

MODELOS Y MARCOS TEÓRICOS EN LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESPAÑA

Models and theoretical frameworks in research on numerical thinking in Spain

González Marí, J. L.

Universidad de Málaga

Resumen

Se presenta una breve revisión de los principales modelos y marcos teóricos que se emplean en la actualidad en la investigación en Pensamiento Numérico en España. Se adopta para ello una clasificación que no pretende ser exhaustiva; tampoco se mencionan todas las aportaciones que se pueden incluir en cada una de las categorías, de las que sólo se incluye una breve descripción junto a algunas referencias recientes. Después de analizar las relaciones que se pueden apreciar entre algunos marcos, se examina la situación actual y futura de la investigación en el campo de estudio y se hace una apuesta por una mayor atención a la investigación para la innovación en el aula ordinaria de Matemáticas.

Palabras clave: *pensamiento numérico, didáctica de la matemática, métodos de investigación, educación matemática*

Abstract

In this paper I present a brief review of the main models and theoretical frameworks that are currently used in research in numerical thinking in Spain. A classification which does not intend to be exhaustive is adopted and not all the potential contributions to be included in each category are mentioned; only a brief description is included along with some recent references. After analyzing the relationships between some frameworks, present and future research is examined in the field of study and a greater attention to research for innovation in regular mathematics classrooms is recommended.

Keywords: *numerical thinking, didactic of mathematics, research methods, mathematics education*

INTRODUCCIÓN

Los modelos y marcos teóricos de las investigaciones en un campo científico son referencias privilegiadas para conocer mejor los problemas propios del campo, el enfoque desde el que se abordan y el estado general del conocimiento sobre dichos problemas. Más aún, un marco teórico:

- "...cumple el papel fundamental de participar en la producción de nuevo conocimiento...
- permite orientar la investigación, el enfoque epistemológico, la formulación de preguntas y señalar los hechos significativos que deben indagarse...
- hace posible el enunciado de afirmaciones que posteriormente se habrán de someter a comprobación empírica...
- brinda un marco de referencia para interpretar los resultados y establecer nuevas líneas y áreas de investigación...
- constituye una guía para mantener el enfoque, centrar el problema e impedir la desviación del planteamiento original." (Schanzer, 2015)

Hasta ahora, tal y como indican Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal (2011), las investigaciones en educación matemática se han analizado desde el punto de vista de su visibilidad

internacional (Llinares, 2008), la producción de tesis doctorales (Vallejo, Fernández-Cano, Torralbo, Maz y Rico, 2008) y la publicación de artículos científicos en revistas españolas (Bracho, 2010). Recientemente se han analizado también las metodologías utilizadas (Godino y otros, 2011), las líneas de estudio (Palarea y Hernández, 2014), los contenidos (Gómez y otros, op.cit) y las aportaciones a los Simposios de la SEIEM (Maz-Machado, Bracho, Torralbo y Gutiérrez, 2011). En este trabajo se presentan los resultados de un breve análisis de los modelos y marcos teóricos de las investigaciones nacionales en pensamiento numérico, para lo que hemos tenido en cuenta las aportaciones que tienen que ver con la iniciación al Álgebra, con las relaciones entre el Pensamiento Algebraico, Geométrico o Matemático Avanzado y el Pensamiento Numérico, con los estudios sobre Pensamiento y Creencias del Profesor de Matemáticas, las que se abordan en el campo de la Cienciometría, entre otras publicadas en reuniones y documentos de los quince últimos años; del mismo modo, hemos aprovechado la oportunidad para realizar una selección de estudios de las distintas tendencias analizadas.

PENSAMIENTO NUMÉRICO: LÍNEAS Y GRUPOS DE INVESTIGACIÓN

Bajo la denominación “Pensamiento Numérico” se identifica una línea o marco general que estudia las estructuras numéricas y los sistemas de representación con los que se expresan conceptos y relaciones en el sistema escolar. En otras palabras, “los modos con que los escolares interpretan y, en su caso, responden a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas cuando los abordan mediante los conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica” (Rico, 2015).

“La investigación en Pensamiento Numérico aborda problemas derivados de la enseñanza y el aprendizaje de los conocimientos numéricos empleando bases teóricas y metodológicas bien delimitadas y abarcando tanto estudios empíricos (observacional, etnográfico, experimental, cuasi-experimental y estudios de caso) como ensayos teóricos, históricos o epistemológicos” (Rico, 2015). El grupo Didáctica de la Matemática - Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada concibe la actividad investigadora en el campo como: “un modo de priorizar y caracterizar determinadas ramas de la matemática mediante uso prioritario de las estructuras numéricas como herramientas conceptuales” (Grupo fqm193, 2015). A partir de esta idea el trabajo se centra en:

- La organización conceptual de sistemas simbólicos de codificación, válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones de una estructura matemática, y las interrelaciones entre tales sistemas.
- La elaboración y construcción de sistemas simbólicos, así como la organización, sistematización y desarrollo de diferentes capacidades y competencias basadas en los campos conceptuales mencionados.
- Los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica o algebraica.

Varias son las líneas de investigación y diversos los trabajos de investigación que se han desarrollado en los últimos años (Palarea y Hernández, 2014) empleando una diversidad de métodos (Godino et al, 2011). También son diversos los grupos de profesores que desarrollan su labor investigadora en este campo, destacando los siguientes grupos y Universidades:

- Un grupo interuniversitario en las Universidades de Almería, Córdoba, Granada y Málaga. En particular, en la Universidad de Almería se vienen desarrollando, entre otros, estudios sobre formación de profesores; en la Universidad de Córdoba se apuesta por el uso de materiales didácticos, por la investigación histórica y por el desarrollo del sentido numérico; en la Universidad de Granada se atiende a la historia de las matemáticas, las concepciones sobre el límite finito de una función, la resolución de problemas, los sistemas

de representación, y la formación de maestros y profesores de matemáticas, entre otros temas de interés, siendo el grupo mayoritario en la Comunidad Autónoma Andaluza. Por su parte, en la Universidad de Málaga se viene trabajando sobre la comprensión del conocimiento numérico y aritmético, la formación de maestros de Educación Primaria, la cognición matemática en la edad infantil mediante el uso de metodología multimedia y otras TIC y el concepto de límite de sucesiones y funciones.

- Un grupo en la Universidad de Valencia, dedicado a la configuración histórica de la aritmética y el álgebra escolar y su interrelación con el desarrollo numérico al amparo de los modelos teóricos locales. Algunas de las principales actividades llevadas a cabo en este marco son el análisis histórico de la enseñanza en los libros de texto (¿qué se ha enseñado?, ¿cómo se ha enseñado?) y el análisis del desarrollo conceptual o cómo construyen el conocimiento los estudiantes de los diversos niveles. Asimismo se ha prestado atención a la fundamentación de sugerencias para el currículum y a la elaboración de propuestas didácticas que puedan ser contrastadas mediante el estudio de la comprensión de los estudiantes.
- Un grupo en la Universidad de La Laguna, trabajando sobre distintos aspectos en Pensamiento Numérico y Algebraico, en particular sobre resolución de problemas verbales aritméticos en base a un modelo de competencias siguiendo un enfoque denominado ELOS. Los estudios dentro de este enfoque se centran, como se explica con más detalle más adelante, en errores y dificultades y la utilización de sistemas de representación yuxtapuestos. Del mismo modo, son de destacar los estudios realizados sobre los números enteros y la resolución de problemas con dichos números.
- En otras Universidades se encuentran trabajando profesores y grupos de profesores sobre temas relacionados con la investigación en el campo del Pensamiento Numérico.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN; CRITERIOS, CATEGORÍAS Y PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS

El estudio realizado pretende identificar y delimitar los modelos y marcos teóricos que sustentan las investigaciones en Pensamiento Numérico en España y establecer una categorización que permita situar convenientemente, en unas pocas clases, la mayoría de los estudios tanto específicos como relacionados con dicho campo.

Hemos elegido una terminología especial para realizar la clasificación y unos criterios que responden a una manera de ver las investigaciones en Educación Matemática, en general, y en Pensamiento Numérico, en particular. En cuanto a la terminología se ha tenido en cuenta lo siguiente:

- identificar el núcleo de la investigación, el elemento central y determinante del estudio, valorando seguidamente el papel y la contribución de los demás aspectos relevantes y definitorios del trabajo al resultado final y a la línea de estudio en su conjunto;
- analizar la evolución y la situación actual de las investigaciones así como de los modelos y marcos teóricos;
- suprimir cualquier consideración sobre la capacidad productiva, la evolución previsible o las perspectivas futuras de los estudios.

La denominación de cada bloque de estudios, modelo, tendencia o marco teórico hace alusión, por tanto, a la denominación conocida en tendencias consolidadas y, en caso de duda, al elemento central del núcleo de la investigación.

En cuanto a la clasificación, las categorías utilizadas no han resultado ser exhaustivas ni mutuamente excluyentes, aunque el sistema de categorías se ha establecido inicialmente con la intención de organizar el mayor número posible de estudios. Dicho esto, puede ocurrir que algunos tipos de investigaciones queden fuera de la clasificación y que haya estudios que se puedan situar en varios marcos y modelos. Por otra parte, la inclusión de los estudios en alguna de las categorías no siempre ha sido inmediata, en unos casos por la multiplicidad de aspectos involucrados y en otros por las dudas surgidas en cuanto al propósito central del estudio del que la publicación constituye un fragmento.

Por otra parte, junto a las características de los fundamentos teóricos de cada tipo de estudio, se han analizado los marcos teóricos definidos para comprobar si las investigaciones realizadas contribuyen en mayor o menor medida a satisfacer las demandas del Sistema Educativo enumeradas por Font (2011). En este sentido se relacionan los fundamentos teóricos de las investigaciones con su capacidad de dar respuestas a los problemas reales del Sistema Educativo. Font enuncia dichas demandas en los siguientes términos:

- Primera demanda: herramientas para analizar las diferentes maneras de organizar el contenido matemático;
- Segunda demanda: ¿cómo se produce la emergencia de los objetos matemáticos a partir de contextos extra matemáticos?;
- Tercera demanda: conocimiento de las dificultades de comprensión de los contenidos matemáticos;
- Cuarta demanda: incorporación de las TIC;
- Quinta demanda: atención a la diversidad;
- Sexta demanda: transición entre etapas;
- Séptima demanda: desarrollo y evaluación de procesos y competencias;
- Octava demanda: desarrollo de competencias profesionales; (pp. 169-192)

En el presente trabajo se analizan los marcos y fundamentos teóricos de las investigaciones en Pensamiento Numérico, según su capacidad para dar respuestas a los problemas antes enunciados.

MODELOS Y MARCOS TEÓRICOS EN LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO NUMÉRICO

En lo que sigue se agrupan bajo diferentes categorías y denominaciones las investigaciones y líneas de estudio que presentan, a nuestro entender, características comunes en cuanto a fundamentos, modelos, enfoques y/o tipos de trabajos. Los modelos y marcos teóricos que hemos identificado son los que se mencionan a continuación agrupados en bloques de características similares. En cada caso se hace una breve descripción de las principales características, se menciona la contribución a los problemas educativos generales y se detallan referencias que, a modo de ejemplos, se ajustan al modelo o marco analizado.

De carácter fundamental / básico

Una de las primeras referencias de la investigación en Educación Matemática se centra en el conocimiento matemático, su historia, epistemología y fenomenología. La información en estos campos se suele considerar básica para el estudio de los fenómenos de la Educación Matemática, y es en este sentido en el que se realizan las indagaciones en estos campos, más allá del mero interés histórico, matemático, epistemológico o fenomenológico de los resultados; para nosotros es evidente que toda incursión en dichos campos desde el ámbito de la investigación educativa en matemáticas se realiza con la mirada puesta en la Educación Matemática.

En todos los casos se trata de estudios que atienden a la primera demanda del Sistema Educativo: historia, textos clásicos, análisis del contenido y análisis didáctico (Font, 2011).

Dentro de este gran grupo podemos distinguir varios subgrupos, de entre los que destacamos por su importancia los siguientes:

Matemáticas, Historia y Epistemología

Marco teórico general en el que hemos situado las investigaciones que consideran la Historia y la Epistemología como fuentes privilegiadas, directa o indirectamente, necesarias aunque no siempre suficientes, del conocimiento didáctico en matemáticas. Algunos de dichos estudios se centran exclusivamente en la indagación histórica y/o epistemológica, mientras que otros se extienden algo más para tratar algunas consecuencias de los análisis realizados. Tanto en esta categoría como en la siguiente, hemos incluido el término Matemáticas porque entendemos, como así ocurre en algunos de los estudios, que el conocimiento matemático formal está presente y es necesario realizar incursiones en las definiciones y teorías matemáticas relacionadas con el conocimiento matemático involucrado.

Los estudios referenciados en Gómez y Sanz (2014) y Maz-Machado, Torralbo y Rico (2006) se han ocupado de indagar en la historia y analizar sus contenidos manteniendo algún hilo conductor con el campo y los problemas propios de la Educación Matemática en general y del Pensamiento Numérico en particular.

Matemáticas, Epistemología y Fenomenología

El conocimiento en profundidad de las características epistemológicas y fenomenológicas del conocimiento matemático relacionado con un problema didáctico puede contribuir de manera significativa a la resolución del problema, a plantear otros problemas relacionados o a analizar el problema desde puntos de vista diferentes. Los siguientes estudios se centran, aunque no de forma exclusiva, en los aspectos epistemológicos y fenomenológicos de conocimientos numéricos: Maz-Machado, López y Sierra (2013) y González (1995).

Por su parte, los estudios de Sánchez, Claros y Coriat (2011) y Claros, Sánchez y Coriat (2014) abordan la fenomenología del concepto de límite desde una perspectiva novedosa que involucra aspectos de lo que se conoce como sentido numérico y establecen los fundamentos de un marco teórico y metodológico para el estudio del límite.

De carácter instrumental (Análisis Didáctico)

Los modelos instrumentales se aglutinan bajo la denominación genérica “Análisis Didáctico” (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), que adquiere una utilidad diversa en función del campo de estudio al que se aplica y de la finalidad del trabajo. En todos los casos se trata de estudios que atienden a la primera demanda del Sistema Educativo: historia, textos clásicos, análisis del contenido, análisis didáctico (Font, 2011), pero, además, en cada uno de los casos que se presentan a continuación, los estudios responden también a otras necesidades y dan respuesta a problemas relevantes para la mejora de la educación matemática.

Análisis Didáctico como Instrumento para organizar y fundamentar investigaciones (un verdadero estudio teórico de la información y no sólo un tratamiento especial de los antecedentes)

Método cualitativo que proporciona referencias precisas, específicas y operativas para afrontar con eficacia la fase de selección y tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática mediante un procedimiento metodológico no-empírico que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas por su objeto de estudio (González, 1995, 1998a, 1998b). Su necesidad se basa, por un lado, en la naturaleza compleja de los fenómenos, incluidas la multidisciplinariedad y la interdisciplinariedad del campo y la situación incipiente de numerosos conocimientos, y, por otro, en las características de la información y las fuentes disponibles, cuya dispersión y amplitud son notables y aconsejan un tratamiento meta-analítico que no se puede limitar a la mera revisión

tradicional. El Análisis Didáctico bajo este enfoque se ha aplicado a campos conceptuales y conocimientos matemáticos concretos, tales como los números enteros y los números naturales relativos (González, 1995, 1998a), la secuencia numérica (Fernández, 2001), la integral de línea (Padilla, 2003), la inducción matemática (Ortiz, 1997), la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004) o la atención a la diversidad sordos-oyentes (Larrubia, 2006). Igualmente, los estudios que se abordan en González (1995, 1998b) y González, Ortiz y Gallardo (2014) han realizado un análisis de los antecedentes siguiendo las directrices del Análisis Didáctico bajo este enfoque.

Análisis Didáctico como Instrumento Curricular para el diseño, desarrollo y evaluación de procesos educativos

En el contexto curricular se describe una propuesta práctica que viene siendo utilizada para fundamentar, organizar y completar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas y/o de procesos educativos puntuales. La aportación de González y Gallardo (2013) proporciona información sobre este tipo de estudios. Por su parte, Real, Segovia y Ruiz (2012) utilizan el Análisis Didáctico como herramienta para el estudio de libros de texto escolares.

Análisis Didáctico como Instrumento para la formación de profesores

Para facilitar el proceso formativo de los futuros docentes, en estrecha relación con el enfoque anterior, se ha desarrollado en el grupo “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada una parte importante del proceso de análisis didáctico orientada a proporcionar instrumentos de análisis para la formación de los docentes. Gómez, Lupiáñez, Rico y Marín (2007) señalan que:

El análisis didáctico es un procedimiento que permite explorar, profundizar y trabajar diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (pp. 18-19).

Este procedimiento permite al profesor organizar el saber desde dos ámbitos, desde las matemáticas y desde la enseñanza, mediante cuatro subanálisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. El análisis didáctico bajo este enfoque, aunque tiene un origen teórico, se muestra como un procedimiento eminentemente práctico, al facilitar al profesor el proceso sistemático de diseño de unidades didácticas (Rico, 1997).

Además de responder a la primera demanda ya mencionada, los estudios de Ramos-Rodríguez, Flores y Ponte (2014), en torno a la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra; Lupiáñez y Rico (2008), en relación con la formación inicial de profesores sobre competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares; y Lupiáñez y Rico (2010), en torno al aprendizaje de los futuros docentes sobre enunciado de objetivos específicos para las matemáticas escolares, contribuyen también a la octava de dichas demandas (desarrollo de las competencias profesionales) (Font, 2011). En todos ellos, situados en el corazón de este marco teórico, se aplican los principios e instrumentos mencionados en Rico et al. (2013).

Centrados en la cognición (matemática y numérica y aritmética)

Los estudios interesados en los aspectos cognitivos de la Educación Matemática se fundamentan en teorías de aprendizaje, comprensión y construcción de conocimientos o en modelos explicativos sobre capacidades, destrezas, estrategias y razonamientos. Se incluyen aquí, los estudios que se limitan a observar y analizar respuestas de los sujetos a tareas, cuestionarios y entrevistas.

En este bloque situamos modelos y marcos teóricos que siguen la tradición del grupo PME y responden a la segunda demanda del Sistema Educativo: construcción del conocimiento matemático, construcción mediante situaciones funcionales o de matemáticas realistas y en contextos extramatemáticos; así como a la tercera demanda: dificultades, errores y comprensión.

Se trata de un bloque amplio en el que podemos distinguir los siguientes marcos teóricos generales.

Aprendizaje, conocimientos, habilidades y destrezas

Las investigaciones en este campo tratan de indagar en la cognición de alumnos y profesores. En los estudios realizados por Ortiz y Fernández (2007), sobre razonamiento inductivo numérico y las competencias ordinales en Educación Infantil, y Hernández y González (2011) sobre la utilización de la tecnología multimedia para indagar en las capacidades y competencias ordinales de sujetos de edades comprendidas entre 3 y 7 años, se construye un modelo evolutivo de competencias ordinales y se somete a prueba mediante entrevistas individuales.

En el segundo estudio se utiliza la tecnología multimedia para la recogida y el tratamiento de las respuestas de los sujetos. Igualmente, se realiza en el mismo un análisis histórico y epistemológico de la estructura de orden como instrumento para fundamentar la investigación, de manera que también se puede situar entre las investigaciones que utilizan el Análisis Didáctico como instrumento de fundamentación. Sin embargo, lo que caracteriza este tipo de estudios, el verdadero motor del trabajo y la idea impulsora original, es el aspecto meramente cognitivo.

Dentro de este amplio conjunto de estudios, Pons, Valls y Llinares (2012) analizan los significados que utilizan los alumnos para el concepto de límite de una función en un punto a partir de la aproximación a un número y qué papel desempeñan en ello los modos de representación. Del mismo modo, se pueden situar también en esta tendencia los estudios de Molina, Castro y Castro (2009), sobre el signo igual en las ecuaciones numéricas, y los trabajos que se mencionan en Segovia y De Castro (2007) sobre estimación en cálculo, aunque comparten aspectos de otros marcos teóricos.

Competencias

La evaluación de capacidades y competencias es un problema didáctico importante y siempre de actualidad en Educación Matemática. El estudio de las competencias matemáticas, su desarrollo y evaluación responde a la séptima demanda sobre desarrollo y evaluación de procesos y competencias.

Aunque las producciones en este campo han sido numerosas en los últimos años, citamos por su interés las referenciadas en Rico (2004, 2007) sobre evaluación de competencias matemáticas dentro del Proyecto PISA/OCDE. Este tipo de estudios también pueden ser considerados a propósito de la interpretación y la evaluación así como de los estudios curriculares.

Resolución de problemas

La línea de investigación sobre resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal, trata de dilucidar aspectos relacionados con el razonamiento, habilidades y estrategias puestas en juego en la elaboración de determinado tipo de problemas. Los estudios sobre resolución de problemas de matemáticas se desarrollan en numerosas universidades españolas, pero hemos de destacar los trabajos que se vienen realizando en la Universidad de Granada y en la Universidad de Valencia, de los cuales resultan significativas la aportación de Puig (1996) así como las aportaciones que se mencionan en Cañadas y Castro (2002) a propósito de un estudio sobre problemas de carácter inductivo.

Formación de Profesores

Se comparte finalidad con los estudios sobre comprensión del conocimiento matemático en relación con la formación de maestros y profesores, aunque sin utilizar la fundamentación del modelo operativo de dicha tendencia. Los estudios de Menino, Tavares, Quaresma y Rodrigues (2011), sobre el sentido del número en los futuros profesores de primer ciclo, y de López y Cañadas (2013), sobre la utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de

divisibilidad, se caracterizan por el interés en los aspectos cognitivos de la formación de docentes.

Errores y dificultades

Se trata de un enfoque que responde a la tercera demanda del Sistema Educativo: conocer los errores y dificultades relacionados con la actividad y el aprendizaje en Educación Matemática. Comparte una de las finalidades con el enfoque lógico semiótico (ELOS) que analizaremos más adelante. Los trabajos incluidos en Socas, Hernández y Palarea (2014) y Buhlea y Gómez (2008) se refieren a investigaciones centradas en errores y dificultades de carácter cognitivo relacionados con el aprendizaje en procesos matemáticos.

Ansiedad y actitudes

Se trata de una línea de investigación prometedora dentro de este bloque de tendencias. Las aportaciones de Rodríguez, Hidalgo y Palacios (2012), sobre la ansiedad matemática, constituyen un ejemplo entre otros para indagar en este marco teórico.

Modelos y marcos teóricos centrados en la interpretación y la evaluación

Hemos realizado la siguiente clasificación con diferentes enfoques y modelos.

Comprensión del conocimiento matemático. Enfoque general

Modelo que incluye las facetas epistemológica, cognitiva, semiótica y hermenéutica en relación con un conocimiento matemático concreto. El modelo se viene perfilando con la intención de disponer de un constructo operativo para la interpretación de la comprensión de conocimientos matemáticos. Se han desarrollado y se vienen desarrollando en la actualidad trabajos en distintas vertientes, de los que podemos citar, entre otros, los de Gallardo y colaboradores (Gallardo y González, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b, 2011; Gallardo, González y Quintanilla, 2013; Gallardo, González y Quispe, 2007, 2008).

El marco general se sustenta en tres orientaciones básicas para la interpretación de la comprensión, cognitiva, semiótica y hermenéutica, y en un modelo general asociado basado en:

- (a) Una concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático y su valoración.
- (b) Una concepción relativa y no acumulativa de la comprensión que evoluciona en función de la situación, las condiciones y los factores que intervienen.
- (c) Una concepción analítica del conocimiento matemático basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en los diferentes tipos de categorías del conocimiento.
- (d) Un método o proceso secuenciado en torno a dos dimensiones:
 - (d1) *Dimensión fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio con el siguiente procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006a):
 1. Análisis Didáctico (González, 1998a; Gallardo y González, 2006b);
 2. Delimitación del conjunto genérico de situaciones;
 3. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto de situaciones. Modelo local;
 4. Selección de tareas y construcción de instrumentos;
 5. Análisis de resultados y primeras conclusiones.
 - (d2) *Dimensión hermenéutica*, en la que se analiza la información y se completan los resultados y conclusiones mediante lo que denominamos círculo interpretativo o método hermenéutico (Gallardo y González, 2011).

La aportación más reciente es la de Gallardo y Quintanilla (2015), en la que se tiene en cuenta el

consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. Asimismo, se viene trabajando en la consideración de los aspectos afectivos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos y en la interpretación de la comprensión de conocimientos matemáticos elementales.

Comprensión de conocimientos numéricos y aritméticos

La aplicación del marco teórico general descrito anteriormente a los conocimientos numéricos y aritméticos proporciona un tipo de estudio específico que añade las características propias del campo que hemos denominado Pensamiento Numérico. Los estudios de Gallardo (2004) y Gallardo y González (2007), sobre el algoritmo para la multiplicación de números naturales, y Gallardo et al. (2007), sobre la comprensión del concepto de fracción, constituyen ejemplos de este marco teórico.

También se pueden incluir aquí los estudios sobre comprensión del Sistema de Numeración Decimal que se mencionan a continuación.

Formación de Maestros y Profesores

La investigación referenciada en González, Ortiz y Gallardo (2014), sobre la comprensión de los futuros maestros de Primaria acerca de los Sistemas de Numeración, responde a la octava demanda del sistema educativo recogida por Font y constituye un ejemplo de los estudios preocupados por el problema de la interpretación de respuestas y comportamientos.

Evaluación de Programas y evaluación comparada

La evaluación constituye un elemento esencial del proceso educativo. Los estudios sobre competencias y los estudios curriculares se pueden considerar también en este apartado, del que incluimos como ejemplo la aportación de Gutiérrez, Rico y Gómez (2014) sobre la evaluación en TEDS-M.

Modelos y marcos teóricos de componentes integradas

Se trata de modelos y marcos de tipo holístico en el que se pueden distinguir distintas componentes integradas en un todo. Se aprecia además un interés en establecer las relaciones entre las distintas partes y realizar investigaciones separadas en función de las diferentes componentes.

Modelos Teóricos Locales

El marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) fue elaborado inicialmente por Eugenio Filloy (Kieran y Filloy, 1989), cuya exposición más detallada y completa se puede encontrar en Filloy, Puig y Rojano (2008). Desde esta perspectiva, las situaciones de enseñanza y aprendizaje en los sistemas escolares pueden concebirse como situaciones de comunicación y de producción de sentido, en las cuales están implicados la materia objeto de enseñanza y aprendizaje, la enseñanza, que organiza el profesor, y los alumnos, en cuyas actuaciones se muestra lo que han aprendido.

Filloy (1999) argumenta que para poder observar experimentalmente los fenómenos que aparecen alrededor de la enseñanza y el aprendizaje, hemos de tener un marco teórico y metodológico (MTL) que nos permita interpretar y organizar tales fenómenos y proponer nuevas observaciones que pongan en evidencia las relaciones que hay entre los cuatro componentes que entran en juego. Dicho marco se compone, según el autor, de las siguientes componentes:

- 1) Componente de enseñanza del MTL o abreviado Modelo de enseñanza.
- 2) Componente de cognición del MTL o Modelo para los procesos cognitivos.
- 3) Componente de competencia formal del MTL o Modelo de competencia formal.
- 4) Componente de comunicación del MTL o Modelo de comunicación.

La noción de Modelo Teórico Local conlleva una manera de organizar la investigación, en la que se distinguen dos partes principales relacionadas: una teórica y otra empírica. El desarrollo de la parte teórica, con la cual se constituye el modelo teórico local inicial, se configura a lo largo de varios ejes que se caracterizan por utilizar, por separado o en combinación, metodologías que tienen que ver con:

- El análisis histórico y epistemológico, a fin de identificar las principales concepciones y dificultades que ha entrañado la construcción de un determinado objeto matemático hasta llegar a su formulación actual.
- El análisis de libros de texto, como registro que son de la evolución científica, curricular y pedagógica en los diversos momentos de la historia.

La parte empírica o segunda etapa del trabajo toma como metodología el análisis de tareas para informar acerca de las realizaciones individuales de los estudiantes al responder a tareas específicas propias de los temas de los currícula de enseñanza.

Algunas aportaciones destacadas dentro de esta tendencia son las de Puig (2008) sobre el componente de competencia de los modelos teóricos locales, las de Filloy et al. (2008) sobre álgebra educativa, y las de Ortega y Puig (2014) y Gómez (2005) sobre las componentes de la investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico.

Los dos modelos siguientes se centran en el análisis epistemológico y semiótico, aunque con incursiones en aspectos cognitivos y estableciendo relaciones con otras componentes.

Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El EOS se propone articular las aproximaciones epistemológica y cognitiva, al establecer como hipótesis básica que los hechos y fenómenos didácticos tienen una doble dimensión personal-institucional. Las nociones teóricas se clasifican en cinco grupos (Godino, 2012):

- (1) *Sistema de prácticas* (operativas, discursivas y normativas), que asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.
- (2) *Configuración de objetos y procesos* matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.
- (3) *Configuración didáctica*, como sistema para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.
- (4) *Dimensión normativa*, sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas.
- (5) *Idoneidad didáctica*, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático.

Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

El Enfoque Lógico Semiótico es una propuesta teórico-práctica que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de situaciones problemáticas en el microsistema educativo y

centra su estudio en uno de los grandes problemas de la Educación Matemática, las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas (Socas, 2001, 2007, 2012).

En este enfoque se parte del Modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), que permite describir el campo conceptual del objeto matemático con sus funciones y su fenomenología en términos operacionales, estructurales y procesuales y sus relaciones (Socas, 2010).

De manera resumida, cualquier actividad matemática puede ser descrita en relación a las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos. Cada una de ellas queda determinada, a su vez, por tres elementos: la componente Operaciones queda determinada por las operaciones, los algoritmos y las técnicas; la componente Estructuras queda determinada por los conceptos, las propiedades y las estructuras; y la componente Procesos queda determinada por las sustituciones formales, la generalización y la modelización (Socas, 2012). Además, las actividades matemáticas están siempre situadas en un contexto que debemos analizar, y que viene descrito por las tres componentes: Situaciones problemáticas, Representaciones y Argumentos. En las Situaciones problemáticas, se consideran las tres fases de la resolución de un problema: identificación, planteamiento y resolución, además de los contenidos matemáticos implicados en ellas; en las Representaciones (lenguajes): su reconocimiento, transformación y elaboración; y en los Argumentos (razonamientos): la descripción, justificación y razonamientos implicados (Socas, 2012).

Centrados en el desarrollo didáctico en el aula ordinaria de matemáticas

Experimentos de enseñanza

Constituye una tradición basada en la investigación en el aula y que debe tomar un mayor protagonismo en la escena de la investigación en Pensamiento Numérico en España. Así, en el estudio de Bracho, Adamuz, Jiménez y Gallego (2014) se trata de potenciar el desarrollo del sentido numérico de manera eficaz e integradora a través de una metodología basada en dos pilares fundamentales:

- El aprendizaje significativo del sistema de numeración decimal y el conocimiento y aplicación de las propiedades de los números y de las operaciones.
- El abordaje de las operaciones aritméticas básicas a través de los algoritmos

Otros estudios dentro de este marco teórico son los que describen Maz-Machado y Adrián (2014), sobre el uso de materiales didácticos y desarrollo del sentido numérico en primaria, Molina, Castro, Molina y Castro (2011) o las investigaciones colaborativas en desarrollo sobre la implementación del método de cálculo ABN en Centros de Educación Primaria de Andalucía.

Modelo Investigación para la Innovación Curricular en la acción en el aula de Matemáticas

Se trata de un modelo que procede de la tradición italiana de la investigación para la innovación (González, 1999) y que apela al hecho constatado de que gran parte de la investigación en Educación Matemática estudia los fenómenos en situaciones de laboratorio y tiene dificultades para influir de manera significativa en la práctica docente en el aula ordinaria. Se observan carencias en lo que se refiere a los resultados más cercanos a la realidad del aula que se pueden paliar mediante la utilización de un modelo de investigación para la innovación, con la participación de los profesores responsables y manteniendo la integridad de los fenómenos analizados allí donde se producen y tal y como se producen (González, 2015). Además de incidir en la innovación curricular y en la mejora de la práctica educativa, los estudios aportan información científica y contribuyen a mejorar la formación de los profesores que intervienen.

El modelo se construye a partir del análisis de las principales tendencias y se utilizan métodos

mixtos de investigación para analizar los efectos de nuevos tratamientos didácticos sobre el rendimiento y la actitud de los alumnos. Cada profesor responsable dirige el estudio en su grupo y colabora en los demás grupos como observador y ayudante. Se emplean protocolos de enseñanza en grupos experimental y control, protocolos de observación, pruebas objetivas y entrevistas.

Otros modelos y marcos teóricos relacionados

Conocimiento, creencias, pensamiento del profesor y formación de profesores

Desde un punto de vista general, Gil y Rico (2003) abordan las concepciones y creencias del Profesorado de Secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Igualmente, son de destacar los numerosos estudios que se mencionan en Llinares (2009) así como otros trabajos que pueden tener relación con conocimientos numéricos, como es el caso de Montoro y Gil (2012), en el que se trata un instrumento para medir experiencias de flujo en situaciones que provocan concentración profunda, pérdida de la noción del tiempo, disfrute e interés en el aula.

Estudios cuantitativos

Relacionados indirectamente con los estudios en Pensamiento Numérico, se pueden encontrar referencias e informaciones complementarias en Maz-Machado et al. (2011) así como en otras publicaciones de Torralbo y colaboradores.

Estudios curriculares

Un ejemplo de estudios de este tipo, en estrecha relación con las investigaciones durante el desarrollo didáctico en el aula ordinaria, lo constituyen los estudios curriculares sobre el método ABN, de los que se pueden encontrar referencias en Bracho et al. (2014).

CONCLUSIONES

La clasificación que se propone no pretende ser definitiva. Está abierta a modificación y a nuevas reorganizaciones de las categorías. De entrada, se puede reconocer una cierta convergencia entre los modelos y marcos teóricos en aquellos aspectos que hemos considerado básicos y/o instrumentales; la mayoría de los modelos comparten un núcleo común que podemos categorizar como fundamental para la investigación en Pensamiento Numérico. Igualmente, se aprecian diferencias entre los modelos que hemos llamado de componentes integradas, que tratan de incluir a priori todos los factores y relaciones que pueden intervenir, y aquellos otros que se van construyendo paulatinamente en función de los datos que proporcionan los estudios empíricos.

Quedan abiertos al análisis y discusión los siguientes aspectos, entre otros: a) la relación entre las construcciones teóricas, los modelos y fundamentos y la información empírica; b) la existencia de marcos teóricos no contemplados en la clasificación realizada; c) características y tipos de estudios de difícil o imposible ubicación en las categorías utilizadas; d) características y tipos de estudios que comparten varios marcos teóricos; e) características y tipos de estudios específicos de un solo marco teórico; f) la capacidad de cada tipo de estudios y de cada modelo para incidir en la mejora real de la práctica educativa; g) investigación básica y aplicada en Pensamiento Numérico y su relación con los modelos y marcos teóricos relacionados en el trabajo.

Para terminar, sugerimos la necesidad de: 1) profundizar en los análisis iniciados en el presente estudio; 2) realizar meta análisis de distintos tipos de estudios en base a su fundamentación teórica, la metodología e instrumentos utilizados y los resultados obtenidos; 3) comparar modelos y marcos teóricos en relación con un problema específico; 4) la realización de investigaciones durante el propio desarrollo curricular ordinario en el aula de matemáticas de cualquier nivel educativo, incluida el aula de didáctica de la matemática en los centros de formación de docentes, con la implicación de los propios docentes.

REFERENCIAS

- Bracho-López, R., Adamuz-Povedano, N., Jiménez-Fanjul, N. y Gallego-Espejo, M. C. (2014). Una experiencia de investigación-acción colaborativa para el desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje matemático. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática -2014* (pp. 1-9). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.
- Buhlea, C. y Gómez, B. (2008). Sobre raíces y radicales: Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumanía). En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 241-256). Badajoz: SEIEM.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2002). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en Educación Matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 147-153). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Claros, J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.
- Fillooy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México DF: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Fillooy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and empirical approach*. Nueva York: Springer.
- Font, V. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 165-194). Ciudad Real: SEIEM.
- Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. La comprensión del algoritmo de multiplicar números naturales*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006a). Assessing understanding in mathematics: Steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26(2), 10-15.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006b). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2007a). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números*, 66, 1-8.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2007b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: El caso del algoritmo estándar para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares*. Granada: Universidad de Granada.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2011, Diciembre). On understanding and interpretation in mathematics: An integrative overview. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 26. Disponible en <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome26/index.html>.
- Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2007). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M^a. T. González (Eds.), *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación* (pp. 207-222). Tenerife: Caja Canarias y SEIEM.
- Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 11(3), 355-382.
- Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008b). Rastros de comprensión en la acción matemática. La

- dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 283-293). Badajoz: SEIEM.
- Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: Aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, 25(2), 61-88.
- Gallardo, J. y Quintanilla, V. (2015). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *Bolema* (en prensa).
- Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), 27-48.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Baeza: SEIEM.
- Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W. F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 33-50). Ciudad Real: SEIEM.
- Gómez, B. (2005). Componentes de la investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA). Ponencia en el *XIV Encontro de Investigaçao em Educaçao Matemática. Números e Álgebra. Na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Caminha, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Secção de Educação e Matemática. Recuperado de www.uv.es/gomezb/24Componentes
- Gómez, B. y Sanz, M. T. (2014). Problemas clásicos de fracciones encadenadas. *Grupo de investigación Pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática* (HMEM). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (en prensa). Salamanca: SEIEM.
- Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L. y Marín, A. (2007). Capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria. *Comunicación presentada en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática* (2005). Málaga: Universidad de Málaga.
- Gómez, P., Cañadas, M. C., Bracho, R., Restrepo, A. M. y Aristizábal, G. (2011). Análisis temático de la investigación en Educación Matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 371-382). Ciudad Real: SEIEM.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- González, J. L. (1998a). *Números naturales relativos*. Granada: Comares
- González, J. L. (1998b). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En Rico, L. y Sierra, M. (Eds.). *I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 77-105). Zamora: SEIEM.
- González, J. L. (1999). Comentarios a la ponencia: Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmático (Bartolini, 1999). En P. da Ponte, P. y L. Serrazina (Eds.). *Educação matemática : em Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 101-108). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- González, J. L. (2015). *Modelo de investigación para la innovación curricular en el aula de matemáticas*. Documento en poder del autor. Málaga: Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga.
- González, J. L. y Gallardo, J. (2013). Análisis Didáctico Curricular: Un procedimiento para fundamentar el diseño, el desarrollo y la evaluación de Unidades Didácticas de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico Curricular en Educación Matemática* (pp 161-190). Granada:

Comares.

- González, J. L., Ortiz, A. L. y Gallardo, J. (2014). Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración. *Grupo de investigación Pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática* (HMEM). Investigación en Educación Matemática XVIII (en prensa). Salamanca: SEIEM.
- Grupo fqm193. Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico (junio 2015). *Líneas de investigación*. Granada: Universidad de Granada. Extraído de: <http://fqm193.ugr.es/>.
- Gutiérrez, A., Rico, L., y Gómez, P. (2014). Metodología para una comparación internacional del conocimiento didáctico evaluado en TEDS-M. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática -2014* (pp. 93-99). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.
- Hernández, P. y González, J. L. (2011). Applications of multimedia technology to study the ordinal competencies of scholars from 3 to 7 years old. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 18(3), 127-135.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 229-240.
- Larrubia, J. J. (2006). *Modelo Didáctico Inclusivo para atender a la diversidad sordo-oyentes en el aula ordinaria de Matemáticas. El caso de la resolución de ecuaciones de segundo grado en la ESO*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde ISI-web of knowledge y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-53). Badajoz: SEIEM.
- Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO*, 51, 92-102.
- López, A. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia, *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada: Comares.
- Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: Competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2010). Aprendizaje de futuros profesores sobre el enunciado de objetivos específicos para las matemáticas escolares. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 409-421). Lleida: SEIEM.
- Maz-Machado, A. y Adrián, C. (2014). Uso de materiales didácticos y desarrollo del sentido numérico en primaria. En González y otros (Eds.), *Investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática* (pp. 109-114). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga y SEIEM.
- Maz-Machado, A., Bracho, R., Torralbo, M. y Gutiérrez, M. P. (2011). La investigación en educación matemática en España: Los simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-185.
- Maz-Machado, A., Torralbo, M. y Rico, L. (Eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática*. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la Arithmetica practica of Juan de Yciar. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granada: Comares.

- Menino, H., Tavares, D., Quaresma, A. y Rodrigues, M. (2011). El sentido del número en los futuros profesores de primer ciclo. Dos estudios de caso. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 439-449). Ciudad Real: SEIEM.
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(17), 341-368.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Montoro, A. B. y Gil, F. (2012). Elaboración y aplicación de un instrumento para medir experiencias de flujo. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 397-406). Baeza: SEIEM
- Ortega, M. y Puig, L. (2014). El proceso de modelización en el aula con datos reales. Un estudio exploratorio en el entorno informático de las tabletas. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática-2014* (pp. 125-134). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.
- Ortiz, A. y Fernández, C. (2007). Razonamiento inductivo numérico. Modelización de las competencias ordinales en Educación Infantil. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares* (pp.101-128). Granada: Universidad de Granada.
- Padilla, Y. (2003). *Integrales de Línea con DERIVE. Un estudio de Innovación Curricular en Primer Curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.
- Palarea, M. y Hernández, J. (2014). Los trabajos de investigación en pensamiento numérico y algebraico de la SEIEM en la última década. En C. Fernández, C. y J. L. González (Eds.), *Aprendizaje y razonamiento matemático. Homenaje a Alfonso Ortiz Comas* (pp. 24-47). Málaga: Colección Thema, Universidad de Málaga.
- Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza: SEIEM.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, 2(3), 87-107.
- Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2014). Análisis didáctico para estudiar la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática-2014* (pp. 135-143). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.
- Real, I., Segovia, I. y Ruiz, F. (2012). Aplicación del análisis didáctico al diseño de una herramienta de análisis de los textos de Andrés Manjón para la enseñanza de las matemáticas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática-2012* (pp. 169-180). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.
- Rico, L. (ed.) (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas: Proyecto PISA/OCDE. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 89-102). A Coruña: SEIEM.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.

- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.
- Rico, L. (2015). *Líneas de investigación, Pensamiento Numérico*. Recuperado el 1 de junio de 2015 de: www.ugr.es/~lrico/investigacion_files/lineasinv.pdf
- Rodríguez, P., Hidalgo, S. y Palacios, A. (2012). La ansiedad matemática en alumnos de Grados en Estadística. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 469-478). Baeza: SEIEM.
- Sánchez, M. T., Claros, F. J. y Coriat, M. (2011). Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: perfiles fenomenológicos. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*. (pp. 203-216). Granada: SEIEM.
- Segovia, I. y de Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares* (pp. 213-236). Granada: Universidad de Granada.
- Schanzer, R. (2015). *El marco teórico de una investigación*. Disponible en http://www.fhumyar.unr.edu.ar/escuelas/3/materiales%20de%20catedras/trabajo%20de%20campo/marco_teorico.htm
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). Tenerife: SEIEM.
- Socas, M. M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 10*, 9-33.
- Socas, M. M. (2012). El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática-2012* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.
- Socas, M. M., Hernández, J. y Palarea, M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González y otros (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga: Universidad de Málaga.
- Vallejo-Ruiz, M., Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2008). History of Spanish mathematics education focusing on PhD theses. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*(2), 313-327.