LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD *CON INTENCIÓN DIDÁCTICA* EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS Y PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Probability problem solving *with didactical intention* when preparing mathematics teachers

Huerta, M. P.

Universitat de València

Resumen

En este trabajo se reflexiona sobre la resolución de problemas de probabilidad en la formación de maestros y profesores. Se introduce la idea de la resolución de problemas con intención didáctica y se analiza una manera de resolver problemas de probabilidad, que llamamos "por simulación". Esta manera se introduce como un método de resolución de problemas de probabilidad con potencial heurístico; su conocimiento se revela necesario en la formación de los maestros y profesores de matemáticas como gestores del proceso de resolución de problemas de probabilidad por estudiantes de primaria y secundaria.

Palabras clave: *Didáctica de la probabilidad, resolución de problemas, simulación, formación de maestros y profesores*

Abstract

In this piece of work we reflect on the role of probability problem solving in preparing mathematics teachers. We introduce the notion of problem solving with didactical intention and we show it in a way to solve probability problems that we call "by simulation". This way of solving problems is introduced as a solving method with heuristic potential; its knowledge is considered as necessary in preparing mathematics teachers in order to control the process of solving probability problems at schools in a competent way.

Keywords: *Didactics of probability, problem solving, simulation, training teachers*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo hablamos, indirectamente, de la formación de maestros y profesores en resolución de problemas de probabilidad. Hablamos de problemas de probabilidad y de la resolución de problemas de probabilidad, cuando en ella lo que interesa es comprender los procesos de resolución y los medios que se utilizan para ello. Por resolución de problemas con intención didáctica nos referimos a la resolución cuando se enfoca al análisis global del proceso y a las potencialidades del problema y de su resolución en otros niveles educativos, como la enseñanza primaria y secundaria. Vemos la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica como contexto apropiado para la formación de futuros maestros y profesores en didáctica de la probabilidad.

En muchos otros lugares hemos avanzado la idea de que los problemas de probabilidad pueden clasificarse de más de una manera, según qué criterio se use para ello. Así, dependiendo de la tipología de los datos y la manera en la que se relacionan entre ellos, identificamos una familia de problemas de probabilidad que llamamos problemas ternarios de probabilidad condicional (Cerdán y Huerta, 2007). Si nos fijamos en cómo actúa o puede actuar un resolutor de problemas de probabilidad cuando maneja la información requerida para dar respuesta a lo que se pregunta, de un modo ingenuo si se quiere, podemos distinguir tres grandes grupos de problemas: problemas resolubles por asignación, problemas resolubles por cálculo de probabilidades y problemas

Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad *con intención didáctica* en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

resolubles por simulación (Huerta, 2002). En el primer tipo un resolutor responde a la pregunta del problema tomando una decisión sobre la probabilidad preguntada, generalmente mediante una asignación de probabilidad a partir de la información disponible a lo largo de la resolución del problema. En el segundo, el resolutor responde mediante un cálculo de probabilidades al interpretar la información contenida en el problema, siendo consciente de que la pregunta del problema consiste en una probabilidad desconocida que está relacionada con las probabilidades conocidas mediante relaciones precisas entre ellas, de tipo aditivo o multiplicativo (que a veces conoce y otras no, aunque sospecha de su existencia). Un tercer grupo de problemas, debido a la falta de información disponible, ni se abordan como problemas de asignación ni como problemas de cálculo de probabilidades, si no de otra manera, que llamamos por simulación, los llamamos problemas resolubles por simulación. Algunos de estos tan obvios como el problema de la chincheta, aquel que pide la probabilidad de que al lanzar al aire una chincheta ésta se pose de una manera determinada sobre el suelo, aunque en general se trataría de aquellos problemas para los que no se dispone de un modelo teórico al que ajustarlo o para el que nuestra experiencia no puede aportar una información fiable que nos permita responder a la pregunta formulada en él, e incluso en aquellos problemas para los cuales la consideración del modelo teórico implica la realización de cálculos complejos pero que, sin embargo, la información proporcionada por una simulación adecuada del problema permite al resolutor dar una respuesta al problema con un alto grado de de confianza en ella.

La distinción anterior no presta atención exclusivamente al problema sino al resolutor. Así, un resolutor puede ver un problema de probabilidad como un problema de asignación y otro resolutor como un problema de cálculo, simplemente por el modo de interpretar la información disponible y usarla en un sentido u otro para obtener la respuesta del problema, bien como una decisión sobre la probabilidad de un suceso o bien como un cálculo.

Esta distinción está clara cuando se observan las múltiples resoluciones que se han considerado para hablar sobre la actuación de los resolutores ante el famoso problema del taxi, *The taxi cab problem* (Citaremos aquí tres: Tversky y Kahneman, 1982; Shaugnhessy, 1992; Kahneman, 2014). Consideremos la siguiente formulación:

> Una noche, un taxi provocó un accidente tras el cual se dio a la fuga. En la ciudad operan dos compañías de servicio de taxis, la Verde y la Azul, cuyos colores se corresponden con el de las compañías. La más numerosa es la compañía Verde con un 85% del total de taxis en la ciudad. Un testigo observó que el taxi culpable del accidente era azul. ¿Qué probabilidad hay de que el taxi implicado en el accidente fuera azul y no verde?

La información sobre la fiabilidad del testigo no está disponible de antemano, por lo que una simulación de su capacidad y agudeza visual en las mismas condiciones de visibilidad que la noche de autos es requerida para poder estimarla y ser usada con posterioridad, tras la cual el problema original queda reformulado de la siguiente manera:

> Una noche, un taxi provocó un accidente tras el cual se dio a la fuga. En la ciudad operan dos compañías de servicio de taxis, la Verde y la Azul, cuyos colores se corresponden con el de las compañías. La más numerosa es la compañía Verde con un 85% del total de taxis en la ciudad. Un testigo observó que el taxi culpable del accidente era azul. Comprobada la fiabilidad de este testigo, se comprobó que reconoció correctamente los colores en el 80% de los casos y fracasó en el 20% restante. ¿Qué probabilidad hay de que el taxi implicado en el accidente fuera azul y no verde?

A partir de aquí el resolutor decide si aprecia el problema como resoluble por asignación o por cálculo de probabilidades. El proceso de resolución será radicalmente distinto según qué decisión tome. Esta decisión puede ser de experto o de aprendiz. En el segundo de los casos guiada por el maestro o profesor que le enseña. Pero, ¿es el maestro o profesor consciente de estas formas de actuar en algunos problemas de probabilidad? El maestro o profesor, como resolutor, ¿cree tener competencia suficiente para abordar la resolución de problemas por asignación, por cálculo o por simulación? ¿Es realmente necesaria esta competencia en los maestros y profesores? O lo que es equivalente, ¿es realmente necesario que los futuros maestros y profesores sean conscientes de las diferentes naturalezas de la probabilidad y las usen en la resolución de problemas?

LA FORMACIÓN DE MAESTROS Y PROFESORES Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

No descubrimos nada si afirmamos que los futuros maestros y profesores tienen muchas dificultades al enfrentarse con tareas que implican a la probabilidad. Puede afirmarse, casi sin error, que conceptualmente aquéllos tienen las mismas dificultades que tendrán sus futuros alumnos. Muchos estudios han tratado con estas dificultades y las han confirmado (por ejemplo, Contreras, 2011; Díaz y De la Fuente, 2007; Huerta y Cerdán, 2010; Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo, 2011). De ahí que la resolución de problemas de matemáticas deba estar presente en la formación de maestros y profesores, no ya solamente como estudiantes de un curso de matemáticas para maestros o de didáctica de las matemáticas, sino para entender algunos de los aspectos que relacionan el proceso de resolución de problemas de probabilidad con la construcción del pensamiento matemático (probabilístico) del estudiante, y para aprender a ser gestores del proceso de resolución de problemas en las aulas de primaria y secundaria.

Santos (2012) formula una serie de preguntas alrededor de qué actividades de resolución de problemas deberían considerarse en un programa de formación y desarrollo profesional de profesores. Se incluyen preguntas relevantes que deberían ser tenidas en cuenta, también, cuando hablemos de la resolución de problemas de probabilidad en la formación de maestros y profesores:

a. ¿Qué actividades de resolución de problemas ayudan a los profesores a desarrollar y construir el conocimiento matemático para la enseñanza?

b. ¿Qué distingue o cómo se caracteriza el pensamiento matemático que deben exhibir los profesores en sus experiencias de resolución de problemas y diseño de actividades para la enseñanza?

c. ¿Qué tipo de problemas favorecen la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes?

d. ¿Cómo se explica la construcción o desarrollo de un conocimiento nuevo en los estudiantes?

Con esto en mente, hemos considerado para la formación de maestros y profesores la idea de la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica. Aquella que no solo presta atención a la resolución del problema, sino también a su potencial didáctico. Es decir, a la posibilidad de que los problemas resueltos constituyan contextos apropiados para la enseñanza de la probabilidad, ya sea en la escuela primaria o secundaria. Así, al estudiante para maestro o al estudiante para profesor se le sitúa en una doble condición: como resolutor de problemas y como futuro enseñante de dichos problemas. Como resolutor se pone en contacto con el conocimiento matemático necesario para la resolución de los problemas. Como futuro enseñante, evalúa potencialidades del problema y de su resolución cuando, en este caso, el futuro resolutor será un estudiante de primaria o de secundaria, por lo que adquiere conocimientos sobre la enseñanza. Ya hemos hablado de esta doble condición de los resolutores con las problemas ternarios de probabilidad condicional (Huerta y Arnau, 2014).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CON INTENCIÓN DIDÁCTICA

En lo que sigue mostraremos qué entendemos por resolución de problemas con intención didáctica mediante lo que hemos llamando aquí, y también en Huerta (2015), la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. Distinguimos entre formación de maestros y formación de profesores de matemáticas de secundaria, por razones obvias, como veremos más adelante.

Consideremos el siguiente problema de los pasteles:

> Una conocida firma de pastelería regala con cada uno de sus pasteles una figurita que incluye en el interior del envoltorio con el que los vende. La colección completa está formada por 6 figuritas. ¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?

Ante un problema de probabilidad, como el de los pasteles, no estoy seguro de que los maestros, los profesores de secundaria o los formadores de maestros y profesores seamos conscientes de lo que puede haber detrás de una sugerencia tan fácil de formular como: *puedes simular el problema con un dado* o de esta otra, un poco más larga: *saca papelitos de un saco en el que hayan 6 papelitos numerados del 1 al 6, pero no olvides devolverlos cada vez antes de volver a sacar otro papelito …*. O tal vez seamos ilusos al pensar que este problema, y su sugerencia correspondiente, pueda darse con alguna frecuencia en los centros escolares. No estoy seguro tampoco de que, aquéllos que nos dedicamos con más atención a la didáctica de la probabilidad y la estadística seamos conscientes de lo que realmente significa considerar la simulación, junto al modelo de la urna, como una de las ideas fundamentales en estocástica (Heitele, 1975) o de sus potencialidades y dificultades (Chaput, Girard y Henry, 2011). Creo que no me equivoco si digo que no. Creo que, en muchos casos, esta idea fundamental o, en su lugar, el método de resolución de problemas por (o mediante el uso de la) simulación, como queramos llamarlo, o bien está trivializado: *lanza el dado mucha veces*, y "verás" lo que pasa, o bien se convierte en un ejercicio monótono y sin sentido ordenado por los profesores *lanza un dado muchas veces y anota los resultados que obtengas*. A veces ni eso, la simulación ya ha sido hecha, "Juanito ha lanzado el dado 500 veces y este es el resultado…".

¿Cuál es entonces el sentido de la simulación al considerarla como una manera de resolver problemas de probabilidad? Y, ¿por qué considerarla así puede ayudar a los maestros y profesores en formación en la enseñanza de los conceptos básicos de probabilidad y estadística tanto en primaria como en secundaria?

Ante un problema de probabilidad, un resolutor necesita información con la que poder responder la pregunta del problema. Sin ella no hay posibilidad de darla. La información disponible puede ser objetiva o subjetiva, basada en informaciones de tipo teórico o experimental o sustentada o complementada en creencias u opiniones personales. Se trata así de utilizar las diferentes naturalezas con las que se puede considerar la probabilidad, objetiva (clásica o empírica) o subjetiva (bayesiana), para responder a una pregunta en un problema. Si la información de tipo teórico no está disponible para un resolutor, entonces solo la experimental o la subjetiva es la que sí lo está o puede estar. Así, la experimentación o la simulación como método ayuda al resolutor a obtener dicha información, que puede usarse en algún sentido para dar respuesta a la pregunta que se formula. Este es el sentido de uso que damos en este trabajo a la noción de simulación.

Resolviendo problemas de probabilidad con intención didáctica, como es la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación que estamos ofreciendo aquí, ayudamos a los futuros profesores a formarse no sólo en los conceptos y procedimientos básicos implicados en la resolución del problema sino a formarse también como gestores "ilustrados" del proceso de resolución de los problemas. De esta manera, podrá ser consciente de que, en sus clases y con sus alumnos, tendrá que decidir qué rol va a tener cada uno de los *personajes* que intervendrán en la resolución de los problemas: los propios problemas (su pertinencia, utilidad, finalidad), los alumnos (qué protagonismo le va a dar el futuro maestro en la simulación) y él mismo (el maestro/profesor gestor del proceso). En particular, en la resolución de un problema por simulación, tendrá que decidir qué le corresponde a él gestionar del problema y su resolución y qué le corresponde a los estudiantes hacer como resolutores, cuando uno de los objetivos de la enseñanza sea, además, la manera de resolver los problemas de probabilidad por simulación. Aquí vemos un segundo sentido en el que usamos la noción de simulación: como contexto en el que producir enseñanza de conceptos básicos de probabilidad en los niveles básicos de escolarización.

LA MANERA DE RESOLVER PROBLEMAS DE PROBABILIDAD POR SIMULACIÓN

¿Qué entendemos por la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación? Llamamos así a un método de resolución de problemas de probabilidad, con contenido heurístico, que recurre a la simulación durante el proceso de resolución del problema.

Diremos que un problema de probabilidad se ha resuelto por simulación si, durante el proceso de resolución, el problema formulado, al que llamaremos *problema original*, se ha transformado en otro, al que llamaremos *problema simulado*, mediante algún generador de azar, de tal forma que, desde un punto de vista probabilístico, el problema simulado es equivalente al original. Además, se es capaz de abordar el problema simulado y dar una respuesta de la que se puede inferir una solución posible para el problema original (Figura 1). Una condición para que pueda llevarse a cabo es que el experimento aleatorio simulado sea isomorfo al experimento aleatorio considerado en el problema original; es decir, que conste del mismos número de sucesos, que se pueda establecer una correspondencia biyectiva entre ellos y que los sucesos puestos en correspondencia tengan la misma probabilidad de ocurrir. Como la solución del problema simulado depende de un número dado de ensayos o pruebas, entonces su fiabilidad o credibilidad dependerá de la manera en la que se considere la ley de los grandes o pequeños números.

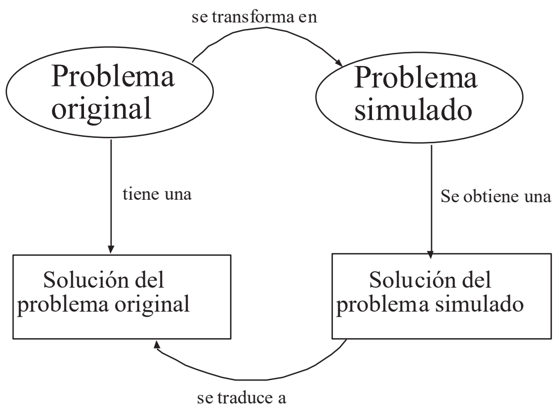

Figura 1. Esquema básico del proceso de resolución de un problema de probabilidad por simulación

Resolver un problema por simulación implica considerar herramientas que transformen el problema original en otro, de tal manera que, para la herramienta considerada, el problema original y el problema simulado sean, probabilísticamente equivalentes[1]. Desde un punto de vista didáctico, lo interesante de dichas herramientas es su carácter y potencial heurístico (Puig, 1996), de exploración y de descubrimiento, que permiten ser consideradas en un número de problemas distintos. Desde el punto de vista del resolutor, interesa que su conocimiento y experiencia en las herramientas le permitan obtener la mayor cantidad posible de información para que pueda ser tratada con posterioridad con el fin de dar respuesta al problema original. Por tanto, situados en el problema simulado, el resolutor ha de saber encontrar y formular una respuesta a lo preguntado en él, lo que le exige considerar los instrumentos y métodos estadísticos necesarios para tratar con la información disponible. Ha de abordar así un problema estadístico auxiliar asociado al problema simulado. La respuesta dada al problema simulado, mediante la solución del problema estadístico, se ha de "devolver" con posterioridad al problema original, lo que necesariamente implica considerar la naturaleza empírica de la probabilidad y su "estabilidad" ante un número elevado de ensayos.

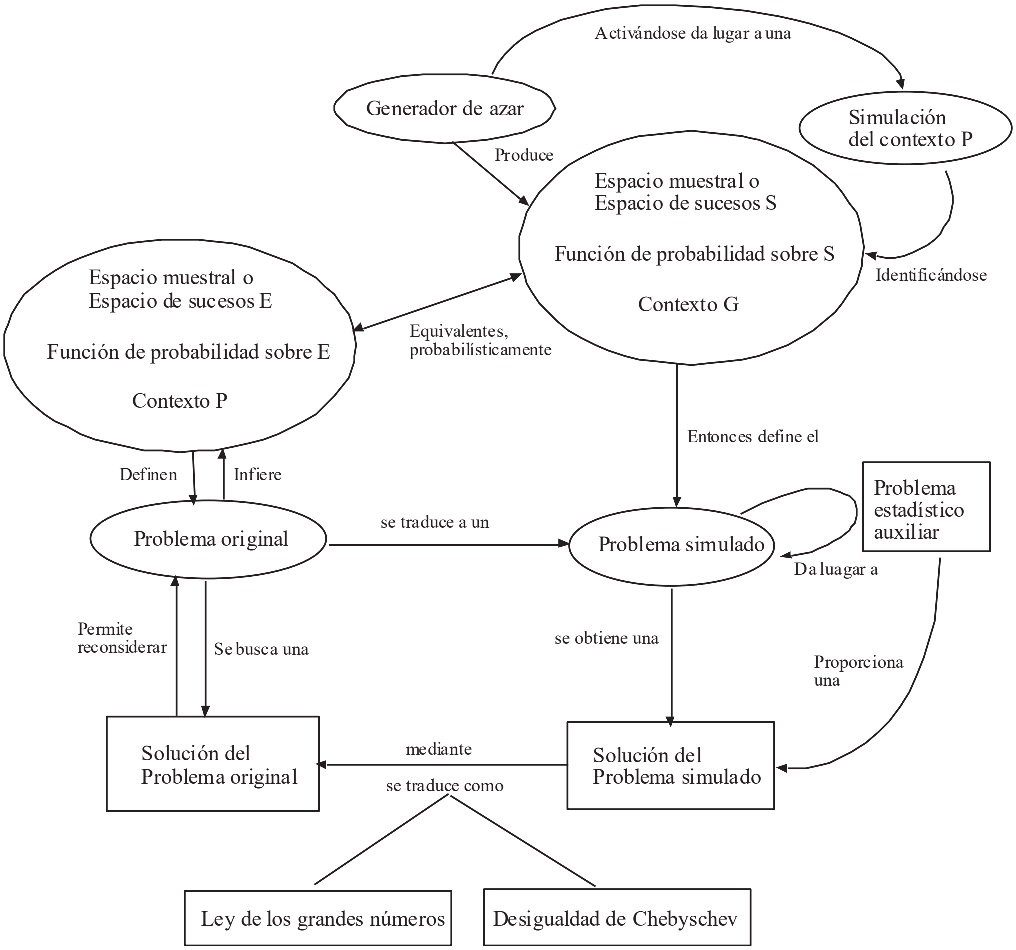

Figura 2. El trabajo durante la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación[2]

Como el proceso de trasformación depende de la herramienta considerada, a cualquiera que se interese por los procesos de resolución de estos problemas le puede surgir una serie de preguntas que deberían tenerse en cuenta, ya sea en los análisis sobre la actuación de cualquier resolutor o bien durante la enseñanza de la manera de resolver los problemas por simulación, como son, por ejemplo (parafraseando a Puig, 1996, p. 41): ¿cuál es la intención de uso de la herramienta? Si uso tal o cual herramienta, ¿cómo está relacionado el problema original con el problema simulado por la herramienta? Una vez obtenga una solución al problema simulado, ¿qué implicaciones puede tener en relación con la solución del problema original? ¿Qué se puede exportar de la solución del problema simulado al problema original y qué no? ¿Cómo queda transformado el problema original al incorporarle lo que se exporte de la solución del simulado? ¿Requiere ser reformulado el problema original? Estas preguntas no pueden contestarse en general, sino que han de plantearse para cada herramienta. Así, habría que considerar estas preguntas para diferentes generadores de azar: urnas, dados, pirindolas, etc., tablas de números aleatorios, generadores de número aleatorios en hojas de cálculo, programas en R o en Matlab.

Con el fin de ver en qué consiste la manera de resolver un problema por simulación, consideremos el problema de los pasteles formulado en el apartado anterior, en el que detrás de la sencillez de su enunciado oculta un buen número de dificultades para su resolución teórica. Un problema similar ya lo planteó Shaughnessy (1983) en su propuesta de *simulation for simulation* (p. 340).

Asumamos que el problema formulado (el original) no se sabe resolver teóricamente pues el modelo teórico que da cuenta de él está al alcance de unos pocos e incluso fuera del nivel de nuestros estudiantes o de los objetivos de enseñanza para el que se plantea el problema, no en balde se trata de una cadena de Markov absorbente[3]. Propongamos como objetivo que el resolutor llegue a dar una respuesta al problema y que ésta sea lo más razonable posible y, además, que mientras esto ocurre aprenda a manejarse en entornos de incertidumbre. Nuestro objetivo no es, por el momento, transitar hacia el modelo teórico ni enseñar el algoritmo (Engel, 1975a) como paso intermedio, sino una manera de dar respuesta al problema que llamamos por simulación.

Según se desprende del esquema de la Figura 1, para el trabajo que hay que hacer, pueden identificarse cuatro momentos a lo largo del proceso de resolución completo que implica, de una parte, trabajo independiente en cada momento sin "perder de vista" a los otros: trabajo en el problema original, trabajo en el problema simulado, trabajo con la solución del problema simulado y trabajo con la solución del problema original, y, claro está, trabajo en las correspondientes relaciones/traducciones (Figura 2). El trabajo que hay que hacer puede sugerirse durante el proceso de enseñanza, descomponiéndose este en ocho "tiempos" para la indagación y la reflexión, como veremos en el apartado siguiente.

Excepto la primera vez, cada vez que adquiera un pastel obtengo una de las 6 figuritas[4] que o bien no tenía aún e incrementa la colección, o bien ya tenía y estoy en las mismas circunstancias que estaba antes de comprarlo. Pero cada vez que lo compro no sé qué figurita me va a salir hasta que no abra el envoltorio. Por hipótesis (hipótesis 1) puedo pensar que cualquiera de las figuritas es susceptible de aparecer en un pastel con la misma probabilidad que tendría cualquier otra, 1/6, también bajo la hipótesis (hipótesis 2) de que la firma de la pastelería ha distribuido uniformemente sus figuritas entre sus bolsas conteniendo los pasteles que vende y (hipótesis 3) el centro comercial distribuye los pastelitos uniformemente en sus estantes. Dejaré de comprar pastelitos en el momento en el que tenga la colección completa. ¿Tendré la colección completa alguna vez? ¿Habrá que comprar muchos pasteles?

Al lanzamiento de un "dado cúbico" y la correspondiente observación de la cara sobre la que se posa también se le ha concedido la hipótesis (hipótesis 1, en el problema original) de la equiprobabilidad, asignándole a cualquiera de sus caras el valor de 1/6 para su probabilidad. Le concedemos a los lanzamientos sucesivos de un dado, anotando cada vez los resultados que aparecen, la hipótesis de ser un experimento aleatorio compuesto de pruebas independientes (hipótesis 2 y 3, en el problema original). Lanzar el dado repetidamente, anotar el resultado de la cara sobre la que se posa, hasta que se haya posado en las 6 caras por lo menos una vez simula el proceso de comprar pasteles (por el lanzamiento del dado) hasta tener las 6 figuritas (todas las caras del dado aparecen por primera vez en una racha de resultados). El problema simulado queda así: ¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado cúbico hasta que éste tarde o temprano se pose al menos una vez en todas sus caras? Como consecuencia, ¿se posará sobre todas las caras, al menos una vez?, ¿habrá que hacer muchos lanzamientos para que eso ocurra?

Abordemos el problema simulado. Lancemos el dado cuantas veces estimemos que sea necesario. Diremos que hemos realizado una simulación cuando al lanzar repetidamente el dado hemos conseguido reproducir el suceso por el que se nos pregunta. Lo que esta simulación produce es información sobre lo que ha ocurrido, información que debe ser organizada y tratada. Surge así el problema estadístico asociado al problema simulado. La consideración y definición de variables estadísticas es consustancial al proceso y el tamaño de la población también. Ahora la pregunta ¿cuántas simulaciones hay que hacer para dar respuesta al problema? es, entre otras, pertinente. La pregunta tiene múltiples respuestas, probablemente tantas como resolutores y tantas como niveles de exigencia sean requeridos para la respuesta que se proporciona. Por lo menos dos simulaciones, por aquello de promediar. Ahora bien, el estado de incertidumbre que puede producir una respuesta basada en dos simulaciones puede ser mayor que si hago muchas más. Pero, ¿cuántas más?

Algunos métodos para determinar la probabilidad experimental de un suceso sugieren realizar un número de simulaciones dado de antemano: 50, 100 o 1000, número con el que se considera que se puede proporcionar una respuesta razonable al problema simulado (por ejemplo, paso 7 en el modelo de Byan, 1986). Otros, como los libros de texto por lo general, son más ambiguos: muchas simulaciones, cuantas más mejor. En todo caso, siempre el resolutor se hará preguntas alrededor de cualquier sugerencia que se le haga sobre el número de simulaciones que habrá que hacer: ¿Por qué ese número y no otro? La respuesta concluyente es de naturaleza matemática[5], aunque el número de simulaciones dependerá solo del resolutor y del grado de credibilidad o fiabilidad que éste otorgue a una respuesta basada en el número de simulaciones que haya considerado razonable realizar. O, tal vez, del profesor quien establece cuáles son dichas condiciones. Por ejemplo, supóngase que se quiere una aproximación de la probabilidad teórica de hasta un 1% ($\varepsilon = 0.01$) con un grado de confianza del 95%, $\delta = 0.95$. En estas condiciones el profesor demanda de sus estudiantes un número de simulaciones n_0 que puede ser calculada usando la desigualdad de Chebyschev (DeGroot, 1975, p. 185-186):

$$n_0 \geq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2(1-\delta)}.$$

Para obtener este número se ha de partir de una probabilidad teórica p conocida[6]. No obstante, se puede estimar el máximo necesario, para una aproximación y grados de confianza dados, maximizando la función $n = kp(1-p)$, siendo $K = \frac{1}{\varepsilon^2\,(1-\delta)}$ una constante prefijada[7]. Este número tiene más valor metodológico que real, ya que permite hacer el tránsito desde la simulación en lápiz y papel al uso consciente de la simulación con la ayuda de un software. Pero podría carecer de valor para un resolutor cuyo nivel de satisfacción y exigencia de la solución experimental aportada podría adquirirse con un número menor de simulaciones.

En todo caso la respuesta al problema simulado depende del grado de precisión y fiabilidad con la que se quiera expresar. Pero no deja de ser una respuesta al problema simulado que requiere ser traducida o usada para dar respuesta al problema original. En los términos en los que está expresada la pregunta: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*, requiere además dar una credibilidad a la respuesta del problema simulado: *¿Cuál es el número medio de lanzamientos consecutivos que habrá que hacer de un dado hasta que éste, tarde o temprano, se pose en todas sus caras?*, puesto que pide del resolutor un grado de creencia o credibilidad que le concede a dicho valor promedio.

UNA MANERA DE ENSEÑAR LA MANERA DE RESOLVER PROBLEMAS DE PROBABILIDAD POR SIMULACIÓN EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS Y PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

La gestión del proceso de resolución de un problema de probabilidad no es la misma, razonablemente, si a quienes se dirigen los problemas son los estudiantes de primaria o los de secundaria. Tampoco puede serlo entonces la formación de los maestros y de los profesores de matemáticas. Así que dividiremos este apartado en dos atendiendo a la diferencia entre ambas muestras, no solo por el nivel de formación matemática de cada uno de ellos sino por su futura competencia en la enseñanza de las matemáticas. Aunque no describamos estos aspectos con detalle, suponemos por hipótesis, en ambos casos, un nivel de preparación deficiente en probabilidad y un mayor nivel de preparación en matemáticas de los futuros profesores de secundaria que de los futuros maestros.

Una manera de enseñar la manera de resolver problemas por simulación en la formación de maestros. Un ejemplo

Nuestro objetivo es que los futuros maestros adquieran un mayor conocimiento sobre conceptos básicos de probabilidad mediante la resolución de problemas y un conocimiento sobre su enseñanza a través de la exploración y análisis de las potencialidades de la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación, es decir, sobre el papel del maestro como gestor del proceso con niños.

Describiremos a continuación cómo se ha formulado este problema a estudiantes para maestro y algunas consecuencias que se han observado. Los objetivos específicos de enseñanza son variados, entre otros:

- Explorar las diferentes naturalezas del concepto probabilidad en la resolución de problemas de probabilidad.
- Explorar el potencial de la resolución de problemas de probabilidad por simulación.
- Explorar si la resolución de problemas de probabilidad por simulación facilita y permite modificar el juicio subjetivo del resolutor sobre los fenómenos aleatorios implicados en el problema.

Hay todavía un objetivo más, sobre potencialidades, como consecuencia del trabajo mientras se resuelve el problema: explorar el potencial que tiene el método de resolución de los problemas por simulación y sus objetivos de enseñanza para la educación primaria.

El problema se enuncia a los estudiantes tal y como lo hemos presentado en el apartado anterior, junto con la tarea descompuesta en ocho tiempos y un conjunto de cuestiones asociadas a cada tiempo a modo de sugerencias heurísticas (Puig, 1996). El número de tiempos está relacionado con las macro-etapas del método de resolución (Figura 1) y las sugerencias con el trabajo que habría que hacer en cada una de ellas (Figura 2). El número de sugerencias es variable y puede ser modificado dependiendo del problema y del nivel de los resolutores. Los tiempos y las sugerencias formuladas para el problema han sido las siguientes:

- Primer tiempo: Exploración de la situación real, identificación de lo que está sujeto a incertidumbre y no lo está, de lo que es conocido y desconocido en la situación real.
  - ¿Crees tener seguridad de que tarde o temprano se completará la colección de figuritas? ¿Por qué?
  - Al comprar un buen número de pasteles, ¿en qué condiciones puede encontrarse la colección de figuritas?
  - Entonces, ¿cuántos pasteles exactamente se tendrían que comprar para tener la colección completa? ¿Por qué?
- Segundo tiempo: Juicios subjetivos a priori derivados del análisis de la situación real.
  - ¿Qué crees que es más fácil que ocurra, conseguir la colección completa o no conseguirla? ¿Por qué?
  - Si no sabes exactamente cuántos comprar, al menos haz una conjetura sobre el cuántos, ¿Cuántos pasteles estimas que se tendrían que comprar, más o menos, para poder conseguir la colección completa? ¿Por qué?
- Tercer tiempo: Fiabilidad o credibilidad de la conjetura.
  - Quieres explorar hasta qué punto es fiable o creíble tu conjetura sobre la posibilidad de conseguir toda la colección completa y sobre el número de pasteles que habría que comprar para obtenerla. ¿Cómo lo harías?
- Cuarto tiempo: Simulación, necesidad y uso de herramientas heurísticas. El problema simulado.
  - ¿Experimentar o simular? ¿Puede experimentarse el problema? Por el contrario, ¿solamente se puede simular? ¿Por qué?

- Si vas a simular la compra de pasteles, ¿qué vas a usar para ello? Si hay hipótesis que formular, ¿qué hipótesis son estas?
- ¿En qué consiste una simulación?
- ¿Cómo queda el problema original en términos de la simulación (el problema simulado)? Formúlalo sin usar las palabras "pasteles" ni "figuritas" solamente en términos de la herramienta usada.
- ¿Puedes decir otra forma de simular el problema? Repite todas las cuestiones anteriores para la nueva herramienta considerada.
- Las simulaciones pensadas y sus correspondientes problemas simulados formulados, ¿en qué crees que te van a ayudar a la hora de dar respuesta al problema original?

• Quinto tiempo: Simulación productora de la información dependiente de la herramienta usada. Tratamiento de la información, el problema estadístico asociado dependiente del número de simulaciones realizadas.
  - Resuelve los problemas simulados.

• Sexto tiempo: Equivalencia de problemas. Equivalencia entre los problemas simulados dependientes de las herramientas consideradas
  - Tienes una solución para cada uno de los problemas simulados. Si las comparas, ¿qué puedes decir de ellas?
  - ¿Te lo esperabas? ¿Por qué?
  - Entonces, ¿cuál de las soluciones anteriores vas a usar para dar respuesta al problema original? ¿Por qué?

• Séptimo tiempo: De la solución del problema simulado a la solución del problema original.
  - Con la información disponible de las soluciones de los problemas simulados, trata de dar respuesta a la pregunta formulada en el problema original: *¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?*
  - Justifica por qué crees que es ese número. ¿Qué significa para ti ese número?

• Octavo tiempo. Devolución de la solución al problema original: utilidad y fiabilidad.
  - ¿Hasta qué punto crees que es fiable la respuesta que acabas de dar?
  - ¿Podrías mejorar aún más esa fiabilidad de la respuesta o la credibilidad que le concedes?
  - Seguro que has vivido situaciones como la que acabas de resolver en este problema. ¿Hasta qué punto la solución que has obtenido se puede considerar como solución de una situación real que hayas vivido?
  - ¿Qué se puede aprovechar de esa solución para la situación real vivida por ti y qué no? Explícate lo mejor que puedas.
  - La reflexión anterior, ¿afectaría a la formulación del problema original? ¿De qué manera?

Podría comprobarse cómo lo que se le ofrece al estudiante es un método de resolución con potencial heurístico en ocho pasos, ya que, por una parte, tiene la intención de ser útil no solo para este problema sino para otros problemas de probabilidad en los que haya que tratar con probabilidades y variables aleatorias y, por otra, tiene carácter de exploración en busca de la información que permite contestar a lo que se pregunta en él. A lo largo del proceso, el futuro maestro puede considerar la posibilidad de actuar así con sus futuros alumnos de primaria, teniendo en cuenta las restricciones lógicas del nivel educativo al que se dirige. Capella (2013 y 2014) muestra un ejemplo.

Una manera de enseñar la manera de resolver problemas por simulación en la formación de profesores de matemáticas de secundaria. Un ejemplo

Con los futuros profesores de secundaria, uno de nuestros objetivos tiene por objeto acortar sus dificultades cuando se enfrentan a problemas "elementales". Estas dificultades surgen porque la información que requieren para resolver los problemas se encuentra en un modelo teórico que saben que existe pero que no llegan a él y, desgraciadamente, no saben qué hacer si no: "sé que se trata de un problema de Bayes pero no me acuerdo cómo era la fórmula". Por otro lado, no se concibe que un problema, por ejemplo de probabilidad, que puede resolverse mediante el uso de un modelo teórico, se pueda resolver de otra manera, la manera que llamamos por simulación, y que las soluciones en ambos casos sean consideradas válidas o pertinentes.

En la formación de profesores los tiempos son distintos a aquéllos que describimos para los futuros maestros. Pueden ser descritos por el esquema siguiente:

- Solución teórica del problema original.
- Traducción del problema original al problema simulado.
  - Formulación del problema simulado.
  - Prueba de la equivalencia en probabilidad de los dos problemas.
- Diseño de la simulación.
  - Posibles generadores de azar. Tratamiento de les datos producidos por la simulación.
- Solución del problema simulado.
- Traducción de la solución del problema simulado al problema original:

– Aplicación de la ley de los grandes números al número de simulaciones necesarias con el fin de que la simulación produzca un resultado aceptable para el problema original.

- Metodología de enseñanza que se deriva de estas resoluciones:
  - Discusión razonada del uso de software.
  - Discusión razonada de los diferentes papeles de los protagonistas (Profesores, alumnos y contenidos que han de ser enseñados).

El problema original tiene una solución teórica que debe ser hallada en primer lugar. El profesor de secundaria conoce el modelo teórico que da cuenta del problema, aunque puede actuar como el maestro y recorrer el camino en sentido contrario. Habíamos dicho que el problema de los pasteles se modeliza mediante una cadena de Markov absorbente. En general este modelo no es conocido por una amplia mayoría de futuros profesores de secundaria, ni siendo graduados en Matemáticas. Por ello, el modelo teórico ha de ser implementado en nuestras clases, dado que el problema ha sido considerado como pertinente en todos los colectivos de los que hablamos, alumnos de primaria, secundaria, maestros y profesores. Si no se considera pertinente, no hay caso.

Una cadena de Markov se describe mediante una matriz de probabilidades, llamada matriz de transición, entre estados en los que se encentra el sistema. El sistema aquí es la colección de figuritas y su estado varía con el tiempo o con las veces que se compre un pastelito. El grafo de la Figura 3 ayuda a ver dichos estados, su tipología y las probabilidades de transición de uno a otro vecino con él.

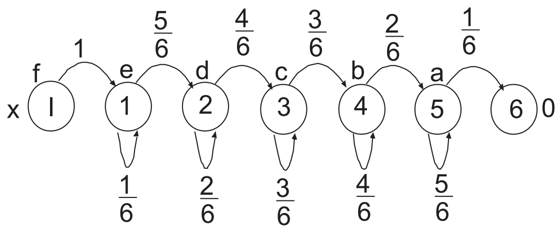

Figura 3. Grafo del problema de los pasteles. Estados del sistema (la colección) y probabilidades de transición entre estados

En el sistema anterior siempre se avanza, nunca se retrocede, aunque nos podemos quedar estancados por un momento, pero no siempre, de modo que tarde o temprano se alcanza el objetivo de llegar al estado absorbente, teniendo así la colección completa de figuritas. Esta propiedad de las cadenas de Markov absorbentes desvía la atención de la probabilidad de llegar a un estado del sistema, desde otro cualquiera anterior, a evaluar el "tarde o temprano" con el que se llega al estado absorbente, lo que se suele conocer como duración media del paseo aleatorio por el grafo o tiempo medio de espera para la absorción.

Al igual que los árboles y otros sistemas de representación son recursos para la resolución de problemas de probabilidad que incorporan reglas de cálculo a modo de sistema de signos menos abstractos que los requeridos en el modelo teórico[8], las reglas del valor medio de Engel (1975a) resuelven también el problema representado en el grafo (Figura 3), en ausencia del modelo teórico. El profesor de secundaria tiene así una solución teórica del problema original tanto por la vía del modelo teórico como por la vía de los sistemas de representación más concretos y sus reglas de cálculo. Ninguna de ellas es, probablemente, pertinente para sus futuros alumnos de secundaria.

La búsqueda del problema simulado se lleva a cabo de un modo similar a como se realiza con los futuros maestros. La consideración de las herramientas heurísticas y la formulación del problema simulado asociado a cada una exige de los futuros profesores una prueba de la equivalencia entre los dos problemas (ver nota 1, al final).

La simulación del problema y la solución del correspondiente problema estadístico asociado permiten que el futuro profesor sea consciente, no sin sorpresa, de que la solución del problema simulado sea muy parecida, si no la "misma", que la teórica, y que este parecido depende del número de simulaciones realizadas. El problema estadístico sobre cuántas simulaciones hay que realizar para que la solución del problema simulado sea aceptada como solución del problema original, dentro de unos márgenes de fiabilidad, tiene sentido no solo porque el futuro profesor no está predispuesto a las simulaciones con "lápiz y papel" sino porque su respuesta tiene una fuerte componente metodológica al cuestionar el uso de un software con el que realizarlas; se considera una nueva herramienta heurística, dependiendo del grado de fiabilidad que se imponga (el valor de ε) y del éxito si se repite esta experiencia con los estudiantes a lo largo del tiempo (el valor de δ en la desigualdad de Chebyschev). Así se desarrolla una de sus competencias con las nuevas tecnologías, elaborar programas en Matlab o en Excel, por ejemplo.

COMENTARIOS FINALES

En la formación de maestros la manera de resolver problemas por simulación tiene por intención, entre otras, que los estudiantes transiten desde un razonamiento basado en la subjetividad hacia otro que incluya información más objetiva, producto de la simulación, en busca de una modelización de los problemas. En cambio, en la formación de profesores el tránsito tiene lugar en sentido inverso, desde el razonamiento basado modelos teóricos hacia un razonamiento que incluye información objetiva, fruto de la simulación, no exenta en de cierta subjetividad e incluso de subjetividad completa. En general, cuando el futuro profesor enfrenta ambas maneras de resolver un problema de probabilidad, basada en el modelo teórico o en la simulación, es reacio a otorgar el mismo peso a ambos y siente cierto sesgo hacia el modelo teórico. Esto puede tener ciertas consecuencias fatales para muchos problemas de probabilidad, como el que hemos usado para mostrar uno de los aspectos de nuestra manera de formar maestros y profesores, pues muchos de los modelos teóricos, como las cadenas de Markov, no están al alcance ni de futuros maestros ni de futuros profesores[9]. ¿Supone esto que muchos problemas reales, contexto ideal para mostrar lo que son las matemáticas como decía Freudenthal[10] (1973), no pueden considerarse en la formación de maestros y profesores por no estar el modelo teórico al alcance de éstos? La respuesta es que, precisamente por esto, deberían estar. La manera de resolverlos por simulación es el punto en el que se encuentran ambos colectivos y estos con sus estudiantes.

Entendemos la simulación, y así la hemos usado, en un doble sentido: como método de resolución de problemas de probabilidad con contenido heurístico y como un paso más en el método. Tal vez en esto último es en donde coincidamos con la mayoría de trabajos en los que la simulación está presente, muy numerosos por cierto, cubriendo un amplio catálogo de objetivos: para tratar con la naturaleza empírica de la probabilidad, en procesos de modelización, como herramienta en la formación de maestros y profesores, etc. Si en algo tiene sentido considerar la simulación es como un método para la resolución de problemas de probabilidad con el que, no sin dificultades de diferente índole, pueden convivir estudiantes de primaria, secundaria, maestros y profesores para un problema dado. El que hemos mostrado aquí ha sido propuesto a todos esos colectivos mediante el mismo enunciado y la misma propuesta de resolución, habiendo diferentes gestiones de un mismo proceso con diferentes reacciones por parte de los resolutores.

A veces se dice que la simulación elimina las "matemáticas" que resuelven un problema de probabilidad. No podemos estar más en desacuerdo con esta afirmación. De hecho, la manera de resolver problemas de probabilidad por simulación es como mejor interpretamos la afirmación de Freudenthal (1973). Pero además, entendemos la resolución de problemas de probabilidad como un proceso en la búsqueda de información requerida para tomar una decisión en situaciones de incertidumbre, decisión continuamente revisable en virtud de la actualización de dicha información. En esto estamos próximos a Borovcnik (2011) y su idea del tipo de información disponible "objetiva" y "subjetiva" que da lugar a las diferentes naturalezas del concepto de probabilidad: objetiva y subjetiva. La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación facilita el uso de ambos tipos de información y solamente al resolutor compete usar una u otra para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

Cuando un estudiante para maestro y profesor resuelve un problema por simulación, el estado anímico en el que se encuentra al finalizarlo es de cierta incredulidad. Por su trayectoria y experiencia "matemática" el futuro maestro entiende que la solución que está dando al problema original por la vía del problema simulado puede estar bien o puede estar mal, casi al mismo tiempo. Ha estado en contacto con el azar, con lo aleatorio, con la incertidumbre. Es algo así como que necesita de una respuesta basada en un modelo teórico para validar la suya. Aún sin entender el modelo teórico del que procede, si se le dice que en el problema de los pasteles la solución teórica es 14.7 pasteles el número esperado que hay que comprar es más fiable que la suya, y ésta tanto más cuanto más cerca está de la proporcionada por el modelo teórico desconocido. En el caso del futuro profesor de secundaria, para quien la solución teórica es lo primero que obtiene y comprende su origen, la sorpresa le asalta al resolver el problema por simulación y observar que la solución obtenida por esta vía es "muy parecida" a la obtenida teóricamente. En algunos casos, no se da crédito a que ambas soluciones estén tan próximas. Algo así se provoca al proponer a los futuros maestros y profesores la resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica. No es fácil, pero vale la pena intentarlo.

REFERENCIAS

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C.

Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 71-83). Nueva York: Springer.

Bryan, B. (1986). Using simulation to model real world problems. *Proceedings of the ICOTS-2 conference*, pp. 86-90. Recuperado de http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php

Capella, J. (2013). *La simulació en l'aprenentatge de la probabilitat en Primària*. Trabajo de Fin de Grado. Universitat de Valencia. Recuperado de http://roderic.uv.es

Capella, J. (2014). *La simulació i la resolució de problemes de probabilitat. Estudi sobre la influència en la probabilitat subjectiva en alumnes de 13 i 14 anys*. Tesis de Máster. Universitat de València.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Chaput, B., Girard, J.C.y Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burril y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenge for Teaching and Teachers Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 85-95). Nueva York: Springer.

DeGroot, M. H. (1975). *Probability and Statistics*. Menlo Park, CA: Addison Wesley.

Diaz, C. y De la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian Reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 128-143.

Engel, A (1975a). The probabilistic abacus. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(1), 1-22.

Engel, A. (1975b). *L'enseignement des probabilités et de la statistique*. París: CEDIC.

Freudenthal, H (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordretch, Holanda: Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205.

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(1), 75-86.

Huerta, M. P. (2015, abril). *La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación*. Ponencia invitada en las 2ª Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria. Recuperado de www.jvdiesproyco.es.

Huerta, M. P. y Arnau, J. (2014). Percepción de los futuros maestros y profesores sobre usos y enseñanza de recursos en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 415-424). Salamanca: SEIEM.

Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 353-364). Lleida: SEIEM.

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, M. A. y Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 807-817). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów

Kahneman, D. (2014). *Pensar rápido, pensar despacio*. Sant Llorenç d'Hortons: Debolsillo.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Santos, M. (2012). El papel de la resolución de problemas en el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 7*(10), 151-163.

Shaughnessy, J. M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? En R. W. Sholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 325-350). Amsterdam: Elsevier.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). Nueva York: Macmillan.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Ed.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp.153-160. Cambridge, MA: Cambridge Academic Press.

---

[1] Si al problema original se le puede asociar un modelo teórico que lo resuelve, diremos que el problema simulado converge estocásticamente al problema original si las frecuencias relativas convergen en probabilidad hacia las probabilidades teóricas y los valores medios de las variables estadísticas cuantitativas convergen en probabilidad a las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias correspondientes. Recíprocamente, las probabilidades teóricas y las esperanzas matemáticas del problema original pueden interpretarse como frecuencias relativas o valores promedios en el problema simulado.

[2] Incluso un esquema tan complejo como este no refleja fielmente todo el trabajo que hay que hacer cuando se aborda la resolución de un problema de esta manera.

[3] Un recurso alternativo para este problema es el ábaco probabilístico de Engel (1975a). ¡Un algoritmo determinista resolviendo una situación aleatoria! Sugerimos al lector que resuelva el problema como le apetezca, bien considerándolo como una cadena de Markov o bien considerándolo como "un paseo aleatorio" en el ábaco de Engel. Si no es así, tampoco pasa nada, pues la lectura de este trabajo no depende de ello. Tal vez le apetecería simularlo para hacerse una ligera idea de "por dónde van los tiros" o incluso ir más allá, hacia una solución razonable y fiable, o incluso más allá, al modelo teórico. Una vez formulado, el problema pertenece solamente al resolutor.

[4] El número es ilustrativo e intencionado, proporcionado por el profesor.

[5] Sea p la probabilidad teórica de un suceso S. Sea fr_n la frecuencia relativa asociada a ese suceso en n pruebas de un experimento aleatorio que lo simula. La versión fuerte de la ley de los grandes números establece la convergencia estocástica de las frecuencias hacia las probabilidades en los siguientes términos: $P(fr_n \to p) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

[6] Si se requiere aproximar un valor esperado por un valor promedio dependiendo del número de simulaciones, hay que tomar la desigualdad de Chebyschev correspondiente.

[7] Para cualquier ε y δ que se considere, esta función alcanza un máximo para p=1/2. El número máximo de simulaciones dependerá de estos valores y se puede estimar por $n_0 = \frac{1}{4\varepsilon^2(1-\delta)}$.

[8] Una discusión sobre esto puede verse en Huerta (2002).

[9] En el pasado, el Grupo Cero apostó por resolver problemas como estos en un proyecto curricular basado en la resolución de problemas. También lo hizo Engel (1975a, 1975b). Hoy se rescatan aquí.

[10] "*To explain to people what mathematics really means, one finds the most convincing examples in probability*" (p. 583).