EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO INFORMAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Informal probabilistic reasoning of high school students

Sánchez Sánchez, E. y Valdez Monroy, J. C.

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México

Resumen

El objetivo del trabajo es explorar cómo los estudiantes articulan sus conocimientos sobre los enfoques de probabilidad (clásico y frecuencial) para dar respuesta a preguntas de probabilidad. Se describen y analizan los razonamientos informales de 10 estudiantes de bachillerato (12º grado) que habían estudiado un semestre de probabilidad y estadística. Los datos se recogieron mediante un cuestionario con tres situaciones de urnas en las que se pide estimar probabilidades y hacer predicciones. El análisis revela que dicha articulación y los diferentes niveles en la calidad de las respuestas dependen de ideas informales de aleatoriedad, independencia y variabilidad, y de la manera en que se combinan para hacer predicciones con incertidumbre. Se concluye con una propuesta de las proposiciones informales correspondientes a estas ideas cuyo manejo potenciaría el razonamiento probabilístico informal de los estudiantes.

Palabras clave: *Razonamiento probabilístico informal, enfoque clásico, enfoque frecuencial, grandes ideas de probabilidad*

Abstract

The purpose of the work is to explore how students articulate their knowledge of two approaches of probability (classical and frequentist) to answer probability questions. Informal reasoning of 10 students (12th grade) who had taken a probability course of a semester is described and analyzed. Data were collected through a questionnaire with three urn situations in which students are asked to estimate probabilities and make predictions. The analysis reveals that such articulation and the different levels in the quality of the answers depend on the informal ideas that the students have about randomness, independence and variation, and how they are combined to make predictions with uncertainty. As a conclusion, informal statements on those ideas whose domain would enhance the informal probabilistic reasoning of students are proposed.

Keywords: *Informal probabilistic reasoning, classical approach, frequentist approach, big ideas of probability*

INTRODUCCIÓN

Los eventos y fenómenos aleatorios son sin duda más frecuentes en la naturaleza y en la sociedad que los fenómenos deterministas, por lo que la probabilidad es un área importante del pensamiento matemático y científico con un amplio rango de aplicaciones. Gal (2005) ofrece dos razones por las que es deseable y pertinente que los estudiantes aprendan probabilidad: una es cultural y formativa, la probabilidad es parte del conocimiento matemático y estadístico, y es la base para aprendizajes más complejos; la otra razón es práctica ya que ayuda a los estudiantes a prepararse para la vida. En la actualidad la probabilidad forma parte, en muchos países, de los currículos de matemáticas que van desde la enseñanza básica hasta la formación profesional; sin embargo, en las casi tres décadas transcurridas desde su introducción en la instrucción básica, se ha formado la creencia social de que

Sánchez Sánchez, E. y Valdez Monroy, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). Alicante: SEIEM.

la probabilidad es difícil de enseñar y de aprender. Aunque los resultados de las investigaciones didácticas sobre probabilidad no niegan dicha creencia, si avanzan en entenderla y explicarla.

A partir de las investigaciones, en la década de los 50, de Piaget e Inhelder (1975) sobre la génesis de la idea de azar en el niño, ha habido diversidad de estudios didácticos sobre el tema. Jones y Thornton (2005) identifican en la historia de la investigación en didáctica de la probabilidad tres periodos: i) piagetiano, ii) post-piagetiano y iii) contemporáneo. Chernoff y Sriraman (2014) preguntan cuáles serán las características de una próxima etapa en la investigación del pensamiento probabilístico y proponen llamarla periodo de asimilación. Sin saber cómo será dicho periodo, especulan que un rasgo sería la adopción de un enfoque unificado para la enseñanza y aprendizaje de las interpretaciones clásica, frecuencial y subjetiva de la probabilidad. Jones, Langrall y Mooney (2007), en su reseña de la investigación en didáctica de la probabilidad, propusieron cuatro temas adicionales a la agenda de investigación para la didáctica de la probabilidad propuesta por Shaughnessy (1992). El primero de esos temas se refiere al estudio de las concepciones de los estudiantes sobre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad; al respecto Jones et al. (2007) comentan: "…ha habido relativamente poca investigación sobre el pensamiento de los estudiantes acerca de la probabilidad experimental[i] y aún menos sobre el entendimiento de los estudiantes de las conexiones entre probabilidad teórica y la probabilidad experimental" (p. 946).

En la búsqueda de resolver el problema de las dificultades que implica la enseñanza de la inferencia estadística y su aprendizaje, se ha propuesto explorar la posibilidad de enseñar a razonar con las ideas que subyacen a los procedimientos de inferencia antes de su formalización (Prat y Ainley, 2008). La misma argumentación que justifica tal propuesta se puede aplicar a la probabilidad. Nos preguntamos si es posible identificar y desarrollar sobre la base de las intuiciones y conocimientos, razonamientos informales que incluyan las ideas principales de la probabilidad previamente o de manera paralela al aprendizaje de los procedimientos y cálculos tradicionales. En consecuencia, el presente trabajo se ubica en una línea de investigación que busca el desarrollo del razonamiento probabilístico informal como una condición que puede favorecer un mejor desempeño de los estudiantes en probabilidad.

Hasta el bachillerato los estudiantes tienen un nivel de razonamiento que Piaget (1950) llamó de las operaciones formales; esto significa que son capaces de manejar sistemas de conceptos, por lo que tienen la posibilidad de construir inferencias para articular redes de ideas básicas de probabilidad. Una red conceptual fundamental para este nivel lo constituyen al menos la definición clásica de probabilidad, el enfoque frecuencial y la ley de los grandes números; pero estos conceptos están relacionados con las grandes ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad. La pregunta de investigación que se pretende responder en este trabajo es la siguiente: ¿Cuáles son los rasgos importantes del *razonamiento probabilístico informal* en relación con los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad que pueden llevar a cabo los estudiantes de bachillerato?

ANTECEDENTES

En esta sección se hace referencia a una selección de estudios relacionados con las cuatro grandes ideas propuestas por Gal (2005) en su trabajo sobre competencia probabilística, a saber: aleatoriedad, independencia, variabilidad y predicción/incertidumbre. El objetivo es bosquejar un contexto para el marco conceptual que se propone en la siguiente sección.

Aleatoriedad. Batanero (2015) presenta un resumen de estudios importantes y discusiones sobre la aleatoriedad en su relación con la causalidad, la probabilidad, y los intentos de formalización del concepto, así como de las percepciones de la aleatoriedad de adultos, niños y profesores. Siguiendo algunas pistas ofrecidas por ella, referiremos estudios sobre aleatoriedad que aportan ideas relacionadas con nuestro objetivo. La aleatoriedad es un concepto resbaladizo que se resiste a caber en una definición simple (Batanero y Serrano, 1999; Gal, 2005). Ha sido concebida como lo opuesto a algo que tiene causas conocidas (Bennett, 1998) y su característica primordial es la imposibilidad de predicción; en la probabilidad clásica y en contextos de muestreo, la aleatoriedad se entiende como equiprobabilidad (ver Batanero y Serrano, 1999, para otras interpretaciones). Para Moore (1990) y Metz (1998), la aleatoriedad implica impredecibilidad en ensayos particulares y estabilidad a la larga de las frecuencias de ocurrencia de los eventos.

Independencia. Steinbring (1986) llamó la atención sobre el estatuto extraordinario de la independencia estocástica en la teoría de la probabilidad, analizando su desarrollo histórico y ubicándolo en una perspectiva didáctica. Por otro lado, los psicólogos Tversky y Kahneman (1982) mostraron que mucha gente realiza juicios en situaciones de incertidumbre con base en la heurística de representatividad, ignorando en muchos de ellos la independencia de las situaciones, o no haciendo las inferencias apropiadas de ella, aun cuando debería ser evidente reconocerla, como en el caso de la independencia de los resultados de lanzamientos sucesivos de una moneda. Varias investigaciones en didáctica de la probabilidad se relacionan con la representatividad y la independencia; en particular, se han identificado los efectos de recencia positiva y recencia negativa (la falacia del jugador) (Cox y Mouw, 1992; Fischbein y Schnarch, 1997; Fischhoff, 1982; Gal y Baron, 1996; Shaughnessy, 1981). Por otro lado, la independencia estocástica se relaciona con el concepto de probabilidad condicional; de este tema hay una gran cantidad de estudios didácticos que no constituyen antecedentes para el presente trabajo.

Variabilidad estadística. La importancia de incluir el análisis de la variabilidad en los estudios de didáctica de la probabilidad y la estadística fue señalada inicialmente por Green (1993). Shaughnessy (1997) más tarde llama a los educadores a poner atención en lo que denominan variación; comenta el problema de los dulces (Utilizado en las evaluaciones nacionales del progreso de la educación de los Estados Unidos de América): Una urna tiene 50% de dulces rojos, 30% de dulces amarillos y 20% de dulces verdes. Se van a sacar 10 dulces al azar ¿Cuántos dulces rojos crees que van a salir? Una respuesta frecuente es 5; la debilidad de esta respuesta, que era considerada correcta, se pone en evidencia cuando se pide que se propongan los resultados de llevar a cabo 5 veces el experimento y la mayoría de los estudiantes responden lógicamente 5, 5, 5, 5, 5; Shaughnessy se pregunta dónde está la "variación". A partir de dicho cuestionamiento se han publicado diversos trabajos didácticos relacionados con la variabilidad aleatoria; algunas referencias de estos estudios se pueden encontrar en Sánchez, Borim y Coutinho (2011).

Predicción/Incertidumbre. La más clara e inmediata relación entre predicción e incertidumbre en la teoría de la probabilidad se aprecia en la Ley de los Grandes Números (LGN). Aunque la versión matemática de esta ley ha sido y es un tema de cursos universitarios avanzados de probabilidad, con la ayuda de recursos tecnológicos se han vislumbrado trayectorias para incluir versiones empírico-virtuales de dicha ley en la enseñanza básica. Stohl y Tarr (2002) y Stohl, Rider y Tarr (2004) utilizan el software *Probability Explorer*; en el primer caso, para observar cómo estudiantes de primaria hacen inferencias sobre la probabilidad de un evento, a partir de muestras grandes de un experimento aleatorio (generadas con la computadora); en el segundo, para promover y observar en estudiantes de secundaria, y con ayuda de la herramienta tecnológica, cómo establecen las conexiones entre 'probabilidad experimental' y 'probabilidad teórica'. Es decir, cómo llegan a comprender que las frecuencias relativas tienden a la probabilidad, cuando el número de sorteos de la variable aleatoria crece. Estos estudios se enfocan sólo a ciertos aspectos de la LGN, sin explorar el pensamiento sobre la incertidumbre.

Ireland y Watson (2009) y Konold et al. (2011) abordan el mismo problema con estudiantes de secundaria utilizando el software *TinkerPlots*. Para Ireland y Watson un aspecto crucial en el proceso es la necesidad de que los estudiantes establezcan una conexión entre las experiencias reales y las experiencias virtuales (simuladas); es decir, el problema es que los estudiantes vean que una simulación es una genuina representación de una situación real y que los resultados vistos en ella se transfieran a ésta. Informan que los estudiantes llegan a saber cómo determinar la probabilidad teórica de un proceso simulado, pero conservan serias dificultades para entender la

LGN. Konold et al. (2011) estudian un caso en el que una estudiante (14 años) de elevado talento no consigue organizar en un todo coherente sus concepciones sobre ‘probabilidad estimada o empírica’ y ‘probabilidad teórica (clásica)’, manteniéndolas como opciones independientes. Ella cree que no puede haber un solo valor que exprese la probabilidad, pues ésta varía de ensayo a ensayo. La probabilidad teórica es una guía, pero no la relaciona con la convergencia de las frecuencias relativas hacia la probabilidad. Estos estudios aportan sólidos antecedentes para construir y explorar trayectorias para los estudiantes de bachillerato en las que no se evite la incertidumbre sino que aprendan a aceptarla y organizar los conceptos de la LGN para tratar de manera racional con ella.

MARCO CONCEPTUAL

El marco que se ha elegido para organizar los resultados del análisis consiste de tres componentes importantes: i) Razonamiento probabilístico informal, ii) las grandes ideas de probabilidad y iii) los enfoques de la probabilidad (clásico y frecuencial).

Cuando se habla de *razonamiento probabilístico* se puede hacer referencia a dos ideas en relación; por un lado, los argumentos que tienen como premisas y conclusiones enunciados de probabilidad, es decir, que involucran conceptos matemáticos de probabilidad; por el otro, los procesos de entendimiento y construcción de tales argumentos. El *razonamiento probabilístico informal* es el modo en que los estudiantes utilizan sus conocimientos y creencias para entender y argumentar la respuesta a una pregunta, la solución a un problema o la verdad de un enunciado probabilístico con los que se comprometen. También es dual; por un lado, son las representaciones o formulaciones que hacen de los razonamientos que contienen enunciados informales de probabilidad; por otro, los procesos en que los estudiantes descubren y justifican enunciados de probabilidad con base en sus conocimientos y sin utilizar los métodos y técnicas matemáticas formales de la probabilidad.

La segunda componente está formada por cuatro conceptos clave de la probabilidad: *aleatoriedad*, *independencia*, *variabilidad, predicción /incertidumbre*, que Gal (2005) sitúa como parte de las ‘grandes ideas’ de la competencia probabilística. La *aleatoriedad* se asocia con la impredecibilidad de los resultados y con la regularidad estadística, es decir, que sus frecuencias relativas tienden a estabilizarse. La *independencia* se presenta cuando el resultado de un evento no altera las probabilidades de otros eventos (previos, simultáneos o futuros). La *variabilidad* en probabilidad se refiere a las diferencias entre las frecuencias de los eventos y los valores esperados o las frecuencias relativas y la probabilidad de los eventos. La dualidad *predicción/incertidumbre* es una relación que se construye en combinación con los conceptos anteriores y su representación formal es la LGN.

La tercera componente se refiere a los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad. Aunque la aplicabilidad del enfoque clásico es muy limitada, tiene un valor didáctico enorme pues permite construir modelos de probabilidad (distribuciones) de situaciones manipulables. No obstante, dichos modelos son estáticos y con pocas posibilidades de aplicación si no se vinculan con el enfoque frecuencial de probabilidad. Al hacerlo, los modelos construidos con el enfoque clásico se vuelven instrumentos de predicción (con incertidumbre) que revelan el potencial y sentido práctico de la probabilidad. Aunque la LGN es un teorema más general de la probabilidad que no depende de la definición clásica, lo cierto es que una interpretación o instancia de dicha ley expresa la relación entre el enfoque clásico y el enfoque frecuencial de probabilidad.

METODOLOGÍA

El presente estudio es de tipo cualitativo y exploratorio ya que los datos son las respuestas de los estudiantes en las que se buscan rasgos de la manera en que razonan con ideas de probabilidad. Los participantes en el estudio fueron 10 alumnos del tercer grado de bachillerato (17-18 años), equivalente a 12º grado. Al momento del estudio asistían a la clase de Probabilidad y Estadística II, por lo que tenían los conocimientos básicos de un primer curso de probabilidad, en particular, habían estudiado los enfoques clásico y frecuencial.

El instrumento para la recolección de datos consistió de un cuestionario de tres situaciones con tres preguntas cada una (ver Apéndice). La primera es una adaptación de un problema de Metz (1998) y la segunda de Cañizares (1997). A continuación se exponen las situaciones, las respuestas normativas y las ideas que exploran.

> *Situación 1*. El resultado de 1000 extracciones de una urna (una muestra) que contiene 4 bolas (entre blancas y negras), fue de 489 bolas blancas y 511 bolas negras: a) ¿Cuántas bolas blancas y cuántas negras tiene la urna? B) Si se realiza la extracción 1001, ¿qué color de bola crees que se obtendrá? C) ¿Qué color de bola consideras que se obtuvo en la primera extracción? Justifica tus respuestas.

La respuesta normativa es que el contenido de la urna es de 2 bolas blancas y 2 negras, ya que bajo esta hipótesis el resultado dado de las 1000 extracciones es plausible. En la pregunta 1b, se espera que la respuesta sea *se tiene la misma expectativa de bola blanca o negra*. En la pregunta 1c, la respuesta es que pudo ocurrir *cualquiera de los dos eventos*.

El estudiante debe evaluar que la *variabilidad* de los resultados respecto a los valores del modelo equiprobable (2 blancas y 2 negra) es poca y, por tanto, aceptable; el resultado sería casi imposible con cualquier otro modelo de urna con la restricción de contener 4 bolas. En las respuestas a las preguntas 1b y 1c se debe considerar el modelo establecido y la *independencia* de las extracciones; pero también se explora la *aleatoriedad*, en el sentido de que el estudiante debe inferir que no es posible predecir con certeza lo que se obtendrá en un ensayo, o decir lo que ocurrió en el primer ensayo sin más información.

> *Situación 2*. Se tienen dos urnas: La urna B contiene 6 bolas en total (entre blancas y negras) y la urna C contiene 3 bolas en total. Se hicieron 1000 extracciones al azar de cada urna. En la urna B se obtuvieron 324 bolas blancas y 676 bolas negras. En la urna C se obtuvieron 344 blancas y 656 negras. A) ¿Cuál urna elegirías para hacer la extracción 1001, de tal forma que la bola resultante sea negra? B) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna B en la extracción 1001'? c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna C en la extracción 1001'? Justifica tus respuestas.

En esta situación se espera que los estudiantes deduzcan los contenidos de ambas urnas: B con 2 blancas y 4 negras; C con 1 blanca y 2 negras. Una vez hecha esta hipótesis, la repuesta a la pregunta segunda es que *cualquier urna se puede elegir*, no hay diferencia entre ellas. La respuesta a la pregunta 2b es 2/3, y la respuesta a la pregunta 2c es también 2/3.

La respuesta a la pregunta segunda se basa en la identificación de que ambas urnas son equivalentes, asumiendo que la diferencia entre los resultados y los valores esperados es parte de la *variabilidad* natural del fenómeno, ya que 9 y 11 de mil es relativamente poco. Se debe tener en cuenta también la *independencia* del resultado 'bola negra' de lo ocurrido en ensayos anteriores. Asimismo, es necesario considerar la *aleatoriedad*, es decir, que con ninguna urna se puede asegurar obtener bola negra en la extracción 1001. En las respuestas a las preguntas 2b y 2c se deben considerar los modelos establecidos y la *independencia* de las extracciones.

> *Situación 3*. Los resultados de sacar 10 bolas de cada urna se presentan en seguida (con los contenidos establecidos en el inciso anterior: B: 2 blancas y 4 negras; C: 1 blanca y 2 negras):

Tabla 1. Resultados de 10 extracciones hechas de las urnas B y C (b = bola blanca, n = bola negra).

Urna B	*n*	*b*	*n*	*n*	*n*	*n*	*N*	*n*	*b*	*N*
Urna C	*b*	*n*	*n*	*n*	*n*	*b*	*B*	*b*	*n*	*B*

a) ¿Cuál urna elegirías para hacer la onceava extracción de tal forma que la bola resultante sea blanca? B) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola blanca de la urna B en la onceava extracción'? c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola blanca de la urna C en la onceava extracción'? Justifica tus respuestas.

En esta situación los estudiantes deben responder con base en la hipótesis establecida en la situación anterior: B con 2 blancas y 4 negras; C con 1 blanca y 2 negras. Por tanto, se espera que la respuesta a la pregunta tercera sea que *cualquier urna puede ser elegida*; la respuesta a las preguntas 3b y 3c es 1/3 en ambos casos. Las preguntas se responden bajo la hipótesis de que las extracciones son *independientes* y teniendo en cuenta el modelo (Urna B: 2 blancas y 4 negras; Urna C: 1 blanca y 2 negras). Sin embargo, puede surgir la cuestión de si la *variabilidad* de los resultados observados (Urna B: 2 blancas y 8 negras, Urna C: 5 blancas y 5 negras) respecto al modelo es aceptable. Teniendo en cuenta la *aleatoriedad* se puede deducir que una desviación de ocurrencias de 2 o 3 resultados respecto al valor esperado es posible. El valor esperado está entre 6 y 7 (6.67), luego los resultados 8 y 5 no representan desviaciones mayores a 2 unidades.

La aplicación del cuestionario se efectuó dentro del horario de clases y los estudiantes tuvieron 50 minutos para responderlo. Se comunicó a los participantes que los resultados contribuirían a su evaluación; esto con el fin de que se comprometieran con los problemas y sus soluciones. Las respuestas fueron transcritas, analizadas y, posteriormente, clasificadas.

En un primer momento, se comparan las respuestas de los estudiantes a una misma pregunta para identificar grupos de respuesta con rasgos comunes y se hace una descripción de los principales grupos en términos de las grandes ideas de la probabilidad y/o del enfoque de probabilidad subyacentes en las respuestas. En un segundo momento, se analizan las respuestas desde la perspectiva de las grandes ideas de aleatoriedad, independencia y variabilidad, con el fin de describir los diferentes niveles en la calidad de las respuestas. El resultado se resume en una tabla semejante a las propuestas por Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997), pero tomando como base las grandes ideas propuestos por Gal (2005).

RESULTADOS

Descripción de las respuestas a los situaciones 1, 2 y 3

La exposición de los resultados está organizada de manera que se presentan descripciones resumidas del conjunto de respuestas de cada una de las preguntas del cuestionario; tales descripciones tienen como referencia las respuestas puntuales a cada uno de los incisos de las tres situaciones planteadas en el cuestionario, codificadas y resumidas en la Tabla 2

Tabla 2. Respuestas de los alumnos a las preguntas

	Situación 1			Situación 2			Situación 3		
Alumno	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3ª	3b	3c
A1	3/4	N	n	B	677/1001	657/1001	C	3/11	6/11
A2	1/2	n/a	n	B	677/1001	657/1001	C	2/11	6/11
A3	511/1000	n	n	B	1	0	C	0	1
A4	3/4	n	n	C	4/6	2/3	C	3/11	4/11
A5	1/2	Cualquiera	n/a	B	0.677	0.656	C	3/4	1/2
A6	1/2	n/a	Cualquiera	B	676/1000	4/6	C	2/10	5/10
A7	1/2	b/a	n/a	C	4/6	2/3	C	2/6	1/3
A8	511/1000	n	n	B	676/1000	656/1000	C	2/10	5/10
A9	1/2	n	b/a	C	676/1000	656/1000	C	2/10	1/2
A10	1/2	b/a	n	B	4/6	2/3	C	1/5	1/2

Situación 1. La pregunta 1a pide deducir la cantidad de bolas negras y bolas blancas de una urna que tiene en total 4 bolas, sabiendo que de 1000 extracciones de una bola, con remplazo, en 489 ocasiones salieron blancas y en 511 salieron negras. En la pregunta 1b se pide predecir lo que

podría ocurrir en una siguiente extracción, es decir, en la extracción 1001; por último, en la pregunta 1c se pide indicar el color de la bola que pudo haber salido en la primera extracción.

Un grupo de seis estudiantes respondió que el contenido debía ser 2 bolas blancas y 2 negras (hemos indicado esta respuesta con "1/2" en la Tabla 2). De éstos, A5, A6 y A7 responden a las dos preguntas siguientes con respuestas indeterminadas ("cualquiera") o eligiendo un color pero aclarando que podría ser cualquiera ("n/a" = negra pero aclarando que puede ser cualquier color; "b/a" = blanca, aclarando). En contraste, A2, A9 y A10, sólo en una pregunta aclaran que puede ser cualquiera, pero en la otra eligen un color determinado influidos por la proporción en la muestra y no con base en el modelo propuesto por ellos mismo (2b, 2n). Los cuatro alumnos restantes no proponen un modelo de urna equiprobable; dos de ellos sugieren que la urna debe tener 3 bolas negras y una blanca, para explicar la mayor proporción de bolas negras en la muestra, mientras que los otros dos no tienen en cuenta la restricción de que la urna tiene sólo 4 bolas y proponen una urna que reproduce las cantidades de la muestra.

En resumen, se encuentran tres patrones de respuesta:

- Aceptan la variabilidad en la muestra como posible resultado del modelo equiprobable y la ignoran al hacer predicciones.
- Reconocen el modelo equiprobable, pero consideran la variabilidad en la muestra como significativa; es decir, que la proporción de bolas negras o blancas en la muestra marca una tendencia sobre lo que realmente ocurre.
- Deducen un modelo no-equiprobable que refleja la diferencia entre los resultados en la muestra.

Situación 2. En la situación 2 se proponen dos urnas, B y C, con bolas blancas y negras, cuyo contenido es de 6 y 3 bolas, respectivamente, pero sin indicar la proporción de bolas de cada color. Adicionalmente, se ofrecen los resultados de 1000 extracciones de una bola, con remplazo, de cada una de las urnas: 324 blancas y 676 negras de la urna B; 344 blancas y 656 negras de la urna C. En la pregunta 2a se pide elegir una urna con la intención de obtener una bola negra en la extracción 1001; en la pregunta 2b se pide asignar un valor numérico al evento "sale bola negra de la urna B en la extracción 1001", y en la pregunta 2c se pide lo mismo en relación a la urna C.

En la Tabla 2 se observa que para la pregunta 2a, siete estudiantes eligen la urna B, que contiene 6 bolas, y 3 eligen la urna C, que contiene 3 bolas; ninguno indicó que daba lo mismo elegir cualquier urna. Para la pregunta 2b, de los que eligen la Urna B, sólo A10 asigna la probabilidad 4/6 al evento "salir bola negra de la urna B en la extracción 1001", A6 y A8 le asignan la frecuencia relativa de la muestra de las mil extracciones dada para la urna B; para este mismo inciso A1 y A2 proponen la frecuencia relativa más una unidad en el numerador y en el denominador (677/1001); es decir, se ofrece la frecuencia relativa añadiendo un resultado exitoso; mientras que A5 proporciona un valor inesperado (0.677). De los tres alumnos que eligen la urna C, A4 y A7 proporcionan la probabilidad 4/6, mientras que A9 da la frecuencia relativa. Para la pregunta 2c, A4, A6, A7 y A10, con base en el contenido de la urna C, asignan la probabilidad 2/3 al evento "salir bola negra de la urna C en la extracción 1001"; A5, A8 y A9 asignan la frecuencia relativa de la muestra de la urna C, y A1 y A2 asigna la misma frecuencia relativa más una unidad en el numerador y el denominador. En sus respuestas, A3 asigna 1 al evento "obtener bola negra de la urna B" (*Éxito*) y 0 al evento "obtener bola negra de la urna C" (*Fracaso*).

De lo anterior se distinguen los siguientes patrones de respuesta:

- Deducen los modelos implicados, asumiendo que la diferencia entre los resultados y los valores esperados es parte de la *variabilidad* natural, pero no identifican que son equivalentes.

- Eligen una urna y asignan la frecuencia relativa a los eventos teniendo a las muestras como su único referente.
- Asignan la frecuencia relativa de la muestra agregando un éxito (bola negra), el cual atribuyen a la extracción 1001.
- Asigna el valor 0 ó 1 con base en la idea de la variable aleatoria binomial.

Situación 3. En la situación 3 se ofrecen muestras de 10 resultados para cada urna, indicando que de 10 extracciones de la urna B resultaron 8 negras y 2 blancas, y de 10 extracciones de la urna C, 5 negras y 5 blancas. Conviene aclarar que se mantienen los contenidos de las urnas: la B contiene 4 negras y 2 blancas, y la C contiene 2 negras y una blanca. En la pregunta 3a, se pide elegir una de las urnas para obtener bola blanca en la onceava extracción. En la pregunta 3b, se debe asignar un valor numérico al evento "obtener una bola blanca en la 11^{va} extracción de la urna B"; mientras que en el inciso c, se pide lo mismo, pero en relación a la urna C.

Todos los estudiantes eligieron la urna C como respuesta a la pregunta 3a. En la pregunta 3b, sólo A7 se basó en el modelo y asignó 2/6 al evento de obtener blanca de la urna B. Para cuatro estudiantes (A6, A8, A9, A10) la respuesta fue la frecuencia relativa (2/10 ó 1/5) de la muestra de resultados de la urna B. A1 y A4 responden 3/11, que corresponde a la frecuencia relativa de la muestra de la urna B añadiendo un éxito, mientras que A2 y A5 proporcionan valores inesperados (2/11 y 3/4). Por su parte, A3 asigna el valor 0, que representa el valor de *Fracaso* en la binomial. En la pregunta 3c, sólo A7 respondió con base en el modelo de urna (1/3); cinco respuestas fueron 1/2 ó 5/10, (A5, A6, A7, A8, A9, A10) que representan la frecuencia relativa de blancas en la muestra C; A1 y A2 dan la frecuencia relativa agregando un éxito (6/11); finalmente A4 responde atípicamente con 4/11, mientras que A3 asigna el valor de *Éxito* de la binomial, es decir, 1.

Los patrones que se perciben en las respuestas son:

- No logran articular los modelos con las muestras respectivas, debido a que no aceptan como natural la *variabilidad* que se observa.
- Eligen una urna y asignan la frecuencia relativa a los eventos teniendo a las muestras como su único referente.
- Asignan la frecuencia relativa de la muestras agregando un éxito (bola blanca), el cual atribuyen a la onceava extracción.
- Asigna el valor 1 ó 0 con base en la idea de la variable aleatoria binomial.

Análisis de las respuestas de los estudiantes

En esta sección se destacan las respuestas de los estudiantes de acuerdo a las categorías del marco.

Aleatoriedad. Considerar la aleatoriedad en las situaciones de probabilidad no es tan inmediato como podría suponerse, ya que varias de sus consecuencias importantes no son intuitivas. Si se acepta que un fenómeno es aleatorio, la consecuencia directa es que sus resultados son impredecibles, mientras prever cierta estabilidad de las frecuencia relativas de los eventos alrededor de un valor conforme se repite el fenómeno muchas veces (Moore, 1990) o esperar secuencias desordenadas sin patrón aparente y con rachas relativamente largas, supone un conocimiento más elaborado de la aleatoriedad (Batanero y Serrano, 1999).

No todos los estudiantes encuestados pudieron sacar la consecuencia directa de la aleatoriedad y expresarla en las respuestas en las que era posible y pertinente hacerlo. Por ejemplo, en la Situación 1, inciso b, se pregunta: "Si se realizara la extracción 1001, ¿qué color de bola crees que se obtendrá?" Una respuesta razonable es "cualquiera de los dos colores, bola blanca o bola negra". En cuatro respuestas las expresiones de los alumnos ignoran la aleatoriedad, en la primera hay un cierto matiz al usar el verbo "obtendrá" pero en los otros casos la respuesta es determinista:

A7: Obtendría bola blanca. *P(B) = P(N),* así que la probabilidad no se inclina hacia la bola negra o blanca, así que sólo extraje una bola blanca.

A4: Negra, ya que tienen mayor cantidad de bolas negras, según muestra la tabla 1.

A8: Una bola negra ya que hay mayor probabilidad de que salga al tener mayor cantidad de ellas.

A9: Negra, ya que la distribución [*489 bolas blancas, 511 negras*] favorece a este color.

En contraste en seis casos las respuestas utilizan expresiones que indican incertidumbre acerca de lo que puede ocurrir:

A1: Se estimaría que salga negra, ya que su probabilidad es mayor. Negra (511⁄1000).

A2: Solamente existen dos posibles resultados en el experimento [*cualquiera se puede presentar*], pero en este caso salieron más negras que blancas [*489 bolas blancas, 511 negras*], puede salir otra negra.

A3: Creo que saldría negra, porque en las extracciones pasadas salieron bolas negras 511 de 1000 y sólo 489 blancas de 1000 extracciones.

A5: Puede ser de cualquier color, pero en su mayoría, la probabilidad de que salga bola negra es mayor, ya que así se observa en la tabla de las 1000 extracciones.

A6: […] creo que saldría negra basándome en previos resultados.

A10: Posiblemente la blanca, porque tienen la misma probabilidad que la negra.

Sólo en una respuesta se expresa que puede ocurrir cualquier color de bola en la extracción 1001, no obstante, en todas se considera que los resultados de la muestra influyen en la probabilidad de la extracción 1001. Esta atribución de más probabilidad a que ocurra una de las bolas, se infiere de observar las muestras de resultados; es decir, no se reconoce la independencia de las extracciones.

Independencia. La independencia de experiencias o sorteos implica que los resultados de una de ellas no afectan las probabilidades de los eventos de la otra. En términos informales se dice que no 'tienen que ver una con otra', 'que no se afectan', etc., mientras que formalmente se caracterizan por satisfacer alguna forma de la regla del producto. Una consecuencia de asumir que los sorteos de una experiencia son independientes es ignorar la información de lo que ha ocurrido y mantener las probabilidades constantes. En cambio, los efectos de recencia positiva y recencia negativa, al observar secuencias de resultados, son sesgos frecuentes en los razonamientos de los estudiantes que violan la independencia.

Una de las manifestaciones de la percepción de la independencia por parte de los estudiantes se observa en la pregunta 2b: ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola negra de la urna B en la extracción 1001'?

En tres casos se asigna la probabilidad 4/6, es decir, se ignoran los resultados:

A4: 4⁄6, ya que la probabilidad de que salga una bola negra son 4⁄6, según muestra la tabla [*324 bolas blancas, 676 bolas negras*]. Tomando en cuenta el valor del total de bolas extraídas [*1000*], es mayor al número de bolas [*negras*] extraídas.

A7: P(N) = probabilidad de bola negra. P(B) = probabilidad de bola blanca. P(N) = 4⁄6.

A10: 4⁄6, porque son 6 bolas con una probabilidad [*cantidad*] estimada de 4 bolas negras.

Mientras que seis estudiantes asignan una probabilidad que depende de lo ocurrido en la muestra; estas respuestas olvidan el modelo de urnas que define la situación y se centran en los resultados observados; al hacerlo no consideran la independencia:

A1: 677⁄1001 ⇒ Puesto que en la extracción 1000 la probabilidad era de 676⁄1000 al aumentarle otra bola y otra extracción esto daría como resultado 677⁄1001.

A2: Urna B: negras = 677/1001; blancas = 324/1001.

A5: P(A): ‘Sacar una bola negra de la urna B’. P(A) = 0.677.

A6: De que salga bola negra en la 1001 tenemos una probabilidad 676⁄1000.

A8: P(Bola negra) = 324/1000.

A9: 676⁄1000, ya que esa es la probabilidad que me indica en las primeras 1000 extracciones.

Por otro lado, hemos visto en el apartado anterior sobre aleatoriedad, que ningún alumno asume totalmente la independencia de la experiencia, pues todos sienten que los resultados de las muestras ofrecen indicios que favorecen la probabilidad de negra (o blanca en un caso). Las respuestas dadas a la pregunta 2b, dan una indicación de que un concepto que interfiere en la consideración de la independencia es la interpretación frecuencial de probabilidad. En efecto, los estudiantes responden enfocando la situación hacia las frecuencias y olvidando el modelo de urnas.

Variabilidad. Aceptar la variabilidad en fenómenos aleatorios implica combinar un conocimiento de la estructura de la situación con la aleatoriedad. Con la estructura nos referimos al modelo o la distribución, por ejemplo, el contenido de la urna y las probabilidades de obtener bola negra y bola blanca. En el problema de realizar 1000 extracciones con remplazo de una urna con dos bolas blancas y dos negras, el valor esperado del evento “obtener una bola negra” es 500, no obstante, debido a la aleatoriedad se espera que los resultados varíen alrededor de 500. ¿Qué tan lejos de 500 es razonable esperar un valor? La respuesta formal a esta pregunta no es inmediata ni intuitiva y se apoya en un teorema fundamental de la probabilidad: el teorema del límite central. Las respuestas intuitivas de los estudiantes están en un punto intermedio entre dos extremos; los que se centran en la aleatoriedad (“cualquier cosa puede pasar”) y los que interpretan el modelo de manera determinista (“van a ocurrir 500 bolas negras”).

En la pregunta 1a se explora el sentido de la variabilidad de los estudiantes, dándoles como dato un resultado de realizar 1000 extracciones de una urna (511 negras y 489 blancas) que contiene cuatro bolas en total, entre blancas y negras. Se les pide que propongan su posible distribución. La respuesta con base en una adecuada valoración de la variabilidad es la que propone el mismo número de bolas blancas que de negras. Esta fue, en efecto, la respuesta de cinco estudiantes:

A2: 2 negras y 2 blancas, ya que no es mucha la diferencia de los resultados.

A5: Hay 2 bolas blancas y 2 bolas negras porque el resultado de las extracciones es casi igual, lo que nos indica que hay el mismo número de bolas blancas y negras.

A6: Considero que hay igual número de bolas negras que de blancas, o sea 2 y 2, ya que sus probabilidades, si bien no son las mismas, son muy cercanas.

A9: Hay 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Su distribución es equivalente, ya que no hay gran diferencia entre ambas.

A10: La distribución de las bolas es equitativa, es decir, hay dos bolas blancas y dos negras porque se ve en los resultados obtenidos. No hay mucha diferencia más que de 22 extracciones, por lo que tienen la misma probabilidad de extracción.

Para estos estudiantes la diferencia de los resultados respecto al valor esperado es una variabilidad natural del modelo equiprobable, es decir, la diferencia no es significativa. En cambio, cuatro alumnos (A1, A3, A4, A8) creen que la diferencia es significativa y que el modelo debe reflejarlo:

A1: Con los resultados dados se estimaría que hay un número mayor de bolas negras, ya que su probabilidad es más alta (511⁄1000), mientras que de la blanca es lo contrario (489⁄1000), ⇒ yo diría que hay 3 bolas negras y 1 bola blanca) a notar por su probabilidad.

A3: Considero que es no equiprobable; y que hay más # de bolas negras que blancas, porque salieron 511 bolas negras de 1000 y sólo 489 blancas de 1000 extracciones.

A4: 1/4 = de bolas blancas, 3/4 = de bolas negras. Por cada 3 bolas negras hay 1 blanca. Esto aumenta la posibilidad que se obtenga una bola negra.

A8: En la distribución de bolas para un color habrá mayor probabilidad de que salga la de bolas negras. Bolas blancas = 489/1000, bolas negras = 511/1000.

En la pregunta 3c se reflejan actitudes contrarias a la variabilidad; la situación es que los estudiantes tienen, por un lado, un modelo de urna de 2 bolas negras y 1 blanca y, por otro, un resultado de 10 extracciones de esa urna con 5 bolas negras y 5 blancas. Se les pide que asignen un valor numérico al evento “sale bola blanca”; excepto por uno, todos los estudiantes asignan una probabilidad basada en las frecuencias relativas (1/2, 5/10 o 6/11). El otro lo hace con base en el modelo (1/3). El modelo se ignora probablemente porque se asume que no es posible que si la probabilidad de negra fuera 1/3, entonces el resultado de 10 extracciones sea 5 blancas y 5 negras. Al parecer los estudiantes creen que la variabilidad de los resultados con relación al valor esperado es más reducida de lo que realmente es cuando la muestra, o el número de repeticiones, es pequeña.

CONCLUSIONES

La posibilidad de hacer inferencias válidas a partir de estimaciones o juicios de probabilidad presupone la articulación de los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad, a través de al menos una versión informal de la LGN. Si bien es importante asignar probabilidades a los eventos y frecuentemente no es sencillo, sobre todo cuando implican fuerte combinatoria, también es necesario abarcar la dimensión relacionada con las grandes ideas de la probabilidad que destaca Gal (2005): Aleatoriedad, Independencia, Variabilidad, Predicción/Incertidumbre. En la exploración realizada hemos visto que las situaciones en el contexto familiar de extracción de bolas de urnas (que implican cálculos triviales), se producen diversas respuestas en las que subyacen diferentes niveles de aceptación y usos de las ideas espontáneas de los estudiantes sobre aleatoriedad, independencia y variabilidad. En la Tabla 3 se resumen las características de las respuestas a las preguntas del cuestionario, en relación con las grandes ideas, organizadas de manera jerárquica en los tres primeros niveles. En el cuarto nivel se describen las proposiciones normativas informales correspondientes que podrían haber emergido pero en ninguna respuesta se presentaron de manera completa; es entonces un nivel a alcanzar mediante un diseño de la instrucción.

Tabla 3. Niveles de respuesta en relación a las grandes ideas de probabilidad.

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Aleatoriedad (Situación 1b)	Hace una predicción determinista	Hace una predicción determinista matizándola con lenguaje probabilístico	Reconoce que no se puede predecir el resultado con exactitud.	No se puede predecir con certeza el resultado de un sorteo pero se puede predecir que las frecuencias se estabilizan a la larga alrededor de un número (la probabilidad).
Independencia (Situación 2b)	Asigna probabilidades ignorando el modelo y considerando las frecuencias más un ensayo cuyo resultado es el evento que se quiere calcular	Asigna probabilidades con base en las frecuencia relativas e ignora el modelo	Asigna probabilidades con base en el modelo e ignora los resultados previos (muestra)	Bajo el supuesto de independencia se debe ignorar lo ocurrido y asignar las probabilidades con base en el modelo.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Variabilidad (Situaciones 1a y 3c)	Espera resultados sin variabilidad y/o en muestras pequeñas consideran las diferencias de las frecuencias a los valores esperados como significativas	Creen que las pequeñas diferencias son significativas en muestras grandes	Estima que frecuencias relativamente pequeñas no son significativas cuando la muestra es grande	La variabilidad es grande cuando la muestra es pequeña, pero es poca cuando la muestra es grande (Observan el tamaño de la muestra)

En el nivel 1 se cree que existe la posibilidad de hacer predicciones determinadas y se busca en los datos clave que permitan hacer la predicción; al asignar probabilidades se ignora el modelo y se toma la frecuencia relativa afectándola con el resultado del evento cuya probabilidad se quiere estimar; asimismo se considera que las diferencias incluso en muestras pequeñas son significativas.

En el nivel 2 se hace una cierta predicción pero matizándola con enunciados de incertidumbre como "puede ser que…", "espero…pero no es seguro", etc. que indican que se acepta la impredecibilidad, aunque también se buscan indicios en los datos; los estudiantes utilizan el enfoque frecuencial para asignar la probabilidad ignorando el modelo y creen que las diferencias pequeñas en las muestras grandes son significativas.

En el nivel 3 se reconoce que no se pueden hacer predicciones determinadas por la naturaleza aleatoria de la experiencia, la asignación de probabilidades se hace con base en el modelo ignorando los resultados anteriores tanto en el caso de pequeñas como grandes muestras y se estima que siempre existen pequeñas diferencias en las frecuencias de los eventos en las muestras grandes, aunque sólo de manera intuitiva, sin criterios numéricos.

En el nivel 4 se precisan y completan los alcances del nivel 3, respecto a la aleatoriedad aparte de la impredecibilidad se reconoce la estabilidad a la larga; la independencia es una hipótesis que debe ser verificada antes de ignorar la evidencia y utilizar el modelo y, finalmente, la variabilidad va de más a menos dependiendo del tamaño de la muestra.

En la enseñanza de la probabilidad se suelen enfatizar las definiciones formales y en los procedimientos matemáticos sin una estrategia clara para hacer que emerjan y se desarrollen las grandes ideas; basta ver algunas revisiones de los tratamientos en los libros de texto (Ortiz, Batanero y Serrano, 1996). No obstante, si los problemas se formulan de manera diferente a pedir solo el cálculo de probabilidades, se puede propiciar que emerjan nociones sobre las grandes ideas para permitir su precisión y desarrollo mediante simulaciones acompañadas de interacciones y discusiones.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P, MEC, España.

Referencias

Batanero, C. (2015, julio). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Presentado en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, Praga.

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 558-567.

Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Chernoff, E. y Sriraman, B. (2014) Introduction. En E. J Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. xv-xvii). Nueva York: Springer.

Cox, C. y Mouw, J. T. (1992). Disruption of the representative heuristic: Can we be perturbed into using correct probabilistic reasoning? *Educational Studies in Mathematics, 23*(2), 163-178.

Fischhoff, B. (1982). For those condemned to study the past: Heuristics and biases in hindsight. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 335-351). Nueva York: Cambridge University Press.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105.

Gal, I. y Baron, J. (1996). Understanding repeated simple choices. *Thinking and Reasoning, 2*(1), 81-98.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Nueva York: Springer.

Green, D. (1993). Data analysis: What research do we need? En L. Pereira-Mendoza (Ed.), *Introducing data analysis in the schools: Who should teach it?* (pp. 219-239). Voorburg, Holanda: ISI.

Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339-370.

Jones, G. A. y Thornton, C. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). Nueva York: Springer.

Jones, G. A., Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2007). Research on probability. Responding to classroom realities. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909-955). Charlotte, NC: NCTM & IAP.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. y Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics 32,* 101-125.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning, 13*, 68-86.

Metz, K. (1998). Emergent understanding and attribution of randomness: Comparative analysis of the reasoning of primary grade children and undergraduates. *Cognition and Instruction*, *16*(3), 285-365.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants* (pp. 95-138). Washington DC: National Research Council.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (1996), Las frecuencias relativas y sus propiedades en los textos españoles de bachillerato. *EMA, 2*(1), 29-48.

Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence*. Londres: Routledge & Keagan Paul.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. Nueva York: W.W. Norton.

Pratt, D. y Ainley, J. (Eds.) (2008). Introducing the special issue on informal inference. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 3-4.

Sánchez, E., Borim, S. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 211-221). Nueva York: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1981). Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions. En A. P. Shulte y J. R. Smart (Eds.), *Teaching statistics and probability* (pp. 90-100). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. En F. Biddulph y K. Carr (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 6-22). Rotorua, Nueva Zelanda: University of Waikata.

Steinbring, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 7*(3), 99-118.

Sthol, H. y Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 319-337.

Stohl, H., Rider, R. y Tarr, J. (2004). *Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technology environment*. Recuperado de http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Nueva York: Cambridge University Press.

APÉNDICE

Situación 1

1. La urna A contiene en su interior 4 bolas entre blancas y negras (Figura 1).

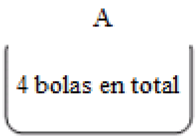

Figura 1

Se extrae una bola, se observa su color y se regresa a la urna. Se extrae una segunda bola, se observa su color y se regresa a la urna. Después de 1,000 extracciones efectuadas de la urna, se han obtenido los siguientes resultados:

Tabla 1. Resultados de 1,000 extracciones efectuadas de la urna A.

	# de bolas blancas	# de bolas negras
Urna A	***489***	***511***

a) De acuerdo con los resultados de la Tabla 1, ¿cómo consideras que es la distribución de bolas blancas y negras contenidas en la urna? ¿Cuántas bolas blancas hay? ¿Cuántas bolas negras hay? Justifica tu respuesta.
b) Si se realiza la extracción 1,001, ¿qué color de bola crees que se obtendría? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué color de bola consideras que se obtuvo en la primera extracción? Justifica tu respuesta.

Situación 2.

2. Otras dos urnas tienen en su interior algunas bolas negras y algunas bolas blancas (Figura 2).

Urna B: 6 bolas entre negras y blancas

Urna C: 3 bolas entre negras y blancas

Figura 2

Después de 1,000 extracciones efectuadas de cada una de las urnas B y C, se han obtenido los siguientes resultados:

Tabla 2. Resultados de 1,000 extracciones hechas de las urnas B y C.

Urna	# de bolas blancas	# de bolas negras
B	***324***	***676***
C	***344***	***656***

a) ¿Cuál urna elegirías para hacer la extracción 1,001, de tal forma que la bola resultante sea **negra**? Justifica tu respuesta

b) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **negra** de la urna B en la extracción 1,001'? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **negra** de la urna C en la extracción 1,001'? Justifica tu respuesta.

Situación 3

3. Después de 10 extracciones efectuadas de cada una de las urnas B y C (Figura 2), se han obtenido los siguientes resultados:

Tabla 3. Resultados de 10 extracciones hechas de las urnas B y C (b = bola blanca, n = bola negra).

Urna B	***n***	***b***	***n***	***n***	***n***	***n***	***n***	***n***	***b***	***n***
Urna C	***b***	***n***	***n***	***n***	***n***	***b***	***b***	***b***	***n***	***b***

a) ¿Cuál urna elegirías para hacer una onceava extracción, de tal forma que la bola resultante sea **blanca**? Justifica tu respuesta.
b) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **blanca** de la urna B en la onceava extracción'? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué valor [*numérico*] le asignarías a que ocurra el evento 'Sacar una bola **blanca** de la urna C en la onceava extracción'? Justifica tu respuesta.

[i] Se reproduce la terminología de los autores, aunque conviene aclarar que la probabilidad es siempre teórica y lo que es experimental o empírico es la estimación por medio de la frecuencia.