

# INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD

## Research on the didactics of probability

Batanero, C.

Universidad de Granada

Al ser invitada a organizar un seminario relacionado con las investigaciones del Grupo de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria, decidí centrarlo en la didáctica de la probabilidad, tema no tratado anteriormente en los seminarios de nuestro Simposio.

Todos los miembros de la Sociedad nos encontramos involucrados en la formación de los futuros maestros para enseñar este tema a los niños, desde los primeros niveles de la Educación Primaria. Esta formación ha de incluir no sólo el conocimiento matemático, sino las diferentes facetas de su conocimiento didáctico. Muchos también hemos participado en la formación didáctica de los futuros profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Nos encontramos ante el dilema de organizar en la mejor forma posible esta formación, teniendo en cuenta lo limitado del tiempo disponible y las características específicas de la probabilidad. Como investigadores y especialistas en didáctica de la matemática, debemos también involucrarnos en lo posible en el análisis de las directrices curriculares, los materiales didácticos y en especial los libros de texto, en la evaluación de las concepciones y dificultades de los estudiantes, y en el diseño y análisis de propuestas para mejorar la tarea docente.

Todos estos temas son hoy día objeto de investigación de interés creciente a nivel internacional (Jones, Langrall y Mooney, 2007). La didáctica de la probabilidad cuenta con una tradición de investigación más amplia que la didáctica de la estadística; además asistimos recientemente a una intensificación, como se muestra en la publicación de los libros de Jones (2005) y Chernoff y Sriraman (2013), o en la existencia de un grupo específico (TSG14) en los congresos ICME (International Congress of Mathematics Education). Los trabajos que presentamos en este seminario reflejan algunas de las tendencias recientes en la investigación en el tema, a la vez que el trabajo realizado en los Simposios de la Sociedad Española de Educación Matemática por los ponentes.

José Miguel Contreras presenta una caracterización de la probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria correspondientes al Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006) que ha sido realizada en colaboración con Emilse Gómez y yo misma. Esta investigación parte del análisis epistemológico de los significados de la probabilidad, que coexisten en la enseñanza, pero están sujetos a controversias filosóficas (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero, Henry y Parzysz, 2005). La aplicación de ideas tomadas del enfoque onto-semiótico para la didáctica de la matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) permite a los autores discriminar las configuraciones epistémicas de objetos implícitos en los diferentes significados de la probabilidad, que muestran que la diferencia entre estos significados no es simplemente filosófica, sino también de índole matemática (véase Batanero, 2015). La comparación de estas configuraciones epistémicas con las directrices curriculares lleva a los autores a describir con detalle los objetos específicos ligados a los enfoques intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo que aparecen explícita o implícitamente en dichas directrices.

Este primer paso fue el punto de partida para el estudio que ahora se resume de los textos escolares y que se describe con mayor detalle en Gómez (2014) y publicaciones posteriores (Gómez, Batanero y Contreras, 2014; Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras, 2013; Gómez, Ortiz y Gea, 2014). Sus resultados proporcionan un mapa detallado del contenido de probabilidad en los textos

analizados; informando de los significados de la probabilidad y objetos matemáticos que se privilegian en cada uno de sus niveles y mostrando ejemplos de actividades factibles para trabajar con niños de diferentes edades. Este material es de gran utilidad en el diseño de actividades para el aula y la mejora de los libros de texto. También puede orientar el trabajo del maestro de primaria y la formación de los futuros maestros.

El segundo trabajo, presentado por Ernesto Sánchez y realizado en colaboración con Julio César Valdez, también aborda los diferentes significados de la probabilidad, pero desde el punto de vista del sujeto que aprende (significado personal). Se trata de una investigación dirigida al análisis de la forma en la que algunos estudiantes de Bachillerato coordinan los significados clásico y frecuencial al resolver tareas de probabilidad relacionadas con la comprensión intuitiva de la ley de los grandes números y de la variabilidad aleatoria. Con objeto de comprender mejor y tratar de disminuir las dificultades para realizar esta coordinación, los autores proponen un marco teórico que describe el razonamiento probabilístico informal de los estudiantes. Dicho *razonamiento probabilístico informal* se entiende como la manera en que los estudiantes utilizan sus conocimientos y creencias para comprender y argumentar los problemas de probabilidad. Se basa en el uso de las ideas fundamentales probabilísticas de aleatoriedad, independencia, variabilidad aleatoria e incertidumbre asociada a una predicción en situaciones probabilísticas.

Mediante el análisis de las respuestas de diez estudiantes a un cuestionario formado por tres tareas, y apoyándose en la taxonomía propuesta por Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1997), Sánchez y Valdez proponen una clasificación de las respuestas, en función de los niveles del razonamiento probabilístico informal que se muestran en ellas. Para ello analizan con detalle la complejidad de las respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas para cada una de las ideas fundamentales descritas, resaltando el progreso creciente en la profundidad de su razonamiento probabilístico. Con este trabajo los autores completan otros previos del mismo equipo de investigación, centrados en la clasificación jerárquica del razonamiento probabilístico de los estudiantes (véase, por ejemplo, Sánchez, 2010; Sánchez, Borim y Coutinho, 2011; Sánchez, García y Medina, 2014; Sánchez y Landín, 2014). Dichas jerarquías proporcionan orientaciones para la evaluación de los estudiantes, al informar al profesor de la forma en que razonarán en los problemas de probabilidad así como para ayudarles a identificar el nivel de razonamiento mostrado por los estudiantes y a promover su desarrollo hasta los niveles superiores de razonamiento.

Nuestro tercer trabajo, presentado por Pedro Huerta, se centra en el concepto de probabilidad condicional, base del enfoque subjetivo de la probabilidad y respecto al cual se han descrito numerosas dificultades. Continuando su amplia trayectoria de investigación en esta temática (véase, por ejemplo, Cerdán y Huerta, 2007; Huerta, 2009 y 2014; Huerta, Amorós, Arnau y Edo, 2015; Lonjedo, Huerta y Carles, 2008), el autor aborda en este caso el uso de problemas de probabilidad condicional como recurso para la formación matemática y didáctica de maestros y de futuros profesores de matemáticas en el campo de la probabilidad.

Para ello Huerta introduce la idea de *resolución de problemas con intención didáctica*, donde el objetivo de la resolución del problema no es sólo la búsqueda de la solución, sino el análisis global del proceso por parte del futuro maestro o profesor. Otra finalidad es el análisis de las potencialidades del problema y de su resolución para la formación de los futuros maestros y profesores. Huerta sugiere utilizar la simulación como principal estrategia en la resolución de estos problemas, para aumentar su potencialidad formativa. La simulación es un instrumento esencial para la enseñanza de la modelización en probabilidad (Chaput, Girard y Henry, 2011) por constituir un puente entre realidad y modelo matemático, es decir un *modelo pseudo-concreto* (Henry, 1997). Por ello lleva al estudiante a una actividad de modelización y le fuerza a utilizar herramientas heurísticas; a la vez que le conduce a trabajar con el enfoque frecuencial de la probabilidad, coordinándolo con el clásico y mejorando su comprensión de la ley de los grandes números.

Adicionalmente, tanto la resolución del problema mediante simulación, como su posterior análisis por parte del futuro maestro o profesor contribuyen al refuerzo de múltiples facetas de su conocimiento didáctico. Huerta nos brinda un ejemplo concreto de cómo llevar a cabo su propuesta para cada uno de los escenarios (formación de maestros y formación de profesores), indicando los objetivos perseguidos en cada caso y los pasos en la actividad formativa. Mientras que en el caso de los futuros maestros se pretende que transiten desde un razonamiento subjetivo hacia otro basado en una información más objetiva producto de la simulación, en el caso de los futuros profesores la finalidad es modificar su concepción excesivamente formal de la resolución de problemas de probabilidad a otra más factible de utilizar con sus propios estudiantes. Al tiempo, se proporciona a ambos colectivos una mejor comprensión de múltiples ideas de probabilidad.

En resumen, nuestro seminario analiza tres puntos importantes e interrelacionados en la enseñanza de la probabilidad: los materiales curriculares, la comprensión de los estudiantes y la formación de los profesores. Aunque esta muestra de trabajo no agota la inmensa riqueza del campo de investigación, pensamos que se cumple el objetivo de mostrar una muestra representativa de las investigaciones actuales, sus focos, marcos teóricos y aproximaciones metodológicas. Al mismo tiempo esperamos que la información proporcionada sea útil para profesores y formadores de profesores.

Recomendamos continuar e intensificar la investigación en didáctica de la probabilidad y encontrar nuevos caminos para familiarizar a los niños y jóvenes con situaciones inciertas; pues como Fischbein (1975) sugirió, el conocimiento y razonamiento probabilístico no se desarrollan espontáneamente sin una enseñanza específica. Debemos analizar con detalle la forma en que podemos llevar a los estudiantes y profesores a coordinar los diferentes significados de la probabilidad; superando las dificultades para comprender sus relaciones y diferencias (véase la discusión de Konold et al., 2011). Finalmente, es necesario que todos los implicados en la formación de profesores contribuyamos a la mejora del conocimiento didáctico de futuros maestros y profesores y la mejora de sus actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza.

## Referencias

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C. (2015, febrero). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Conferencia presentada en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, Praga.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegem y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.
- Cerdán, F. y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19(1), 27-62.
- Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 85-95). Nueva York: Springer.
- Chernoff, E. J. y Sriraman, B. (Eds.) (2014), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives*. Nueva York: Springer.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probability thinking in children*. Dordrecht, Holanda: Reidel.
- Henry, M. (1997). Notion de modèle et modélisation en l'enseignement. En M. Henry (Ed.), *Enseigner les*

- probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims, Francia: Commission Inter-IREM.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon*, 31(2), 25-42.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
- Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49-71.
- Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research. Structures and context. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 163-194.
- Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 613-639). Nueva York: Springer.
- Lonjedo, M<sup>a</sup> A., Huerta, M. P. y Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(3), 319-338.
- Huerta, M. P., Amorós, R., Arnau, J. y Edo, P. (2015). Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (en prensa).
- Jones, G. A. (2005). *Exploring probability in schools. Challenges for teaching and learning*. Nueva York: Springer.
- Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. y Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101-125.
- Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age y NCTM.
- Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 68-86.
- Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- Sánchez, E. (2010). Una jerarquía de razonamiento estadístico sobre la noción de predicción/incertidumbre elaborada con profesores de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 409-422.
- Sánchez, E., Borim, S. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril, y C. Reading (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 211-221). Nueva York: Springer.
- Sánchez, E., García, J. I. y Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(6), 5-23.
- Sánchez, A. y Landín, P. R. (2014). Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 581-597). Nueva York: Springer.