

LAS PROGRESIONES COMO INDICADOR DE LA COMPRESIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA EN ALUMNOS DE SEGUNDO CICLO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Progressions as an indicator of understanding of numerical sequence concept in secondary school students

Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G., Gavilán Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla.

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación que aborda la comprensión del concepto de sucesión numérica en los estudiantes de secundaria. La perspectiva proporcionada por la obra de Piaget y García en relación con el desarrollo de un esquema a través de varios niveles (intra, inter y trans), nos proporciona la prueba empírica de cómo el uso de las progresiones por parte de los estudiantes en la resolución de una tarea, proporciona información del desarrollo de la comprensión. Este uso nos permite profundizar sobre los niveles en el desarrollo del concepto sucesión numérica.

Palabras clave: *Estudiantes de Secundaria, Esquema, Sucesiones Numéricas, Progresiones.*

Abstract

The present paper is part of research that addresses the understanding of the concept of numerical sequence by secondary school students. The perspective provided by the work of Piaget & Garcia related to the development of a scheme through several levels (intra, inter and trans) provides empirical evidence of how students' use of the progressions when solving a task provides information of the development of understanding. This use allows us to deepen on the stages in the development of numerical sequence concept.

Keywords: *Secondary School Students, Scheme, Numerical Sequences, Progressions.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de la comprensión de conceptos matemáticos ha sido y es un campo de gran interés para la investigación en educación matemática. Camacho (2011) resalta la relevancia en esta problemática de las investigaciones sobre conceptos de análisis matemático. En este campo, el análisis de la comprensión del concepto de sucesión ha sido abordado por diferentes investigadores desde diferentes perspectivas teóricas (Cañadas, 2007; González, Medina, Vilanova y Astiz, 2011; McDonald, David, y Strobel, 2000; Przenioslo, 2006). McDonald et al. (2000) encontraron que los estudiantes construían dos objetos cognitivos diferentes en relación con el concepto de sucesión. Por una parte, un objeto como listado de números que denominaba *Seqlist* y por otra parte, otro objeto como función cuyo dominio pertenece al conjunto de los naturales, que llamó *Seqfun*. McDonald et al. (2000) y Mamona (1990) consideran que la mayoría de estudiantes de secundaria comprenden el concepto de sucesión como lista numérica, como un proceso más que como un objeto.

Przenioslo (2006) también ha identificado, esencialmente, dos formas de concebir las sucesiones en estudiantes. Sucesiones como lista numérica en estudiantes de secundaria (16-18 años) y sucesiones como función en estudiantes de enseñanza no obligatoria (18-19 años). Además para Przenioslo el concepto de sucesión numérica requiere el manejo del mismo en diferentes modos de representación. Para esta autora la concepción como lista numérica del concepto de sucesión es especialmente interesante por la diversidad de concepciones identificadas en su investigación.

Sierpinska (1990) identificó diferentes concepciones sobre las sucesiones numéricas. Consideró por una parte una concepción de sucesión numérica como lista que se vincula con la existencia de una fórmula que permite obtener los términos, y por otra parte una concepción de sucesión como una lista larga de números (una secuencia infinita). Por otro lado, Mor, Noss, Hoyles, Kahn y Simpson (2006) observaron que las intuiciones de los estudiantes en relación a las secuencias numéricas son intuitivamente recursivas (es decir, entre valores sucesivos de la secuencia, más que como una relación entre los valores y su posición).

En este trabajo nos centramos en caracterizar la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica en alumnos de segundo ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), en concreto, en determinar el papel que desempeña el concepto de progresión (aritmética o geométrica) en la construcción del esquema del concepto de sucesión como lista numérica.

MARCO TEÓRICO

Una manera de caracterizar la construcción de la comprensión de un concepto matemático es a través de la metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso (Arnon, et al., 2014; Dubinsky, 1991). Estos autores señalan que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones percibidas de problemas matemáticos por medio de la reflexión sobre los problemas y sus soluciones a través de la (re-)construcción de acciones matemáticas, procesos y objetos y de la organización de éstos en esquemas usados al tratar con las situaciones. En particular, la aproximación al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1983) permite abordar la cuestión de caracterizar la comprensión de conceptos matemáticos (Ariza y Llinares, 2009; Vals, Pons y Llinares, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008).

Desde esta perspectiva, un esquema puede considerarse “la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas” (Piaget e Inhelder, 1978, pp. 20). Un esquema se desarrolla pasando por tres niveles: INTRA – INTER – TRANS, que se suceden según un orden fijo mediante un mecanismo denominado “abstracción reflexiva” (Piaget y García, 1983, pp. 10). Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) caracterizan los niveles del desarrollo de un esquema a través de los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que llegan a establecer entre ellos cuando los estudiantes resuelven una tarea:

INTRA: no se establecen relaciones lógicas, y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizaran con errores. Los estudiantes usan los elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).

INTER: los estudiantes establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica y relacionando sólo elementos matemáticos que se encuentren en el mismo modo de representación. El estudiante es capaz de usar más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.

TRANS: aumenta el repertorio de las relaciones lógicas (y lógica, implicaciones: directa, inversa, recíproca, y equivalencia lógica) que el estudiante es capaz de establecer entre diferentes elementos matemáticos. En este nivel se produce la síntesis de los modos de representación que lleva a la construcción de la estructura matemática. La síntesis se aplica a situaciones en las que hay que

relacionar (relación lógica) información en distintos modos de representación. Es decir, usar información procedente de varios sistemas de representación para considerarla conjuntamente y obtener una información que no se conocía. Considerar la información conjuntamente lo entendemos como establecer algún tipo de relación lógica para tomar una decisión relativa a la situación en la que el estudiante se encuentra.

Las investigaciones llevadas a cabo sobre el concepto de sucesión numérica, citadas en la introducción de este trabajo, nos han permitido disponer de información sobre determinadas características de la comprensión de dicho concepto en los estudiantes de secundaria. Por ello nos hemos planteado como objetivo en este trabajo determinar el papel que desempeña el concepto de progresión (aritmética o geométrica) en la construcción del esquema del concepto de sucesión como lista numérica.

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes en esta investigación son 75 estudiantes de segundo ciclo de ESO (14-16 años). A dichos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica según figura en el currículo oficial (BOE, 2007; BOJA 2007). Para nuestra investigación no es relevante la manera de introducir el concepto en los estudiantes, por lo que se les pasó el cuestionario a distintos grupos de clase y con profesores diferentes. Es en este ciclo de ESO donde aparece por primera vez este concepto en el currículo, motivo por el cual se enmarca este trabajo en este nivel educativo.

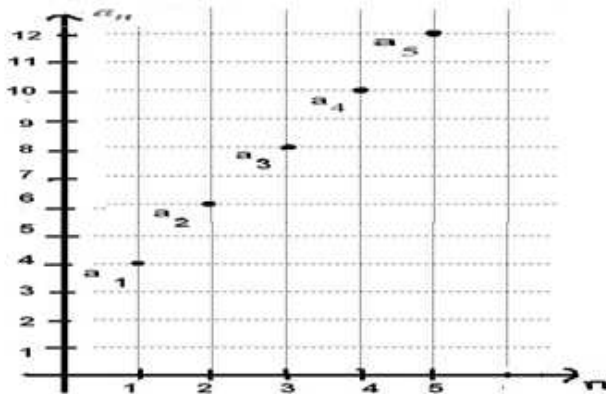
Instrumentos de recogida de datos

A partir del análisis de libros de texto de diferentes niveles educativos (ESO, Bachillerato y Universidad), y de diferentes investigaciones sobre el concepto de sucesión numérica, identificamos los distintos elementos matemáticos que constituyen dicho concepto y dispusimos de una batería de tareas para realizar la investigación. Tras un análisis (Sánchez-Matamoros, 2004) se seleccionaron, ocho tareas, y se diseñó el cuestionario. Para el objetivo de este trabajo se escogieron las dos tareas que se describen más adelante. Este cuestionario fue contestado por los estudiantes en su horario de clase. Posteriormente se revisaron las respuestas dadas y elaboramos un segundo cuestionario personalizado, con el fin de indagar en aquellas respuestas que o no habían sido respondidas completamente o no estaban lo suficientemente justificadas. Para responder a este segundo cuestionario, los estudiantes tenían a su disposición el primer cuestionario contestado. Este segundo cuestionario fue respondido en horario de clase, un par de semanas después de la realización del primero.

A continuación describimos dos de las tareas del primer cuestionario, en las que nos centramos en este trabajo (figura 1), ya que permiten mostrar el papel que desempeñan los elementos matemáticos y las relaciones lógicas vinculados a las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica. La tarea 1, dada en modo gráfico, es similar a la utilizada por González et al. (2011). La tarea 2, dada en modos numérico y algebraico es similar al problema 1 de la investigación de Przenioslo (2006), en la que hemos suprimido aquellos apartados relacionados con las sucesiones como funciones.

TAREA 1

Sea la sucesión cuya representación gráfica sobre los ejes cartesianos es la siguiente:



- a) ¿Cuál es el término segundo, es decir, a(2)? ¿Y el cuarto a(4)? ¿Y el sexto a(6)?
- b) ¿Hay algún término que valga 16? ¿Y 13? Razona las respuestas

TAREA 2

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

- a) $a(n) = \frac{1}{5-n}$
- b) $a(n) = \frac{1}{n^2 + 1}$
- c) $a(n) = \sqrt{1-n}$
- d) $a(n) = 3n - 2$
- e) $a_1 = 1, a_2 = 3$
 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- f) 16, 8, 4, 2, 1, ...

Figura 1. Tareas 1 y 2 del cuestionario

La resolución de ambas tareas conlleva el uso de los elementos matemáticos que aparecen en la figura 2, vinculados a los diferentes modos de representación (numérico, gráfico y algebraico).

ELEMENTOS DE SUCESIONES.

- E1 Sucesión (como lista): secuencia de números Reales dispuestos en un orden, es decir, Para todo número natural n existe un número real.
- E2 Términos: se definen como los integrantes de la sucesión, el lugar que ocupa lo determina su posición que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.
- E3 Término general: se define como el término que dependiendo de su posición, es decir, subíndice sabemos su valor, y se denota por "a_n" (con n perteneciente a los naturales)
- E4 Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.
- E5 Progresión Geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad fija que denominamos razón.
- E6 Sucesión Recurrente: una sucesión es recurrente si hay definida sobre ella una ley de recurrencia, es decir, una relación entre un término y los anteriores.

Figura 2. Elementos matemáticos vinculados a las tareas 1 y 2 del cuestionario

Procedimiento de análisis

El análisis llevado a cabo por el grupo de investigadores se centró en identificar los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se ponían de manifiesto en las respuestas de los estudiantes en cada una de las tareas. Los resultados que presentamos en este trabajo proceden del análisis conjunto de los dos cuestionarios contestados por cada uno de los estudiantes. A continuación mostramos cómo hemos realizado este procedimiento a través de un ejemplo.

El estudiante 3b13 en la resolución del apartado b) de la tarea 2 (figura 1) en el primer cuestionario consideraba que a_n no era sucesión porque establecía una relación de equivalencia entre sucesión numérica y progresión (E1, E4 y E5), poniéndose de manifiesto un uso incorrecto de la implicación recíproca (no progresión implica no sucesión), como puede verse en la figura 3. Se pone de manifiesto cuando el estudiante 3b13 escribe que “no sería una sucesión... no se van sumando, multiplicando, restando o dividiendo por un número fijo”, esta afirmación que hace el estudiante pone de manifiesto que identifica sucesión con progresión, ya que es en este tipo de sucesiones donde el término general se obtiene de la forma que indica el estudiante.

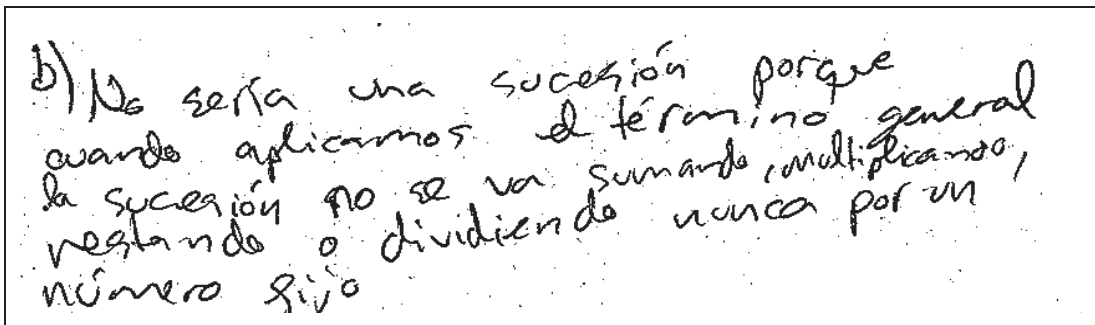


Figura 3. Respuesta del estudiante 3b13 al apartado b de la tarea 2 del primer cuestionario

Sin embargo, cuando le preguntamos por ello en el segundo cuestionario reflexiona y hace uso del término general (E3) que le proporciona el enunciado para responder de forma correcta en el sentido de que a pesar de no ser una progresión (ni aritmética, ni geométrica, “no se multiplique, sume, reste o divida por un número fijo”), si es una sucesión numérica porque “sigue un patrón fijo” (refiriéndose al término general de la sucesión proporcionado en el enunciado) (figura 4). Con esta afirmación por parte del estudiante se pone de manifiesto el uso correcto de que existen sucesiones que no son progresiones, es decir, no hace uso incorrecto de la implicación recíproca.

¿Podrías aclarar la respuesta dada al apartado b: ¿Por qué no es sucesión?



Figura 4. Respuesta del estudiante 3b13 al apartado b de la tarea 2 del segundo cuestionario

Del análisis conjunto de los dos cuestionarios podemos concluir que el estudiante 3b13 hace uso correcto de los elementos matemáticos relacionados con las progresiones y término general de una sucesión y de la relación que se establece entre progresiones y sucesiones.

RESULTADOS

La forma en la que los estudiantes hacen uso de los elementos matemáticos vinculados a las progresiones cuando resuelven las tareas, la hemos considerado un indicador del nivel de

comprensión del concepto de sucesión numérica y de la manera en la que los estudiantes reorganizan y reconstruyen el conocimiento para formar nuevas estructuras.

Esta sección de resultados la hemos organizado en dos apartados, un primer apartado en el que mostramos el trabajo de un estudiante que hace un uso incorrecto de las relaciones entre progresión y sucesión numérica cuando resuelve las tareas 1 y 2 (figura 1). Y un segundo apartado en el que mostramos el trabajo de otro estudiante que hace uso correcto de dichas relaciones. Estas evidencias ponen de manifiesto como el uso de los elementos matemáticos y las relaciones vinculadas a las progresiones son un indicador del nivel de comprensión del estudiante sobre el concepto de sucesión numérica.

Uso incorrecto de las relaciones entre progresiones y sucesiones numéricas

El estudiante 3b2, en los apartados a) y b) de la tarea 1 del primer cuestionario para resolver la tarea se traslada del modo de representación gráfico al modo algebraico. A partir de los términos a_1 y a_2 calcula la diferencia y obtiene el término general de la progresión aritmética y sustituyendo calcula a_6 (figura 5) (E2, E3 y E4).

Figura 5. Respuesta del estudiante 3b2 de la tarea 1 del primer cuestionario

El estudiante ha hecho uso correcto de los elementos matemáticos progresión aritmética (E4) y término general (E3) para resolver los apartados anteriores.

Para responder al apartado b) donde se le pregunta si algún término vale 16 o 13, hace uso correcto del término general de la progresión aritmética obteniendo el lugar que ocupa el término 16 (figura 5) y que no existe ningún término cuyo valor sea 13 (E2 y E3).

3b2: El término séptimo vale 16. No hay ningún término que valga 13 ya que la sucesión es de números pares.

Este mismo estudiante, en el apartado b) de la tarea 2 en el primer cuestionario, hace uso correcto del elemento matemático término general de una sucesión (E3) para hallar los tres primeros términos a través de la expresión algebraica. Pero no identifica que es una sucesión (E1), ya que establece una relación de equivalencia entre sucesión numérica y progresión.

3b2: No es una sucesión ya que la razón de la progresión o la diferencia según sea una PA (progresión aritmética) o una PG (progresión geométrica) no es la misma ya que cambia al hallar el siguiente término.

Para indagar sobre esta respuesta nos apoyamos en el segundo cuestionario, donde le pedimos que nos aclare dicha respuesta, en relación a que significa razón o diferencia:

Pregunta: ¿Qué significa que no encuentras la razón o la diferencia en el apartado b)?

3b2: Como del primero al segundo la diferencia es 0,3 y del segundo al tercero es 0,1, la diferencia cambia por lo que no hay ninguna razón o diferencia que cumpla esa progresión.

Por la forma de responder 3b2, se infiere que no establece de forma correcta las relaciones entre los elementos matemáticos vinculados a sucesiones y progresiones, ya que identifica las sucesiones con las progresiones, es decir, para este estudiante no existen sucesiones que no sean progresiones.

El estudiante 3b2 por la forma en que responde a las tareas 1 y 2 nos indica que si la demanda de la tarea sólo exige el uso de elementos matemáticos y relaciones vinculados a progresiones, es capaz de resolver de forma correcta la tarea poniendo de manifiesto además del uso correcto de elementos matemáticos y relaciones lógicas, la traslación entre los diferentes modos de representación. Sin embargo, no sucede lo mismo cuando la tarea requiere el uso de elementos matemáticos vinculados a sucesiones numéricas que no son progresiones, ya que identifica las progresiones con las sucesiones, no considerando que existan sucesiones que no sean progresiones, es decir, no es capaz de reorganizar ni reconstruir el conocimiento vinculado a las sucesiones.

Uso correcto de las relaciones entre progresiones y sucesiones numéricas

El estudiante 3b14, en los apartados a) y b) de la tarea 1 del primer cuestionario, para resolver de forma correcta la tarea hace uso de los elementos matemáticos en el modo de representación gráfico identificando los puntos (1, 4), (2, 6) y en general (n, a_n) para encontrar los términos de la sucesión (E2, E3), respondiendo en el apartado a) $a_2=6, \dots$ y en el apartado b) pone de manifiesto que identifica la sucesión del enunciado como una progresión aritmética de diferencia 2 (E4) (figura 6), de lo que se puede inferir que este estudiante considera que las progresiones son un tipo de sucesiones numéricas.

a) $a_2 = 6, a_4 = 10, a_6 = 14$

b) que valga 16 si el a_7 , por 13 no porque la progresión es aritmética y la $d = 2$ y $a_1 = 4$ con lo que es imposible

Figura 6. Respuesta del estudiante 3b14 de la tarea 1 del primer cuestionario

El estudiante 3b14, en el apartado b) de la tarea 2 del primer cuestionario, hace uso correcto de los elementos matemáticos de progresión y sucesión numérica (E1 y E4) y de la relación entre ellos. Para ello ha obtenido los ocho primeros términos de la sucesión (E1, E2 y E3) (figura 7).

b) $a_2 = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5} = 0'2$ $a_3 = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10} = 0'1$

$a_4 = \frac{1}{4^2+1} = \frac{1}{17} \approx 0'05$ $a_5 = \frac{1}{5^2+1} = \frac{1}{26} \approx 0'03$

$a_6 = \frac{1}{6^2+1} = \frac{1}{37} \approx 0'02$ $a_7 = \frac{1}{7^2+1} = \frac{1}{50} = 0'02$

$a_8 = \frac{1}{8^2+1} = \frac{1}{65} \approx 0'01$

b) Si es una sucesión.

Figura 7. Respuesta del estudiante 3b14 al apartado b) de la tarea 2 del primer cuestionario

De las respuestas se puede inferir que este estudiante considera las progresiones como un caso particular de sucesiones, ya que a veces se refiere a sucesión (tarea 2) y otras veces a progresión (tarea 1). Para indagar sobre esta cuestión, y confirmar la inferencia anterior, preguntamos en el segundo cuestionario explícitamente sobre ello:

Pregunta: Explica la diferencia entre sucesión y progresión

3b14: Una progresión es una secuencia de números en el que para hallar sus términos hay que sumar o multiplicar, en cambio una sucesión sigue una regla por la que se averiguan sus términos.

Por la forma de responder 3b14, se infiere que establece de forma correcta las relaciones entre los elementos matemáticos vinculados a sucesiones y progresiones, es decir, las progresiones son un caso particular de sucesiones (tarea 1), pero existen sucesiones que no son progresiones (tarea 2), poniendo de manifiesto la reorganización y reconstrucción del conocimiento vinculado a las progresiones y sucesiones.

La forma en que el estudiante 3b14 responde a las tareas 1 y 2 nos indica que, independientemente de la demanda de la tarea y de los modos de representación, es capaz de diferenciar entre sucesiones y progresiones haciendo uso correcto de los elementos matemáticos y de las relaciones entre progresiones y sucesiones numéricas.

De la caracterización de los niveles descritos en el marco teórico, se deduce que el estudiante 3b2 está en el nivel INTER y el estudiante 3b14 en el nivel TRANS, ya que el primero no utiliza correctamente todas las relaciones entre elementos matemáticos vinculados a progresiones y sucesiones y el segundo si hace uso correcto de las mismas.

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es determinar el papel que desempeña la idea de progresión en la construcción del esquema del concepto de sucesión como lista numérica. Los resultados obtenidos, nos permiten concluir que las relaciones entre los elementos matemáticos vinculados a progresiones y sucesiones, ponen de manifiesto el nivel de comprensión del esquema del concepto de sucesión numérica por parte de los estudiantes de secundaria, y por tanto podemos considerarlo como un indicador del nivel de desarrollo de la comprensión de dicho esquema. El uso correcto de la relación lógica directa entre progresión y sucesión, y el no uso incorrecto de la relación recíproca son la manifestación explícita de este indicador, vinculado al nivel TRANS de desarrollo del esquema del concepto de sucesión numérica.

Los resultados muestran también como los modos de representación pueden jugar un papel relevante para caracterizar el desarrollo de la comprensión de las sucesiones numéricas. Así los dos estudiantes considerados utilizan de forma diferente los modos de representación para ambas tareas. Mientras que uno de ellos se traslada de modo gráfico al modo algebraico y trabaja en este modo para resolver la tarea (nivel INTER), el otro estudiante, resuelve las tareas indistintamente en un modo o en el otro (nivel TRANS).

Terminamos este trabajo con una consideración de tipo metodológico, la imposibilidad de obtener información complementaria al primer cuestionario a través de una entrevista individualizada nos llevó a la realización de un segundo cuestionario personalizado que nos aportará dicha información complementaria. Esta manera de trabajar nos ha permitido tener ese segundo cuestionario personalizado de la totalidad de la población (75 estudiantes).

REFERENCIAS

- Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 121-136.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York: Springer.
- BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía) (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Consejería de Educación.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Universidad de Granada.
- Camacho, M. (2011). Investigación en Didácticas de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros años de Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195-223). Ciudad Real: SEIEM.
- Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrech, Los Países Bajos: Kluwer.
- González, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, 26, 1-19.
- Mamona, J. (1990). Sequences and series—Sequences and functions: Students' confusions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21(2), 333–337.
- McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 77–102). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Mor Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K. y Simpson, G. (2006). Designing to see and share structure in number sequences. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 13(2), 65-78.
- Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.
- Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 805–823.
- Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME)*, 11, 267–296.
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24–36.
- Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 325-338.