

CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS Y LA COMPETENCIA DE RECONOCER EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO *UP AND DOWN* EN LOS ESTUDIANTES

Mathematical knowledge and the competence to recognize students' development of reasoning up and down

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro (EPM) cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria. Nuestro estudio se centra en el razonamiento up and down que es una de las componentes que facilitan el desarrollo del razonamiento proporcional. 92 EPM resolvieron una tarea en la que tenían que interpretar las respuestas de estudiantes de educación primaria a un problema que implicaba el razonamiento up and down. Identificamos tres perfiles de EPM caracterizados por la relación entre el conocimiento de matemáticas y la competencia de reconocer el desarrollo del razonamiento up and down en los estudiantes.

Palabras clave: *Mirada profesional, razonamiento “up and down”, conocimiento del profesor*

Abstract

This study examines the role played by prospective teachers' mathematical knowledge when thinking about primary school students' mathematics learning. Our study is focused on one of the proportional reasoning components: reasoning up and down. 92 prospective teachers solved a task in which they had to interpret primary students' answers to a problem that implies the reasoning up and down. We identified three prospective teachers' profiles characterized by the relationship between mathematical knowledge and the competence to recognize the development of reasoning up and down in primary students.

Keywords: *Professional noticing, reasoning up and down, teachers' knowledge*

INTRODUCCIÓN

Investigaciones recientes indican que los estudiantes para maestro conocen de manera limitada las componentes que constituyen el razonamiento proporcional. En particular, los estudiantes para maestro tienen dificultades en identificar situaciones no proporcionales y en manejar el significado multiplicativo de la idea de operador y la idea de razón (Buforn y Fernández, 2014), en el uso del concepto de razón en un contexto de escalas (Livy y Vale, 2011), en el reconocimiento de la relación funcional entre las cantidades y la falta de argumentos para establecer la relación entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón (Valverde y Castro, 2009), y en la interpretación de las razones en situaciones de comparación (Gómez y García, 2014). Por otra parte, el conocimiento limitado de los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema de proporcionalidad les lleva a interpretar de manera no apropiada las respuestas de alumnos de primaria (Rivas, Godino y Castro, 2012). La hipótesis que apoya este tipo de investigación es que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta realizar tareas profesionales de los profesores como interpretar respuestas de estudiantes para tomar decisiones de acción pertinentes.

Nuestro estudio se sitúa en este ámbito de investigación y nos planteamos examinar la relación entre el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro y cómo interpretan respuestas de estudiantes en tareas relacionadas con el razonamiento proporcional.

La fracción como unidad iterativa en el desarrollo del razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional considerando cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente), las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento *up and down* y proceso *unitizing*) y la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales (Lamon, 2005, 2007; Pitta-Pantazi y Christou 2011). En esta comunicación nos centraremos en una de estas componentes, el razonamiento *up and down*, entendida como la capacidad de reconstruir la unidad a partir de la representación de una fracción y representar posteriormente otra parte (fracción) de esta unidad (Steffe y Olive, 2012). Luego, las tareas que implican un razonamiento *up and down* requieren dos procesos: en primer lugar, ir desde la representación de una fracción hasta la unidad (reconstrucción de la unidad), y después, desde la unidad hasta la representación de otra fracción. Un ejemplo de esta actividad es la siguiente: *La parte sombreada de esta figura representa $3+2/3$ ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?* (Lamon, 2005, p. 73) (Figura 1). En este caso, la unidad (reconstrucción de la unidad) sería 3 rectángulos pequeños ya que la parte sombreada la podemos ver como 3 veces 3 rectángulos pequeños (3 unidades) y $2/3$ que serían los dos restantes. Una vez obtenida la unidad, podemos ver que 4 rectángulos pequeños equivale a 1 unidad más $1/3$ (representación de la fracción pedida).

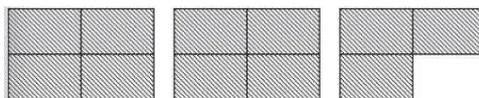


Figura 1. Tarea que implica un razonamiento *up and down*

Para interpretar las evidencias de la progresión conceptual de los estudiantes, los EPM deben ser capaces de poder reconocer el papel que desempeñan los procesos de reconstruir la unidad y representar otras fracciones que constituyen el razonamiento *up and down*. La manera en la que los EPM puedan identificar estos procesos les permitirá estar en mejores condiciones de interpretar las respuestas de los estudiantes a este tipo de problemas.

Conocimiento de matemáticas y ser capaz de interpretar respuestas de los estudiantes

Investigaciones recientes indican que la competencia docente *mirar profesionalmente* la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se apoya en que los profesores sean capaces de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos para poder tomar decisiones de enseñanza debidamente fundamentadas (Fortuny y Rodríguez, 2012; Mason, 2002). Un aspecto particular de esta competencia docente es ser capaz de reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de tópicos matemáticos específicos para tomar decisiones de enseñanza pertinentes (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). Estas investigaciones han mostrado que la identificación del estudiante para maestro de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos le permite estar en mejores condiciones para reconocer el desarrollo conceptual de los estudiantes. Estos estudios subrayan, por tanto, la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.

Considerando estos aspectos, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué elementos matemáticos identifican los EPM como importantes en las tareas que implican un razonamiento *up and down*?

- ¿Qué evidencias del razonamiento *up and down* reconocen los EPM en las respuestas de estudiantes de primaria?
- ¿Qué tipo de tareas proponen los EPM para apoyar el desarrollo del razonamiento *up and down* en los estudiantes de primaria?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 92 estudiantes para maestro de educación Primaria (EPM) que en el momento de la recogida de datos estaban cursando una asignatura sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Los contenidos de esta asignatura son las características del aprendizaje de los estudiantes de educación primaria y de la enseñanza en diferentes dominios matemáticos. Los datos fueron recogidos después de haber estudiado el bloque de números y operaciones, donde está incluido el tópico del razonamiento proporcional.

En relación al tema de razonamiento proporcional, los estudiantes para maestro habían resuelto y analizado una serie de problemas que indicaban las componentes del razonamiento proporcional y habían analizado respuestas de estudiantes de primaria utilizando información teórica sobre el desarrollo y características del razonamiento proporcional (Fernández, 2009; Lamon, 2005).

Instrumento

Los estudiantes para maestro contestaron a un cuestionario con 12 tareas. Cada tarea consistía en (i) un problema relativo a una de las componentes del razonamiento proporcional, (ii) tres respuestas de estudiantes de primaria que mostraban distintas características del desarrollo de esa componente del razonamiento proporcional y (iii) cuatro cuestiones centradas en la enseñanza y aprendizaje:

- ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver este problema? Justifica tu respuesta.*
- ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas de los estudiantes? Justifica tu respuesta.*
- Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.*
- Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías el problema para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.*

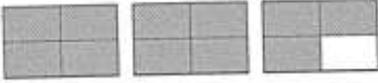
Las dos primeras cuestiones pedían a los estudiantes para maestro identificar los elementos matemáticos necesarios para resolver el problema y justificar cómo consideraban que las respuestas de los alumnos de primaria reflejaban alguna característica de su comprensión. En las otras dos cuestiones se les pedía modificar el problema para ayudar al estudiante a mejorar su comprensión. La figura 2 muestra las tres respuestas de los estudiantes al problema relativo al razonamiento *up and down* cuya resolución implicaba reconstruir la unidad y representar fracciones.

Las respuestas de los estudiantes de primaria a este problema reflejaban distintas características. La respuesta 1 es de un alumno que no identifica la unidad como 3 rectángulos pequeños al confundir la unidad con toda la figura (los tres rectángulos grandes), es decir, no identifica la fracción unitaria $1/3$ que ha sido iterada para representar $11/3$ en la figura; de ahí que este alumno no reconstruya la unidad. En la respuesta 2, el alumno identifica la fracción $1/3$ en la figura como parte de iterar 11 veces $1/3$, lo que le permite identificar la unidad (iterando 3 veces $1/3$). Sin embargo tiene dificultades en nombrar como fracción lo que representa un rectángulo (la figura formada por 4 rectángulos pequeños). Este estudiante solo reconstruye la unidad, pero no representa la fracción

impropia. Finalmente, en la respuesta 3, el alumno de primaria identifica que tres rectángulos pequeños son la unidad al reconocer una representación para la fracción unitaria $1/3$, e iterarla 3 veces para representar la unidad. Después, representa la fracción indicada a partir de esta unidad y nombra a los 4 rectángulos pequeños como $1+1/3$ (4 veces $1/3$). En esta respuesta se observa la coordinación de los dos procesos, la reconstrucción de la unidad y la representación de fracciones.

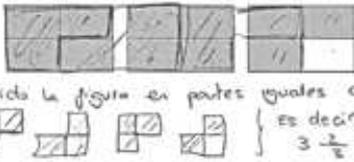
La parte sombreada de esta figura representa $3 + \frac{2}{3}$. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?

Respuesta 1



Representa $\frac{1}{3}$ del total. Hay 3 rectángulos de 4 rectángulos pequeños. Por lo tanto cada figura de 3 rectángulos es $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3}$.

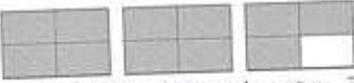
Respuesta 2



Si divido la figura en partes iguales obtengo:

Es decir $3 + \frac{2}{3}$ $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ partes} \\ \text{reconstruidas} \\ \text{y } \frac{2}{3} \end{array} \right.$

Respuesta 3



Según la posición pintada podemos deducir que 3 rectángulos pequeños forman una unidad, por lo tanto hay 3 unidades y $\frac{2}{3}$ que son 2 rectángulos más. Entonces, 4 rectángulos pequeños serán $1 + \frac{1}{3}$.

Figura 2. Problema sobre la componente razonamiento *up and down* y respuestas de estudiantes

Análisis de los datos

Los datos de esta investigación son las respuestas dadas por los EPM a las cuatro cuestiones planteadas en el problema de la Figura 2. En primer lugar, identificamos los conceptos matemáticos que los estudiantes para maestro identificaban en el problema propuesto (cuestión a). La identificación de estos conceptos está relacionado con la manera en la que estos estudiantes para maestro consideraban que el problema propuesto se resolvía usando un razonamiento *up and down*. Con este procedimiento pudimos identificar dos grupos: estudiantes para maestro que reconocían la coordinación de los dos procesos del razonamiento *up and down* (la reconstrucción de la unidad y la representación de una fracción), y los estudiantes para maestro que no identificaban esta idea y simplemente comentaban conceptos como parte-todo, fracción unitaria, etc., sin explicar los procesos específicos necesarios para resolver la tarea.

En segundo lugar, consideramos qué evidencias del razonamiento *up and down* reconocían los estudiantes para maestro en las respuestas de estudiantes (cuestión b). Este análisis se realizó de manera inductiva por tres investigadores generando tres grupos:

- EPM que dieron argumentos generales (por ejemplo basados en la corrección o no de la respuesta)
- EPM que describían las respuestas de los estudiantes
- EPM que reconocieron evidencias de los procesos de reconstrucción de la unidad y de representación de una fracción en las respuestas de los estudiantes (procesos implicados en el razonamiento *up and down*)

La consideración conjunta del resultado del análisis de las respuestas a las cuestiones a y b, permitió identificar perfiles de estudiantes para maestro considerando las relaciones entre el reconocimiento de los procesos implicados en el razonamiento *up and down* y la capacidad de reconocer esos procesos en las repuestas de los estudiantes que describimos en la sección de resultados.

Las respuestas a las cuestiones c) y d) fueron analizadas identificando categorías que se iban refinando a medida que se realizaba el análisis. Estas categorías se muestran en la sección siguiente.

RESULTADOS

Se identificaron cuatro perfiles de estudiantes para maestro considerando las relaciones entre el conocimiento de los procesos implicados en el razonamiento *up and down* y la capacidad de reconocer esos procesos en las repuestas de los estudiantes (Tabla 1).

Tabla 1. Perfiles de los estudiantes para maestro

		Reconocimiento del razonamiento <i>up and down</i>		
Reconocimiento de los elementos matemáticos	Identifican los procesos implicados en el razonamiento <i>up and down</i>	Reconocen evidencias de los procesos en las respuestas de los estudiantes (CI)	27	38
		Proporcionan comentarios generales (CG)	11	
	No identifican los procesos implicados en el razonamiento <i>up and down</i>	Describen las respuestas de los estudiantes (OD)	5	31
		Proporcionan comentarios generales (OG)	26	
	Respuesta sin sentido (IG)		3	
	En blanco		20	

27 EPM identificaron los procesos de reconstrucción de la unidad y la representación de fracciones como conceptos matemáticos de la tarea y reconocieron estos procesos en las respuestas de los estudiantes (CI). Como por ejemplo, el siguiente EPM (Figura 3) identificó estos dos procesos y reconoció que en la respuesta 2, el estudiante no identifica la fracción unitaria y por lo tanto no reconstruye la unidad, en la respuesta 1 el estudiante reconstruye la unidad pero no representa la fracción pedida, y en la respuesta 3, el estudiante coordina los dos procesos identificando la unidad y representando la fracción.

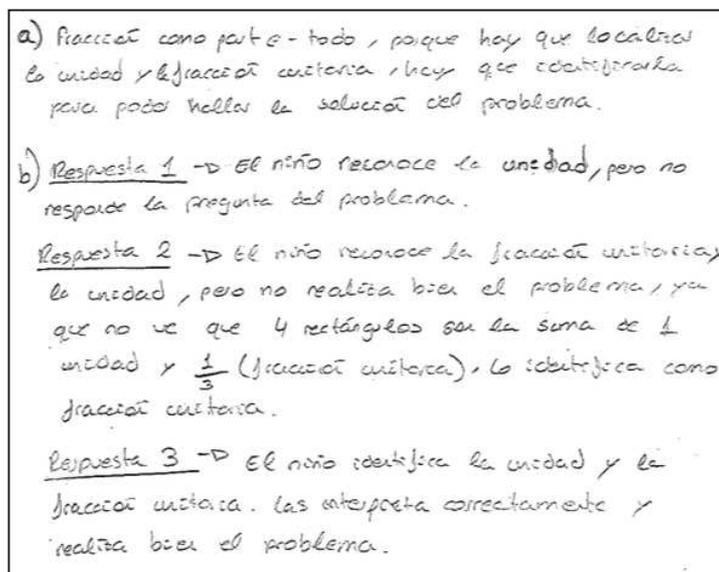


Figura 3. Respuesta de EPM perteneciente al grupo CI

11 EPM, a pesar de haber identificado los elementos matemáticos implicados en el problema, realizaron comentarios generales (CG). El siguiente ejemplo (Figura 4) muestra un EPM que

identificó los procesos implicados en el razonamiento *up and down* al reconocer “la idea de unidad para poder reconocerla en las figuras representadas”, sin embargo no aporta evidencias del reconocimiento de estos procesos en las respuestas de los estudiantes ya que no comenta para cada una de las respuestas los procesos implicados (en la respuesta 1 no identifica el todo, en la respuesta 2 reconoce el todo pero no representa la fracción, y en la respuesta 3 no identifica que se dan los dos procesos, reconocer el todo y representar la fracción).

a) Debe conocer el concepto parte-todo y la idea de unidad para poder reconocerla en las figuras representadas.

b) Cuando identifica la idea de unidad dentro de la parte sombreada.

Figura 4. Respuesta de EPM perteneciente al grupo CG

Ningún estudiante para maestro que no identificó el razonamiento *up and down* como el proceso que implica reconstruir la unidad y representar fracciones, reconoció evidencias de estos procesos en las respuestas de estudiantes. Los EPM en este grupo describieron las respuestas de los estudiantes (OD) o dieron comentarios generales (OG). El siguiente EPM (Figura 5-a) no identificó los procesos implicados; solo comenta la idea de parte-todo, describiendo la respuesta según lo que observa. La Figura 5-b es de un EPM que además de no identificar los procesos implicados en el razonamiento *up and down* proporciona un comentario general basado en la corrección.

a) - Partes de un todo .

b) RESPUESTA 1
El primer alumno busca la unidad, por ello si 3 rectángulos formados a su vez por otros 4 rectángulos, deduce que la unidad sea $\frac{12}{3}$ y divide entre 4. Así llega a la conclusión de que la unidad está formada por 3 rectángulos pequeños y equivale a $\frac{2}{3}$ (cada rectángulo pequeño = $\frac{1}{3}$). Sin embargo no dice el resultado.

RESPUESTA 2
En este caso, el niño deduce la unidad y al darse cuenta de que cada unidad está compuesta por 3 rectángulos pequeños y ~~cada uno vale~~ $\frac{1}{3}$.
Llega a la conclusión de que 4 rectángulos equivalen a $\frac{4}{3}$.

RESPUESTA 3
Sabiendo que debe obtener 4 figuras unidades en total, segmenta las figuras dadas hasta obtener 4 figuras formadas por el mismo n° de rectángulos.

a) Concepto de fracción parte todo
b) La 2 y 3 comprenden el concepto de fracción y proporcionalidad. Mientras que el 1° no resuelve el problema ya que no comprende.

Figura 5-a y 5-b. Respuestas de EPM pertenecientes al grupo OD y al grupo CG

Decisiones de acción

La Tabla 2 muestra el tipo de modificaciones del problema proporcionadas por los EPM para ayudar a los estudiantes que no han desarrollado el razonamiento *up and down*.

Tabla 2. Modificaciones del problema para ayudar a los estudiantes con el razonamiento *up and down*

Cuestión c	CI	CG	OD	OG	IG
Que las particiones coincidan con el todo	16	6	3	12	
Indicar la fracción unitaria // pedir la fracción unitaria	2			1	
Contexto discreto	3			1	1
Material manipulativo	1		1	2	
Explicar contenido	1			1	
Sin usar la notación mixta				1	
En blanco // no cambia el nivel // sin sentido	5	5	2	8	2

Los EPM proporcionan modificaciones basadas en que el todo coincida con la figura que se presenta (Figura 6-a), que se indique la fracción unitaria (Figura 6-b) o el cambio a un contexto discreto. Los estudiantes para maestro que dieron comentarios generales tienen más tendencia a proporcionar respuestas sin sentido o dejarlas en blanco.

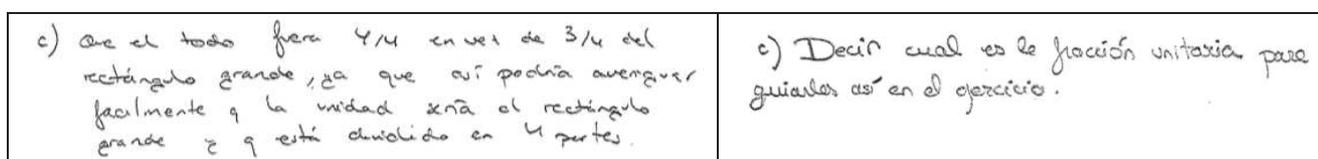


Figura 6. Ejemplos de modificaciones para ayudar a los estudiantes con el razonamiento *up and down*

La Tabla 3 muestra las modificaciones del problema proporcionadas por los EPM para ayudar a progresar en el desarrollo del razonamiento *up and down*.

Tabla 3. Modificaciones del problema para progresar en el desarrollo del razonamiento *up and down*

Cuestión d	CI	CG	OD	OG	IG
Representar una fracción mayor o menor	6			1	
Necesidad de nueva división para poder representar	8	2	2	5	1
Contexto discreto	5		1	3	
Otra figura geométrica // más rectángulos			2	4	
En blanco // no cambia el nivel // sin sentido	9	9	1	13	2

En este caso la modificación que predomina en todos los grupos es la idea de que exista la necesidad de realizar una nueva partición después de encontrar la unidad para poder representar la nueva fracción, por ejemplo pidiendo una fracción con denominador diferente al dado (Figura 7).

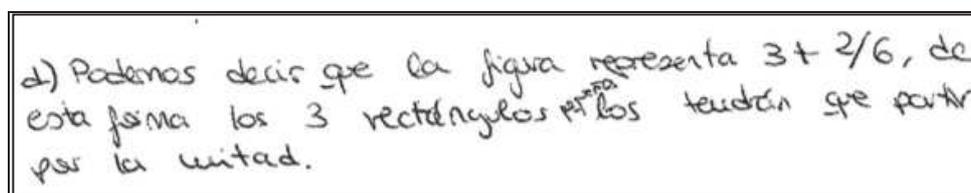


Figura 7. Ejemplo de modificación del problema para progresar en el razonamiento *up and down*

Los resultados muestran que un número elevado de EPM (n=34) dieron respuestas sin sentido o la dejaron en blanco. Además, esta frecuencia es más elevada que en la cuestión (c) (n=22), por lo que se deduce que a los EPM les resultaba más difícil proponer tareas que ayuden a los estudiantes a potenciar el desarrollo del razonamiento *up and down* cuando ya habían reconocido evidencias en las respuestas de los estudiantes, que proponer tareas para iniciar el razonamiento.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo del estudio es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria. Nuestro estudio se centra en el razonamiento *up and down*, que es una de las componentes que facilitan el desarrollo del razonamiento proporcional (Lamon, 2005).

Los resultados muestran que cuando los EPM son capaces de identificar los procesos implicados en el razonamiento *up and down* como conceptos matemáticos que demanda el problema propuesto (conocimiento de matemáticas), más de la mitad de ellos también son capaces de interpretar las respuestas de los estudiantes aportando evidencias de cómo los estudiantes de primaria coordinan o no estos procesos implicados (reconstrucción de la unidad y representación de una fracción) y aportando decisiones de acción pertinentes para ayudar a los estudiantes en el desarrollo del razonamiento *up and down* o hacerles progresar en su desarrollo. Sin embargo, cuando no son capaces de identificar estos procesos, la mayoría de ellos interpretan las respuestas de los estudiantes proporcionando argumentos generales basados en la corrección de las respuestas. Esto les lleva a proporcionar decisiones de acción con menos fundamento (sin sentido o en blanco).

Por otro lado, los resultados obtenidos indican que la tarea de reconocer evidencias de la comprensión de un tópico matemático no es una tarea fácil para los EPM, aun habiendo identificado los conceptos matemáticos que implican el problema (conocimiento de matemáticas). Esto se evidencia en los grupos de EPM que habiendo identificado los procesos de reconstrucción de la unidad y representación de una fracción, proporcionan argumentos generales o describen. Este resultado indica que el conocimiento de matemáticas no es sinónimo del conocimiento de matemáticas y de los estudiantes, apoyando la diferenciación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de matemáticas para la enseñanza.

Por otra parte, que algunos EPM identificaran los procesos de reconstrucción de la unidad y representación de una fracción y proporcionaran argumentos generales se podría interpretar también desde las creencias mantenidas por estos EPM, en el sentido de que estos EPM podrían tener la creencia de que las respuestas de los estudiantes “son correctas o incorrectas” (es decir, o se comprende o no se comprende) (Copes, 1982) aunque ellos tengan el conocimiento de matemáticas adecuado para resolver el problema propuesto y reconocer de manera implícita los elementos matemáticos que dan forma a su resolución.

Nosotros pensamos que estos resultados aportan información relevante para los programas de formación inicial en el sentido de que nuestro instrumento puede ofrecer oportunidades a los EPM para desarrollar la competencia profesional de interpretar respuestas de estudiantes.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

- Buforn, À. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema*, 28(48), 21-41.
- Copes, L. (1982). The Perry development scheme: A metaphor for learning and teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 3(1), 38-44.
- Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. València: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM-Mathematics Education*, 44, 747-759.

- Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: Facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23-37.
- Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.
- Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Londres: Routledge Falmer.
- Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149-169.
- Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012) Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y.
- Steffe, L. y Olive, J. (2012). *Childrens' fractional knowledge*. Londres: Springer.
- Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-532). Santander: SEIEM.