



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/>  
Eprints ID: 17765

**To cite this version:** Escande, Paul and Weiss, Pierre Approximation et Estimation des Opérateurs de Flou Variable. (2016) In: GRETSI, 8 September 2015 - 11 September 2015 (Lyon, France).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: [staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Approximation et Estimation des Opérateurs de Flou Variable

Paul ESCANDE<sup>1</sup>, Pierre WEISS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département Mathématiques, Informatique, Automatique (DMIA),  
Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)  
Toulouse, France

<sup>2</sup>Institut des Technologies Avancées en Sciences du Vivant, ITAV-USR3505  
Institut de Mathématiques de Toulouse, IMT-UMR5219, CNRS and Université de Toulouse,  
Toulouse, France

paul.escande@gmail.com  
pierre.armand.weiss@gmail.com

**Résumé** – Les images dégradées par des flous variables apparaissent dans de nombreuses applications telles que l'astronomie, la microscopie à fluorescence et la vision par ordinateur. Les opérateurs de flou variables peuvent être modélisés par des opérateurs intégraux avec certaines propriétés de décroissance et de régularité du noyau. Récemment nous avons étudié l'approximation de ces opérateurs dans des bases d'ondelettes. Ces bases offrent la possibilité de compresser les opérateurs en les seuillant. Elles permettent aussi de calculer des produits matrice-vecteur avec une complexité en  $\mathcal{O}(N\epsilon^{-d/M})$  à une précision en norme spectrale  $\epsilon$ , où  $N$  est le nombre de pixels de l'image  $d$ -dimensionnelle et  $M$  est un scalaire décrivant la régularité du noyau. Nous avons aussi montré que le support de la matrice pouvait être prédéfini à l'avance en ne connaissant que sa régularité globale. Dans ce papier, nous utilisons ces résultats récents pour répondre à la question suivante : connaissant quelques réponses impulsionnelles placées de façon arbitraire, comment estimer/reconstruire l'opérateur ? Nous proposons une formulation originale directement dans le domaine des ondelettes ainsi qu'un algorithme rapide de résolution.

**Abstract** – Restoring images degraded by spatially varying blur is a problem encountered in many disciplines such as astrophysics, computer vision or biomedical imaging. Blurring operators are modelled using integral operators with some regularity and decrease conditions on the kernel. Recently, we studied the approximation of these operators in wavelet bases in which operators are highly compressible. They also allow to fastly compute matrix-vector products with a complexity  $\mathcal{O}(N\epsilon^{-d/M})$  for a precision  $\epsilon$  in spectral norm, where  $N$  is the number of pixels of a  $d$ -dimensional image and  $M$  describes the kernel regularity. Additionally, we have shown that the sparsity pattern of the matrix can be pre-defined. We exploit these results to study the estimation/reconstruction of the operator from the knowledge of few point spread functions located at arbitrary positions in the image domain. We propose an original formulation directly in the wavelet domain and a fast algorithm.

## Introduction

Le problème de restauration d'images dégradées par des flous variables apparaît dans plusieurs domaines tels que l'astronomie, la vision par ordinateur et la microscopie à feuille de lumière. Il connaît un attrait croissant. Les difficultés liées à ce problème sont les coûts de calculs des produits matrice-vecteur et l'estimation du flou dans l'espace. Ceci est principalement lié à la non-stationnarité du flou qui interdit la diagonalisation de l'opérateur dans le domaine de Fourier. Le nombre de coefficients à estimer et entrant en jeu dans le calcul dans la matrice codant le flou est trop conséquent.

Les méthodes les plus utilisées actuellement, sous l'hypothèse de petites variations du flou dans l'espace, reposent sur une approximation par des convolutions par morceaux de l'opérateur de flou variable [2, 6, 4, 5]. Ces méthodes permettent de réduire la complexité des produits matrice-vecteur tout en permettant une estimation du flou dans l'espace à partir de la connaissance de quelques réponses impulsionnelles placées sur

une grille cartésienne dans l'espace.

Dans un travail récent [3], nous avons proposé une méthode d'approximation des opérateurs de flou variable dans des bases d'ondelettes. Dans ces représentations, les opérateurs sont très compressibles. Ces méthodes ont de meilleures garanties théoriques car elles permettent d'exploiter la régularité du noyau. Ces travaux ont aussi permis de montrer que les structures des représentations des matrices en ondelettes pouvaient être prédéterminées, ce qui permet potentiellement l'estimation globale de l'opérateur à partir de quelques réponses impulsionnelles, car la dimension de l'espace de recherche est considérablement réduite.

Dans la partie 1, nous rappelons les résultats principaux obtenus dans [3], concernant la compression d'opérateurs de flou dans des bases d'ondelettes. Nous détaillons ensuite une technique d'estimation des noyaux à partir de la connaissance de quelques réponses impulsionnelles dans le champ dans la partie 2. Enfin, nous présentons un résultat expérimental dans la partie 3,

# 1 Approximation des opérateurs

Nous considérons des images  $d$ -dimensionnelles définies sur un domaine  $\Omega = [0, 1]^d$ . On considère un opérateur de flou  $H : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  défini pour toute image  $u \in L^2(\Omega)$  par :

$$\forall x \in \Omega, \quad Hu(x) = \int_{y \in \Omega} \kappa(x, y)u(y)dy. \quad (1)$$

La fonction  $\kappa : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée noyau de l'opérateur et définit la fonction d'étalement du point (PSF)  $\kappa(\cdot, y)$  en tout point  $y \in \Omega$ .

**Définition 1** (Opérateurs de flou). Soient  $M \in \mathbb{N}$  et  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction bornée décroissante. Nous définissons un opérateur de flou de classe  $\mathcal{A}(M, f)$  comme un opérateur intégral satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Son noyau  $\kappa \in \mathcal{C}^M(\Omega \times \Omega)$
2. Les dérivées partielles de  $\kappa$  satisfont pour tout multi indice  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  de longueur  $|\alpha| \leq M$ , et  $\forall (x, y) \in \Omega \times \Omega$  :
  - (a)  $|\partial_x^\alpha \kappa(x, y)| \leq f(\|x - y\|_\infty)$
  - (b)  $|\partial_y^\alpha \kappa(x, y)| \leq f(\|x - y\|_\infty)$ .

Les conditions 2a et 2b sont des hypothèses de régularité qui portent respectivement sur les variations de la PSF dans le champ (2a) et sur la PSF elle-même (2b).

Récemment, il a été montré que les opérateurs de flou variable peuvent être approchés par des représentations parcimonieuses dans des bases d'ondelettes [3]. L'idée de cette méthode est de décomposer l'opérateur sur une base d'ondelettes

$$H = \Psi \Theta \Psi^*$$

où  $\Psi^*$  est l'opérateur de décomposition en ondelettes,  $\Psi$  son inverse et  $\Theta$  est la représentation de  $H$  dans la base d'ondelette. Dans [3], nous avons montré que les coefficients de  $\Theta$  ont une décroissance rapide. Cette décomposition peut ainsi être utilisée pour à la fois, compresser la matrice  $\Theta$  et effectuer rapidement des produits matrice-vecteur.

Pour obtenir un représentation en dimension finie de l'opérateur  $H$ , la représentation en ondelettes  $\Theta$  est tronquée à partir d'une certaine échelle. On obtient, une matrice  $\mathbf{H}$  qui agit sur un espace de dimension  $N$  :  $\mathbf{H} = \Psi \Theta \Psi^*$ , où  $\Psi^*$ ,  $\Psi$  sont les transformées en ondelettes et  $\Theta$  est la matrice tronquée de  $\Theta$ .

**Théorème 1** (Représentations parcimonieuses en ondelette). Soit  $H \in \mathcal{A}(M, f)$  et soit  $\mathbf{H}$  sa troncature. On peut construire une matrice  $\tilde{\mathbf{H}}_\epsilon = \Psi \Theta_\epsilon \Psi^*$  telle que  $\|\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}}_\epsilon\|_{2 \rightarrow 2} \leq \epsilon$  et telle que  $\Theta_\epsilon$  contient au plus  $C_M N \epsilon^{-d/M}$  coefficients non-nuls. La constante  $C_M$  est indépendante de  $N$ .

Sous les mêmes hypothèses, nous avons montré dans [3] que les techniques de convolution par morceaux [2, 6, 4, 5] permettent d'atteindre une précision  $\epsilon$  pour une complexité  $C'_M N \log_2 N \epsilon^{-d}$ . Ce nombre d'opérations ne peut pas être amélioré dès que l'opérateur de flou est supposé variable. De plus, il ne dépend pas de la régularité  $M$  de l'opérateur de flou  $H$ . Les bases d'ondelettes apparaissent donc comme plus pertinentes

pour la compression des opérateurs de flou : elles sont capables de s'adapter automatiquement à la régularité de l'opérateur.

Finalement, nous avons montré qu'il était possible de déterminer un support de parcimonie adapté en ne connaissant que la régularité globale  $M$  du noyau intégral  $\kappa$  ainsi que la fonction  $f$ . On note  $\mathbb{S}_{M, f, K}$  l'espace des matrices  $K$ -sparses ayant le support correspondant à la classe  $\mathcal{A}(M, f)$ . Le support obtenu est optimal dans un certain sens sur la classe  $\mathcal{A}(M, f)$  [3]. Toutes les matrices de  $\mathbb{S}_{M, f, K}$  partagent le même support. Ce dernier résultat a une conséquence importante : il rend le problème d'estimation de l'opérateur raisonnable puisque la dimension de l'espace de recherche est considérablement réduite.

# 2 Estimation des opérateurs

On se place dans le cadre où l'on connaît quelques PSFs bruitées  $\{\kappa_i\}_{i=1}^m$  de l'opérateur à quelques positions dans l'espace  $\{y_i\}_{i=1}^m$ . On suppose le modèle d'observation  $\kappa_i = \mathbf{H}_{\cdot, y_i} + \eta_i$  où  $\mathbf{H}_{\cdot, j}$  est la  $y_i$ -ème colonne de la matrice  $\mathbf{H}$ , et  $\eta_i$  est un vecteur gaussien de taille  $N$ . Le but est de reconstruire la matrice  $\mathbf{H}$  à partir des  $\kappa_i$ . On suppose que les PSFs sont connues indépendamment, mais d'autres travaux [7] étudient la reconstruction de l'opérateur à partir de la connaissance de  $\sum_{i=1}^m \kappa_i$ .

L'hypothèse principale de ce travail est que les PSF varient régulièrement dans le domaine. La fonction  $y \rightarrow \kappa(x + y, y)$ ,  $\forall x \in \Omega$  est donc régulière. Nous allons exploiter cette régularité pour interpoler le noyau. Pour cela, on définit un opérateur de différences finies  $D_l$  agissant sur la direction  $l \in \{1, \dots, d\}$  :

$$(D_l \mathbf{H})_{\lambda, \mu} = \sum_{h \in \mathcal{H}} c_h \mathbf{H}_{\lambda + h e_l, \mu + h e_l}$$

avec  $\mathcal{H}$  un ensemble de pas admissibles,  $c_h$  les coefficients de la différence finie et  $e_l$  le vecteur de la base canonique ayant toutes ses valeurs nulles sauf la  $l$ -ème composante valant 1. L'ordre de l'opérateur  $D_l$  doit être choisi en fonction de la dimension  $d$  de  $\Omega$ . On définit l'opérateur  $D = \sum_{l=1}^d D_l$ .

Pour interpoler l'opérateur, on propose de résoudre le problème variationnel suivant :

$$\inf_{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N^2}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\kappa_i - \mathbf{H}_{\cdot, y_i}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|D\mathbf{H}\|_F^2, \quad (2)$$

où  $\|\cdot\|_F$  désigne la norme de Frobenius.

Par exemple, en dimension  $d = 1$ ,  $D_l$  peut correspondre au gradient dans la direction  $l$  i.e.  $(D_1 \mathbf{H})_{\lambda, \mu} = \mathbf{H}_{\lambda+1, \mu+1} - \mathbf{H}_{\lambda, \mu}$ . La formulation (2) permet alors de faire une interpolation linéaire. En dimension  $d = 2$ , on peut utiliser des différences finies  $D_l$  d'ordre 2 pour obtenir une interpolation par splines biharmoniques [8], i.e.

$$\begin{aligned} (D_1 \mathbf{H})_{\lambda, \mu} &= \mathbf{H}_{\lambda+(1,0), \mu+(1,0)} - 2\mathbf{H}_{\lambda, \mu} + \mathbf{H}_{\lambda-(1,0), \mu-(1,0)} \\ (D_2 \mathbf{H})_{\lambda, \mu} &= \mathbf{H}_{\lambda+(0,1), \mu+(0,1)} - 2\mathbf{H}_{\lambda, \mu} + \mathbf{H}_{\lambda-(0,1), \mu-(0,1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour obtenir des fonctions continues en dimensions  $d$  quelconques, il faudra choisir l'ordre de la différence finie  $D_l$  comme

étant supérieur strictement à  $d/2$ . En effet, les théorèmes d'injection des espaces de Sobolev permettent de déduire que les espaces de Sobolev  $W^{m,p}$  contiennent les fonctions continues dès que  $m > d/p$ .

La résolution du problème (2) est cependant impossible numériquement sous cette forme. En effet, la dimension de l'espace de recherche (les matrices de taille  $N \times N$ ) est gigantesque pour des problèmes de taille réelle. Nous allons donc exploiter la compressibilité des opérateurs dans le domaine des ondelettes. Une première remarque importante est que l'opérateur  $D : \mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$  peut être exprimé sous la forme d'une composition d'opérateurs  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Effectivement,  $\mathbf{H}_{\lambda+he_l, \mu+je_l} = (\mathbf{T}_{he_l} \mathbf{H} \mathbf{T}_{he_l}^T)_{\lambda, \mu}$  où  $\mathbf{T}_{e_l} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un opérateur de shift i.e.  $(\mathbf{T}_{e_l} u)_\lambda = u_{\lambda+e_l}$ . Les opérateurs peuvent aussi être décomposés dans des bases d'ondelettes. On note  $\mathbf{S}_{he_l} = \Psi^* \mathbf{T}_{he_l} \Psi$ , et  $H = \Psi \mathbf{S} \Psi$ . Ainsi,

$$\mathbf{T}_{he_l} \mathbf{H} \mathbf{T}_{he_l}^T = \Psi \mathbf{S}_{he_l} \mathbf{S} \mathbf{S}_{he_l}^T \Psi^*.$$

et donc,

$$D = \Psi \left( \sum_{l=1}^d \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{S}_{he_l} \mathbf{S} \mathbf{S}_{he_l}^T \right) \Psi^*.$$

Le problème (2) peut alors se reformuler de la manière suivante :

$$\inf_{\mathbf{S} \in \mathbb{S}_{M,f,K}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\Psi^* \kappa_i - \mathbf{S} \delta_{y_i}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{l=1}^d \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{S}_{he_l} \mathbf{S} \mathbf{S}_{he_l}^T \right\|_F^2, \quad (4)$$

avec  $\delta_{y_i} \in \mathbb{R}^N$  valant 1 en  $y_i$  et 0 ailleurs. La dimension du problème est alors réduite à la recherche de  $K$  coefficients dans le motif  $\mathbb{S}_{M,f,K}$ . On peut facilement résoudre ce problème quadratique en utilisant un gradient conjugué. Néanmoins, cette représentation a quelques inconvénients. D'une part, les matrices  $\mathbf{T}_{he_l}$  sont  $N$ -sparses, en les représentant dans le domaine des ondelettes par  $\mathbf{S}_{he_l}$ , on perd cette propriété très désirable. Cependant, les  $\mathbf{S}_{he_l}$  sont extrêmement compressibles en  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$  coefficients [1]. D'autre part, la résolution du système linéaire fait intervenir des produits de trois matrices parcimonieuses. Le résultat de ce produit n'est plus dans  $\mathbb{S}_{M,f,K}$ , il peut cependant être projeté dans cet espace, mais beaucoup de calculs seront inutiles. Cette étape peut être accélérée en pré-calculant les listes d'opérations qui donneront des coefficients dans le motif  $\mathbb{S}_{M,f,K}$ . Les calculs sont ainsi considérablement accélérés.

### 3 Résultats numériques

Dans cette partie nous présentons les résultats d'une expérience numérique. Nous travaillons sur une image 2D de  $N = 512 \times 512$  pixels. Le motif de parcimonie  $\mathbb{S}_{M,f,K}$  a été généré avec  $K = 10N$  coefficients,  $M = 1$  et  $f(t) = \frac{1}{1+t}$ , voir Figure 1. L'opérateur de différences finies utilisé pour l'interpolation du noyau est celui présenté en équation (3).

L'expérience repose sur un flou gaussien isotrope dont la variance croît selon la direction verticale. Pour illustrer l'action

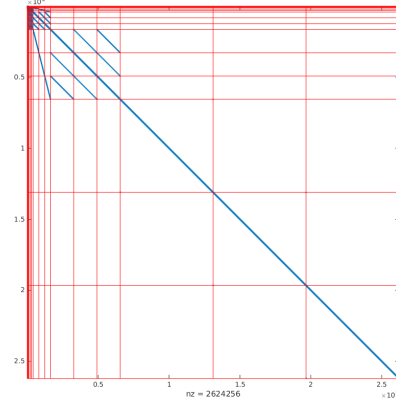


FIGURE 1 – Motif de parcimonie utilisé  $K = 10N$  coefficients,  $M = 1$  et  $f(t) = \frac{1}{1+t}$

de l'opérateur, on représente un champs de PSF sur une grille cartésienne sur la Figure 2. Les  $m = 256$  PSFs  $\{\kappa_i\}_{i=1}^m$  sont réparties arbitrairement dans l'espace. Elles sont présentées Figure 2. On interpole le noyau en résolvant le problème (4), voir Figure 3. On obtient un opérateur  $\tilde{\mathbf{H}}$  dont les PSFs évaluées sur le même peigne de Dirac sont présentées Figure 5. Une image dégradée est alors construite selon le modèle d'observation

$$u_f = \mathbf{H}u + \eta, \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_N),$$

et elle est restaurée avec  $\tilde{\mathbf{H}}$  en résolvant le problème TV- $L^2$  suivant :

$$u^* \in \arg \min_{u \in \mathbb{R}^N, \|\tilde{\mathbf{H}}u - u_f\|_2 \leq \alpha} TV(u),$$

où  $TV$  est la variation totale isotrope et  $\alpha > 0$  est un paramètre. Les Figures 4, 6 et 7 montrent respectivement l'image originale  $u$ , l'image dégradée  $u_f$  et l'image restaurée  $u^*$ .

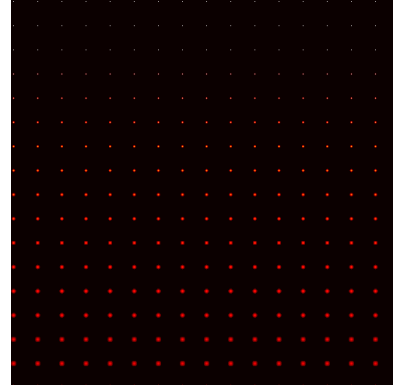


FIGURE 2 – PSFs de l'opérateur exact observées en couleur

### Conclusion

Dans ce travail, nous avons exploité la compressibilité des opérateurs de flous variables dans des bases d'ondelettes pour formuler un algorithme original de reconstruction d'opérateurs. Le problème d'estimation du noyau intégral à partir de quelques

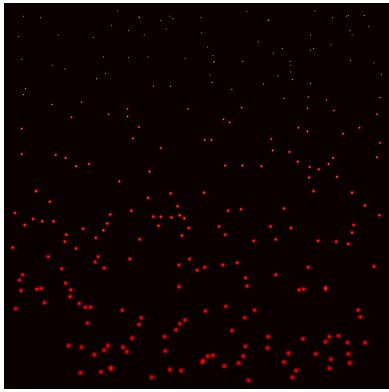


FIGURE 3 – PSFs utilisées pour l'interpolation

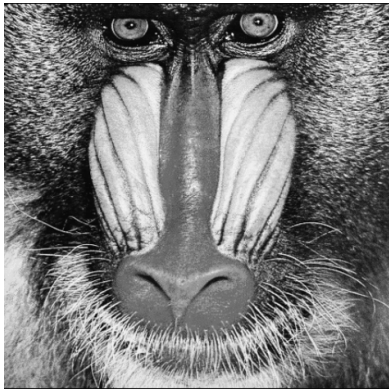


FIGURE 4 – Image originale  $u$

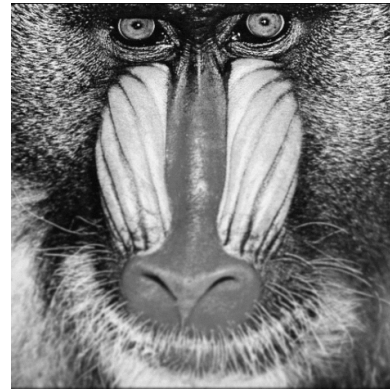


FIGURE 6 – Image dégradée  $u_f - \sigma = 0.01$   
pSNR = 25.4dB

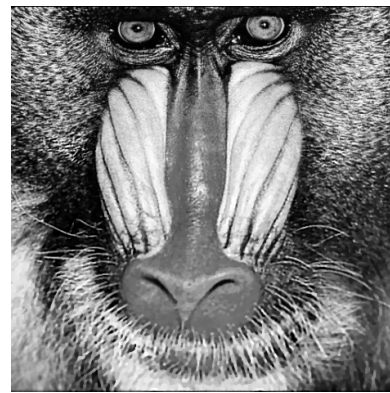


FIGURE 7 – Image restaurée  $u^* - \text{pSNR} = 26.42\text{dB}$   
(En utilisant l'opérateur exact : pSNR = 27.48dB)

PSFs - impossible sans compression - devient ainsi envisageable. Un algorithme de résolution du problème d'interpolation du noyau a été proposé et illustré avec un résultat numérique. Nous travaillons actuellement sur la construction de pré-conditionneurs pour résoudre rapidement les très grands systèmes linéaires en jeux dans ce problème.

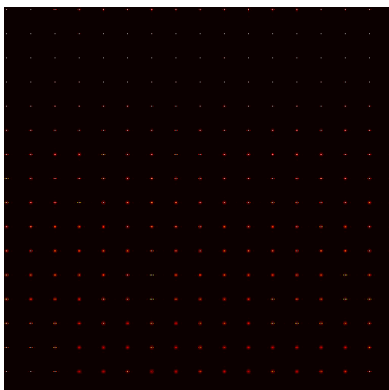


FIGURE 5 – PSFs interpolées

## Références

- [1] G. Beylkin. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(6) :1716–1740, 1992.
- [2] L. Denis, E. Thiébaud, F. Soulez, J.-M. Becker, and R. Mourya. Fast approximations of shift-variant blur. 2014.
- [3] P. Escande and P. Weiss. Complexity of spatially varying blur approximations. piecewise convolutions vs sparse wavelet representations. 2015.
- [4] P. C. Hansen, J. G. Nagy, and D. P. O'leary. *Deblurring images : matrices, spectra, and filtering*. Siam, 2006.
- [5] M. Hirsch, S. Sra, B. Scholkopf, and S. Harmeling. Efficient filter flow for space-variant multiframe blind deconvolution. In *CVPR, 2010*, pages 607–614. IEEE, 2010.
- [6] J. G. Nagy and D. P. O'Leary. Restoring images degraded by spatially variant blur. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19 :1063, 1998.
- [7] G. E. Pfander. Sampling of operators. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 19(3) :612–650, 2013.
- [8] H. Wendland. *Scattered data approximation*, volume 17. Cambridge university press, 2004.