

CAPÍTULO 7

FUNCIÓN EXPONENCIAL CRECIENTE

GONZALO HENAO, FERNEY MALAGÓN, MANUEL MELO,
ADRIÁN ROJAS Y PEDRO GÓMEZ

1. Introducción y formulación del problema

Presentamos la formulación, implementación y evaluación del diseño de la unidad didáctica para la función exponencial creciente. En este apartado, describimos los contextos de la implementación de la unidad didáctica y presentamos y formulamos el problema. Posteriormente, mencionamos cómo abordamos el problema e indicamos los principales resultados de la experiencia. A continuación, describimos el contexto institucional, social y curricular de la unidad didáctica.

Diseñamos e implementamos nuestra unidad didáctica para los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Departamental Romeral de Sibaté. La institución educativa está ubicada en el sector rural del municipio de Sibaté, a doce kilómetros del casco urbano, con una altura sobre el nivel del mar de 3200 metros. El grupo de estudiantes estaba compuesto por 16 niñas y 13 niños, con una edad promedio de 15 años, que provenían en su totalidad de la zona rural. Analizamos el historial de sus valoraciones académicas en el área de matemáticas y encontramos que el desempeño promedio del grupo era de nivel medio. En la caracterización de las familias, identificamos que vivían de la ganadería, la producción lechera y la agricultura. El nivel académico de los padres no superaba el grado quinto de primaria. Sin embargo, algunos de sus hijos habían logrado obtener títulos en diferentes profesiones.

Seleccionamos la función exponencial creciente como objeto de trabajo. Nos centramos en las situaciones de crecimiento hacia el infinito. Ubicamos el tema en el cuarto periodo académico del diseño curricular del área de matemáticas de grado noveno de la institución educativa. Hicimos una planificación de este tema en la que consideramos el contexto de los estudiantes, los objetivos de aprendizaje, las tareas por implementar, la evaluación de los aprendizajes y los recursos y materiales por emplear. En este sentido, consideramos importante destacar que en Colombia existe muy poca información que registre las acciones que adelanta el docente en el proceso de la planificación de sus prácticas de aula de matemáticas. Encontramos que, en nuestro contexto, la planeación de clase está asociada de manera recurrente al uso de un formato o esquema que busca sintetizar algunas características del proceso de enseñanza y que se usa de manera subjetiva.

Realizamos una revisión del plan de estudios de matemáticas de tres instituciones que seleccionamos previamente. Encontramos que los docentes no profundizan en la enseñanza del tema de la función exponencial creciente. Los estudiantes de estos establecimientos educativos consideran de mayor relevancia otras asignaturas y no las matemáticas. En consecuencia, surge la pregunta: ¿cómo fortalecer la planificación de un tema de las matemáticas escolares como la función exponencial creciente en secundaria? Consideramos las subpreguntas ¿qué estrategia metodológica contribuye a que el docente establezca el ciclo de diseño, ejecución y evaluación de la planificación del tema función exponencial creciente para ser llevado a clase?, ¿qué contextos cercanos a los estudiantes les brinda mayor oportunidad de aprendizaje del tema función exponencial creciente? y ¿cómo recrear situaciones de crecimientos exponencial que permitan a los estudiantes profundizar en la comprensión de este tema de las matemáticas escolares?

Para abordar las preguntas anteriores, decidimos abordar la planificación, ejecución y evaluación de la implementación de una unidad didáctica para el tema de función exponencial creciente. Sabemos que es un tema relativamente complejo de las matemáticas escolares que usualmente no se trata con suficiente profundidad en el currículo de la institución educativa seleccionada. Nos propusimos favorecer las oportunidades de aprendizaje por medio de contextos cercanos a los estudiantes.

Diseñamos una unidad didáctica que aborda con detalle el tema de la función exponencial creciente y en la que utilizamos la noción de autenticidad del contexto para las tareas de aprendizaje descrita por Gómez, Mora y

Velasco (2018, pp. 210–211). Elaboramos tareas de aprendizaje con el ánimo de promover la participación activa de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento. Pensamos que los agrupamientos, las interacciones y el uso de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas contribuyen a que haya una mayor participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. En el diseño de la unidad didáctica, tomamos como referentes los documentos curriculares nacionales e internacionales. Nos basamos en los estándares básicos de competencias en matemáticas y en el marco conceptual de PISA 2012 para establecer las expectativas de aprendizaje de la unidad didáctica. Estos referentes registran elementos significativos de las dimensiones del currículo de Rico (1997) y algunos de sus niveles. Los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) son el referente nacional para realizar el diseño, la implementación y la evaluación de nuestra unidad didáctica. En el ámbito internacional, encontramos una visión funcional de las matemáticas en el marco conceptual de la prueba PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013). El marco PISA 2012 tiene una visión del estudiante como individuo que resuelve problemas de forma activa, y que puede describir, explicar y predecir fenómenos.

A continuación, describimos el diseño previo para la unidad didáctica y formulamos los instrumentos y procedimientos de recolección, codificación y análisis de la información. Luego, describimos la implementación de la unidad didáctica. Después, analizamos la implementación y evaluamos el diseño de la unidad didáctica, para definir los ajustes necesarios al diseño para formular una nueva unidad didáctica. Por último, justificamos y presentamos el nuevo diseño de la unidad didáctica.

2. Diseño previo: descripción, fundamentación y justificación

Realizamos el diseño de la unidad didáctica mediante el procedimiento que propone el análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 20). El análisis didáctico está constituido por cuatro análisis: (a) análisis de contenido, (b) análisis cognitivo, (c) análisis de instrucción y (d) análisis de actuación. En este apartado, nos basamos en los tres primeros análisis con el fin de fundamentar el diseño de la unidad didáctica del tema función exponencial creciente.

1. Análisis de contenido

Abordamos el análisis de contenido de la unidad didáctica a través de los conceptos pedagógicos descritos por Cañadas, Gómez y Pinzón (2018). Estos conceptos pedagógicos son (a) la estructura conceptual, (b) los sistemas de representación y (c) la fenomenología. Consideramos que la historia de la función exponencial creciente es importante porque aporta información al análisis de contenido. Además, presentamos la delimitación del tema de las matemáticas escolares que seleccionamos para este trabajo.

1.1. Estructura conceptual

La función exponencial creciente se caracteriza por modelar situaciones que relacionan una variable independiente que presenta un aumento constante y una variable dependiente que aumenta a una tasa proporcional a su valor en ese punto. Describimos la estructura conceptual del tema función exponencial creciente a partir de los aspectos más relevantes, que identificamos en el campo conceptual y en el campo procedimental (Rico, 1997a).

El campo conceptual hace referencia a los elementos que dan forma al conocimiento. Destacamos los conceptos y la estructura conceptual como los niveles más representativos. Para la unidad didáctica función exponencial creciente $f(x) = ka^{mx+n} + b$, encontramos que los parámetros que determinan si el fenómeno estudiado es creciente o decreciente son el factor preexponencial k y la tasa específica de crecimiento m . El parámetro n sirve de factor de corrección horizontal, al igual que el parámetro b indica una corrección vertical.

El análisis de la estructura matemática del tema nos permitió identificar las subestructuras de crecimiento con tendencia al infinito, crecimiento acotado, decrecimiento acotado y decrecimiento al infinito. Decidimos tomar para nuestro trabajo solamente aquellos fenómenos de crecimiento exponencial con tendencia al infinito. En la figura 1, presentamos la relación de los aspectos del campo conceptual.

El tema comprende la definición formal de la función exponencial creciente y la caracterización por medio de sus propiedades. El exponente de esta función exponencial posee forma lineal y la representamos con la expresión $f(x) = ka^{mx+n} + b$. No desconocemos que el exponente puede asumir otras formas que no trataremos aquí.

El campo procedimental distingue los procedimientos y modos de actuación con respecto al conocimiento. Los estudiantes debe reconocer y diferenciar la base de la potencia de una expresión mediante el desarrollo

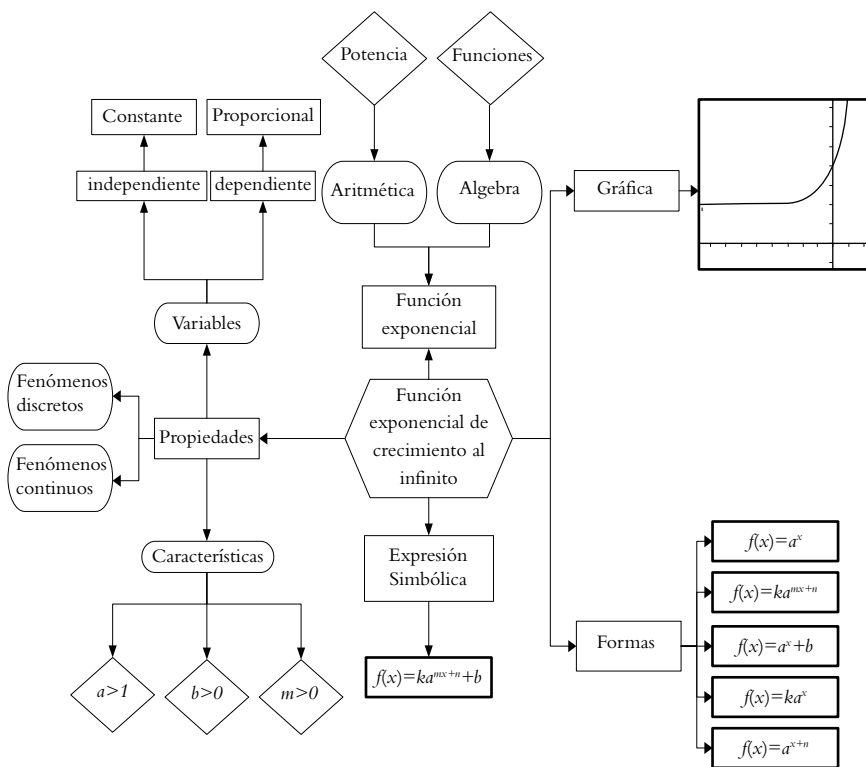


Figura 1. Estructura conceptual de la función exponencial con crecimiento al infinito

de la unidad didáctica, identificar cuándo una variable es independiente o dependiente, ubicar parejas ordenadas en el plano cartesiano e identificar las características de una proporción. El estudiante debe reconocer la equivalencia entre la tabla de valores, la ecuación y la gráfica, como representaciones de una misma función exponencial creciente, y analizar el comportamiento de la gráfica de la función $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$ y $a > 1$. También, debe caracterizar la función exponencial creciente con dominio en los números reales.

Distinguiamos dos estrategias para abordar la estructura conceptual de la función exponencial creciente. La primera consiste en modelar situaciones de distintos contextos que se pueden describir a través de estructuras de crecimiento exponencial al infinito. La segunda consiste en relacionar los conceptos y procedimientos que permiten determinar y modelar una situación a través del crecimiento exponencial.

1.2. Sistemas de representación

Consultamos el trabajo de Kaput (1992) para determinar los sistemas de signos que permiten designar un concepto. En la figura 2, presentamos los sistemas de representación de la función exponencial creciente, sus signos y las traducciones presentes entre ellos a través de las líneas punteadas. Encontramos un sistema de representación geométrico. Este sistema tiene como signos cuadrados y rectángulos que, ubicados mediante reglas de iteración, ilustran el crecimiento exponencial del área. Esta representación establece un cuadrado como unidad del área que corresponde a la función y el número de iteraciones n definidas en los números naturales. Las iteraciones de orden par, incluyendo $n = 0$ corresponden a un cuadrado de la forma $a^{\frac{n}{2}}$. Mientras que, las iteraciones de orden impar corresponden a un rectángulo de base $a^{\frac{n+1}{2}}$ y altura $a^{\frac{n-1}{2}}$.

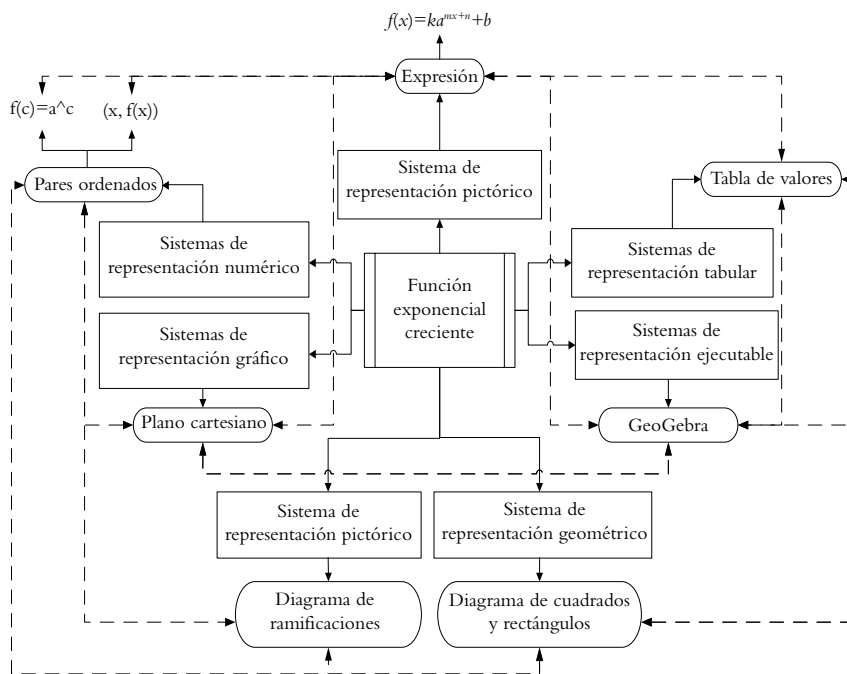


Figura 2. Sistemas de representación de la función exponencial creciente y sus traducciones

El sistema de representación pictórico emplea un diagrama de ramificaciones. El diagrama dispone de un nodo raíz que da origen a un número de ramificaciones determinado que son la base para representar la función. A su

vez, la ramificación en cada iteración se convierte en un nuevo nodo que da origen al mismo número de ramificaciones que el nodo inicial.

Hallamos dos tipos de sistema de representación numéricos. Un sistema de representación cuyos signos son de la forma $(c, f(c))$ y, otro, en el que los signos son de la forma $f(c) = ka^{m \cdot c+n} + b$. Por ejemplo, la función $f(x) = 2^{3x}$ toma el valor de $f(2) = 2^6 = 64$ o $(2, 64)$. Establecimos una transformación sintáctica invariante entre las dos representaciones.

Identificamos un sistema de representación simbólico que emplea números, letras y símbolos pertenecientes a las operaciones aritméticas para constituir sus signos. Estos signos definen la función exponencial creciente mediante la expresión algebraica $f(x) = ka^{m \cdot x+n} + b$. Por ejemplo, encontramos que existe un m' tal que $a^m = e^{m'}$, que da origen a una transformación sintáctica invariante. Así, $f(x) = ka^{m \cdot x+n} + b = ke^{m' \cdot x+n'} + b$. En otro caso, encontramos que si $m < 0$, se presenta la transformación sintáctica invariante $a^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m}$.

La función exponencial creciente se puede simbolizar mediante el sistema de representación tabular que dispone de dos columnas para organizar los valores de la variable independiente y los valores de la variable dependiente respectivamente. La misma organización puede hacerse mediante filas.

El sistema de representación gráfico utiliza el plano cartesiano, valores numéricos, escalas y el trazo de la gráfica como sus signos. Así, las reglas para graficar en el plano cartesiano establecen las relaciones entre estos signos. El sistema de representación gráfico revela transformaciones sintácticas variantes. Por ejemplo, encontramos que el parámetro n genera un desplazamiento horizontal de la gráfica a la izquierda si tiene valor positivo. De lo contrario, la gráfica se desplaza a la derecha. Asimismo, el parámetro b establece una transformación sintáctica variante al desplazar la gráfica verticalmente hacia arriba si es positivo o hacia abajo si es negativo.

El programa de geometría dinámica Geogebra cuenta con elementos propios y las reglas para representar, combinar y operar con ellos. Por consiguiente, lo consideramos un sistema de representación ejecutable de la función exponencial creciente. Los dos primeros sistemas de representación que expusimos se emplean para funciones exponenciales con dominio en los números naturales, mientras que los cinco restantes se aplican a funciones con dominio en los números reales.

1.3. Análisis fenomenológico

Definida la estructura conceptual del tema y seleccionados sus sistemas de representación, indagamos sobre los contextos fenomenológicos que podríamos

atribuirle al tema. Consultamos diversos fenómenos de crecimiento exponencial al infinito. Hicimos un listado, que posteriormente agrupamos a partir del comportamiento de la función cuando se cambian sus parámetros en la expresión simbólica. Así, establecimos cuatro contextos fenomenológicos que presentamos en la tabla 1. Somos conscientes de que no son los únicos contextos fenomenológicos, pero consideramos que son los más relevantes para la unidad didáctica.

Tabla 1
Subestructuras, contextos fenomenológicos y fenómenos

Subestructura	Contexto fenomenológico	Fenómenos
$f(x) = ka^{mx+n} + b$, $b \in \mathbb{R}$ $k > 0$, $a > 1$, $m > 0$	Crecimiento al infinito con condición inicial	Acumulación de capital con interés continuo, crecimiento poblacional, ley de enfriamiento de Newton, aprendizaje de palabras y expansión de un rumor, entre otros
$f(x) = ka^{mx+n}$ $k > 0$, $a > 1$, $m > 0$	Crecimiento al infinito con incremento constante en el exponente	Factor de Poynting de fugacidad, frecuencia de las teclas del piano, longitud de papel mínimo para realizar n dobleces alternando la dirección de los dobleces, entre otros
$f(x) = ka^{mx}$ $k > 0$, $a > 1$, $m > 0$	Crecimiento al infinito con factor diferente de 1	Acumulación de capital, escala Richter, escala de pH , presión atmosférica, corriente eléctrica en un circuito, ecuación de Arrhenius, curva de aprendizaje, fase de crecimiento de venta de un producto, conductividad de un semiconductor con la temperatura, entre otros
$f(x) = a^{mx}$ $a > 1$	Crecimiento al infinito	Equilibrio químico, planta que crece todos los días el doble de su tamaño, ley de Moore, cada dos años se duplica el número de transistores en un circuito integrado, curva del olvido respuesta a un estímulo por Gustav Fechner (estímulo <i>vs.</i> percepción), árbol binario (pirámide)

Observamos que las condiciones para los parámetros k , a , m y n definen el comportamiento de la función exponencial creciente.

2. Análisis cognitivo

Realizamos el análisis cognitivo a partir de la descripción de las previsiones que hicimos sobre las expectativas de aprendizaje, sobre las expectativas afectivas

y sobre los factores que afectan la motivación. Incluimos en este análisis las limitaciones del aprendizaje que los estudiantes podrían manifestar.

2.1. Expectativas de aprendizaje

Formulamos las expectativas de aprendizaje a partir de los tres niveles de expectativas descritos por González y Gómez (2018, p. 121). A continuación, presentamos las expectativas de nivel inferior. Para ello, consolidamos un listado de capacidades o procesos rutinarios que desarrollan los estudiantes al enfrentar una tarea de aprendizaje. Cada capacidad tiene asociados unos errores en los que el estudiante puede incurrir. Las expectativas de nivel medio se representan en los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Las expectativas de nivel superior se representan en los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales que subyacen a los mismos.

Expectativas de nivel inferior

Las expectativas de aprendizaje de nivel inferior hacen referencia a las capacidades que los estudiantes activan al realizar tareas rutinarias. En la tabla 2, presentamos algunos ejemplos de capacidades que identificamos durante el diseño de la unidad didáctica.

Tabla 2
Ejemplos de capacidades del tema función exponencial creciente

C	Descripción
1	Interpreta y organiza la información enunciada en la situación problema
2	Clasifica un problema como de tipo científico y/o poblacional, e identifica las componentes de la ecuación algebraica que modela el fenómeno
3	Reconoce la situación como un problema de interés simple o compuesto
40	Transforma los datos para que puedan ser modelados en el contexto de la función exponencial creciente
60	Identifica en la información suministrada que se trata de una situación de crecimiento
70	Emplea recursos que le permiten acercarse a una situación de crecimiento exponencial

El listado completo de capacidades para el diseño de la unidad didáctica función exponencial creciente se puede consultar en la tabla 2 del anexo 3. A las capacidades, asociamos diferentes errores (E#) en que pueden incurrir los estudiantes al activarlas. Agrupamos en dificultades (D#) los errores comunes

que encontramos para el tema función exponencial creciente. Presentamos algunos ejemplos de las dificultades y errores detectados para el tema en la tabla 3.

Tabla 3
Dificultades y errores para la función exponencial creciente

E.	Errores
	D1. Modelo lineal como dificultad para explicar el modelo exponencial
1	Realiza trazos como líneas rectas al graficar funciones exponenciales
2	Relaciona la función exponencial creciente $f(x) = a^{mx+n} + b$ como $f(x) = a^{mx} + a^n + b$
	D7. Conocimientos parciales de los estudiantes a la hora de resolver un problema ya formulado
32	Identifica la función exponencial porque la base es numérica y su exponente es la variable independiente
33	Asigna valores menores que cero al parámetro a de la función $f(x) = ka^{mx+n} + b$, para $m > 0$
	D8. Conocimientos parciales para construir un modelo matemático a partir de situación no matemática
40	Considera el exponente como constante de una función exponencial
43	Reconoce solo parte de la información suministrada en el problema

El listado completo de dificultades y errores del tema función exponencial se puede consultar en la tabla 3 del anexo 3. Entre las expectativas de nivel inferior y las expectativas de nivel medio, encontramos los criterios de logro. Los criterios de logro surgen de agrupar capacidades afines para describir los procesos y procedimientos que el estudiante realiza en la solución de una tarea de aprendizaje. Por ejemplo, agrupamos las capacidades C1-40-60 y C70 de la tabla 2 en una secuencia de capacidades que da origen al criterio de logro 1.1. Con este criterio de logro, pretendemos que el estudiante sea capaz de identificar la información suministrada y de relacionarla con una situación de crecimiento exponencial. A su vez, asociamos los errores en que puede incurrir el estudiante cuando aborda el criterio de logro.

Expectativas de nivel medio

Las expectativas de nivel medio corresponden a los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Planteamos el primer objetivo de aprendizaje con base en el análisis de contenido.

Objetivo 1. Identificar las características presentes en algunos fenómenos de crecimiento exponencial y representarlos matemáticamente.

Caracterizamos el objetivo de aprendizaje por medio del grafo de criterios de logro que describe los posibles caminos de aprendizaje que puede tomar el estudiante para resolver una tarea de aprendizaje que contribuye al objetivo. En este capítulo, no describiremos todo el proceso de construcción de los grafos de criterios de logro porque representa un trabajo muy amplio. Sí consideramos importante explicar que establecimos el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje 1 a través de las tareas prototípicas Población de conejos y La leyenda de Sisa. En el anexo 4, se pueden consultar las tareas prototípicas y los grafos de criterios de logro que caracterizan los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.

En la figura 3, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Con este objetivo, esperamos que los estudiantes sean capaces de extraer elementos de la situación propuesta y que así construyan una representación de la tarea. Este grafo nos muestra los posibles caminos de aprendizaje que el estudiante puede emplear para resolver las tareas de aprendizaje.

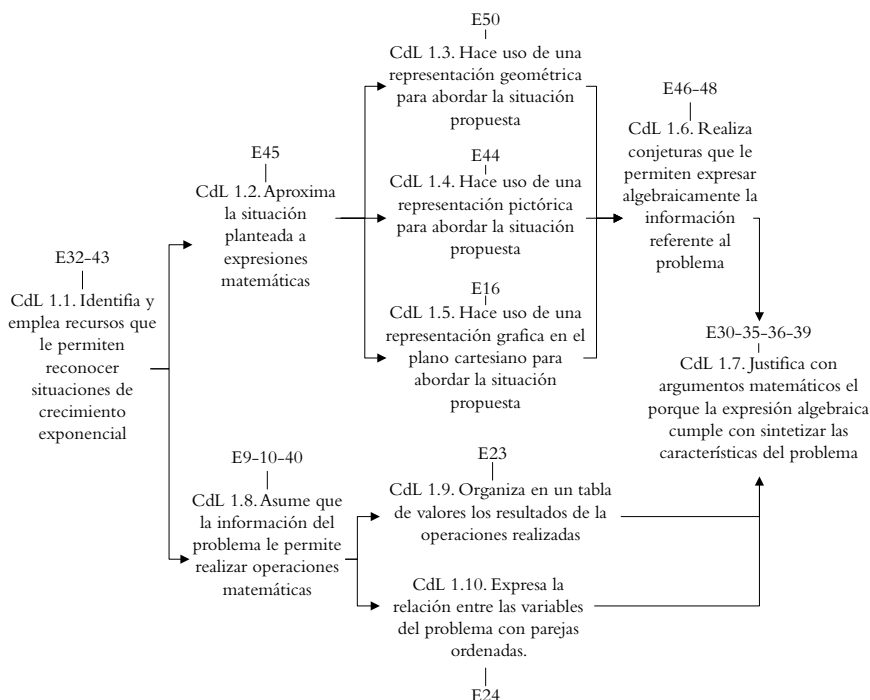


Figura 3. Grafo del objetivo de aprendizaje 1 para el diseño previo

En el grafo de criterios de logro, observamos dos caminos de aprendizaje. En la parte superior, encontramos el camino que debe recorrer el estudiante para resolver la tarea prototípica Cadena de mensajes. Establecemos que él puede realizar la representación geométrica o pictórica o gráfica como caminos alternativos para formular el modelo matemático mediante el uso de un sistema de representación. Este camino de aprendizaje implica que los estudiantes aborden los criterios de logro CdL1.1, CdL1.2, CdL1.3, CdL1.4, CdL1.5, CdL1.6 y CdL1.7. En el anexo 3, se pueden consultar los listados y procedimientos que dan origen a los criterios de logro del tema función exponencial creciente. Por ejemplo, cuando el estudiante identifica y emplea recursos que le permitan reconocer situaciones de crecimiento exponencial (CdL1.1), podrá tener dificultad para relacionar las tasas de crecimiento de la variable dependiente y la variable independiente (E32). El estudiante también podrá reconocer solo parte de la información suministrada en la tarea (E43). En la tabla 4 del anexo 3, presentamos la conformación de las secuencias de capacidades que posteriormente dan origen a los criterios de logro. Las secuencias de capacidades relacionan capacidades o grupos de estas con sus errores.

Por otra parte, el camino de aprendizaje localizado en la parte inferior del grafo emplea el sistema de representación numérico. Este camino incluye los criterios de logro CdL1.1, CdL1.8, CdL1.9 o CdL1.10 y CdL1.7. A través de este camino de aprendizaje, el estudiante analiza la información suministrada en el problema y realiza algunas operaciones aritméticas (CdL1.1-CdL1.8). Él puede tomar solo parte de la información suministrada en la tarea de aprendizaje (E43) y suponer que los valores presentes en la tabla son los únicos que corresponden a esa función exponencial (E32). Luego, el estudiante organiza los resultados obtenidos en una tabla de valores o en un conjunto de parejas ordenadas que le sirven como insumo para resolver la situación planteada (CdL1.9 o CdL1.10 y CdL1.7). En este caso, el estudiante puede asignar un valor incorrecto a la base de la expresión simbólica y malinterpretar el comportamiento de la función (E30-35-36-40). El estudiante también puede considerar patrones lineales o multiplicativos en los datos de una situación que implica una función exponencial creciente (E23 o E24). Utilizamos el mismo procedimiento para caracterizar y formular los objetivos 2 y 3. A continuación, presentamos estos objetivos.

Objetivo 2. Emplear modelos matemáticos de crecimiento exponencial para resolver situaciones no matemáticas.

Caracterizamos el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje 2, mediante las tareas prototípicas Predicción de su futuro financiero y Cultivo de bacterias. En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro inicial para este objetivo.

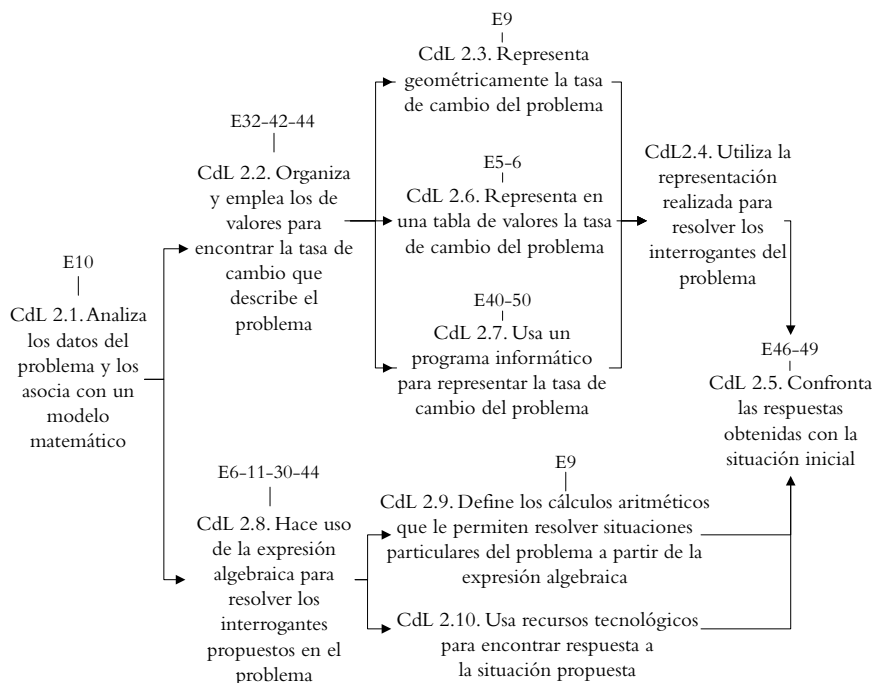


Figura 4. Grafo del objetivo de aprendizaje 2 para el diseño previo

El grafo de criterios de logro de este objetivo de aprendizaje nos muestra los caminos de aprendizaje que el estudiante puede seguir para resolver las tareas prototípicas propuestas. El camino de aprendizaje de la parte inferior tiene un camino alternativo y el camino de la parte superior del grafo tiene dos caminos alternativos de aprendizaje. Con este objetivo, pretendemos que el estudiante desarrolle el proceso matemático de emplear.

Objetivo 3. Analizar matemáticamente los resultados obtenidos al resolver algunas tareas relacionadas con el crecimiento exponencial. Confrontar y validar los resultados con la situación matemática original.

Caracterizamos el grafo de criterios de logro del objetivo aprendizaje 3 por medio de las tareas prototípicas Deforestación en el Amazonas y El

diablo y Daniel Webster. En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 3.

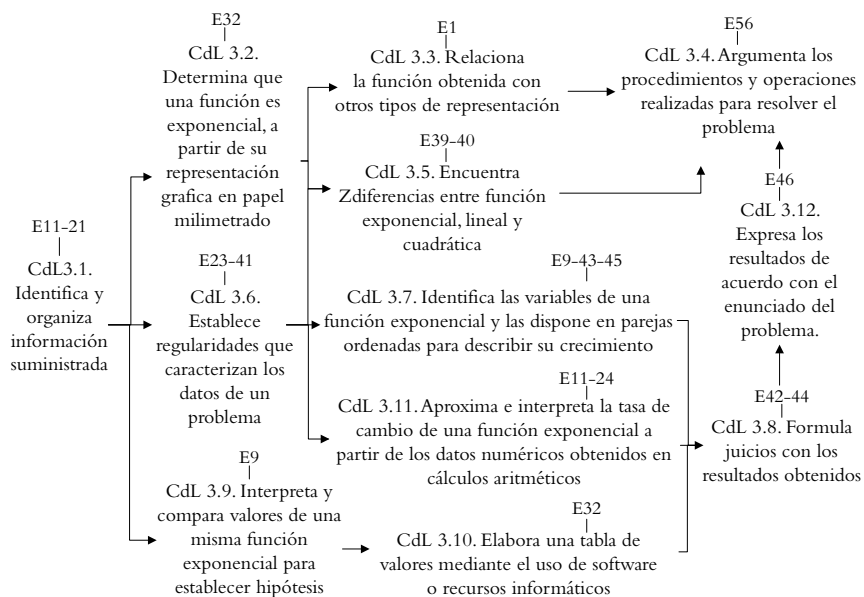


Figura 5. Grafo del objetivo de aprendizaje 3 para el diseño previo

Este grafo de criterios de logro nos muestra una combinación de caminos de aprendizaje que puede emplear el estudiante para resolver las dos tareas prototípicas propuestas para el objetivo 3. Con la caracterización del objetivo mediante el grafo de criterios de logro, notamos que las tareas prototípicas que empleamos son muy complejas. Observamos que las tareas se resuelven recogiendo diferentes caminos de aprendizaje. Por ejemplo, los caminos de aprendizaje CdL3.1-3.2-3.3-3.4, CdL3.1-3.2-3.5-3.4, CdL3.1-3.6-3.5-3.4, CdL3.1-3.6-3.11-3.8-3.12-3.4 y CdL3.1-3.9-3.10-3.8-3.12-3.4 permiten resolver la tarea Deforestación en el Amazonas. La otra tarea prototípica se resolverá empleando los demás caminos de aprendizaje junto con los caminos CdL3.1-3.2-3.3-3.4, CdL3.1-3.6-3.11-3.8-3.12-3.4 y CdL3.1-3.9-3.10-3.8-3.12-3.4, que ya fueron empleados por la primera tarea.

Expectativas de nivel superior

Definimos las expectativas de nivel superior para la unidad didáctica a través de los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales descritas por el marco PISA 2012. Prevemos que los estudiantes desarrollen los

procesos matemáticos de formular (F), emplear (E) y evaluar e interpretar (I) las matemáticas, y las capacidades que subyacen a esos procesos matemáticos clasificadas en comunicación (C), matematización (M), razonamiento y argumentación (Ra), representación (Re), diseño de estrategias para la solucionar problemas (DRP), utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico (U), y utilización de herramientas matemáticas (H). En la tabla 4, mostramos nuestras previsiones de la contribución del objetivo 1 a los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales.

Tabla 4
Contribución del objetivo 1 a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

CdL	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
Objetivo 1																					
1.1	✓		✓							✓	✓			✓							
1.2	✓				✓						✓			✓					✓		
1.3	✓				✓						✓								✓		
1.4	✓				✓		✓												✓		
1.5	✓				✓														✓		
1.6		✓									✓									✓	
1.7		✓			✓		✓							✓							
1.8	✓				✓														✓		
1.9	✓				✓	✓	✓							✓					✓		
1.10			✓			✓	✓	✓	✓		✓	✓									
T	7	2	2	4	4	1	4	2	1	4	2	0	3	1	0	6	1	0	0	0	0

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; CdL = criterio de logro; T = total

Mediante el diseño de la unidad didáctica para la función de crecimiento exponencial, prevemos que los estudiantes desarrollaran con el primer objetivo de aprendizaje todas las capacidades matemáticas fundamentales, menos la utilización de herramientas matemáticas. También, nos proponemos que desarrollen el proceso matemático de formular. En la tabla 4, señalamos las

previsiones que hicimos para el objetivo de aprendizaje 1. De igual forma, previmos las contribuciones de los otros dos objetivos a los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales.

2.2. Expectativas de tipo afectivo

El análisis cognitivo pretende contribuir a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes. Pero el buen desempeño escolar no depende únicamente del conocimiento. Consideramos una dimensión afectiva que incide en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los componentes de esta dimensión son las expectativas de tipo afectivo y los factores que afectan la motivación. Inicialmente, propusimos cinco expectativas afectivas para nuestra unidad didáctica.

1. Desarrollar curiosidad por el conocimiento de sucesiones, series y progresiones.
2. Adquirir interés hacia el estudio de fenómenos de crecimiento.
3. Manifestar interés por el trabajo con la función exponencial creciente en distintos sistemas de representación.
4. Comunicar con agrado a sus compañeros los argumentos matemáticos y las ideas que tiene.
5. Promover en el estudiante el hábito de verificar los datos hallados matemáticamente.

Con las tareas propuestas para el objetivo 1, pretendemos contribuir con el desarrollo de la segunda expectativa de tipo afectivo. Por ejemplo, la tarea de aprendizaje Crecimiento de población ubica al estudiante en una situación de crecimiento al infinito. Luego del desarrollo de esta tarea, el estudiante identifica algunas de las características de los fenómenos asociados a situaciones de crecimiento exponencial. Asimismo, pretendemos contribuir con el desarrollo de la tercera expectativa de tipo afectivo con las tareas de este mismo objetivo. Incluimos en el diseño de la tarea Torres de Hanói, literales que llevan al estudiante a realizar traducciones entre los distintos sistemas de representación, a partir de un juego didáctico.

En la tabla 5, presentamos las contribuciones a las expectativas de tipo afectivo de la tarea Cadena de mensajes para ejemplificar las previsiones de contribución de las expectativas afectivas. Encontramos que la tarea aporta a que el estudiante adquiera interés por el estudio de las funciones de crecimiento exponencial (EA2) y a que manifieste interés por el trabajo con funciones exponenciales en sus distintas representaciones (EA3).

Tabla 5
Contribución de la tarea Cadena de mensajes a las expectativas de tipo afectivo

CdL	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5
1.1		✓	✓		
1.2		✓			
1.3			✓		
1.4			✓		
1.6			✓		
1.8			✓		
1.9		✓			
1.10		✓			
1.7				✓	
T	0	4	5	1	0

Nota. CDL = criterio de logro; EA = expectativa afectiva; T = total

2.3. Factores que afectan la motivación

Después de revisar las tareas diseñadas para el objetivo 1, observamos que estas contribuyen a demandas cognitivas, representan un reto para el estudiante, establecen errores, promueven la interacción por medio de diferentes agrupaciones y describen un contexto auténtico. En la tabla 6, ejemplificamos las previsiones para las tareas del objetivo 1 a los factores que contribuyen con la motivación del estudiante.

Tabla 6
Contribución de las tareas a los aspectos que afectan la motivación

Tarea	Factores que afectan la motivación				
	Demandas cognitivas	Reto	Errores	Interacción	Contexto
1.1	✓	✓	✓	✓	✓
1.2	✓	✓	✓	✓	

En la tabla 6, observamos que las tareas del objetivo 1 presentan unas demandas cognitivas para abordar su solución, representan un reto para el estudiante, establecen errores y promueven la interacción mediante diferentes agrupaciones. No obstante, la tarea Torres de Hanói pertenece a un contexto menos auténtico que la tarea Cadena de mensajes.

3. Análisis de instrucción

En este apartado, describimos la primera versión de las tareas de aprendizaje que diseñamos para cada uno de los objetivos de nuestra unidad didáctica. Presentamos la descripción de la tarea Cadena de mensajes que usaremos con ejemplo a lo largo de este capítulo. También, describimos la secuencia inicial de tareas.

3.1. Tarea Cadena de mensajes

Describimos los elementos de la tarea Cadena de mensajes para explicar la caracterización que hicimos de las tareas de aprendizaje. Seleccionamos esta tarea porque fue una de las tareas que modificamos con mayor frecuencia a lo largo de todo el proceso que presentamos en este informe.

Formulación

El profesor presenta la siguiente situación a sus estudiantes de grado noveno. Él formula la tarea a partir de un diagrama de ramificaciones, al introducir la variable independiente como el tiempo y la variable dependiente como el número de personas que intervienen en la situación problema.

Un mensaje enviado por WhatsApp, se difundió como lo muestra la figura A.

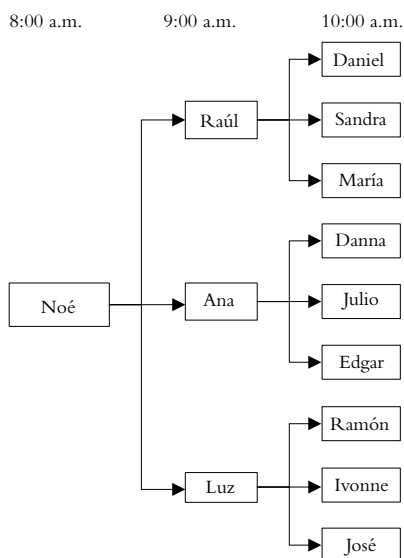


Figura A. Diagrama de ramificaciones para la difusión del mensaje

A continuación, respondan las siguientes preguntas, al tener en cuenta la información anterior.

1. Si el mensaje se continúa emitiendo con el mismo patrón del tiempo mostrado en la figura y, además, se restringe la situación a que ninguna persona recibe dos veces el mensaje, ¿cuántas personas recibirían el mensaje a las 2:00 p.m.?
2. ¿Es posible encontrar otras formas para ilustrar esta situación? En caso afirmativo, elabórenlas.
3. Realicen la representación geométrica del modelo matemático que formaliza el fenómeno de la propagación del mensaje. En una hoja de papel milimetrado, dibujen un rectángulo de lados $l_i \times l_i$ (asigne un valor numérico a l_i); luego, ejecuten en forma iterada (repetitivamente) los siguientes procedimientos a y b, respectivamente.
 - a. Dibujen un rectángulo de lados $3l_i \times l_i$.
 - b. Dibujen un rectángulo de lados $l_{i+1} \times l_{i+1}$ donde $l_{i+1} = 3l_i$.
4. Identifiquen las variables que intervienen en esta situación.
5. Construyan una tabla de valores para registrar los datos de tiempo frente a cantidad de personas que reciben el mensaje. Supongan que el tiempo de inicio es 8:00 a. m. ($t = 0$).
6. Planteen una ecuación matemática en la que se relacionen las variables que actúan en el ejercicio y comprueben que satisface los valores registrados en la tabla de valores del punto 5.

Materiales y recursos

El recurso empleado es el papel milimetrado, que permite a los estudiantes dibujar, de forma progresiva y alternada, rectángulos de áreas $A = l \times l$ y $A = 3l \times l$. El estudiante debe realizar el proceso en forma repetitiva e indefinida. De tecnología, los estudiantes disponen de los programas Geogebra, Excel y otros, que consideramos adecuados para apoyar el desarrollo de la tarea. De esta forma, los estudiantes acceden a un diseño de fina textura, fácil interpretación y, sobre todo, atractivo para su aprendizaje.

Agrupamiento

El profesor organiza grupos de trabajo conformados por tres estudiantes, quienes interactúan para resolver los cuestionamientos planteados en la tarea.

Interacción y comunicación en clase

El material y los recursos fomentan la interacción entre los estudiantes, porque la tarea propone desde el inicio grupos de trabajo para analizar una

información presentada en un gráfico y resolver otros cuestionamientos. Además, los estudiantes interactuarán con el profesor en la medida en que den a conocer sus dudas e inquietudes.

Temporalidad de la tarea matemática escolar

La tarea se desarrolla en cinco momentos y en una hora de clase de 60 minutos. En la primera parte de la clase, el profesor presenta la actividad a los estudiantes. Luego, el profesor organiza los grupos de tres estudiantes, de acuerdo con sus necesidades e intereses. Inmediatamente, el profesor da inicio a la actividad y facilita un tiempo prudencial para su desarrollo. Una vez que se cumple el tiempo asignado, cada grupo comparte su trabajo. Después, el profesor realiza aclaraciones y dudas del tema, hace las correcciones pertinentes y emite las conclusiones. Finalmente, el profesor presenta una serie de ejercicios de refuerzo para resolver extraclase.

Previsiones para la tarea Cadena de mensajes

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea Cadena de mensajes.

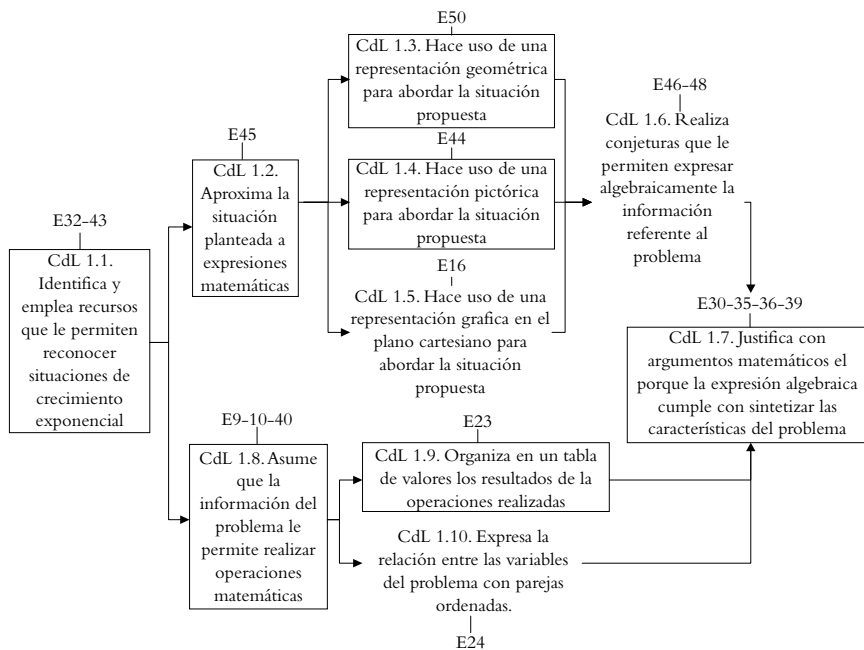


Figura 6. Grafo de criterios de logro de la tarea Cadena de mensajes para el diseño previo

3.2. Descripción de la secuencia de tareas inicial

De la misma forma que caracterizamos la tarea Cadena de mensajes, diseñamos dos tareas de aprendizaje para cada objetivo de la unidad didáctica (véase anexo 7). En la tabla 7, presentamos la secuencia de tareas para el diseño previo de la unidad didáctica del tema función exponencial creciente. Cada tarea de aprendizaje tiene una meta concreta que contribuye al logro del objetivo. Por ejemplo, el objetivo 1 cuenta con las tareas Cadena de mensajes y Torres de Hanói, el objetivo 2 cuenta con las tareas Crecimiento de población y Crédito estudiantil, y el objetivo 3 cuenta con las tareas Producción de yogurt y Alcalinidad del suelo.

Tabla 7
Descripción de la secuencia de tareas del diseño previo

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
1	1	T1.1	Con esta tarea, pretendemos que el estudiante exprese de forma matemática una situación descrita en lenguaje cotidiano. Debe representar de diferentes maneras la relación existente entre las variables del problema y a superar errores de linealidad.	60
1	1	T1.2	Con la tarea, buscamos llevar al estudiante a reconocer los parámetros de la función exponencial creciente por medio de un juego y a superar errores al traducir del contexto del juego al lenguaje matemático.	60
2	2	T2.1	Con la tarea, queremos que el estudiante describa el comportamiento de una población determinada a partir de la información suministrada. Esperamos que supere los errores relacionadas con la sustitución de los parámetros, uso e interpretación del modelo.	60
2	2	T2.2	Con la tarea, pretendemos contribuir a que el estudiante relacione los cambios de flujo de capital en el tiempo, a que use diferentes sistemas de representación para caracterizar este fenómeno y a superar errores concernientes a la relación entre variable dependiente e independiente.	60
3	3	T3.1	Con la tarea, pretendemos llevar al estudiante a la comprensión de los alcances y límites de una solución matemática que es el resultado del uso de modelos de crecimiento exponencial y a que supere el error de desconocer la relación entre la respuesta y la situación planteada.	60

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
4	3	T3.2	Con la tarea, pretendemos que el estudiante comprenda el contexto de la situación mediante la interpretación de los resultados obtenidos con un instrumento de medición y que los compare con los obtenidos a través del modelo matemático.	120

Nota. T1.1 = Cadena de mensajes; T1.2 = Torres de Hanói; T2.1 = Crecimiento de población; T2.2 = Crédito estudiantil; T3.1 = Producción de yogurt ; T3.2 = Alcalinidad del suelo

Representamos las alternativas de solución de las tareas de aprendizaje en el grafo de criterios de logro que caracteriza el objetivo. Pretendemos que el estudiante alcance las expectativas propuestas a través de ellas. Por ejemplo, esperamos que las dos tareas que diseñamos para el objetivo 1 contribuyan principalmente al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación y representación. En una menor medida, previmos que contribuyeran a las capacidades matemáticas fundamentales de desarrollo de estrategias para resolver problemas, matematización y razonamiento. De igual forma, pronosticamos que resolver estas tareas de aprendizaje contribuye a desarrollar el proceso matemático de formular. En resumen, prevemos que las tareas del objetivo 1 contribuyen en diferentes medidas a los procesos matemáticos. En la tabla 8, presentamos las previsiones para las expectativas de nivel superior de las tareas del objetivo 1. Realizamos el mismo procedimiento para las tareas de los objetivos 2 y 3.

Tabla 8

Contribución de la secuencia de tareas a las expectativas de aprendizaje

Ta	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
Objetivo 1																					
1	✓			✓			✓	✓		✓						✓	✓				
2	✓			✓			✓	✓		✓						✓	✓				
T	2	0	0	2	0	0	2	2	0	2	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; Ta = nombre de la tarea; T = total

En la tabla 8, apreciamos que hay contribución a cinco capacidades matemáticas fundamentales. Observamos que no hay contribución a las capacidades matemáticas fundamentales de utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico y utilización de herramientas matemáticas.

3. Instrumentos y procedimientos de recolección, codificación y análisis de la información

En este apartado, presentamos los instrumentos y procedimientos que utilizamos para la recolección de información durante la implementación de la unidad didáctica y su análisis posterior. Inicialmente, describimos el sistema de evaluación institucional. Luego, presentamos el sistema de evaluación de la unidad didáctica. Seguidamente, describimos la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje, el examen y otros instrumentos de recolección de información, como el diario del profesor y el diario del estudiante.

Previamente, debemos saber que según el manual de convivencia de la Institución Educativa Rural Departamental El Romeral (2014), la institución estimula la formación integral del estudiante mediante la definición de metas, criterios y acciones claras y concretas. También garantiza el desarrollo de las competencias básicas cognitivas, ciudadanas y laborales, encaminadas a promover la excelencia educativa y el desarrollo de las potencialidades del ser humano. Encontramos que la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes es un proceso dinámico, continuo y sistemático, con un carácter formativo, cognitivo, social, afectivo y de evaluación incluyente. El sistema institucional de evaluación de los estudiantes (SIEE) establece que la evaluación en las diferentes áreas del conocimiento es participativa y considera la heteroevaluación (80%), la coevaluación (10%) y la autoevaluación (10%).

En concordancia con lo anterior, acordamos con el docente titular de la asignatura que la unidad didáctica correspondiera a una valoración equivalente al 40% de la calificación del cuarto periodo académico. Por consiguiente, ajustamos los instrumentos de recolección de las valoraciones para evaluar la unidad didáctica de acuerdo con la tabla 9. La heteroevaluación comprende el desarrollo de las seis tareas de aprendizaje. También, tenemos en cuenta el desempeño del estudiante en la resolución de la tarea de evaluación. De igual forma, el docente establece una valoración sobre la actitud del estudiante frente al trabajo propuesto. En cuanto a la coevaluación, acudimos al protocolo

que tiene diseñado la institución para aplicar la evaluación por pares. Además, consolidamos la autoevaluación a partir del diario del estudiante.

Tabla 9
Distribución de la valoración del desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la unidad didáctica

Instrumentos de recolección	Porcentaje
Heteroevaluación	
Tareas de aprendizaje	20 %
Tarea de evaluación del estudiante	8 %
Valoración actitudinal	4 %
Coevaluación	
Evaluación por pares	4 %
Autoevaluación	
Diario del estudiante	4 %

Así, previmos que la evaluación de los estudiantes fuera consistente con el SIEE establecido por la institución y con los propósitos de nuestro trabajo. Pretendíamos causar la menor intervención en las prácticas de aula de matemáticas en el grado noveno con la implementación de la unidad didáctica. A continuación, describimos los instrumentos de recolección de información.

1. Tarea diagnóstica

A partir del acompañamiento esporádico en el aula de clase, logramos identificar los conocimientos previos para el tema función exponencial creciente. En la tabla 1 del anexo 3, presentamos el listado completo de los conocimientos previo del tema. Luego, agrupamos este listado de conocimientos previos por afinidad, con el fin de establecer los temas que los estudiantes deben conocer y que consolidamos en el siguiente listado.

1. Repaso de funciones lineales, cuadráticas y polinómicas con la ayuda de aplicativos como Excel y Geogebra. Traducción entre los sistemas de representación simbólico, gráfico y numérico.
2. Análisis del comportamiento de algunas funciones monótonas y por partes, para determinar los intervalos de variación y sus extremos.
3. Definición de funciones que modelan los datos suministrados.

4. Recuento de las propiedades de las potencias.
5. Definición y elementos de las progresiones aritméticas y geométricas.

A partir de estos temas, proponemos la tarea diagnóstica que le permite al profesor establecer en qué medida los estudiantes manifiestan los conocimientos previos requeridos por la unidad didáctica. La tarea consta de ocho apartados, que implementamos en dos sesiones de dos horas clase. Durante la primera sesión de clase, los estudiantes resuelven los apartados paracaídas y baldosas. El apartado 1 insta a los estudiantes a realizar diferentes tipos de representaciones de una función para la que han recogido sus datos. El apartado 2 aporta a la definición de funciones que modelan datos suministrados. La tarea que propusimos trata sobre baldosas, un problema liberado de TIMMS (Beaton, 1996, p. 9). En su solución, el estudiante generaliza el modelo que expresa el número de baldosas que se requieren para cubrir cada terreno cuadrado, al tiempo que realiza traducciones del sistema geométrico al sistema tabular, al sistema numérico y al sistema algebraico. En la segunda sesión de clase, los estudiantes resuelven el apartado 3 que corresponde a la lectura y análisis de la gráfica de funciones, mediante la observación de una representación gráfica de la función que relaciona el número de automóviles fabricados por hora. En el apartado 4, los estudiantes resuelven un conjunto de ejercicios para identificar el uso de las propiedades de las potencias. De igual forma, los apartados 5, 6 y 7 llevan a que los estudiantes generalicen las sucesiones geométricas e identifiquen los elementos que las constituyen. En el apartado 8, los estudiantes hallan el dominio y la expresión analítica que corresponde a diferentes gráficas de funciones a trozos.

Durante la implementación, el docente identificó que los estudiantes estuvieron muy interesados y motivados por el trabajo que realizaron. Por esta razón, consideramos que logramos cautivar su atención y centrarla en demostrar qué tanto conocían sobre los temas expuestos. Encontramos que el apartado 4 corresponde a un tema muy lejano a la función exponencial creciente. De igual forma, el apartado 8 se ubica después del tema de la unidad didáctica. Decidimos no incluirlos en una nueva versión de la unidad didáctica.

2. Tareas de aprendizaje

Propusimos dos tareas de aprendizaje para cada objetivo de aprendizaje. Así, el objetivo 1 consta de las tareas Cadena de mensajes y Torres de Hanói, el

objetivo 2 de las tareas Crecimiento de población y Crédito estudiantil, y el objetivo 3 de las tareas Producción de yogurt y Alcalinidad del suelo. En el diseño previo, suponemos que las tareas de aprendizaje contribuyen de manera secuencial a los procesos matemáticos. Las tareas diseñadas para el objetivo 1 tienen el propósito de fortalecer el proceso matemático de formular y las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, representación y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Las tareas del objetivo 2 están diseñadas para contribuir al proceso matemático de emplear y a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Las tareas del objetivo 3 pretenden aportar al proceso matemático de interpretar y evaluar, y a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, y representación.

Identificamos el nivel de contribución de las tareas de aprendizaje a las expectativas de aprendizaje. Realizamos el seguimiento mediante los apuntes que el docente registró sobre las actuaciones de los estudiantes y el desempeño que demostraron durante el desarrollo de cada sesión de clase. Además, elaboramos una ficha para cada tarea de aprendizaje, que describimos mediante los requisitos de aprendizaje, las metas, la formulación, los materiales y recursos, la agrupación, la interacción y la temporalidad. Cambiar a Gómez, Mora y Velasco (2018) exponen estos siete elementos para describir las tareas matemáticas escolares.

3. Diseño del examen

Evaluamos la unidad didáctica mediante un examen final que comprende tres tareas relacionadas cada una con un objetivo de aprendizaje. Realizamos la evaluación de los objetivos 1, 2 y 3 por medio de las tareas del examen Población de conejos, Cultivo de bacterias, y Daniel y el político, respectivamente. Calificamos el examen de acuerdo con una rúbrica que diseñamos para tal fin. Seguidamente, presentamos la tarea del examen para el objetivo 1 y su rúbrica respectiva, para ejemplificar el diseño de las tareas del examen.

Tarea de evaluación 1. Población de conejos

Imagina que en un parque natural tenemos una pareja de conejos y es el 1.º de enero. Ahora, supón que la población de conejos se duplica cada día.

1. Representa la manera como se reproducen los conejos mediante un diagrama de ramificaciones. Ten en cuenta el enunciado del problema.
2. Indica cómo calcularías la cantidad de conejos que nacen en el parque para el día 5 de enero
3. De la misma manera que calculaste la respuesta del punto anterior, completa los datos de la tabla.

Tabla

Relación de conejos respecto al número de días

Día de enero	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cantidad de conejos									

4. Representa en un plano cartesiano los datos encontrados en la tabla anterior.
5. Supón que el rectángulo en las siguientes instrucciones representa el área total del parque y que, a 31 de diciembre, está totalmente cubierto por conejos. En la figura, colorea la sección solicitada en cada uno de los enunciados que van a continuación de la gráfica.

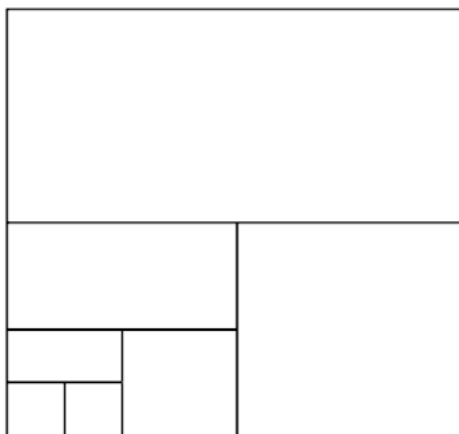


Figura. Área total del parque que a 31 de diciembre estará llena de conejos

- a. Colorea de azul la sección del parque que estará llena de conejos el 30 de diciembre.
 - b. Colorea de rojo la sección del parque que estará llena de conejos el 29 de diciembre.
 - c. Colorea de verde la sección del parque que estará llena de conejos el 28 de diciembre.
 - d. Colorea de amarillo la sección del parque que estará llena de conejos el 27 de diciembre.
 - e. Colorea de negro la sección del parque que estará llena de conejos el 26 de diciembre.
 - f. Colorea de café la sección del parque que estaría llena de conejos el 25 de diciembre.
6. A partir del procedimiento anterior, encuentra la expresión algebraica que represente la función propuesta por el problema.
 7. ¿Por qué la función encontrada cumple los requerimientos para explicar el crecimiento de la población de conejos?

Planteamos esta tarea de evaluación a partir de una tarea prototípica que modificamos. Así, garantizamos que, al resolverla, el estudiante demuestra su desempeño al abordar los caminos de aprendizaje propuestos para el objetivo 1.

La rúbrica de la tarea Población de conejos consta del grafo de criterios de logro, los criterios de logro y los indicadores de logro para el objetivo 1. El grafo de criterios de logro le permite al docente evaluar los criterios de logro que previmos que el estudiante activaría en la resolución de la tarea de aprendizaje. El docente diligencia el grafo de criterios de logro al colorear con verde si el estudiante cumplió con el criterio de forma adecuada, con color amarillo si lo cumplió de forma parcial y de color rojo si no lo cumplió. Es decir, abordamos el grafo de criterios de logro por medio de las convenciones tipo semáforo. En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea de evaluación Población de conejos.

Presentamos los niveles de logro del objetivo 1 y sus indicadores en la tabla 10. En ella, contrastamos el nivel de consecución de los criterios de logro de la figura 7 y sus indicadores para definir el nivel de logro alcanzado por el estudiante. El docente ubica la calificación en la columna asignada para tal fin.

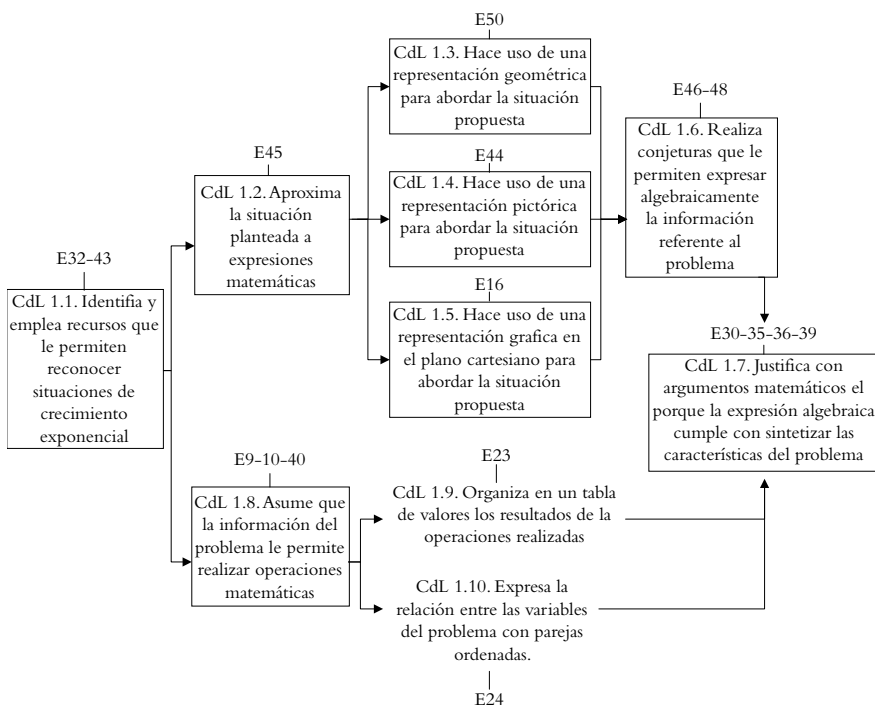


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea de evaluación Población de conejos para el diseño previo

Tabla 10
Niveles de logro e indicadores para el objetivo 1

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación
Superior 4,0-5,0	El estudiante responde correctamente todas las preguntas de la tarea y activa todos los criterios de logro previstos para el objetivo 1. Es decir, el estudiante logra modelar la situación planteada en la tarea (CdL1.3, CdL1.4 y CdL1.5). El estudiante responde correctamente todas las preguntas de la tarea (CdL1.3, CdL1.4 y CdL1.5), pero se le dificulta confrontar la respuesta obtenida con la situación inicial (E30 o E39).	
Alto 4.0 – 4.4	El estudiante responde correctamente al menos cuatro de las preguntas de la tarea (CdL1.3, CdL1.4 y CdL1.5). El estudiante incurre en errores menores como E32, E45, E46 o E35, que permiten modelar gran parte de la situación planteada.	

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación
Básico 3.0 – 3.9	<p>El estudiante realiza traducciones del sistema de representación empleado para modelar la situación planteada a su representación simbólica (CdL1.6). No obstante, el estudiante presenta dificultades para identificar las variables que intervienen en el problema (E46, E48, E30, E35, E36 o E39).</p> <p>El estudiante realiza grafos que se asemejan a un diagrama de ramificaciones (CdL1.4). Sin embargo, incurre en algunos errores al traducirla a su representación simbólica (E44, E46, E48, E30, E35, E36, E39).</p>	
Bajo Menos de 3.0	<p>El estudiante presenta dificultades para resolver las preguntas que caracterizan los criterios de logro de la situación de crecimiento exponencial de la tarea realizada. El estudiante incurre con frecuencia en los errores E32, E43, E45, E50 o E44 o E16, E46 o E48, E30 o E35 o E36 o E39.</p>	
Observaciones		

4. Diarios del estudiante y el profesor

El diario del estudiante y el diario del profesor son otros instrumentos de recolección de información que utilizamos en la implementación de la unidad didáctica. En este apartado, describimos su composición y los procedimientos que utilizamos para la recolección de la información durante la implementación y su análisis posterior.

El diario del estudiante es el instrumento que utilizamos después de resolver la tarea de aprendizaje. Así, cada estudiante se autoevalúa en los aspectos cognitivo y afectivo. En el primer aspecto, el estudiante valora su desempeño al abordar cada uno de los criterios de logro de la tarea. Previamente, el profesor comparte con los estudiantes las convenciones del semáforo y la forma de registrar los resultados en el grafo de los criterios de logro de la tarea. En lo afectivo, el estudiante registra en el matematógrafo el nivel percibido para cada aspecto. Este instrumento nos permite conocer el nivel de agrado del estudiante frente a la tarea propuesta. El profesor destina 10 minutos para realizar esta actividad, luego de terminar cada tarea de aprendizaje. En el anexo 1, se puede consultar el diario del estudiante para el diseño previo de las tareas.

El diario del profesor es un instrumento que permite recolectar la información sobre el aspecto cognitivo y los aspectos afectivos que el profesor percibe durante la implementación. En el primer caso, el diario del profesor

comprende el encabezado y el grafo de criterios de logro que él diligencia a partir de las observaciones que hace del grupo respecto a la activación de los criterios de logro. También, incluye una tabla de observaciones cualitativas que el docente debe realizar a cada criterio de logro de acuerdo con la marcación que hizo en el semáforo y el trabajo realizado por los estudiantes. El docente cuenta con los porcentajes que delimitan cada nivel de desempeño. El docente deberá diligenciar la tabla de indicadores de los criterios de logro que establece los niveles de activación (total, parcial o nula) de cada criterio de logro en función de los errores en los que incurren los estudiantes. El diario del profesor muestra la tabla de expectativas afectiva que debe diligenciar al marcar el nivel de consecución (Bajo, Medio o Alto) que el grupo demostró en el desarrollo de la tarea. El profesor debe diligenciar también el matematógrafo respecto a la percepción que tiene del trabajo del grupo. Por otra parte, incluimos el apartado de toma de decisiones que contempla las acciones no previstas emprendidas durante la sesión, las observaciones a los trabajos corregidos de los estudiantes y la toma de decisiones. El docente diligencia su diario durante la clase e inmediatamente esta termine. En el anexo 2, se puede consultar el diario del profesor para el diseño previo de las tareas de la unidad didáctica.

5. Análisis de datos

El sistema de Análisis de Consecución de Expectativas (sistema ACE) es un instrumento que permite establecer en qué medida el diseño implementado contribuye a las expectativas propuestas. El sistema se basa en los supuestos que hicimos originalmente sobre cómo contribuyen las tareas de aprendizaje a las expectativas de nivel superior, a las expectativas de nivel medio, a los criterios de logro, a las expectativas afectivas y a los factores que afectan la motivación. Alimentamos el sistema ACE con la información que recogemos de la implementación, tanto en la dimensión cognitiva como en la afectiva. La información corresponde principalmente a la activación de los criterios de logro que registran los estudiantes y las percepciones del profesor. El sistema ACE realiza los cálculos respectivos para determinar el desarrollo de las expectativas de nivel superior a partir de las previsiones que hicimos. Obtenemos los resultados de las expectativas afectivas por medio de los productos matriciales entre la activación de los criterios de logro y las previsiones realizadas.

En el análisis de datos, exponemos la sistematización de la información que surge en la implementación, evaluamos los resultados obtenidos en función

del logro del diseño implementado y justificamos los cambios se surgen del análisis de los resultados para generar una nueva unidad didáctica.

4. Descripción de la implementación

Antes del análisis, aclaramos que el diseño previo sufrió cambios en las tareas de aprendizaje y su secuencia para la implementación. Realizamos este ajuste a las tareas de aprendizaje con motivo de la noción de tarea de MAD. Describimos las modificaciones mediante la ejemplificación de la tarea Cadena de mensajes. Luego, presentamos la secuencia de tareas que surge de las modificaciones realizadas.

1. Modificaciones con motivo de la noción de tarea

La noción de tarea de MAD nos indica que una tarea de aprendizaje debe llevar al estudiante por un solo camino de aprendizaje, pese a que esta puede contar con varios caminos alternativos. Encontramos que la tarea Cadena de mensajes lleva a los estudiantes a recorrer tres caminos de aprendizaje diferentes en su solución. En la figura 8, presentamos los caminos de aprendizaje de la tarea Cadena de mensajes del diseño previo, que enmarcamos en recuadros.

Por ejemplo, un estudiante recorre el camino que pasa por el criterio de logro CdL1.3 para realizar una representación geométrica que indica la proporción de población que ha recibido el mensaje en determinado tiempo. El camino de aprendizaje que pasa por CdL1.4 le solicita al estudiante que complete la representación pictórica y realice la traducción a la representación algebraica. El camino de aprendizaje que pasa por CdL1.9 requiere que el estudiante organice en una tabla de valores con los datos que obtiene de las operaciones aritméticas que él mismo realiza. En todos los casos, los estudiantes deben lograr una expresión simbólica que exprese la situación propuesta en el problema. Verificamos que los caminos de aprendizaje no son alternativos. Por esta razón, decidimos dividir la tarea Cadena de mensajes en dos tareas de aprendizaje, Cadenas de mensajes y Cadenas de mensajes la expansión. Así, conseguimos tres tareas de aprendizaje para el objetivo 1, que cumplen con la noción de tarea de MAD. En consecuencia, el grafo de criterios de logro del objetivo 1 se transforma en el que presentamos en la figura 9.

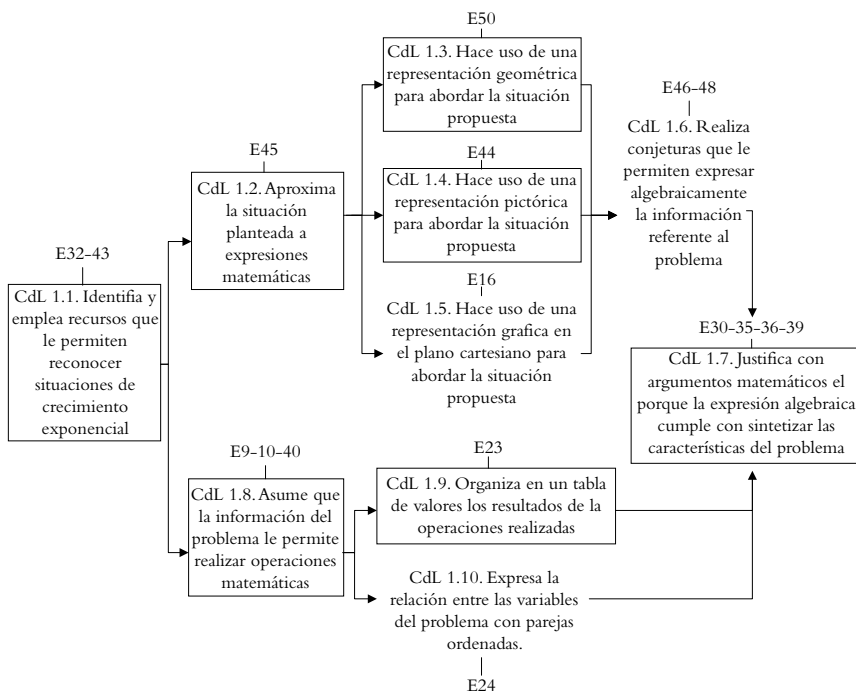


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea Cadena de mensaje del diseño previo

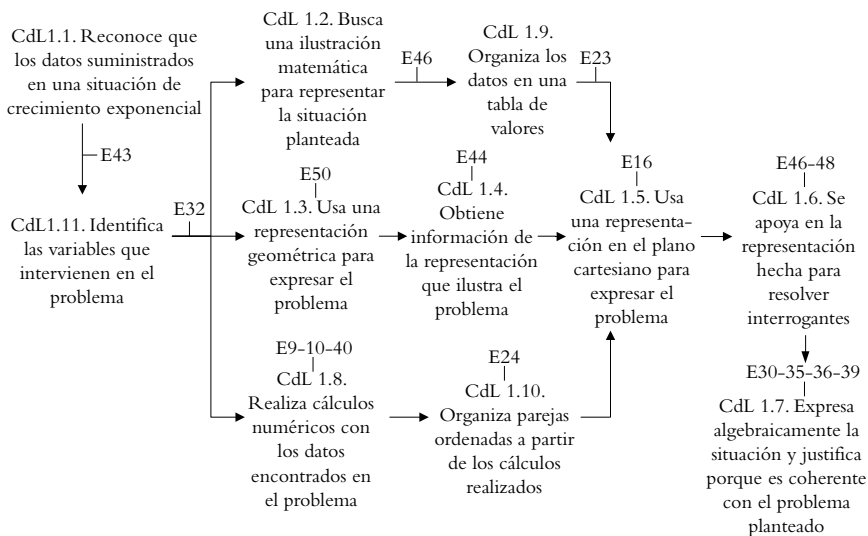


Figura 9. Grafo de criterios de logro del objetivo 1 modificado

Observamos que el diseño del objetivo 1 cambió sustancialmente por la división de la tarea Cadena de mensajes en dos. El camino de aprendizaje ubicado en la parte superior corresponde a la tarea Cadena de mensajes modificada. Observamos que esta tarea se centra en la presentación de la información mediante la representación pictórica y sus traducciones a los sistemas tablas, gráfico y simbólico. El camino de aprendizaje del centro corresponde a la tarea Cadena de mensajes la expansión. Encontramos que esta tarea aborda la representación geométrica y la traducción al sistema de representación simbólico de la situación planteada. El camino de aprendizaje ubicado en la parte inferior corresponde a la tarea Torres de Hanói, que no sufrió ningún cambio. En el objetivo 3, dividimos la tarea Producción de yogurt, para convertirla en Producción de yogurt y Yogurt de calidad. El objetivo 2 se conserva en las mismas condiciones. Las tareas de aprendizajes modificadas para la implementación se pueden consultar en el anexo 7.

2. Descripción de la secuencia de tareas implementada

Los ajustes que realizamos a las tareas de aprendizaje generaron una modificación en la secuencia de tareas. Aumentamos el tiempo en la implementación por la incorporación de las dos tareas que surgieron de dividir las tareas del diseño previo. En la tabla 11, presentamos la secuencia de tareas modificadas para la unidad didáctica.

Tabla 11

Secuencia de las tareas modificadas para la unidad didáctica función exponencial creciente

Sesión	Actividad	Tiempo estimado
0-A	Presentación del tema	20 minutos
0-A	Realización de la tarea diagnóstica	100 minutos
0-B	Realimentación de debilidades detectadas en la revisión de la tarea diagnóstica	120 minutos
1	Presentación del objetivo 1, de los grafos de criterios de logro del objetivo, de la tarea Cadena de mensajes, de la tarea Cadena de mensaje la expansión y su resolución	120 minutos
2	Presentación del grafo de criterios de logro del objetivo, de la tarea Torres de Hanói y su resolución	120 minutos
3	Presentación del objetivo 2, de los grafos de criterios de logro del objetivo, de la tarea Crecimiento de población y su resolución	120 minutos

Sesión	Actividad	Tiempo estimado
4	Presentación de los grafos de criterios de logro del objetivo y de la tarea Crédito estudiantil y su resolución	120 minutos
5	Presentación del objetivo 3, de los grafos de criterios de logro del objetivo, de la tarea Producción de yogurt y su resolución	120 minutos
6	Presentación del grafo de criterios de logro del objetivo, de la tarea Yogurt de calidad y su resolución	120 minutos
7	Presentación del grafo de criterios de logro del objetivo, de la tarea Alcalinidad y su resolución	120 minutos
8	Examen final	120 minutos
9	Puesta en común y realimentación de los resultados del examen y de la calificación final	60 minutos
10	Implementación del plan de mejoramiento para los estudiantes que no alcanzaron el desempeño mínimo	60 minutos

Antes del inicio de la unidad didáctica, hicimos dos sesiones de 120 minutos. En la sesión 0-A, presentamos el tema de la unidad didáctica en 20 minutos y describimos la metodología de trabajo y los instrumentos de recolección de información. De inmediato, los estudiantes empiezan a resolver la tarea diagnóstica. Esta tarea consta de ocho apartados que buscan indagar por el análisis del comportamiento de algunas funciones, el uso de Geogebra para realizar la representación gráfica de funciones, la representación simbólica de la función que modela los datos suministrados, las propiedades de las potencias y los elementos de las progresiones. En la segunda sesión previa, revisamos y proporcionamos realimentación de la tarea diagnóstica.

Después de aclarar las inquietudes sobre la tarea diagnóstica, pusimos a prueba las tareas de aprendizaje. Implementamos en la sesión 1 la tarea Cadena de mensajes y Cadena de mensajes la expansión. Consideramos que los estudiantes resolverían estas dos tareas en 120 minutos de clase, dado que corresponden al equivalente de la tarea del diseño previo Cadena de mensajes. La principal dificultad que manifestaron los estudiantes fue el uso de diagrama de ramificaciones. El docente dio algunas orientaciones que les permitieron a algunos estudiantes resolver la tarea. Pero el docente observó que buena parte de los estudiantes aún tenían dudas al respecto.

En la sesión 2, resolvimos la tarea Torres de Hanói que despertó gran interés por parte de los estudiantes porque debían usar recursos manipulables

y ejecutables. Detectamos que los estudiantes reconocían las funciones de la forma particular $f(x) = a^x$, pero tuvieron dificultad para establecer los parámetros de la forma general $f(x) = ka^{mx+n} + b$. Culminamos el objetivo de aprendizaje 1, no sin antes aclarar las dudas que surgieron de la resolución de los problemas.

Dedicamos la sesión 3 a la tarea de aprendizaje Crecimiento de población que es aparentemente muy cercana a los estudiantes. En ella, los estudiantes debían analizar la función que establece la tasa de crecimiento de la población del municipio donde vive. Durante el desarrollo de la tarea diagnóstica, el profesor les había explicado cómo obtener la tasa de crecimiento a partir de dos valores en el tiempo. Los estudiantes resolvieron la tarea con mejores resultados que en el objetivo 1. Ellos trabajaron en pequeños grupos y utilizaron la información que les proporcionaba la situación para determinar la expresión que define la tasa de crecimiento de la población. Encontramos que los estudiantes usaron un tiempo promedio de 80 minutos para resolver la tarea. Consideramos que debemos hacer un ajuste al tiempo propuesto para esta tarea en el diseño previo.

En la sesión 4, los estudiantes resolvieron la tarea Crédito estudiantil. Organizamos grupos de tres estudiantes. Los grupos tuvieron dificultad para iniciar el desarrollo de la tarea. El docente hizo algunas aclaraciones y así fue más sencillo abordar la situación. Los estudiantes exploraron diferentes estrategias para lograr emplear la información que suministraba el problema. Encontramos limitantes en cuanto al uso de algunos conceptos que les impidió a algunos estudiantes diferenciar entre una función lineal, cuadrática o exponencial. El tiempo empleado fue cercano a los 100 minutos.

La sesión 5 correspondió a la tarea Producción de yogurt. Los estudiantes compararon las diferentes fuentes de información, contrastaron los datos obtenidos en ellas y lograron resolver la tarea en menor tiempo del previsto. Lo mismo ocurrió en la sesión 6, que comprende la tarea Yogurt de calidad. Creemos que estas dos tareas se pueden realizar en 120 minutos. Las tareas hacen énfasis en la evaluación de la información para resolver los interrogantes propuestos. Existen diferentes caminos, pero el estudiante debe seleccionar el más adecuado y debe sustentarlo.

En la sesión 7, resolvimos la tarea Alcalinidad del suelo. Teníamos dudas sobre el interés que pudiera generar esta tarea, pero verificamos que los estudiantes se motivaron al desarrollar el ejercicio previo de toma de muestras para medir su pH . Así, los estudiantes reconocieron un contexto de aplicación de la función exponencial creciente. Detectamos que una limitante es

el hecho de que la medición del pH sea una función decreciente. Luego, el estudiante debía usarla para establecer si el valor del pOH es una función de crecimiento al infinito. En cada una de las sesiones, los estudiantes diligenciaron el diario del estudiante.

En la sesión 8, aplicamos el examen final del tema. Los estudiantes lo resolvieron de forma individual. El examen consta de tres tareas que verifican los aprendizajes de los tres objetivos de la unidad didáctica. Decidimos transformar tres tareas prototípicas en tareas de evaluación. En la implementación, detectamos que funcionan muy bien. Los estudiantes en su mayoría sabían qué hacer; solo unos pocos emitieron juicios y resultados erróneos.

En la sesión 9, realizamos la puesta en común de los resultados y la realimentación. Encontramos que esta actividad les permitió a varios estudiantes resolver inquietudes que surgieron durante la implementación. De igual forma, el propósito de esta actividad era evaluar el trabajo realizado y brindar la oportunidad a quienes no lograron alcanzar las metas de hacerlo mediante un taller de refuerzo. Los estudiantes que no lograron alcanzar las expectativas de aprendizaje realizaron un taller. Después de su revisión, el profesor aplicó un ejercicio de evaluación más sencillo que el examen mismo. Así, pretendíamos medir el desempeño en un menor nivel e indagar acerca de lo que nos faltó complementar.

5. Evaluación del diseño y la implementación

En este apartado, presentamos la evaluación del desarrollo de la dimensión cognitiva, la evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva y los factores que afectan la motivación, el análisis de la enseñanza y un ejemplo de evaluación con la tarea Cadena de mensajes. Utilizamos la corrección de las tareas, la corrección del examen final y los diarios del profesor y el estudiante para obtener información referente a las expectativas de aprendizaje, expectativas de tipo afectivo y sobre los factores que afectan la motivación. Resumimos la información recolectada en la implementación de la unidad didáctica por medio del sistema ACE.

1. Evaluación del desarrollo de la dimensión cognitiva

Realizamos la evaluación de la dimensión cognitiva al establecer el nivel de consecución de los objetivos de aprendizaje, las expectativas de nivel superior

y las capacidades matemáticas fundamentales. Describimos el proceso de evaluación del desarrollo de la dimensión cognitiva en relación con el objetivo de aprendizaje 1. En la figura 10, presentamos las previsiones de activación de los criterios de logro para cada una de las tareas de este objetivo.

Criterios de logro. Ponderación por cada tarea													
Tarea	Caminos aprendizaje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Suma
0	1 11 8 10 5 6 7	20				10	10	20	10		10	20	100
1	1 11 3 4 5 6 7	15		20	10	5	10	20				20	100
2	1 11 2 9 5 6 7	15	10			15	10	20		10		20	100

Distribución porcentual por criterio de logro en el objetivo											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Suma
17	3	7	3	10	10	20	3	3	3	20	100

Figura 10. Ponderación de criterios de logro para el objetivo 1

Los valores de la figura 10 corresponden a la distribución porcentual de las previsiones de cada criterio de logro. Resaltamos que los criterios de logro 1, 7 y 11 alcanzaron la menor activación en el desarrollo de las tareas propuestas, pese a que tenían previsiones con porcentajes altos. Estos resultados nos permitieron identificar la dificultad de los estudiantes para representar la información suministrada por el problema. Otros estudiantes, pese a identificar esporádicamente las variables, no consiguen establecer en forma coherente una relación entre ellas para la situación planteada.

En la figura 11, presentamos la contribución de las tareas a los procesos matemáticos. Obtuvimos estos resultados del sistema ACE, que consolidó la activación de los criterios de logro en las tareas de aprendizaje y los comparó con los procesos matemáticos.

Proceso matemático	Objetivo 1		Objetivo 2		Objetivo 3		Promedio	
	Númérico	Etiqueta	Númérico	Etiqueta	Númérico	Etiqueta	Númérico	Etiqueta
Formular	37,6	MEDIA			60,1	MEDIA	48,9	MEDIA
Emplear	43,6	MEDIA	27,2	MEDIA	69,5	MEDIA	46,8	MEDIA
Interpretar	42,5	MEDIA	36,8	MEDIA	55,7	MEDIA	45,0	MEDIA

Figura 11. Contribución global de los objetivos a los procesos matemáticos

Aclaremos que el proceso de formular no fuera tenido en cuenta en el diseño de las tareas del objetivo 2. Por consiguiente, encontramos que este

proceso no registra resultados. Consideramos que, en los ajustes al diseño de la nueva unidad didáctica, debemos incluir un apartado que indague por este proceso en el objetivo 2. Por otra parte, habíamos planificado que el objetivo 1 contribuyera de manera significativa al proceso matemático de formular. Pese a que este objetivo obtuvo el promedio más alto (48,9%), consideramos que su desarrollo y el de los procesos matemáticos no fue significativo porque se mantuvieron por debajo del 50%. Esperábamos lograr valores porcentuales por encima del 60%. Proponemos realizar ajustes en el nuevo diseño a las tareas de los tres objetivos, con el fin de que contribuyan en mayor medida a todos los procesos matemáticos. En la figura 12, comparamos las previsiones para el desarrollo de los procesos matemáticos y los resultados obtenidos para la implementación de la unidad didáctica.

Objetivo	Formular		Emplear		Interpretar	
	Previsiones	Resultados	Previsiones	Resultados	Previsiones	Resultados
1	89	37,6	18	43,6	3	42,5
2	1		50	33,3	9	51,8
3	20	60,1	24	69,5	55	55,7
Total	110	48,9	92	48,8	67	50

Figura 12. Comparación procesos matemáticos

Advertimos que las tareas del objetivo 3 presentaron mayor contribución a los procesos matemáticos. El docente descubrió que, en este punto, los estudiantes habían alcanzado un mayor nivel de conciencia a la hora de abordar un problema. Observó y registró en el diario del profesor que, a pesar de la dificultad de las tareas, los estudiantes indagaban diferentes alternativas de solución. Debemos replantear las tareas para que, en el objetivo 1, los estudiantes deban formular o modelar la situación propuesta; en el objetivo 2, logren emplear mejor los conceptos y herramientas matemáticas para resolver las tareas; y, en el objetivo 3, interpreten aún más los contextos propuestos en la situación. En la figura 13, presentamos el nivel de contribución de las tareas de aprendizaje a las capacidades matemáticas fundamentales.

Encontramos que las capacidades matemáticas fundamentales con mayor nivel de contribución son matematización (50,2%) y diseño y resolución de problemas (50,1%). Estas capacidades matemáticas fundamentales presentaron mayor desarrollo debido a que los estudiantes utilizaron diferentes alternativas de representación, que identificamos en la revisión de las tareas de

Objetivos	Diseño estrategias de resolución de problemas	Matematización	Comunicación	Razonamiento y argumentación	Uso del lenguaje y operaciones	Representación	Herramientas matemáticas	Promedio	Valoración global
1	40,6	40,6	38,9	40,6	41,5	41,3		40,6	MEDIA
2	48,6	44,2	28,5	33,7	36,5	9,4	14,4	30,8	MEDIA
3	61	65,9	63,9	60,5	60,4	64,1	53,6	61,3	MEDIA
Promedio	50	50	44	45	46	38	34	44	MEDIA

Figura 13. Activación capacidades matemáticas fundamentales por objetivo

aprendizaje. En contraste, la capacidad matemática fundamental de utilización de herramientas matemáticas (22,7%) es la que menor contribución tiene. La contribución a las otras capacidades matemáticas fundamentales previstas en el diseño de la unidad didáctica presenta resultados similares que oscilan entre 38,3 y 46,1%. Las tareas del objetivo 2 obtuvieron las consecuciones más bajas en cinco de las siete capacidades matemáticas fundamentales. En razón a estos resultados, convenimos ajustar las tareas de los objetivos 1 y 2 principalmente, para lograr que los objetivos contribuyan mejor a capacidades matemáticas fundamentales como comunicación, razonamiento y argumentación, uso del lenguaje y operaciones, representación y herramientas matemáticas.

2. Evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva

Realizamos la evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva a partir de las expectativas afectivas y los factores que afectan a la motivación. En la tabla 12, presentamos la consecución de las expectativas afectivas para cada uno de los objetivos. Comparamos la percepción del docente con la obtenida por los estudiantes.

Tabla 12

Percepción de consecución de expectativas afectivas

Objetivo 1					
Expectativas de tipo afectivo	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5
Criterios de logro	Media	Media	Media	Media	Media
Percepción del profesor	Alta	Alta	Alta	Alta	Alta
Objetivo 2					
Expectativas de tipo afectivo	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5
Criterios de logro	Alta	Alta	Alta	Media	Media
Percepción del profesor	Alta	Alta	Media	Alta	Alta

Objetivo 3					
Expectativas de tipo afectivo	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5
Criterios de logro	Media	Media	Media	Media	Media
Percepción del profesor	Alta	Alta	Alta	Alta	Alta

La percepción del profesor genera resultados altos basado en el empeño, participación y trabajo en equipo manifestado en las clases. Al comparar las expectativas afectivas de los estudiantes con las del docente, notamos una disparidad en los resultados. Los objetivos 1 y 3 presentan la mayor diferencia. Tanto los estudiantes como el profesor manifestaron una contribución alta para el objetivo 2. Concluimos que la percepción que tuvieron los estudiantes de las tareas no es la misma que percibió el docente. Por tanto, debemos revisar sus enunciados para hacerlas más cercanas a los estudiantes.

Las tareas del objetivo 2 presentaron la mayor contribución a las expectativas de tipo afectivo. Por su parte, la EA5 tiene el menor nivel de activación en cada uno de los objetivos. La EA5 está relacionada con promover en el estudiante el hábito de verificar los datos hallados matemáticamente. Descubrimos, al revisar la solución de las tareas de aprendizaje, que algunos estudiantes no llegan a verificar los datos hallados matemáticamente, porque no pueden establecer el modelo matemático asociado. Para el nuevo diseño de la unidad didáctica, consideramos importante incluir al menos una actividad que lleve al estudiante a comprobar la veracidad de los resultados obtenidos matemáticamente.

Confrontamos los factores que afectan a la motivación a partir de la comparación entre las percepciones de los estudiantes y del docente. En la tabla 13, indicamos los resultados obtenidos en la percepción de la motivación de acuerdo con el diario del profesor y el diario del estudiante.

Tabla 13
Percepción de los aspectos que influyen en la motivación

Aspectos que influyen en la motivación	Profesor	Estudiantes
Sabía por qué resolver la tarea	Muy alta	Alta
Sabía cómo hacerlo	Muy alta	Alta
Tema interesante	Muy alta	Alta
Detecté mis errores	Muy alta	Alta
Fue un reto motivante	Muy alta	Alta
Pude interactuar con los demás	Muy alta	Alta

Observamos una diferencia en la valoración de todas las variables relacionadas con los factores que influyen en la motivación. El docente tuvo una percepción mayor debido al clima de aula que percibió en el desarrollo de las tareas. Si comparamos los resultados obtenidos sobre los logros del grupo por objetivo, sobre la percepción de los estudiantes y sobre la percepción del profesor, se observa que siempre se mantuvo una motivación alta en cada uno de los objetivos.

Comparamos los resultados para los factores que afectan a la motivación a partir de las percepciones de los estudiantes para cada una de las tareas en los tres objetivos de la unidad didáctica. En la figura 14, presentamos la contribución de las tareas por objetivo a los aspectos que afectan la motivación.

Objetivo	Tarea 1		Tarea 2		Tarea 3		
	Descripción corta	Promedio numérico	Impresión global motivación	Promedio numérico	Impresión global motivación	Promedio numérico	Impresión global motivación
1		3,35	ALTA	3,4	ALTA	3	ALTA
2		2,7	ALTA	3,1	ALTA		
3		3,1	ALTA	3,1	ALTA	3,5	MUY ALTA

Figura 14. Contribución de las tareas por objetivo a los aspectos que afectan la motivación

En los resultados obtenidos, notamos que la motivación por parte de los estudiantes permaneció alta. Desde el punto de vista de los estudiantes, el objetivo 2 presenta la menor contribución a los aspectos que influyen en la motivación. Aclaramos que este objetivo solo tiene dos tareas de aprendizaje. De estas tareas, Crecimiento poblacional presenta la percepción menos favorable. Las variables con menor apreciación por parte de los estudiantes en esta tarea son detecté mis errores (20,8% de motivación muy alta) y pude interactuar con los demás (25% de motivación muy alta). Destacamos que, para el objetivo 1, la variable “sabía por qué resolver la tarea” y la variable “tema interesante” presentaron una percepción muy alta por parte de los estudiantes y el profesor.

De la información recolectada del diario del estudiante encontramos que, en el objetivo 1, las tareas Cadena de mensajes y Cadena de mensajes la expansión, presentaron mayor contribución a las expectativas afectivas desde el punto de vista de la motivación. Las variables “sabía por qué resolverla” y “tema interesante” presentaron mayor valoración por parte de los estudiantes.

En el objetivo 2, encontramos que el mayor aporte a la motivación está en la tarea Crédito estudiantil. Las variables “sabía cómo resolverla” y “pude interactuar con los demás” fueron las de mayor valoración. En el objetivo 3, observamos mejores resultados en la tarea Alcalinidad del suelo. Las variables “sabía cómo resolverla”, “tema interesante” y “pude interactuar” obtuvieron las mejores consecuciones según la percepción de los estudiantes. En la revisión del enunciado de las tareas, tendremos en cuenta promover la consecución de los factores que afectan la motivación.

3. Análisis de la enseñanza

Realizamos la evaluación de la enseñanza a partir de los resultados del aprendizaje obtenidos de los componentes cognitivo y afectivo del análisis didáctico. En la tabla 14, presentamos un resumen de los logros y resultados obtenidos de la implementación de la unidad didáctica.

Tabla 14
Resumen comparativo de los resultados del desarrollo de la unidad didáctica

Logros o desarrollo	Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3
Objetivos de aprendizaje			
Activación de criterios de logro	Media	Media	Media
Examen final	3,27	3,19	2,10
Percepción de los estudiantes (semáforo)	Media	Media	Alta
Percepción del profesor (semáforo)	Media	Alta	Media
Expectativas de aprendizaje de nivel superior: capacidades matemáticas fundamentales			
Desarrollo de EANS por capacidades	Media	Media	Media
Expectativas de aprendizaje de nivel superior: procesos matemáticos			
Formular	Media	Media	Media
Emplear	Media	Media	Media
Interpretar	Media	Media	Media
Expectativas de tipo afectivo			
Activación de criterios de logro	Media	Media	Media
Percepción del profesor	Alta	Alta	Alta

Comparamos los resultados para los tres objetivos de aprendizaje, porque nos permite realizar observaciones que no habíamos percibido. Por ejemplo, encontramos que en el objetivo 3 los estudiantes obtuvieron la valoración más baja en el examen final. Por su parte, la percepción (semáforo) del docente y de los estudiantes coincide para el objetivo 1, mientras que los objetivos 2 y 3 presentaron resultados diferentes. El profesor previó que el desarrollo de las tareas del objetivo 3 representaba un mayor grado de dificultad para los estudiantes. Pero, con los resultados de la tabla 14, descubrió que los estudiantes resolvieron las tareas de este objetivo a cabalidad. Sin embargo, creemos que el ajuste en el enunciado de las tareas puede favorecer la consecución de mejores resultados.

En cuanto a los procesos matemáticos, encontramos que su desarrollo se presenta en la misma medida para los tres objetivos. Respecto a las expectativas de tipo afectivo, existe una diferencia en las percepciones. El docente observó que los estudiantes realizaron el desarrollo de las tareas acorde con la planificación. Por su parte, los estudiantes, al enfrentarlas, asignaron la valoración media de acuerdo con su percepción de su desarrollo.

De igual forma, analizamos las previsiones de la dimensión cognitiva desde los objetivos y las expectativas de nivel superior. Encontramos que cumplimos con las previsiones para el desarrollo de las tareas de los objetivos con una valoración media, a pesar de que el examen final determinó que las previsiones se cumplieron mejor en los objetivos 1 y 2, puesto que el objetivo 3 presentó los resultados más bajos en este aspecto. Realizaremos un ajuste a las tareas del examen final, con énfasis en el objetivo 3. Haremos las tareas de evaluación más consistentes con la caracterización de los objetivos de aprendizaje.

El docente asignó una valoración muy alta a todos los factores que influyen en la motivación. Los estudiantes coinciden con esta apreciación, pero su valoración solo llega a alto para todos los factores que influyen en la motivación.

Por otra parte, las tareas de aprendizaje se implementaron como se había propuesto. Comprobamos que el diario del estudiante despertó gran interés, porque ellos encontraron una oportunidad para evaluar su trabajo. Asimismo, el grupo manifestó al docente que es un espacio para exteriorizar sus apreciaciones respecto a la clase que cotidianamente no se hace en ninguna de las asignaturas. En el nuevo diseño de la unidad didáctica, el docente debe fortalecer el uso de esta herramienta para comprometer a los estudiantes con sus aprendizajes.

Así resumimos los cambios formulados para el nuevo diseño. Propusimos en la planificación una tarea diagnóstica que aborda siete apartados relacionados con la verificación de conceptos previos al tema de la unidad didáctica. Sin embargo, descubrimos en la implementación que los conocimientos presentados no garantizaban la preparación requerida para desarrollar la unidad didáctica. Por ejemplo, encontramos que es indispensable fortalecer los procedimientos que llevan al proceso matemático de formular. En este sentido, evidenciamos dificultades en el uso de lenguaje algebraico, así como en la capacidad de generalizar la expresión que representa la situación propuesta. En consecuencia, proponemos que la tarea diagnóstica considere el análisis de las sucesiones de los números triangulares, cuadrados, cúbicos, pentagonales, hexagonales y de Fibonacci, porque esas sucesiones representan patrones de construcción muy cercanos a fenómenos de crecimiento exponencial. En la tarea diagnóstica, no previmos obtener información sobre conocimientos previos de la representación simbólica y el análisis del comportamiento de las funciones, indispensables para lograr la formulación en el objetivo 1. Por otra parte, suprimiremos los apartados 3 y 4, porque descubrimos que la ejercitación y aplicación de las propiedades de las potencias no necesariamente es un conocimiento previo. Con estos ajustes, nos proponemos aumentar la cantidad de información fiable sobre los conocimientos previos de los estudiantes. Para ello, agregaremos elementos manipulativos, lúdicos y ejercicios más relacionados con el análisis del comportamiento de funciones.

Respecto a la activación de los criterios de logro, encontramos que los estudiantes abordaron los sistemas de representación en su totalidad, dado que las tareas así lo requerían. Acerca de los contextos de los estudiantes, verificamos que ellos se identificaron con las tareas Producción de yogurt, Yogurt de calidad y Alcalinidad del suelo, por tratarse de situaciones cotidianas a su entorno rural. Por el contrario, la tarea Crecimiento de población que preveíamos que despertaría el interés de los estudiantes, por tratarse del análisis del crecimiento de la población de su municipio, requirió del apoyo del docente para relacionar los parámetros con el modelo de crecimiento exponencial.

Por otra parte, comprobamos en la implementación de las tareas de aprendizaje que las expectativas afectivas formuladas fueron pertinentes, porque todas fueron activadas en los objetivos 2 y 3. Para el objetivo 1, no previmos la expectativa afectiva 1, porque no constatamos que contribuiría sustancialmente con el alcance del objetivo, porque favorece el proceso matemático de

formular. Asimismo, verificamos el cumplimiento generoso de las previsiones de los factores que afectan la motivación.

En relación con las destrezas, no logramos que todos los estudiantes dedujeran la ecuación de la función exponencial creciente. De los razonamientos, el inductivo les ocasionó dificultad a los estudiantes, porque debían analizar el comportamiento de la función y, en algunos casos, no lograron hacerlo por completo. En cuanto a las estrategias, los estudiantes no lograron matematisar todas las situaciones de crecimiento exponencial que propusimos. En el anexo 5, presentamos los diarios del estudiante para el diseño implementado. De igual forma, presentamos en el anexo 6 los diarios del profesor para el diseño implementado.

6. Nuevo diseño de la unidad didáctica

En el nuevo diseño de nuestra unidad didáctica, presentamos algunos ajustes tanto en la tarea diagnóstica como en las tareas de aprendizaje y la evaluación final. En el apartado anterior, identificamos que el proceso matemático de formular obtuvo los niveles de activación más bajos. Pretendemos que las modificaciones realizadas en la formulación de nuestras tareas contribuyan a superar esta dificultad.

1. Descripción del nuevo diseño de la unidad didáctica

Para nuestra unidad didáctica, hemos realizado algunos cambios en la tarea diagnóstica, en las tareas de aprendizaje y en la evaluación final. En el anexo 8, se pueden consultar las nuevas tareas diagnóstica, de aprendizaje y de evaluación. A continuación, realizaremos una breve descripción de los ajustes que consideramos más relevantes en nuestras tareas.

1.1. Tarea diagnóstica

La tarea diagnóstica original contaba con ocho apartados. En contraste, la versión final de la tarea diagnóstica presenta solo cinco apartados. Es decir, suprimimos tres apartados porque correspondían a temas que guardan una relación muy distante con la función exponencial creciente o que enfatizan el desarrollo de operaciones sin brindar un aporte significativo para el abordaje de la unidad didáctica. Por ejemplo, los estudiantes, en el apartado 4 de la

tarea implementada, realizaron operaciones entre potencias, que, de acuerdo con los registros del docente, resolvieron con relativa facilidad. Asimismo, el estudiante debió hacer uso de algunas propiedades de la función exponencial creciente en la resolución del apartado 7. Eliminamos este apartado por corresponder al tema de la unidad didáctica y no a los conocimientos previos. En el apartado 8 de la tarea diagnóstica, pretendíamos indagar sobre el comportamiento de algunas funciones. Este apartado resultó muy dispendioso en la implementación y no aportó elementos de juicio para fortalecer la formación del estudiante.

En la nueva versión de la tarea diagnóstica, buscamos verificar que el estudiante use unos conocimientos matemáticos previos al tema. Organizamos esta tarea en cinco apartados. El apartado inicial de los paracaídas lleva a los estudiantes a describir de diferentes formas fenómenos que ocurren en la naturaleza y que son de fácil comprobación. De igual forma, pretendemos que los estudiantes demuestran habilidades para realizar la representación simbólica y para usar herramientas matemáticas al resolver la tarea Baldosas del segundo apartado. Asimismo, proponemos que el tercer apartado indague si los estudiantes realizan el análisis de funciones, mediante el uso de herramientas matemáticas. Por su parte, los estudiantes abordan el diseño de estrategias para la resolución de problemas, el razonamiento y la argumentación en los dos últimos apartados. Además, pretendemos generar curiosidad e interés en los estudiantes por afrontar situaciones contextualizadas. Por ello, proponemos tareas motivantes y que les representen un reto, en las que emplean diferentes materiales e interactúan con sus compañeros.

1.2. Tareas de aprendizaje

Las tareas de aprendizaje previstas para cada uno de los objetivos sufrieron algunos cambios. Los resultados de activación de los criterios de logro nos permitieron evidenciar, en el objetivo 1, que a los estudiantes se les dificultó llevar la información del problema a una representación matemática. Encontramos que las previsiones de la dimensión cognitiva se cumplieron para el desarrollo de las tareas de los tres objetivos. Sin embargo, el examen final determinó que las previsiones se cumplieron mejor en los objetivos 1 y 2, puesto que el objetivo 3 presentó los resultados más bajos en este aspecto. De esta forma, prevemos que la superación de las debilidades encontradas en el objetivo 1 nos permitirá resarcir las dificultades que tuvieron los estudiantes al resolver parte del examen final.

El objetivo 1 del nuevo diseño presenta tres tareas de aprendizaje. La tarea Cadena de mensajes muestra algunos cambios en su formulación, que describiremos detalladamente en el siguiente apartado. La tarea Población de conejos reemplazó la tarea Cadena de mensajes la expansión. Realizamos este cambio por la necesidad de exponer al estudiante a una tarea que obedezca al modelo matemático $f(x) = 2^x$. Con este cambio, pretendemos brindar al estudiante elementos de juicio que le permitan desarrollar de la mejor manera posible la última tarea de aprendizaje propuesta para el objetivo 1. En la tarea Torres de Hanói, realizamos pequeñas modificaciones en las indicaciones que brindamos al comienzo de la tarea y contemplamos usar el simulador de las torres de Hanói desde el inicio de la tarea para agilizar el desarrollo de la actividad propuesta. Con los cambios realizados en estas tareas, buscamos fortalecer el proceso matemático de formular.

Para el objetivo 2, presentamos dos tareas de aprendizaje. En la tarea Crecimiento de población, presentamos a los estudiantes una situación propia de su contexto. Procuramos que ellos empleen la representación simbólica para dar respuesta a los interrogantes propuestos. Consideramos que esta tarea es un reto para los estudiantes porque les permite manipular los parámetros de la función mediante el análisis del crecimiento de la población de su municipio. Así, proyectamos fortalecer la capacidad matemática fundamental de matematizar y el desarrollo del proceso matemático de emplear. En la tarea, proponemos el uso de recursos informáticos que motiven a los estudiantes y les permitan realizar procedimientos de manera ágil. Esta tarea dispone de las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante con las que pretendemos aumentar la motivación de los estudiantes. Entretanto, la tarea Crédito estudiantil aborda el proceso matemático de emplear. En la implementación, descubrimos que esta tarea contribuye en buena medida con el proceso de formular. El estudiante descubre paso a paso los parámetros que representan simbólicamente la situación propuesta. Creemos que es importante potencializar el contexto de matemática financiera en nuestros estudiantes para que afronten mejor su diario vivir. Además del contexto, los estudiantes se motivarán por el uso de herramientas informáticas y por las interacciones con sus compañeros en grupos pequeños. Las tareas del objetivo 2 fortalecen en mayor medida las capacidades matemáticas fundamentales de diseño y resolución de problemas, y razonamiento y argumentación.

En el objetivo 3, encontramos que las tareas Producción de yogurt y Yogurt de calidad son complementarias y provienen de un contexto auténtico.

Con ellas, pretendemos incentivar el proceso matemático de interpretar y evaluar. De igual forma, prevemos que contribuyan con todas las capacidades matemáticas fundamentales excepto representación y utilización de herramientas matemáticas. Entre los requisitos de las tareas, verificamos el dominio de los sistemas de representación, sus traducciones y el análisis del modelo matemático. También, proyectamos el uso de Geogebra para el desarrollo de la segunda tarea. En la tarea Alcalinidad del suelo, ofrecemos al estudiante una tarea propia de su contexto, en la que hacemos uso de algunos conceptos de biología, química y matemáticas que enriquecen el conocimiento de los estudiantes sobre la aplicabilidad de la matemática en su vida diaria. El estudiante encuentra una tarea motivante que se convierte en un desafío y esta le permite analizar un uso práctico e inmediato del modelo de crecimiento exponencial. Esta tarea favorece el proceso de interpretación y valoración de los resultados, ya que permite al estudiante comparar los resultados obtenidos con el contexto en el cual habita. El contexto de la tarea permite el entendimiento del modelo en una función continua y en base diez. Además, la tarea contribuye con los procesos matemáticos de emplear y formular que son necesarios para que el estudiante obtenga herramientas para completar el modelo de competencia matemática propuesto por PISA 2012.

1.3. Examen final

El examen final que propusimos en el diseño previo no sufrió modificaciones durante la implementación. Pero, en el nuevo diseño, sustituimos la tarea de evaluación Población de conejos por La leyenda de Sissa. Esta es una tarea prototípica del objetivo 1 que adaptamos a las necesidades del examen. Aclaramos que la tarea Población de conejos pasó a sustituir la tarea de aprendizaje Cadena de mensajes la expansión en el nuevo diseño. Las tareas del examen final del nuevo diseño se pueden consultar en el anexo 8 de las fichas de tareas para el nuevo diseño.

2. Ejemplo de ajuste de una tarea

En este apartado, presentamos la tarea Cadena de mensajes. Hemos seleccionado esta tarea como ejemplo para mostrar cómo, a partir del análisis de los resultados obtenidos en la implementación, realizamos algunas modificaciones a la tarea. A continuación, presentamos la formulación de la tarea cadena de mensajes.

Un mensaje es enviado por WhatsApp a una persona, quien a su vez lo reenvía a tres personas después de una hora de recibirlo, momento en que el mensaje solicita ser reenviado a tres contactos. Estas personas harán lo mismo al recibirlo. De esta forma, la cadena de mensajes se sigue difundiendo, con la restricción de que cada persona solamente recibirá una vez el mensaje, debido a un código encriptado que bloquea nuevas entradas de este mensaje al celular que ya lo recibió. A continuación, organicen grupos de tres estudiantes y resuelvan las siguientes preguntas, teniendo en cuenta la información anterior.

- a. Determinen la variable dependiente y la variable independiente en la representación de la situación.
- b. Elaboren una representación que ilustre la forma como se propaga el mensaje. Pueden emplear diferentes insumos.
- c. Organicen en una tabla los valores que relacionan la variable dependiente con la variable independiente para las primeras 8 horas a partir de la primera difusión del mensaje.
- d. Realicen una representación gráfica en el plano cartesiano con los valores obtenidos en el literal c. Pueden utilizar Geogebra para este procedimiento.
- e. Si el primer mensaje se envió a las siete de la mañana, ¿cuántas personas lo recibirán a las 2:00 p.m.?
- f. ¿Cuántas horas deben transcurrir desde que se envió el primer mensaje para que, a esa hora, lo reciban 243 personas?
- g. Planteen una ecuación matemática en la que se relacionen las variables que actúan en el ejercicio y comprueben que satisface los valores obtenidos en los literales c al f.

En la nueva versión de la tarea Cadena de mensajes contamos con siete literales, a diferencia de la tarea implementada que solo contaba con cuatro literales. Hemos visto la necesidad de incluir el literal b para que los estudiantes realicen la representación de la situación propuesta. De esta manera, esperamos un mayor desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento, comunicación y representación. Con este literal, pretendemos que los estudiantes se familiaricen con el uso de sistemas de representación, que faciliten una aproximación matemática a una situación dada en un contexto. En el literal c, buscamos que los estudiantes realicen una traducción entre la representación realizada en el apartado anterior y el sistema de representación tabular. Eventualmente, algunos estudiantes realizarán la representación desde el literal anterior. Con el literal c, esperamos fortalecer en el estudiante el uso de operaciones matemáticas. En el literal d, buscamos que el estudiante

Sesión	Actividad	Tiempo estimado	CMF						EA					
			DRP	M	C	Ra	U	Re	H	1	2	3	4	5
1	Presentación del objetivo 1, de los grafos de criterios de logro del objetivo, de la tarea Cadena de mensajes, de la tarea Población de conejos y su resolución	120 minutos	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓
2	Presentación del grafo de criterios de logro del objetivo, de la tarea Torres de Hanói y su resolución	120 minutos	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
3	Presentación del objetivo 2, de los grafos de criterios de logro del objetivo, de la tarea Crecimiento de población y su resolución	100 minutos	✓	✓		✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓
4	Presentación de los grafos de criterios de logro del objetivo y de la tarea Crédito estudiantil y su resolución	100 minutos	✓	✓		✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓
5	Presentación del objetivo 3, de los grafos de criterios de logro del objetivo, de la tarea Producción de yogurt y su resolución	80 minutos		✓	✓	✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓
6	Presentación del grafo de criterios de logro del objetivo, de la tarea Yogurt de calidad y su resolución	80 minutos		✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓
7	Presentación del grafo de criterios de logro del objetivo, de la tarea Alcalinidad y su resolución	100 minutos				✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓

Sesión	Actividad	Tiempo estimado	CMF						EA					
			DRP	M	C	Ra	U	Re	H	1	2	3	4	5
8	Examen final	120 minutos		✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
9	Puesta en común y realimentación de los resultados del examen y de la calificación final	60 minutos		✓	✓			✓		✓	✓	✓	✓	✓
10	Implementación del plan de mejoramiento para los estudiantes que no alcanzaron el desempeño mínimo	60 minutos		✓	✓	✓	✓			✓	✓	✓	✓	✓

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; EA = expectativas afectivas

Con el nuevo diseño de la unidad didáctica y los ajustes en las tareas, nos vimos avocados a cambiar los diarios del estudiante y los diarios del profesor. Los diarios para la implementación contienen los grafos de criterios de logro que obtuvimos en la modificación que hicimos a las tareas.

7. Conclusiones

El diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica función exponencial creciente implica desarrollar un ciclo del modelo curricular del análisis didáctico. Logramos profundizar en la planeación, implementación y evaluación del tema función exponencial creciente por medio de la unidad didáctica que propusimos. Formulamos tareas significativas para los estudiantes que contextualizaron el aprendizaje del tema. Los estudiantes participaron en su proceso de evaluación mediante el diligenciamiento del diario del estudiante. Ellos manifestaron satisfacción porque se sintieron partícipes del proceso de evaluación de sus aprendizajes. Además, nos indicaron que, para ellos, la participación en la evaluación de su trabajo en clase a través de la dimensión afectiva fue una experiencia enriquecedora. Algunos estudiantes señalaron que el matematógrafo les brindó la oportunidad de evaluar de formas diferentes

su trabajo en clase, pues consideran que el docente no siempre puede hacer el seguimiento respectivo. Por otra parte, el docente debe contar con la habilidad para iniciar acciones no previstas durante la implementación. Asimismo, el docente podrá replantear un nuevo diseño de la unidad didáctica mediante el análisis de los resultados. Pese a que los estudiantes poseen alta motivación para realizar las tareas de aprendizaje, consideramos que, sin la debida orientación por parte del docente, se disminuyen las posibilidades de éxito.

Tras abordar en el aula de clase el tema de la función exponencial creciente, encontramos que los contextos en los que se presentan las tareas de aprendizaje son muy importantes para aumentar la motivación de los estudiantes. Ellos demuestran mayor experticia en el proceso PISA 2012 de emplear, mientras que presentan mayor dificultad en los procesos de formular e interpretar. Consideramos que logramos diseñar una unidad didáctica para el tema de la función exponencial creciente que aborda estos procesos matemáticos con profundidad y detalle.

Consideramos que el sistema ACE fue una herramienta muy importante para la sistematización de la implementación de una unidad didáctica. El sistema ACE nos brindó la oportunidad de obtener resultados ágiles y fáciles de analizar. Además, nos permitió identificar aspectos del aprendizaje de los estudiantes que no estábamos abordando con la profundidad que habría sido deseable. Por ejemplo, encontramos que el proceso matemático de formular no registró resultados en el sistema para el objetivo 2. Consideramos que debíamos incluir, en los ajustes al diseño de la nueva unidad didáctica, un apartado que indagara por este proceso en ese objetivo. Adicionalmente, habíamos planificado que el objetivo 1 contribuyera de manera significativa al proceso matemático de formular, pero los resultados que surgieron del sistema ACE muestran que su logro estuvo por debajo del 50%. Por esa razón, en el nuevo diseño, realizamos ajustes en las tareas de los tres objetivos, con el fin de que contribuyan en mayor medida a todos los procesos matemáticos. De esta manera, aplicamos la evaluación formativa al utilizar la información que surge de la implementación para mejorar el diseño de la unidad didáctica.

Nuestra participación en MAD 3 nos permitió reconocer que la gestión del docente se debe centrar en sus prácticas de aula. Por esta razón, consideramos indispensable realizar una planificación consciente de estas prácticas. La maestría nos presentó un modelo metodológico para hacerlo. Podemos organizar las dimensiones y componentes del currículo por medio del modelo metodológico del análisis didáctico.

8. Referencias

- Beaton, A. E. (1996). *Mathematics achievement in the middle school years. IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill (MA): Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy.
- Cañadas, M. C., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada (España): Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Institución Educativa Rural Departamental Romeral (2014). *Manual de convivencia escolar*. Documento no publicado. Bogotá: IED Romeral.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). Nueva York: Macmillan.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Marco y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, lectura y ciencias*. Madrid. Descargado el 28/08/2014 de <http://goo.gl/vTBZFc>.
- Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis. Disponible en <http://tinyurl.com/bpy3cvr>.
- Rico, L. (1997b). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza de secundaria*. (pp. 15-38). Barcelona: ICE – Horsori. Disponible en <http://is.gd/L7pVn3>.

9. Anexos

A continuación, presentamos el listado de anexos que relacionamos en el trabajo sobre la unidad didáctica función exponencial creciente. Seguidamente, exponemos cada uno de los anexos. Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8707/>.

Anexo 1. Diarios del estudiante para el diseño previos de la unidad didáctica

Anexo 2. Diarios del profesor para el diseño previo de la unidad didáctica

Anexo 3. Listados de análisis cognitivo y elaboración de los criterios de logro para la unidad didáctica

Anexo 4. Tareas prototípicas del diseño previo de la unidad didáctica

Anexo 5. Ajustes en los diarios del estudiante para el diseño implementado de la unidad didáctica

Anexo 6. Ajustes en los diarios del profesor para el diseño implementado de la unidad didáctica

Anexo 7. Fichas de tareas para el diseño implementado de la unidad didáctica

Anexo 8. Ajustes a las fichas de tareas para el nuevo diseño de la unidad didáctica