las 4 transformaciones. Sin embargo, al observar sus argumentos vemos que 10 de ellos no argumentan y sólo 39 (30 de los cuales operaron sólo con números naturales) parecen tener una comprensión real al establecer relaciones de equivalencia entre las diferentes unidades del sistema: “1 centena son 100 unidades y 0.1 milésimas, y 1000 son 100 decenas y 1000 unidades”. Los 10 alumnos restantes parecen seguir con éxito un procedimiento mecánico: “Divides por 10 cuando bajas o multiplicas por 10 si subes”.

Análisis y resultados de la Pregunta 4: “Descomposiciones del 342”

Esta pregunta estudia el reconocimiento y uso de representaciones equivalentes de un mismo número y la composición y descomposición de números mediante la evaluación del conocimiento de los principios generales. Como indicador de conocimiento conceptual, se evalúan tareas de ejemplo. Todos los alumnos analizan 5 opciones (ver Tabla 1), determinando cuál o cuáles de ellas corresponden a descomposiciones del número 342.

Las respuestas de los alumnos se organizan en 4 categorías, según el número de descomposiciones que identifican. Sin conocimiento (SC) cuando no contestan; insuficiente (IS) cuando identifican 1 o 2 descomposiciones; incompleto (IC) cuando identifican 3; y adecuado (AD) cuando identifican 4. Sólo 36 alumnos (26,7%) reconocen todas las descomposiciones; 20 (14,8%) identifican 3 de las 4; 74 alumnos (54,8 %) reconocen 1 o 2; y 5 alumnos (3,7%) no contestan. En concreto:

- Ninguno de los alumnos que identifica alguna descomposición considera la alternativa incorrecta como válida, $1C+2D+42U$.
- 59 de los 60 que reconocen 1 descomposición eligen la más tradicional $3C + 4D + 2U$. Éstos decodifican los números del VP en su estricto orden, rechazando la idea de codificar centenas, decenas y unidades partiendo de valores que no se correspondan con el dígito que está en el VP.
- Los 14 que reconocen 2 descomposiciones, identifican $3C + 4D + 2U$, pero no reconocen $2C + 14D + 2U$ como válida. Sin embargo, aceptan como válidas las opciones que no expresan el numeral en términos de centenas, decenas y unidades, eligiendo $30D + 42U$ ó $34D + 2U$ como segunda opción. Esto explicaría por qué no eligen la opción incorrecta al estar expresada en los mismos términos. Interpretamos la elección de los alumnos debida a que las opciones $30D + 42U$ y $34D + 2U$ son visualmente similares a la opción $3C + 4D + 2U$, mientras que $2C + 14D + 2U$ y $1C+2D+42U$, al ser descomposiciones más complejas,

tienen números distintos. Otra interpretación sería que los que eligen $34D + 2U$ serían capaces de decodificar correctamente el número de decenas, pero sólo entenderían la unidad en términos de su VP (ven 2 como unidad, pero no 42 como unidad). Los que escogen $30D + 42U$, no parecen asociar $34D$ con 340 unidades, por lo que no la consideran como opción.

- Los 20 que reconocen 3 descomposiciones identifican $3C + 4D + 2U$, pero sus siguientes elecciones parecen variar en función de si interpretan los números del VP en su estricto orden. Esto los lleva a elegir como segunda y tercera opción $30D + 42U$ y $34D + 2U$ (17 alumnos). Mientras que los 3 que escogen $2C + 14D + 2U$ y $34D + 2U$ parece que no necesitan seguir el orden estricto para decodificar un número. No obstante su conocimiento no parece completo, reconocen 2 como unidad, pero no el número 42 como 42 unidades.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio coinciden con estudios similares sobre la observación de la práctica en la formación de maestros. Nuestros hallazgos sugieren que, tal como señalan Salinas (2007) y Montes et al. (2015), los futuros maestros presentan deficiencias en relación al SND y VP. No poseen una comprensión sólida de estos conceptos, presentando lagunas de conocimiento y errores conceptuales en estos contenidos que muchas veces se presumen sabidos al inicio de su formación.

Esta comprensión fragmentada, incompleta o mecánica del SND y del VP, queda reflejada en los argumentos que utilizan al justificar sus procedimientos en los cambios de unidades. También se observa en las diferentes soluciones que aceptan como válidas para estas transformaciones, así como para las representaciones equivalentes de un mismo número. Probablemente se deba a que tradicionalmente el concepto de VP se enseña sólo a partir de la base 10, en vez de ser introducido, como proponen Nataraj y Thomas (2009), como un caso particular de un concepto más general de la notación posicional. Por otra parte, observamos una diferencia importante en las respuestas según se deba operar sólo con números naturales o si aparecen también números racionales. Posiblemente esto es debido a que una comprensión deficiente o incompleta del SND repercute en la comprensión de los números racionales. Esto sugiere que para estudios similares al desarrollado sea interesante incluir tanto números naturales como números racionales, ya que trabajar sólo con números naturales podría disfrazar una comprensión incompleta.

El análisis realizado obliga a reconocer la dificultad que encierra para los futuros maestros el manejo del SND y de la idea de VP. Las “recetas” que en muchos casos encontramos en las aulas de Primaria aparecen en los argumentos de los futuros maestros en nuestra investigación. Esto lleva a plantear la necesidad de profundizar en su estudio durante su formación. Desafortunadamente la escuela parece ignorar esta complejidad y la reemplaza por un manejo mecánico del VP (Bedoya y Orozco, 1991). La profundización en el estudio del SND y del VP podría contribuir a evitar la transmisión de esta idea mecánica comúnmente asociada a su manejo en la escuela. Esperamos que el instrumento elaborado ad hoc para este estudio sea útil para otros investigadores en el proceso de identificación de los componentes del conocimiento conceptual de los futuros maestros.

Referencias

- Baroody, A., Feil, Y. y Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 115-131.
- Bedoya, E. y Orozco, M. (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 3(11-12), 55-62.
- Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as foundation for procedural knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.113-132). Hillsdale, MI: Lawrence.
- Castañeda, A. (2000). Sentido numérico. *Números*, 43, 267-270.

- Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.
- Crooks, N. y Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344-377.
- Godino, J., Font, V., Konic, P. y Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Sentido Numérico*, (pp. 117- 184). Granada: SAEM Thales y Universidad de Granada.
- Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, MI: Lawrence Associates.
- Montes, M., Contreras, L. C., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros: debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Nataraj, M. y Thomas, M. (2009). Developing understanding of number system structure from the history of mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 96-115.
- Nunes, T. y Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. Buenos Aires: Siglo XXI.
- Ruesga, P. y Guimaraes, G. (2011). Sistema de numeración decimal: un instrumento para seleccionar libros de texto de los tres primeros años de enseñanza. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil. <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/399.pdf>
- Ruesga, M. y Lisbôa, G. (2012). Los aspectos didácticos básicos del sistema de numeración decimal en los libros de texto. *Revista Eletrônica de Educação*, 6(1), 104-128.
- Rittle-Johnson, B. y Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175-189.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. y Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362.
- Salinas, M. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 381- 390). La Laguna: SEIEM.
- Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 404-411.
- Yang, D. (2007). Investigating the strategies used by pre-service teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics*, 107(7), 293-301.

ⁱ Trabajo al amparo del proyecto Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el grado de educación primaria: Matemáticas para maestros (EDU2013-4683-R). Las autoras son miembros del Grupo Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM) (2014SGR 00723).