# HACIA PROFESORES ARTIFICIALES EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

## Towards artificial teachers in algebraic word problem solving

Arnau, D.

Universitat de València

**Resumen**

*Presentamos los fundamentos del diseño de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. El programa resultante admite resoluciones aritméticas y algebraicas, establece la validez de las acciones atendiendo a las restricciones del problema y puede generar ayudas a demanda, tras identificar la línea de resolución que se está siguiendo. El sistema es capaz de determinar parte de las características del estudiante como resolutor con respecto al modelo de competencia. Con este fin usamos la idea de esquema conceptual. De esta forma podemos clasificar las acciones de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de más de una etapa mediante un criterio que tiene en cuenta la tarea y las decisiones que se toman. Para finalizar, ofrecemos líneas futuras y preguntas de investigación que quedan abiertas.*

**Palabras clave**: *Resolución de problemas, problemas verbales, álgebra, conocimiento profesional, inteligencia artificial*

**Abstract**

*We present the foundations of the design of an intelligent tutoring system for the teaching and learning of arithmetic-algebraic word problem solving. The resulting program supports arithmetic and algebraic solutions, establishes the validity of the actions taking into account the constraints of the problem, and can generate help on demand after identifying the solution way that is being followed. The system is able to determine some of the characteristics of the student as a solver with regard to the competence model. To this end, we use the idea of conceptual schema. Thus we can classify the students' actions when solving multi-step word problems by an approach that takes into account the task and the decisions taken by the solvers. Finally, we offer future research lines and questions that remain open.*

**Keywords**: *Problem solving, word problems, algebra, professional knowledge, artificial intelligence*

## INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Es habitual que la introducción del álgebra en la escuela se realice mediante: la enseñanza de un conjunto de reglas para resolver ecuaciones o transformar expresiones algebraicas, la resolución de problemas, el reconocimiento de patrones y la generalización, o la modelización de situaciones mediante funciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).La trascendencia del uso de la resolución de problemas verbales como una forma de aplicar o enseñar ideas algebraicas se ha reflejado en la presencia común de capítulos dedicados a la resolución de problemas en las agendas de investigación y en las recopilaciones de estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Bednarz y Janvier, 1996; Chaiklin, 1989; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Filloy, Rojano y Rubio, 2001).

Arnau, D. (2015). Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 45-59). Alicante: SEIEM.

Numerosos estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales han descrito las dificultades de los estudiantes cuando se inician en el mundo del álgebra (véase, por ejemplo, Bednarz y Janvier, 1996; Cerdán, 2008; Rojano, 1985; Stacey y MacGregor, 1999). Con el objetivo de hacer frente a estas dificultades, se ha investigado la posibilidad de introducir métodos de resolución que pudieran servir como intermediarios entre la forma de resolver aritmética y algebraica como: el método analítico de las exploraciones sucesivas (Filloy et al., 2001); el método de la hoja de cálculo (Arnau y Puig, 2013) o los métodos de representación pictórico-geométricos (Martínez-Videla, 2011). También se ha analizado el uso de sistemas de aprendizaje interactivos para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos centrados en dos aspectos: (1) el recurso a múltiples sistemas de representación que sirvan para apoyar el planteamiento del problema; y (2) el uso de técnicas de inteligencia artificial para simular parte de las acciones de un profesor.

**Sistemas basados en la representación gráfica de la resolución**

Los entornos *Schemes for Problem Analysis* (Hershkovitz y Nesher, 1996) y *Word Problem Assistant* (Thompson, 1989) ofrecen la posibilidad de representar las relaciones entre cantidades mediante diagramas de árbol para facilitar el planteamiento y resolución de los problemas. Por ejemplo, en *Word Problem Assistant* cada cantidad se simboliza mediante un icono con cuatro posibles formas según éste represente número de objetos, diferencias, razones externas o razones internas. Cada icono está formado por cuatro celdas en las que se escribe un nombre en lenguaje natural, el cálculo que el sistema infiere y realiza automáticamente a partir de las relaciones que establece el resolutor, el valor de la cantidad si es conocida o el resultado obtenido al calcularla, y la unidad de medida. Para indicar las relaciones entre cantidades, el resolutor traza flechas entre los iconos que las representan. Sin embargo, el programa no tiene la capacidad de verificar la validez de la solución alcanzada ni de proporcionar ayudas al resolutor. *Word Problem Assistant* permite resolver problemas de manera aritmética y, en algunos casos, también de manera algebraica, pero no siempre es posible plantear todas las ecuaciones válidas.

En la misma línea, el programa *ANIMATE* (Nathan, 1998) se diseñó inicialmente para resolver problemas de móviles de manera algebraica. Permite al resolutor expresar las relaciones entre cantidades mediante representaciones gráficas formadas por nodos y arcos. El programa es capaz de determinar la consistencia del grafo que el resolutor genera y reproduce una animación de los móviles que participan en el problema, a partir de dicha representación. El resolutor puede valorar la idoneidad del planteamiento atendiendo al comportamiento de los móviles en la animación. Sin embargo, *ANIMATE* no tiene ningún conocimiento del problema que se tiene que resolver y, por lo tanto, no puede determinar la validez de las acciones, ofrecer ayudas al usuario sobre una situación problemática concreta, ni identificar características del resolutor.

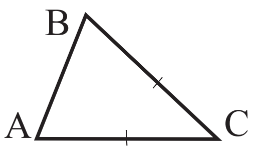
El programa *Story Problem Solver* (Marshall, 1995) se diseñó con la intención de ayudar en la resolución aritmética de problemas. En este entorno el resolutor debe elegir los diagramas adecuados para resolver el problema. Estos diagramas expresan las categorías de combinación, cambio, comparación aditiva, comparación multiplicativa y proporcionalidad. La intención es conseguir que el sistema apoye la construcción mental de los esquemas ligados a los diagramas. Por otro lado, los creadores de *WORDMATH* (Looi y Tan, 1996) basaron su diseño en un método de enseñanza de resolución de problemas verbales que usa una representación pictórico-geométrica típica de la enseñanza propuesta por el currículum de Singapur. Con este fin, para resolver el problema, los estudiantes deben construir un modelo geométrico en el que las cantidades se representan mediante barras y, a continuación, deben manipularlas para alcanzar la solución.

**Sistemas basados en inteligencia artificial**

A diferencia de los entornos anteriores, *PAT* (Koedinger y Anderson, 1998), también conocido como *Cognitive Algebra Tutor*, fue diseñado utilizando técnicas de inteligencia artificial. El programa es capaz de supervisar la resolución algebraica de problemas verbales que pueden traducirse a ecuaciones del tipo$y=ax+b$. Al mismo tiempo, la interfaz proporciona la posibilidad de utilizar distintos sistemas de representación que incluyen el tabular, gráfico y simbólico. Por lo que respecta a la interacción con el estudiante, el programa únicamente interviene si observa que se ha cometido un error. El usuario siempre puede solicitar ayuda y el sistema la ofrece de manera incremental, yendo desde una primera sugerencia vaga hasta proporcionar la acción a seguir de manera explícita.

La arquitectura del sistema es del tipo *tutor cognitivo* (también conocida como *model tracing*) la cual adopta la representación de un modelo cognitivo basado en la teoría ACT (Anderson, 1983). Esta teoría establece que hay dos memorias de largo plazo: la declarativa y la procedimiental. Desde el punto de vista del aprendizaje, en primer lugar se adquiere el contenido declarativo, el cual incluye hechos y conceptos, que posteriormente se convierte en conocimiento procedimental. Este conocimiento procedimental se representa en forma de reglas de producción. La enseñanza de las reglas de producción se convierte en el elemento clave en la enseñanza que proporcionan los tutores cognitivos. A continuación se muestra un ejemplo de las reglas de producción usadas para la resolución de un problema (extraído de Mitrovic, Koedinger y Martin, 2003, p. 314).

El ángulo A mide 65º. ¿Cuál es el ángulo C?




**Dos reglas de producción correctas**:

*SI el objetivo es determinar un ángulo en un triángulo isósceles ABC y AC = BC* [en el original aparece *AB* por error] *y el ángulo A es conocido, ENTONCES pon el valor del ángulo B a A.*

*SI el objetivo es encontrar un ángulo en un triángulo ABC y los ángulos A y B son conocidos, ENTONCES pon el valor de C a 180 – A – B.*

## La inteligencia artificial en la investigación en didáctica de la resolución de problemas

En la década de los 80 del siglo pasado, se crearon grandes expectativas con respecto a la posibilidad de emplear la inteligencia artificial como una forma de desarrollar entornos interactivos de aprendizaje en el campo de la aritmética y el álgebra (Thompson, 1989). Sin embargo, estas esperanzas rápidamente se desvanecieron por la dificultad de crear sistemas que realmente pudieran sustituir a tutores humanos (Welham, 2008).

No obstante, la influencia de la inteligencia artificial no se limitó al diseño de entornos de aprendizaje sino que también se reflejó en la forma en que se concibió la investigación sobre resolución de problemas en el campo de la educación matemática.

> Además, el trabajo en inteligencia artificial y campos relacionados (como la psicología del procesamiento de la información y la ciencia cognitiva en última instancia) ha producido un conjunto de métodos que son claramente "científicos". Por ejemplo, la implementación exitosa de un programa que resuelve problemas, proporciona una prueba empírica de que determinadas ideas teóricas sobre el pensamiento realmente "funcionan" (Schoenfeld, 1994, pp. 707-708).

En este artículo Schoenfeld insiste en propuestas que ya había defendido desde principios de la década de los 80 en cuanto a la necesidad de: (a) organizar la investigación en resolución de problemas mediante métodos centrados en el proceso que sustituyan a las técnicas estadísticas; (b) generar teorías que eviten el excesivo recurso al empirismo, y (c) familiarizarse con la investigación en ciencia cognitiva y con técnicas de modelización en inteligencia artificial y de la psicología del procesamiento de la información. Estas ideas pueden alinearse con las expuestas en el libro *Human*

*Problem Solving* de Newelly Simon (1972) donde se describe la construcción de un modelo basado en la teoría del procesamiento de la información cuando se emplea con la intención de analizar cómo los humanos resuelven problemas. La metodología de investigación asociada se caracteriza por centrarse en el proceso y en el individuo; ser empírica, pero no experimental; ser no estadística; y orientarse al contenido. Además, los autores apuntan que "el formalismo natural de la teoría es el programa, el cual juega un papel directamente análogo a los sistemas de ecuaciones en teorías con espacios de estados continuos (por ejemplo, la física clásica)" (p. 11).

Dicho todo esto, el objetivo de esta ponencia es describir la base teórica sobre la que se han diseñado los componentes de un sistema tutorial inteligente para la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos.

## MARCO TEÓRICO

Utilizaremos como armazón sobre el que construir nuestro marco teórico lo que Eugenio Filloy llama Modelos Teóricos Locales (Filloy et al., 2008). Este marco resulta especialmente útil en las investigaciones en inteligencia artificial en educación matemática, pues permite establecer una relación directa con los componentes de un sistema tutorial inteligente. A saber: (a) el modelo del dominio, que contiene el conocimiento del experto proporcionado en forma de definiciones o procedimientos; (b) el modelo de estudiante, que contiene el conocimiento de cómo los estudiantes actúan en forma de errores cometidos o proximidad al conocimiento del experto; (c) el modelo didáctico, que contiene una representación de cómo los profesores actúan; y (d) el modelo de comunicación, que representa los métodos y técnicas para el intercambio de información entre programa y estudiante (Woolf, 2008).

### El modelo de competencia o modelo del dominio

Como señala Pólya (1962), René Descartes concibió el proyecto de desarrollar un método universal de resolución basado en la idea de reducir cualquier problema a un problema algebraico. Evidentemente fracasó en su intento, pero proporcionó las bases de un método de resolución de problemas verbales basado en el planteamiento de ecuaciones.La competencia en la resolución algebraica de problemas verbales puede describirse mediante una secuencia de pasos ideales basados en las reglas cartesianas que dan origen a lo que llamamos método cartesiano (en adelante MC) (Cerdán, 2008; Filloy et al., 2008; Puig, 2003). A diferencia de los métodos que utilizan el lenguaje aritmético, el método cartesiano permite resolver cualquier problema verbal. Por esta razón el método cartesiano supone la competencia en la resolución de problemas verbales y su dominio se convierte en uno de los objetivos de la formación matemática. El método cartesiano, hasta el momento del planteamiento de la ecuación o sistema de ecuaciones, puede describirse de la manera siguiente:

1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

2) La elección de las cantidades desconocidas que se va a representar con letras.

3) La representación de las otras cantidades desconocidas a partir de la expresión algebraica o número que se obtiene de la relación que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas.

4) El establecimiento de ecuaciones igualando dos expresiones de una misma cantidad. Para este fin se usan relaciones que aún no han sido utilizadas y que enlazan cantidades a las que ya se les ha asignado una representación en los pasos anteriores.

Desde hace 25 años, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València se viene desarrollando y utilizando un sistema de representación en forma de hipergrafos que es específico del dominio de la resolución de problemas (Cerdán, 2008; Filloy et al., 2008).

Estos hipergrafos, que son una generalización dela propuesta de Fridman (1990), permiten representarlos cuatro primeros pasos del método cartesiano. Lo ejemplificaremos utilizando el problema anterior en el que se pedía determinar el valor del ángulo C. Para ello partiremos de que el problema se puede reducir a las cantidades conocidas: ángulo A (*A*, 65) y suma de los ángulos(*S*, 180).Y a las desconocidas: ángulo B (*B*) y ángulo C (*C*). Estas cantidades se relacionan mediante las proposiciones: (a) el *ángulo A* es igual al *ángulo B* y (b) la *suma de los ángulos* es igual al *ángulo A* más el *ángulo B* más el *ángulo C*. Para reducir la longitud de las relaciones las expresaremos a la manera en que se haría en álgebra $A=B$ y $S = A+B+C$. Sin embargo, aunque usemos un lenguaje matemático, estamos expresando relaciones que estarán representadas en la mente del resolutor de distintas maneras. Esta información, que representa la lectura analítica del problema (Filloy et al., 2008) se puede expresar mediante hipergrafos (Figura 1). Este hipergrafo proporcionaría la estructura matemática del problema que identifica un determinado resolutor.

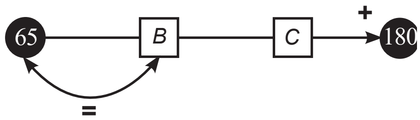



Figura 1. El paso 1 del MC

El conocimiento ligado a la lectura analítica y el representado en los hipergrafos es puramente declarativo. Sin embargo, la determinación de la lectura analítica implica realizar varios procedimientos. Desde el punto de vista del resolutor ideal estos procesos podemos dividirlos en, al menos, dos tipos. Por un lado, la recuperación y uso de esquemas conceptuales (Riley, Greeno y Heller, 1983) asociados al contexto descrito en el enunciado que permiten relacionar las cantidades del problema. Por otro, una serie de procesos lógicos en los que se reflexiona sobre la suficiencia de la lectura analítica para conseguir alcanzar la resolución del problema.

El segundo paso del método cartesiano puede expresarse mediante acciones en el hipergrafo. En concreto, consistiría en oscurecer algún vértice claro, lo que sería equivalente a asignar una letra a una cantidad desconocida. En la Figura 2se muestra cómo se representaría la asignación de la letra *x* a la cantidad *C*.

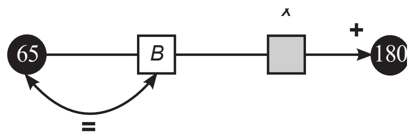



Figura 2. El paso 2 del MC

El tercer paso supondría oscurecer los vértices claros de las hiperaristas en las que sólo hay un vértice claro. A este proceso se le llama destruir las hiperaristas. Esto equivaldría a asignar una expresión algebraica o número a la cantidad desconocida que se representaba en el vértice claro (Figura 3, donde la hiperarista que acaba de ser destruida se representa mediante una línea discontinua).

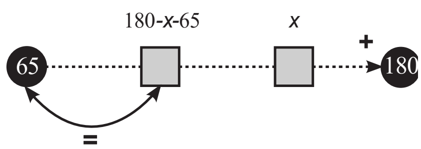



Figura 3. El paso 3 del MC

El cuarto paso implicaría recorrer las hiperaristas en las que todos los vértices son oscuros. Como consecuencia un vértice que ya era oscuro, se volvería a oscurecer. Esto equivaldría a asignar dos expresiones a una misma cantidad y, por lo tanto, a construir una ecuación (Figura 4).

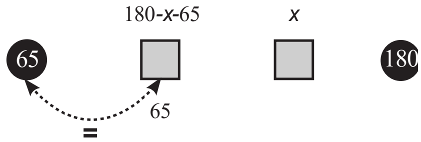



Figura 4. El paso 4 del MC

Si analizamos la solución que se derivaría del conjunto de reglas de producción propuesta en Mitrovic et al. (2003, p. 314), observamos que esta forma de resolver el problema (la que lleva a plantear $180 - x - 65 = 65$) no estaría incluida. De hecho, usando estas reglas de producción, la única forma de resolver el problema pasaría por asignar a B el valor 65 y calcular el valor de C mediante $180 - 65 - 65$. Esta resolución aritmética también se podría derivar de nuestra lectura analítica. De hecho, una reinterpretación algorítmica de los pasos del método cartesiano nos permitirá considerar la resolución aritmética como un caso particular de la algebraica. Con este fin, expresamos los pasos de procedimiento como un conjunto de reglas de producción que se aplicarían a la lectura analítica:

> **Regla de producción 1 (RP1)**: Siempre es posible asignar una letra a una cantidad desconocida.
>
> **Regla de producción 2 (RP2)**: Si existe una relación con una única cantidad que no tiene asignada expresión algebraica o número, entonces es posible asignársela.
>
> **Regla de producción 3 (RP3)**: Si existe una relación en la que todas las cantidades tienen asignada expresión algebraica o número, entonces es posible construir una ecuación.

En nuestra lectura analítica se observa que no es necesario aplicar RP1 (Figura 5). De hecho, la lectura analítica y el hipergrafo que la representa se clasificarían como aritméticos (Cerdán, 2008; Filloy et al., 2008) y eso se ha reflejado en el carácter aritmético de la ecuación (Filloy y Rojano, 1989).

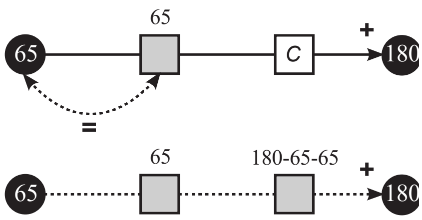



Figura 5. La resolución aritmética

## El modelo cognitivo o modelo de estudiante

El modelo cognitivo contiene la información sobre las características del estudiante con respecto a cómo aprende, cómo resuelve o, por ejemplo, cómo reacciona ante el reto o la frustración. En el diseño de sistemas inteligentes enfocados a la enseñanza de la resolución de problemas es habitual que la determinación de los rasgos de un estudiante se relacione con alguna característica de la tarea o con las acciones que se deben llevar a cabo para resolverla. Por ejemplo, los creadores del programa *AnimalWatch* (Beal, 2013), diseñado para la enseñanza de la resolución aritmética de problemas, ligan cada problema a criterios como la operación necesaria para resolverlo (e.g., división) y las características de los números que aparecen en el enunciado (e.g., números naturales multidígito). La competencia del estudiante en un determinado tipo de problemas se determina como el porcentaje de éxitos en la resolución. Evidentemente, esta clasificación deja fuera las posibles diferencias semánticas en los enunciados. Por otro lado, el programa *PAT* centra su atención en las reglas de producción que el estudiante usa en cada paso de la resolución de una determinada tarea, lo que permite que el programa pueda poner marcha un algoritmo bayesiano llamado *trazado del conocimiento* que proporciona la probabilidad de que un estudiante domine dicha habilidad (Aleven, Roll, McLaren y Koedinger, 2010).En consecuencia, al igual que

*AnimalWatch*, el modelo de estudiante que se construye está basado en la descripción de un contenido procedimental.

En nuestra área diversos estudios han intentado clasificar los problemas verbales atendiendo a distintos factores. Es habitual clasificar los problemas de una etapa por su categorización semántica (Riley, Greeno y Heller, 1983; Vergnaud, 1983). Ha habido intentos de clasificar los problemas de más de una etapa atendiendo a esta categorización u otras similares (véase, por ejemplo, Castro et al., 1998; Puig, 1998a). Sin embargo, como norma, este criterio de clasificación no se ha extendido, ya que "la estructura de los problemas de más de una etapa presenta elementos distintos de los semánticos y que son más pertinentes para comprender el proceso de resolución" (Puig y Cerdán, 1988,p. 106). Entre otros aspectos conviene señalar que en los problemas de más de una etapa la propia estructura matemática subyacente puede no ser única[i].Como consecuencia se ha recurrido a otros criterios de clasificación como los contextos que se describen (Hinsley, Hayes y Simon, 1977) o, de manera similar, las fórmulas fuente necesarias para resolverlos (Mayer, 1981). En otros casos también se han clasificado por la estructura matemática subyacente (Cerdán, 2008) o por la ecuación o ecuaciones que sirven para resolverlos. Una aplicación práctica de estos estudios es posibilitar la organización de secuencias de enseñanza en las que los estudiantes puedan identificar analogías entre problemas que les permitan transferir conocimiento que previamente hayan utilizado con éxito.

En nuestro caso planteamos dos categorías para la generación de los modelos de estudiante: (1) la actuación ante los pasos 2, 3 y 4 del MC; y (2) el uso de esquemas conceptuales en la resolución de un problema, lo que nos permitirá realizar una clasificación más fina de los problemas que además tenga en cuenta las decisiones que toma un sujeto a la hora de resolverlos (es decir, la actuación en el paso 1 del MC cuando se usan los esquemas conceptuales para establecer relaciones entre cantidades). El recurso a los esquemas conceptuales pretende que se puedan establecer relaciones entre el conocimiento necesario para resolver problemas distintos. Evidentemente, la dificultad en la resolución aritmética o algebraica de un problema verbal no puede reducirse exclusivamente a un análisis de la dificultad de una secuencia de subproblemas asociados, cada uno de ellos, a un esquema conceptual concreto. Sin embargo, el desconocimiento o dificultad a la hora de emplear un esquema conceptual puede actuar como obstáculo para completar el proceso de resolución. Además, de esta manera, el modelo de estudiante, como una medida del conocimiento ligado a la resolución de problemas, posibilita su comparación con otros modelos de estudiante o con un modelo de estudiante promedio para que pueda ser usado en la toma de decisiones de cara a la instrucción.

Para ejemplificar cómo se pueden usar los esquemas conceptuales para caracterizar a un estudiante, partiremos de dos posibles lecturas analíticas del problema *Las naranjas*. Hemos de aclarar que el problema tiene varias lecturas analíticas más, pero limitamos su número para facilitar la exposición.

> *Las naranjas*. Hemos guardado 180 naranjas en dos sacos de distinto tamaño. En el saco grande hemos introducido 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas naranjas hay en cada saco?

Una posible lectura analítica partiría de la posibilidad de quitar las 30 naranjas de más que hay en un saco y hacer un reparto equitativo. Esta lectura analítica (a la que llamaremos L1) reduciría el problema a las cantidades conocidas: número de naranjas, $N$ (180); naranjas de más en el saco grande, $Mgp$ (30); y número de sacos, $S$ (2); y a las cantidades desconocidas: número de naranjas si eliminamos el exceso del saco grande, $Nqe$; número de naranjas en el saco grande, $Sg$, y número de naranjas en el saco pequeño, $Sp$. Estas cantidades se relacionarían mediante: $N = Sg + Sp$ (combinación[ii]), $N = Nqe + Mgp$ (cambio) y $Nqe = Sp \cdot S$ (isomorfismo de medidas). Evidentemente no se puede afirmar que la estructura matemática del problema sea esta lectura analítica ni las ecuaciones o resolución aritmética que se podrían derivar de ella. Esto es así porque una resolución es el resultado de la interpretación de una persona cuando se enfrenta a un problema. Por ejemplo, otro sujeto con otros conocimientos o intenciones, podría llevar a cabo otra lectura analítica del mismo problema (a la que llamaremos L2) que lo reduciría a las cantidades conocidas: número de naranjas, *N* (180), y naranjas de más en el saco grande, *Mgp* (30). Y a las desconocidas: número de naranjas en el saco grande, *Sg*, y número de naranjas en el saco pequeño, *Sp*. Estas cantidades se relacionarían mediante: $N = Sg + Sp$ (combinación) y $Sg = Mgp + Sp$ (comparación). En este caso, la lectura analítica no es aritmética porque no es posible encontrar ninguna relación que contenga una única cantidad desconocida. A las lecturas que no son aritméticas, las llamaremos algebraicas.

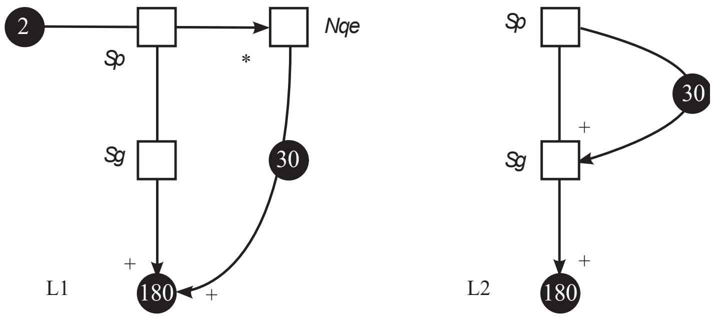



Figura 6. Dos lecturas análiticas del problema *Las naranjas*

Supongamos que un estudiante comete un error o no sabe cómo seguir después de realizar la operación 180 – 30=150. Las conclusiones que podríamos obtener son: (1) que ha sido capaz de aplicar el esquema de combinación que podía de deducirse de una reelaboración del enunciado, transformarlo en una relación entre cantidades, decidir la operación y el orden de los operandos y plasmarla; y (2) que, sin embargo, no ha sido capaz de seguir la línea de resolución que implicaría aplicar el esquema de isomorfismo de medidas. Esto no implica que no sea capaz de aplicarlo, ni necesariamente que no lo haya hecho en este caso, pero sí se puede afirmar que ha habido algún error en el proceso conjunto que va de la identificación a la plasmación. Es importante indicar que, en este caso, no ha resultado trascendente para la caracterización del estudiante el hecho de que en otras formas de resolver el problema hubiera sido necesario usar el esquema de comparación aditiva, aunque, evidentemente, esta información se habrá tenido en cuenta en la reelaboración del enunciado.

## El modelo de enseñanza

Cuando un profesor supervisa la resolución de un problema verbal de un estudiante, debe atender a varias tareas como: comprobar la validez de las acciones, identificar la vía de resolución que se está siguiendo, proporcionar ayudas, plantear vías alternativas de resolución, describir modelos generales de resolución, controlar el tiempo de ejecución, identificar características del estudiante, determinar secuencias de problemas adaptadas a características del individuo, etc. Centraremos la exposición en la enseñanza del método de resolución y en la generación de ayudas a demanda.

El método cartesiano puede implementarse de maneras diferentes dando lugar a distintos modelos de enseñanza de la resolución algebraica de problemas. Es habitual encontrar secuencias de enseñanza en las que se es fiel al orden de los pasos descritos anteriormente y en las que el paso 3 antecede completamente al paso 4 (véase, por ejemplo, Puig, 1998b). En este caso es necesario (o al menos conveniente) usar etiquetas que liguen las expresiones generadas en el paso 3 con la semántica del problema.

Sin embargo, también es posible encontrar secuencias de enseñanza en las que no se hace hincapié en finalizar el paso 3 antes de iniciar el paso 4. De hecho, es habitual que los estudiantes comiencen la construcción de la ecuación y vayan dando respuesta al paso 3 a medida que se necesita una representación de las cantidades en la misma. Esta forma de proceder exige en ocasiones una gran carga de la memoria de trabajo, sobre todo cuando únicamente se emplea una ecuación en la resolución. Por ejemplo, en la resolución algebraica del problema *Las naranjas* siguiendo la lectura

L2 y si tomamos $x$ como el *número de naranjas en el saco grande*, podríamos encontrarnos con que estamos planteando la ecuación $180 = x+ \ldots$ al mismo tiempo que damos respuesta a parte del paso 3, pues falta por asignar expresión a la cantidad *número de naranjas en el saco pequeño*. Esto nos obligaría a mantener en la memoria de trabajo la relación sobre la que se construye la ecuación (paso 4) y la (o las) que se usa para asignar una expresión (paso 3) al *número de naranjas en el saco pequeño*. Esta exigencia a la memoria de trabajo se consigue disminuir al emplear más de una ecuación, pues de esta forma se reducen las relaciones que deben usarse en el paso 3 y aumentan las que se usan en el paso 4. Incluso puede hacerse desaparecer el paso 3 como sería el caso si en la resolución de este problema representáramos con $x$ e $y$ a las cantidades por las que se pregunta en el enunciado y planteáramos las ecuaciones $x + y = 180$ y $x = y + 30$.

En las situaciones uno a uno, además de la enseñanza del método, también es posible llevar a cabo la supervisión individualizada del proceso de resolución. Esto puede ser utilizado para dirigir la enseñanza hacia la identificación de las situaciones y esquemas conceptuales que normalmente se utilizan en una familia concreta de problemas. Centraremos nuestra atención en el procedimiento que un profesor puede llevar a cabo para generar ayudas a demanda con contenido de la tarea. No entraremos a discutir lo que Koedinger y Aleven (2007) llaman *assistance dilemma* y que puede enunciarse: ¿cómo determinar la información que se debe dar o retener para conseguir un aprendizaje óptimo?

El procedimiento para generar ayudas a demanda se apoya en el conocimiento del profesor sobre la tarea y el estudiante, y sobre la situación concreta que se está dando en la resolución. El análisis de la situación concreta exige identificar la vía de resolución que está siguiendo el estudiante. Para ejemplificar el proceso supongamos que un estudiante, que está resolviendo el problema *Las naranjas*, decide asignar la letra $x$ a la cantidad $Sg$ y a continuación escribe la expresión $180 - x$. El profesor infiere que se ha asignado una representación a la cantidad $Sp$ mediante la relación $N = Sg + Sp$, una relación que forma parte de las dos lecturas que hemos realizado anteriormente (Figura 7). También entendería que la resolución que se está llevando a cabo es algebraica. Si ahora el estudiante solicitara ayuda, el profesor debería decidir si proporciona una ayuda para seguir por L1 o L2. Ante la duda, el profesor podría recurrir a criterios distintos entre los que podría estar el de aconsejar seguir el camino del que se haya avanzado una mayor proporción. En el caso que nos ocupa en la L2 se ha usado una de las dos relaciones, mientras que en L3 se ha avanzado una de tres. Otros criterios podrían ser, por ejemplo, considerar L2 por tratarse de una lectura algebraica o recurrir a la experiencia para identificar las dificultades que podría tener un estudiante siguiendo una u otra línea. En cualquier caso, la ayuda podría oscilar desde ofrecer una idea general (como "Vuelve a leer el enunciado") hasta proporcionar una sugerencia con contenido de la tarea atendiendo a las acciones que ha realizado el alumno (como "Puedes construir una ecuación asignando una nueva expresión a la cantidad número de naranjas en el saco pequeño").

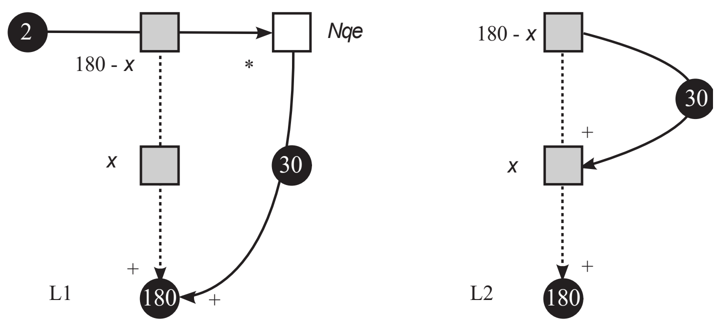



Figura 7. Estado tras $180 - x$

## El modelo de comunicación

En el modelo de comunicación describiremos los intercambios de información que se producen entre un sistema tutorial inteligente que hemos implementado (Arevalillo-Herráez, Arnau y Marco-Giménez, 2013; Arnau, Arevalillo-Herráez, Puig y González-Calero, 2013) y un estudiante. En el diseño del sistema tutorial se ha tenido en cuenta los modelos descritos anteriormente como se pondrá de manifiesto a continuación. Centraremos nuestra atención en las restricciones que impone la interfaz y aprovecharemos para poner ejemplos del funcionamiento del sistema y de la toma de decisiones a la hoja de generar los mensajes que envía al resolutor.

Como el programa no es capaz de generar las lecturas analíticas a partir del enunciado, éstas deben ser codificadas por humanos y almacenadas en archivos XML (Arnau, Arevalillo-Herráez y González-Calero, 2014). Esta codificación incluye el enunciado, un nombre en lenguaje verbal de las cantidades conocidas y desconocidas que aparecen en las distintas lecturas analíticas, el valor de las cantidades conocidas, las relaciones entre cantidades, y el esquema conceptual ligado a cada relación. Las relaciones se agrupan para formar las distintas lecturas del problema. Para la exposición que sigue, y con el objetivo de facilitar la descripción, usamos una codificación incompleta del problema *Las naranjas* en la que únicamente se han incluido las lecturas descritas anteriormente[iii]. Supondremos que un mismo estudiante lo intenta resolver primero de manera aritmética y después de manera algebraica.

Al elegir una configuración aritmética, cuando se cargara el problema, el sistema descartaría las lecturas algebraicas (en este caso la L2). A continuación mostraría el enunciado y unos botones con las cuatro operaciones básicas y los valores de las cantidades conocidas. Si el usuario, por ejemplo, introdujera la expresión 180 – 30, el sistema determinaría si existe alguna relación en la que aparecen las cantidades *N* y *Mgp*y es posible aplicar la RP2 (la única regla aplicable cuando se resuelve de manera aritmética) y, por último, comprobaría si es correcta la operación y el orden de los operandos. En este caso existe una relación en L1 que cumple las condiciones anteriores y el sistema en consecuencia inferiría que se ha calculado *Nqe*. Ante una acción correcta, como es el caso, el sistema no genera mensaje y se limita a representar el valor y nombre de la cantidad en la ventana *Cantidades definidas* (Figura 8) y a crear un nuevo botón en el que aparece el valor que se ha asignado a la cantidad.

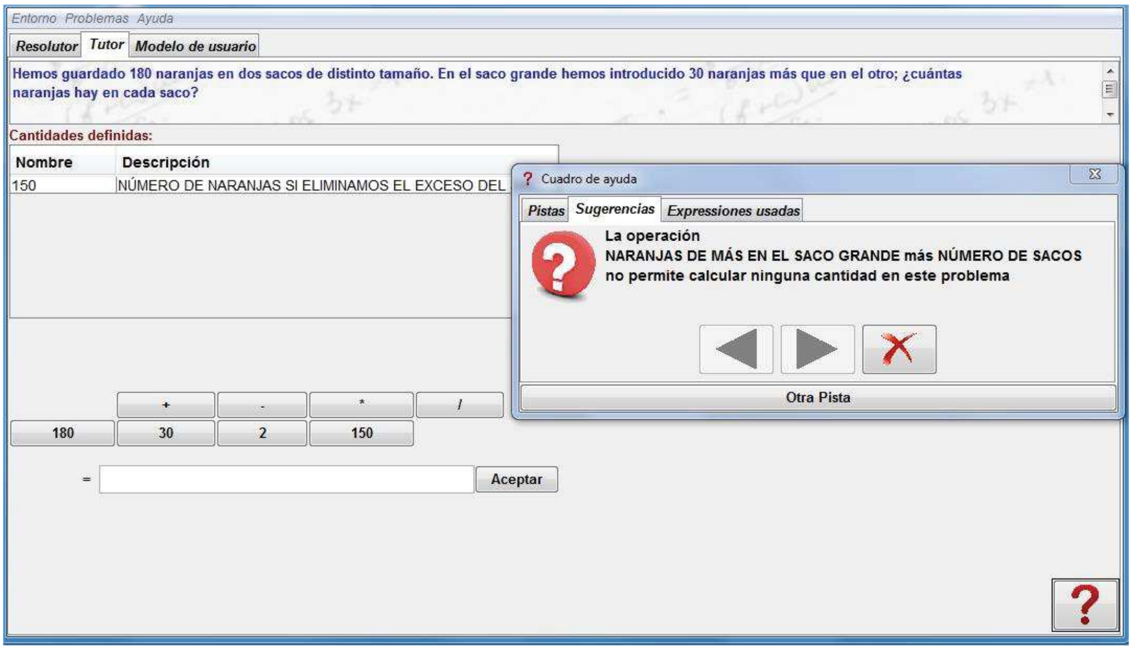



Figura 8. Interfaz para la resolución aritmética

Si el resolutor, a continuación, introdujera una operación incorrecta como 30 + 2, el programa ofrecería un mensaje de error en el que se recurre a los nombres de las cantidades que se han usado para poner de manifiesto la falta de sentido (Figura 8). Como consecuencia de estas acciones el sistema interpretaría que el resolutor ha sido capaz de realizar una operación que proviene de aplicar un esquema conceptual de cambio, pero que ha tenido dificultades en el paso que implicaba el uso de un esquema conceptual de isomorfismo de medidas.

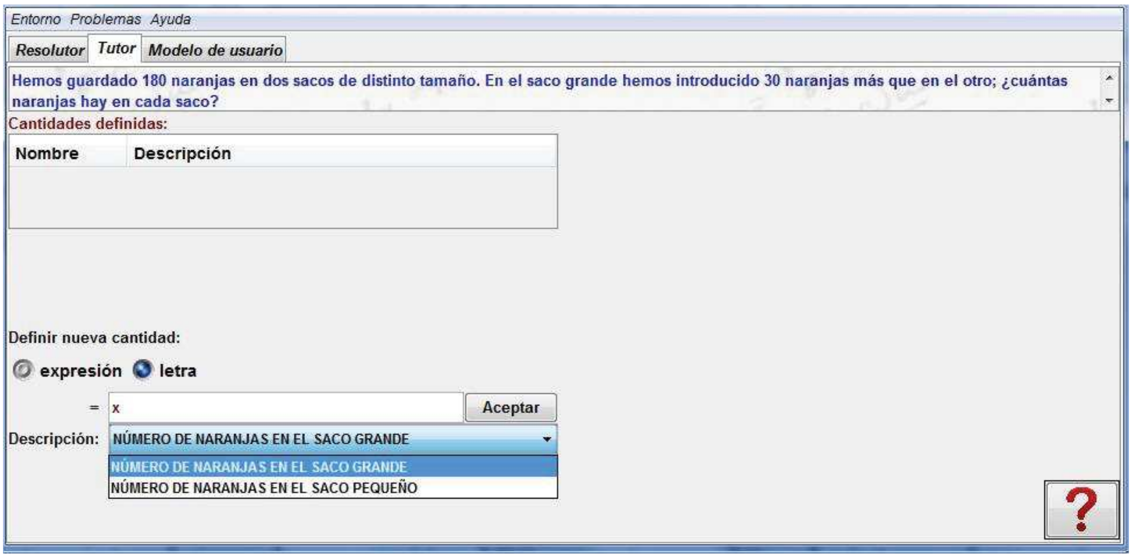



Figura 9. Asignación de una letra

En este punto el estudiante puede seguir asignando letras a las cantidades desconocidas o bien asignar expresiones algebraicas. Si decidiera construir la expresión $x - 30$, el sistema, al igual que en el caso aritmético, comprobaría si existe alguna relación en la que se pueda aplicar la RP2 y, en consecuencia, asignaría la expresión a la cantidad *Sp*. El programa, al dar por correcta la acción, encuentra que es ya posible aplicar la RP3, pues existe una relación en la que todas las cantidades tienen asignada una expresión matemática, y comunica la posibilidad de introducir una ecuación haciendo aparecer un nuevo panel en el que además de los botones anteriores se incluye el del signo igual (Figura 11). Si ahora el estudiante pidiera ayuda, el sistema proporcionaría información sobre el planteamiento de la ecuación. Las ayudas pueden contener distintos niveles de explicitación y pueden usar las distintas formas de referirse a las cantidades. En la Figura 10se muestra la información que recibiría si en este momento se pidiera ayuda dos veces seguidas.

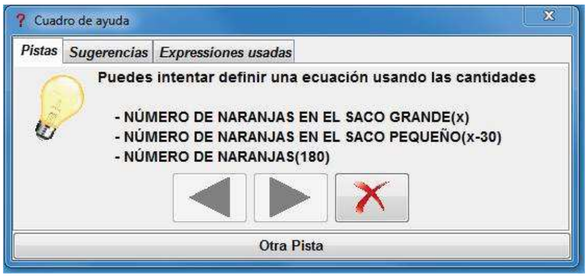




Figura 10. Dos niveles de ayuda en el paso 4

Si ahora el resolutor introdujera la ecuación $x - 30 = 180 - x$ (Figura 11) el sistema buscaría alguna relación en la que a todas las cantidades se les hubiera asignado una representación matemática, comprobaría el orden de los operandos y el signo de operación, y consideraría finalizado el planteamiento.

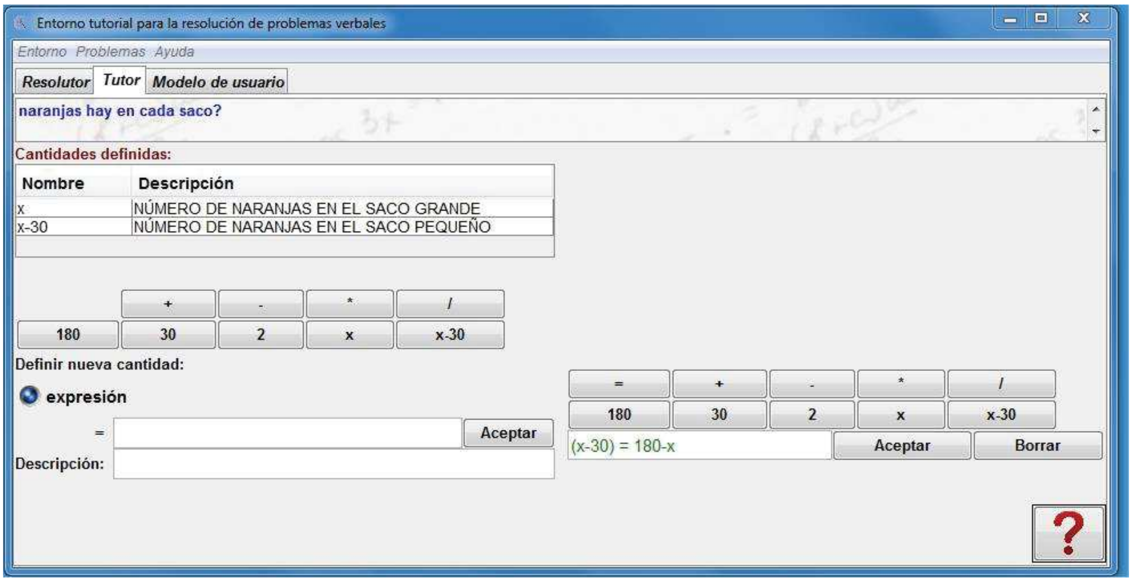



Figura 11. Construcción de una ecuación

En definitiva, tras el intento aritmético de resolución y la posterior resolución algebraica, el sistema habría caracterizado al estudiante como se muestra en la Figura 12 (donde las marcas rojas representan errores y las verdes aciertos). Con la información disponible, por ejemplo, el programa podría concluir que el estudiante ha tenido dificultades en el planteamiento de la ecuación. Si bien es cierto que en este punto no sería posible determinar si la dificultad era propia del problema o se trataba de una dificultad ligada al paso 4 del método cartesiano, la resolución de nuevos problemas por parte del estudiante podría aclarar la situación.

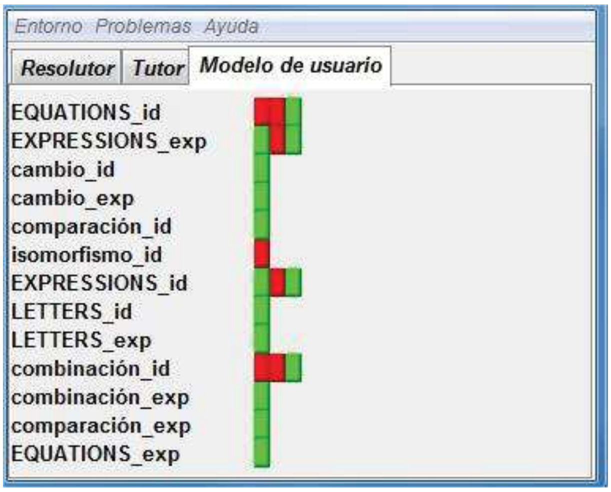



Figura 12. Estado final del modelo de estudiante

## CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

La minimización de las reglas de producción, la separación estricta entre el conocimiento declarativo y procedimental y el recurso a la representación mediante hipergrafos de la resolución de un problema, han permitido que el motor de inferencia ligado al modelo del dominio sea flexible ante las decisiones del estudiante. El sistema soporta resoluciones aritméticas y algebraicas y permite múltiples vías de solución para una misma lectura analítica (para una exposición más detallada véase: Arnau et al., 2013, 2014).

Hemos mostrado que el sistema es capaz de ofrecer ayudas a demanda teniendo en cuenta las restricciones que impone la tarea y las acciones que ha realizado el resolutor. Sin embargo, surge la necesidad de dar una respuesta personalizada a los errores o peticiones de ayuda teniendo en cuenta las características del estudiante. Un ejemplo de cómo generar ayudas adaptadas se puede encontrar en Arevalillo-Herráez, Arnau, et al. (2013), pero es necesaria una mayor investigación para determinar cuándo se debe retener información o el efecto de proporcionar una parte (véase, por ejemplo, González-Calero, Arnau, Puig, y Arevalillo-Herráez, 2014).

La determinación del modelo de estudiante se apoya en la hipótesis de que es posible describir una parte del conocimiento del alumno atendiendo a su competencia a la hora de aplicar esquemas conceptuales en el proceso reducción del enunciado a un conjunto de relaciones matemáticas. En este momento estamos diseñando los elementos del modelo de enseñanza que deberán emplearse para procesar esta información con la finalidad de poder anticipar decisiones, diseñar secuencias de enseñanza y, en última instancia, comprobar la validez de la hipótesis.

Por otro lado, los intercambios de información entre sistema y estudiante son poco ricos si los comparamos con los que se producen entre humanos. El sistema no es capaz de detectar frustración o cansancio. No obstante, la identificación de emociones, que típicamente realiza un profesor humano, y su incorporación al modelo de estudiante es una de nuestros ámbitos de interés (véase, por ejemplo, Arevalillo-Herráez, Moreno-Picot, et al., 2013).

Para terminar, parafraseando en parte a Newell y Simon (1972), una teoría de cómo los profesores tutorizan la resolución de problemas, *permitirá construir profesores artificiales* que tutorizarán la resolución de problemas.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado al amparo del proyecto EDU2012-35638 del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

## Referencias

Aleven, V., Roll, I., McLaren, B. M. y Koedinger, K. R. (2010). Automated, unobtrusive, action-by-action assessment of self-regulation during learning with an intelligent tutoring system. *Educational Psychologist*, *45*(4), 224-233.

Anderson, J. R. (1983).*The architecture of cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D. y Marco-Giménez, L. (2013). Domain-specific knowledge representation and inference engine for an intelligent tutoring system. *Knowledge-Based Systems*, *49*, 97-105.

Arevalillo-Herráez, M. et al. (2013). Towards enriching an ITS with affective support. En M. Kravcik, O. C. Santos, J. G. Boticario, y D. Pérez-Marín (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Workshop on Personalization Approaches in Learning Environments (PALE), held in conjunction with the 21st International Conference on User Modeling, Adaptation, and Personalization (UMAP2013)* (pp. 5-13). Roma, Italia: CEUR Workshop Proceedings.

Arnau, D., Arevalillo-Herraez, M. y Gonzalez-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on*, *7*(2), 155-164.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L. y González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Computers&Education*, *63*, 119-130.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de lasCiencias*, *31*(3), 49-66.

Beal, C. R. (2013). AnimalWatch: An intelligent tutoring system for algebra readiness. En R. Azevedo y V. Aleven (Eds.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies* (pp. 337-348). Nueva York: Springer.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 3-12). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Castro, E. et al. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 63-76). Zamora: SEIEM.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Valencia: Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Chaiklin, S. (1989). Cognitive studies of algebra problem solving and learning. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 93-114). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, *17-18*, 51-59.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and empirical approach*. Nueva York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T. y Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 155-175). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2014). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*.doi: 10.1111/bjet.12183

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (1996). The role of schemes in designing computerized environments. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(4), 339-365.

Hinsley, D., Hayes, J.R. y Simon, H. A. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. En P. A. Carpenter y M. A. Just (Eds.), *Cognitive processes in comprehension* (pp. 89-106). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Koedinger, K. R. y Aleven, V. (2007). Exploring the assistance dilemma in experiments with cognitive tutors. *Educational Psychology Review*, *19*, 239-264.

Koedinger, K. R. y Anderson, J. R. (1998). Illustrating principled design: The early evolution of a cognitive tutor for algebra symbolization. *Interactive Learning Environments*, *5*(1), 161-179.

Looi, C. K. y Tan, B. (1996). WORDMATH: A computer-based environment for learning word problem solving. En A. Díaz de Ilarraza Sánchez y I. Fernández de Castro (Eds.), *Computer Aided Learning and Instruction in Science and Engineering* (pp. 78-86). Berlín: Springer.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Nueva York: Cambridge University Press.

Martínez-Videla, M. V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*.Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. *Instructional Science*, *10*, 135-175.

Mitrovic, A., Koedinger, K. y Martin, B. (2003). A comparative analysis of cognitive tutoring and constraint-based modeling. En P. Brusilovsky, A. Corbett y F. de Rosis (Eds.), *User Modeling 2003 - Lecture Notes in Computer Science 2702* (pp. 313-322). Berlín: Springer.

Nathan, M. J. (1998). Knowledge and situational feedback in a learning environment for algebra story problem solving. *Interactive Learning Environments*, *5*(1), 135-159.

Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (Combined Edition)*. Nueva York: John Wiley&Sons.

Puig, L. (1998a). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 106-118). Zamora: SEIEM.

Puig, L. (1998b). *Poner un problema en ecuaciones*. Manuscrito publicado en http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: Componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VII* (pp. 97-108). Granada: SEIEM.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. L. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Nueva York: AcademicPress.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 de edad)*. Trabajo de Tesis Doctoral. México DF: CINVESTAV-IPN.

Schoenfeld, A. H. (1994). A discourse on methods. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 697-710.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149-167.

Thompson, P. W. (1989). Artificial intelligence, advanced technology, and learning and teaching Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 135-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.

Welham, D. (2008). AI in training (1980--2000): Foundation for the future or misplaced optimism? *British Journal of Educational Technology*, *39*(2), 287-296.

Woolf, B. P. (2008). *Building intelligent interactive tutors, student-centered strategies for revolutionizing e-learning*. Burlington, MA: Morgan Kaufmann Publishers.

[i] Por ejemplo, el problema “He comprado tres cajas de pasteles. Cada caja contiene cinco pasteles de crema y dos de chocolate. ¿Cuántos pasteles he comprado?” se puede clasificar tanto como un problema de dos como de tres etapas.

[ii] Evitaremos indicar el tipo de combinación, comparación, cambio o isomorfismo de medidas porque en el caso de resoluciones algebraicas se materializan en el momento en que se expresa la relación.

[iii] Podríamos comparar el sistema en este momento con un profesor que no sería capaz de resolver este problema de todas las formas habituales. Por ejemplo, si un estudiante introdujera la expresión 180 + 30, el sistema consideraría la acción incorrecta pues no podría encontrar ninguna relación en la que aparecieran estas dos cantidades.