To link to this article : DOI : 10.3166/RIA.29.515-542
URL : http://dx.doi.org/10.3166/RIA.29.515-542

To cite this version : Ben Amor, Nahla and Essghaier, Fatma and Fargier, Hélène *Décision collective sous incertitude possibiliste. Principes et axiomatisation.* (2015) Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 29 (n° 5). pp. 515-542. ISSN 0992-499X

Décision collective sous incertitude possibiliste

Principes et axiomatisation

Nahla Ben Amor [1], Fatma Essghaier [1,2], Hélène Fargier [2]

1. *LARODEC, Institut Supérieur de Gestion, Université de Tunis*
   41 rue de la liberté 2000 Le Bardo Tunisie
   essghaier.fatma@gmail.com,nahla.benamor@gmx.fr

2. *IRIT, CNRS & Université de Toulouse*
   118, route de Narbonne, 31062
   Toulouse Cedex 9, France
   fargier@irit.fr

RÉSUMÉ. *Cet article pose la question de la décision collective sous incertitude possibiliste. Il montre dans un premier temps que dans un contexte possibiliste, l'utilisation d'une fonction d'agrégation collective égalitariste ne souffre pas d'un Timing Effect. Il étend ensuite les travaux de Dubois et Prade (1995) - relatifs à l'axiomatisation des règles de décision qualitatives (les utilités optimiste et pessimiste) au cadre de décision collective et montre que si la décision collective comme les décisions individuelles satisfont les axiomes de Dubois et Prade (1995) alors l'agrégation collective égalitariste s'impose. Ce résultat peut être vu comme un pendant ordinal du théorème de Harsanyi (1955). Le tableau est enfin complété par une axiomatisation d'un pendant optimiste de cette règle de décision collective.*

ABSTRACT. *This paper raises the question of collective decision making under possibilistic uncertainty. We study several egalitarian decision rules and show that in the context of a possibilistic representation of uncertainty, the use of an egalitarian collective utility function allows us to get rid of the Timing Effect. Making a step further, we prove that if both the agents' preferences and the collective ranking of the decisions satisfy Dubois and Prade's axioms (Dubois, Prade, 1995), and particularly risk aversion, and Pareto unanimity, then the egalitarian collective aggregation is compulsory. This result can be seen as an ordinal counterpart of Harsanyi's theorem (Harsanyi, 1955). The picture is then completed by the proposition and the characterization of an optimistic counterpart of this pessimistic decision rule.*

MOTS-CLÉS : *décision sous incertitude, loteries possibilistes, choix collectif, axiomatisation, timing effect.*

KEYWORDS: *decision Making under uncertainty, possibilistic lotteries, collective Choice, axiomatization, timing effect.*

1. Introduction

Pour définir une méthode d'agrégation des préférences dans les problèmes de décision collective en présence d'incertitude, il faut bien entendu se référer à une théorie de la décision sous incertitude ; qui capture le type des connaissances des agents ; et préciser l'opérateur d'agrégation collective à considérer. Il faut également préciser l'instant où l'utilité (agrégée ou anticipée) des agents est évaluée : antérieurement (*ex-ante*) ou postérieurement (*ex-post*) à la résolution de l'incertitude. Dans le premier cas, c'est une projection, modulée par la vraisemblance des états possibles, de l'utilité collective dans chaque état. Dans le second cas, la fonction d'utilité collective est une fonction des utilités anticipées par chacun des agents. Dans le cas probabiliste par exemple, une approche utilitariste du choix collectif calculerait l'utilité espérée de la moyenne de la satisfaction des agents (*ex-ante*) ou une moyenne des utilités espérées (*ex-post*) ; et une approche égalitariste pourrait être basée soit sur l'utilité espérée du moins satisfait des agents (*ex-ante*), soit sur le $\min$ des utilités espérées (*ex-post*). Or les approches *ex-ante* et *ex-post* ne coïncident pas toujours : dans le cas probabiliste égalitariste, la divergence est sévère : (ce phénomène a été appelé "Timing effect" par Myerson (1981)). En effet, dans ce cadre probabiliste, seule l'utilisation d'une fonction de choix social utilitariste permet de réconcilier les évaluations *ex-ante* et *ex-post*. En fait, Harsanyi (1955) a montré que si la décision collective satisfait les axiomes de Von Neuman et Morgenstern (1947), que les préférences de chaque agent suivent également ces axiomes, alors la seule approche collective appropriée (satisfaisant la Pareto unanimité) est l'approche utilitariste classique - ce théorème est souvent interprété comme une justification de l'utilitarisme.

Les résultats de (Morgenstern, Von Neumann, 1947) et de (Harsanyi, 1955) s'appuient sur une représentation probabiliste de l'incertitude. Lorsqu'il n'est pas possible de quantifier précisément ces informations mais que l'on possède une information de nature plus ordinale, la théorie de la décision possibiliste (Dubois, Prade, 1995 ; Dubois *et al.*, 1998) présente une alternative très attractive à l'utilité espérée. Dans ce contexte, deux critères qualitatifs possibilistes ont été proposés et axiomatisés, l'un prudent (fondé sur une mesure de nécessité), et l'autre plus aventureux (fondé sur une mesure de possibilité). De la même façon, des approches qualitatives de la décision multicritère ont été proposées, fondées sur l'utilisation d'intégrales de Sugeno (voir par exemple (Dubois, Marichal *et al.*, 2001 ; Marichal, 2001)) en particulier le $\min$ pondéré (Dubois, Prade, 1986), cette agrégation correspondant à l'agrégation collective égalitariste dès qu'on considère que les critères sont des agents de même importance.

Le présent article pose directement la question de la décision collective sous incertitude possibiliste [1]. Il étend au cas multi-agent les deux critères qualitatifs possibilistes et montre que les approches *ex-ante* et *ex-post* peuvent coïncider dans un

1. Cet article reprend et étend des travaux préliminaires présentés dans (Ben Amor *et al.*, 2014a ; 2014b). Il propose en particulier un théorème de représentation original concernant la décision collective optimiste.

contexte possibiliste. Plus généralement, nous montrons que si la décision collective comme les décisions individuelles satisfont les axiomes de Dubois et Prade (1995), en particulier l'aversion au risque, alors l'agrégation égalitariste s'impose. Ce théorème peut être vu comme un pendant ordinal du théorème de Harsanyi - il implique que non seulement décision sous incertitude et égalitarisme sont compatibles mais que, dans le contexte d'une représentation possibiliste et d'une attitude prudente par rapport au risque, seule l'utilisation d'une fonction d'agrégation collective égalitariste est possible.

L'article est structuré comme suit : nous rappelons dans la section suivante les notions de base relatives à la décision sous incertitude possibiliste, décision collective et décision collective probabiliste. En section 3 nous présentons les huit règles de décision que l'on peut proposer en décision multi-agent possibiliste (quatre optimistes, et quatre pessimistes). La section 4 constitue le cœur de l'article : elle présente le système d'axiomatisation sur lequel nous nous appuyons, puis démontre notre théorème de représentation ; elle présente enfin une variante de ce théorème adaptée au cas optimiste.

2. Notions de base

Dans ce qui suit on présente brièvement quelques travaux relatifs à la décision collective, la décision sous incertitude possibiliste et la décision collective probabiliste qui constituent les fondements de notre travail.

2.1. Décision sous incertitude possibiliste

Selon l'approche possibiliste mono-agent proposée par Dubois et Prade (1995) pour la décision qualitative sous incertitude, une décision peut être modélisée par une loterie (simple) possibiliste, c'est-à-dire par une distribution de possibilité normalisée sur un ensemble X de conséquences. Dans le cas fini, chaque loterie possibiliste L peut s'écrire $L = \langle \lambda_1/x_1, \ldots, \lambda_n/x_n \rangle$ où $\lambda_j = \pi_L(x_j)$ est le degré de possibilité que l'on obtienne la conséquence x_j en choisissant l'action (la loterie) L ; ce degré de possibilité sera noté $L[x_j]$.

Une loterie possibiliste *composée* est une distribution de possibilité normalisée sur des loteries (simples ou composées). On peut utiliser la notation :
$L = \langle \lambda_1/L_1, \ldots, \lambda_m/L_m \rangle$, λ_i désignant la possibilité de L_i selon L) - la condition de normalisation imposant que $\max \lambda_i = 1$; la possibilité $\pi_{i,j}$ de recevoir la conséquence x_j à partir d'une des sous loteries L_i dépend de la possibilité λ_i d'avoir L_i et de la possibilité λ_j^i d'avoir x_j de L_i (pour simplifier, nous supposons que les L_i sont des loteries simples ; le principe décrit ici s'étend directement au cas général) ; autrement dit $\pi_{i,j} = \min(\lambda_i, \lambda_j^i)$. Plus généralement, la possibilité de recevoir x_j à partir de la loterie composée $\langle \lambda_1/L_1, ..., \lambda_m/L_m \rangle$ est simplement le $\max$ des $\pi_{i,j}$. Dubois et al. (Dubois, Prade, 1995 ; Dubois *et al.*, 1998 ; Dubois, Godo *et al.*, 1999) ont donc proposé de réduire la loterie composée $\langle \lambda_1/L_1, ..., \lambda_m/L_m \rangle$ à une loterie

simple considérée comme équivalente (voir Figure 1 comme exemple), et ceci est défini par :

$$Reduction(\langle \lambda_1/L_1, ..., \lambda_m/L_m \rangle) = \langle \max_{i=1,m} \min(\lambda_1^i, \lambda_i)/x_1, ..., \max_{i=1,m} \min(\lambda_n^i, \lambda_i)/x_n \rangle \tag{1}$$

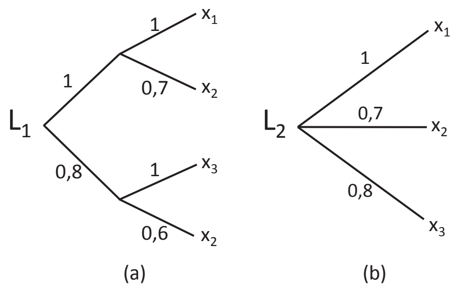

Figure 1. Une loterie composée L_1 (a) et sa réduction en loterie simple L_2 (b)

Sous l'hypothèse que l'échelle d'utilité et l'échelle d'évaluation des degrés de possibilité sont commensurables, ces auteurs ont proposé un degré d'utilité pessimiste ($U^-(L)$) et un degré d'utilité optimiste ($U^+(L)$) pour l'évaluation de loteries possibilistes. Formellement, pour toute loterie possibiliste simple L avec λ_j le degré de possibilité d'avoir x, $u(x_j)$ l'utilité relative à x on a :

$$U^+(L) = \max_{x_j \in X} \min(\lambda_j, u(x_j)) \tag{2}$$

$$U^-(L) = \min_{x_j \in X} \max(n(\lambda_j), u(x_j)) \tag{3}$$

n étant une fonction de renversement d'ordre (par ex $n(x) = (1-x)$). Le degré $U^-(L)$ estime dans quelle mesure il est certain (c'est-à-dire nécessaire) que L atteigne un degré d'utilité suffisant. Sa contrepartie optimiste, $U^+(L)$, estime dans quelle mesure il est possible que L atteigne ce degré d'utilité.

Dubois et Prade (1995) présentent enfin une caractérisation axiomatique de l'utilité pessimiste (et de l'utilité optimiste) : si on suppose que la relation de préférence du décideur sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des loteries possibilistes (simples et composées) que l'on peut construire sur un ensemble X à partir d'un ensemble de niveaux de possibilité V est un pré-ordre, et que cette relation obéit au principe de réduction des loteries et satisfait des axiomes de continuité, d'existence d'équivalents certains, d'indépendance faible et d'aversion au risque (voir (Dubois, Prade, 1995) pour plus de détails), alors les loteries simples [2] peuvent être évaluées selon une utilité globale pessimiste. Autrement

2. et donc les loteries composées puisqu'on peut les considérer comme équivalentes à leur réduction.

dit, on peut construire une échelle ordonnée U, une fonction d'utilité $u : X \mapsto U$, une fonction de renversement d'ordre $n : V \mapsto U$ telle que L est préférée à L' si et seulement si $U^-(L) \geq U^-(L')$. Cette axiomatisation constitue un pendant qualitatif (pessimiste) de l'axiomatisation que Von Neuman et Morgenstern ont proposée comme fondement de l'utilité espérée dans le cas probabiliste. Une version optimiste peut être obtenue en remplaçant les axiomes d'aversion au risque et de continuité par des axiomes de choix optimiste.

2.2. Décision collective

La modélisation précédente suppose que les conséquences de X sont clairement ordonnées, d'où l'utilisation d'une seule fonction d'utilité u. Dans un problème de décision multi-agent, chacun des p agents d'un ensemble d'agents $\mathcal{A} = \{1..., p\}$ est supposé pouvoir exprimer sa préférence sur un ensemble d'alternatives, à l'aide d'une fonction d'utilité u_i associant à chaque alternative une valeur dans $\mathbb{R}^+$, typiquement dans l'intervalle $[0, 1]$. Le problème est alors de pouvoir associer à chaque profil d'utilité une utilité globale qui traduit l'ordre de préférence de la collectivité sur les alternatives.

Lorsque la préférence collective ne dépend que des utilités individuelles que les agents accordent à chaque alternative x, l'utilité globale est obtenue à l'aide d'une fonction d'utilité collective (CUF), c-à-d $u(x) = f(u_1(x), \ldots, u_p(x))$. La théorie de l'utilité classique suppose que les meilleurs choix sont ceux qui maximisent la somme des utilités individuelles, c-à-d $u(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(x)$. Cette fonction possède plusieurs bonnes propriétés mais elle s'avère assez peu intéressante du point de vue de l'équité entre les agents ; elle est également inadaptée au cas où les utilités individuelles ne reflètent rien de plus qu'un ordre de préférence. A contrario, l'approche égalitariste classique propose de maximiser la satisfaction de l'agent le moins satisfait, c-à-d $u(x) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(x)$. Ces deux CUF peuvent être vues comme des Ordered Weighted Average (Yager, Kacprzyk, 1997) OWA particuliers (pour une étude sur les fonctions d'utilité collective, voir (Moulin, 2003)).

Lorsque les agents sont de poids inégaux (comme par exemple dans un conseil d'administration, ou lorsqu'il s'agit plus d'agréger des critères que des préférences d'agents), un poids w_i peut être associé à chaque agent i, et nous pouvons utiliser un $\min$ ou un $\max$ pondéré :

$$u(x) = \max_{i=1,p} \min(w_i, u_i(x)) \tag{4}$$

$$u(x) = \min_{i=1,p} \max((1 - w_i), u_i(x)) \tag{5}$$

2.3. Décision collective sous incertitude

La question est maintenant de proposer une approche de la décision collective sous incertitude. Deux approches sont possibles. L'approche *ex-post* se ramène à un cas de décision sous incertitude mono agent (cet agent étant "la collectivité") en définissant la fonction d'utilité u comme étant une fonction d'utilité collective. L'approche *ex-ante* au contraire serait d'évaluer une loterie en combinant, selon la fonction d'utilité collective, les utilités (sous incertitude) des différents agents. Dans le cas probabiliste, il s'agit donc de calculer soit l'espérance de l'utilité collective (*ex-post*), soit l'agrégation des espérances individuelles d'utilité (*ex-ante*). Le problème est que ces utilités globales ne coïncident pas toujours : c'est le phénomène de *Timing effect* (Myerson, 1981). Il apparaît en particulier dans le cas probabiliste égalitariste (où l'agrégation des utilités des agents est basée sur le min et la résolution de l'incertitude est basée sur $produit$) ; puisque l'espérance du minimum des degrés de satisfaction est, en général, différente du minimum des espérances mathématiques comme le montre le contre-exemple suivant :

CONTRE-EXEMPLE 1. — *Soient deux agents* 1 *et* 2*, de poids égaux (*$w_1 = w_2 = 1$*) et deux loteries* L_1 *et* L_2 *relatives à deux conséquences* x_1 *et* x_2 *(Figure 2). Nous pouvons vérifier que l'espérance du minimum des degrés de satisfaction est différente du minimum des espérances mathématiques.*

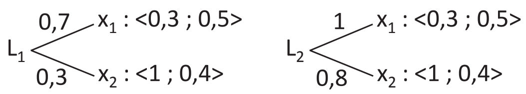

Figure 2. Loteries du contre-exemple 1

En effet, l'espérance du minimum des degrés de satisfaction de L_1 *(resp.* L_2*) est :*

$$\begin{array}{ccccc} 0,7 \times \min\,(0,3; 0,5) & + & 0,3 \times \min\,(1; 0,4) & = & 0,33 \\ 0,2 \times \min\,(0,3; 0,5) & + & 0,8 \times \min\,(1; 0,4) & = & 0,38. \end{array}$$

*(*ex-post*) on déciderait donc* $L_2 \succ L_1$.

Par contre le calcul relatif au minimum des espérances mathématiques de L_1 *et* L_2 $L_1 \succ L_2$ *; en effet, on a :*

$$\begin{array}{ccccc} \min\,(((0,7 \times 0,3) + (0,3 \times 1)) & , & ((0,7 \times 0,5) + (0,3 \times 0,4))) & = & 0,47 \\ \min\,(((0,2 \times 0,3) + (0,8 \times 1)) & , & ((0,2 \times 0,5) + (0,8 \times 0,4))) & = & 0,42. \end{array}$$

En 1955, Harsanyi a proposé un théorème qui a souvent été interprété comme une justification de la théorie utilitariste ; il montre que si (i) la décision collective satisfait les axiomes de Von Neuman et Morgenstern (1947), (ii) les préférences de chaque agent suivent aussi ces axiomes, et (iii) que si deux décisions sont indifférentes pour chaque agent, alors elles doivent aussi l'être globalement (axiome de Pareto indifférence), alors la seule approche collective appropriée est l'approche utilitariste classique. Myerson a ensuite prouvé (1981) que dans le cadre de loteries probabilistes seule l'utilisation d'une fonction d'agrégation collective affine permet de s'affranchir du Timing effect, et inversement, que toute tentative d'introduire une prise en compte de l'équité dans la fonction d'utilité collective résulte en un décalage entre l'approche *ex-post* et l'approche *ex-ante*.

3. Une approche possibiliste de la décision collective

Le théorème de Harsanyi est en fait fortement lié à la modélisation de l'incertitude et ne vaut que si on a une vue probabiliste de l'incertitude. Si l'on se place dans le cadre d'un problème de décision collective sous incertitude possibiliste, celui ci peut être défini par la donnée :

– d'un ensemble $\mathcal{L}$ de loteries possibilistes ;

– d'un vecteur de poids $\vec{w} \in [0,1]^p$: w_i est le poids de l'agent i ;

– d'un vecteur $\vec{u} = \langle u_1, \ldots, u_p \rangle$ de p fonctions d'utilités sur X : $u_i(x) \in [0,1]$ est l'utilité de x relative à l'agent i ;

En considérant que l'attitude par rapport au risque peut être pessimiste ou optimiste, l'agrégation collective basée sur un $\min$ ou un $\max$ pondéré, et la prise de décision peut être *ex-ante* ou *ex-post*, nous pouvons définir huit fonctionnelles d'utilité possibiliste collective [3] :

DÉFINITION 2. —

$$\begin{aligned}
U^{+\max}_{post}(L) &= \max_{x\in X} \min(L[x], \max_{i\in\mathcal{A}} \min(u_i(x), w_i)).\\
U^{-\min}_{post}(L) &= \min_{x\in X} \max((1-L[x]), \min_{i\in\mathcal{A}} \max(u_i(x), (1-w_i))).\\
U^{+\min}_{post}(L) &= \max_{x\in X} \min(L[x], \min_{i\in\mathcal{A}} \max(u_i(x), (1-w_i))).\\
U^{-\max}_{post}(L) &= \min_{x\in X} \max((1-L[x]), \max_{i\in\mathcal{A}} \min(u_i(x), w_i)).\\
U^{+\max}_{ante}(L) &= \max_{i\in\mathcal{A}} \min(w_i, \max_{x\in X} \min(u_i(x), L[x])).\\
U^{-\min}_{ante}(L) &= \min_{i\in\mathcal{A}} \max((1-w_i), \min_{x\in X} \max(u_i(x), (1-L[x]))).\\
U^{+\min}_{ante}(L) &= \min_{i\in\mathcal{A}} \max((1-w_i), \max_{x\in X} \min(u_i(x), L[x])).\\
U^{-\max}_{ante}(L) &= \max_{i\in\mathcal{A}} \min(w_i, \min_{x\in X} \max(u_i(x), (1-L[x]))).
\end{aligned}$$

Dans un contexte possibiliste, la coïncidence des approches *ex-post* et *ex-ante* n'implique pas donc l'utilitarisme, comme c'était le cas dans le cadre probabiliste. En effet les fonctionnelles utilités homogènes, totalement optimiste et totalement pessimiste, de type *ex-ante* sont égales à leur contrepartie *ex-post* :

PROPOSITION 3. — [4]

$$U^{-\min}_{ante}(L) = U^{-\min}_{post}(L) \tag{6}$$

$$U^{+\max}_{ante}(L) = U^{+\max}_{post}(L) \tag{7}$$

3. Dans notre système de notation le premier exposant indique l'attitude par rapport à l'incertitude : optimiste (+) ou pessimiste (-) ; le second indique le type de CUF utilisé (min, max, etc.).

4. Pour faciliter le fil de la lecture, les preuves détaillées ont été repoussées en Annexe.

De ce fait, pour simplifier les notations, on écrira dans la suite simplement $U^{+\max}$ pour $U^{+\max}_{ante}(L)$ et $U^{+\max}_{post}$, et $U^{-\min}$ pour $U^{-\min}_{ante}$ et $U^{-\min}_{post}$

Cette coïncidence entre les approches *ex-ante* et *ex-post* ne tient pas pour les fonctionnelles d'utilités mixtes $U^{+\min}$ et $U^{-\max}$: l'ordre prescrit par $U^{+\min}_{ante}$ (resp. $U^{-\max}_{ante}$) peut être différent de l'ordre prescrit par $U^{+\min}_{post}$ (resp. $U^{-\max}_{post}$), comme le montre l'exemple 5. Cependant, on peut démontrer que ces fonctionnelles d'utilités sont liées :

PROPOSITION 4. —

$$U^{+\min}_{ante}(L) \geq U^{+\min}_{post}(L) \quad (8)$$

$$U^{-\max}_{ante}(L) \leq U^{-\max}_{post}(L) \quad (9)$$

EXEMPLE 5. — Soient deux agents 1 et 2 qui ont le même degré d'importance (w_1 = w_2 = 1), et deux loteries possibilistes L et L' (Figure 3) relatives à trois conséquences x_1 , x_2 et x_3, telles que x_1 est bonne pour l'agent 1 et mauvaise pour l'agent 2, x_2 est mauvaise pour 1 et bonne pour 2, et x_3 est moyenne pour les deux agents ($u_1(x_3) = u_2(x_3) = 0.5$). Pour L, deux conséquences sont totalement possibles, x_1 et x_2 ($L[x_1] = L[x_2] = 1$) ; L' est une loterie constante garantissant x_3 dans tous les cas.

Figure 3. Loteries L et L' relatives à Exemple 5

Puisque L' est constante, on a :
$U^{+\min}_{post}(L') = U^{+\min}_{ante}(L') = \min(u_1(x_3), u_2(x_3)) = 0.5$.
D'autre part, on peut vérifier que :
$U^{+\min}_{post}(L) = \max(\min(1, \min\max(1-1, 1), \max(1-1, 0)),$
$\min(1, \min\max(1-1, 0), \max(1-1, 1))) = 0$
$U^{+\min}_{ante}(L) = \min(\max(1-1, \max(\min(1, 1), \min(1, 0))),$
$\max(1-1, \max(\min(1, 0), \min(1, 1)))) = 1$

C'est-à-dire que $U^{+\min}_{post}(L) < U^{+\min}_{post}(L')$ alors que $U^{+\min}_{ante}(L) > U^{+\min}_{ante}(L')$.

On peut vérifier, en utilisant les mêmes loteries L et L' que : $U^{-\max}_{post}(L) = 1$, $U^{-\max}_{ante}(L) = 0$ et $U^{-\max}_{post}(L') = U^{-\max}_{ante}(L') = 0,5$. On a donc $U^{-\max}_{post}(L) > U^{-\max}_{post}(L')$ alors que $U^{-\max}_{ante}(L) < U^{-\max}_{ante}(L')$.

Remarquons enfin que, comme prévu par la Proposition 4 $U^{+\min}_{ante}(L) = 1 \geq U^{+\min}_{post}(L) = 0$ et $U^{-\max}_{ante}(L) = 0 \geq U^{-\max}_{post}(L) = 1$ $\square$

De plus, nous avons prouvé qu'il existe une corrélation par dualité entre les utilités optimistes et pessimistes, comme le montre la Proposition 6.

PROPOSITION 6. —
Soit $\langle \mathcal{L}, \vec{w}, \vec{u} \rangle$ un problème de décision collective qualitative, et $\langle \mathcal{L}, \vec{w}, \vec{u^\tau} \rangle$ le problème inverse, i.e. le problème tel que pour chaque conséquence $x \in X, i \in \mathcal{A}$, $u_i^\tau(x) = 1 - u_i(x)$. Alors, pour chaque loterie $L \in \mathcal{L}$ on a :

$$
\begin{array}{ll}
U^{+\max}_{ante}(L) = 1 - U^{\tau-\min}_{ante}(L) & U^{+\max}_{post}(L) = 1 - U^{\tau-\min}_{post}(L) \\
U^{-\min}_{ante}(L) = 1 - U^{\tau+\max}_{ante}(L) & U^{-\min}_{post}(L) = 1 - U^{\tau+\max}_{post}(L) \\
U^{+\min}_{ante}(L) = 1 - U^{\tau-\max}_{ante}(L) & U^{+\min}_{post}(L) = 1 - U^{\tau-\max}_{post}(L) \\
U^{-\max}_{ante}(L) = 1 - U^{\tau+\min}_{ante}(L) & U^{-\max}_{post}(L) = 1 - U^{\tau+\min}_{post}(L)
\end{array}
$$

En résumé, il est possible d'échapper au Timing Effect sans pour autant adopter une approche utilitariste ; l'utilité pessimiste $U^{-\min}$ est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de concilier décision sous incertitude et égalitarisme.

4. Axiomatisation des fonctionnelles d'utilité collectives possibilistes

Dans ce qui suit, nous présentons une axiomatisation des fonctionnelles d'utilités possibilistes homogènes, robustes au Timing effect : l'utilité pessimiste $U^{-\min}(L)$ et l'utilité optimiste $U^{+\max}(L)$. La première, on l'a vu, est plus intéressante puisqu'elle permet une approche égalitariste et prudente de la décision collective sous incertitude. La seconde (qu'on peut l'appeler aristocratique) est simplement une contrepartie (hyper) optimiste, où une décision est bonne à partir du moment où il est tout à fait possible, pour au moins un des agents, d'obtenir une bonne conséquence.

Formellement, considérons un ensemble de p agents $\mathcal{A} = \{1, ..., p\}$, un ensemble de conséquences X, une échelle de possibilité V, l'ensemble des loteries possibilistes $\mathcal{L}$ qui peuvent être construites à partir de V et X. L'objectif d'une règle de décision collective sous incertitude est de définir une relation $\succeq$ sur $\mathcal{L}$ à partir d'un profil de préférences donné $\langle \succeq_1, \ldots, \succeq_p \rangle$ décrivant les relations $\succeq_i$ sur $\mathcal{L}$ des p agents dans $\mathcal{A}$. Notons x la loterie "constante" qui rend la conséquence x de manière certaine et la loterie Y qui représente un sous-ensemble de X (elle associe le degré de possibilité 1 à tout $y \in Y$, et le degré 0 à toutes les autres conséquences).

Nous supposerons, tout d'abord, un axiome d'exhaustivité de l'espace des conséquences :

Axiome Ex (Exhaustivité de X) : $\forall x, y \in X, \forall B \subseteq \mathcal{A}, \exists z \in X$ tel que : $z \sim_i x$ si $i \in B$ et $z \sim_j y$ si $i \notin B$.

Cet axiome demande qu'il existe dans X un objet z qui est équivalent à x pour les agents de B et équivalent à y pour les autres agents. Autrement dit, z est la conséquence que la collectivité accepte comme substitut au fait de donner x aux agents qui appartiennent à B et y aux autres. Cet axiome peut être vu comme une contrepartie d'un équivalent certain (Axiome 2 de l'utilité pessimiste de Dubois et Prade) pour le choix social. c'est en quelque sorte un équivalent collectif.

Poser cette exigence implique en particulier que X contient un x^* qui est idéal pour tous les agents, et un x_* qui est anti-idéal pour tous. En pratique, lorsque l'ensemble X des objets à comparer est trop petit, on peut toujours l'étendre, l'enrichir de manière à ce qu'il contienne tous les z dont on a besoin. Dans la suite, cet axiome est vérifié par construction (dans l'article d'Harsanyi il est implicite : X est identifié avec l'ensemble des vecteurs d'utilité que l'on peut construire sur $[0, 1]^p$)

Nous considérons également l'axiome de Pareto unanimité, indiscutable en choix collectif :

Axiome P (Pareto unanimité) : Si $\forall i \in \mathcal{A}$, $L \succeq_i L'$, alors $L \succeq L'$.

En ce qui concerne la manière dont le choix collectif doit être réalisé seuls ces axiomes minimaux pour le choix collectif sont explicitement posés - on ne suppose en particulier aucune forme d'égalitarisme ou d'utilitarisme.

Pour axiomatiser la fonctionnelle d'utilité pessimiste $U^{-\min}$, on exigera que le choix est effectué, *ex-ante* comme *ex-post*, de manière qualitative prudente : nous reprenons donc les axiomes de Dubois et Prade (1995) que nous écrivons ici pour toute relation $\trianglerighteq$ sur $\mathcal{L}$ (dans la suite, ils s'appliqueront à $\succeq$ comme à $\succeq_i$, $i \in \mathcal{A}$) :

– **Axiome 1** : La relation de préférence $\trianglerighteq$ sur $\mathcal{L}$ est complète et transitive.

– **Axiome 2** (Equivalent certain) : $\forall Y \subseteq X$, $\exists x \in Y$ t.q. x et Y sont équivalents pour $\trianglerighteq$.

– **Axiome 3** (Aversion au risque) : Si $\forall x \in X, L'[x] \geq L[x]$ (L est plus spécifique que L'), alors $L \trianglerighteq L'$.

– **Axiome 4** (Indépendance faible) : Si L et L' sont équivalentes, alors $\langle \lambda/L, \mu/L" \rangle$ et $\langle \lambda/L', \mu/L" \rangle$ le sont aussi, quel que soient λ, μ t.q. $\max(\lambda, \mu) = 1$.

– **Axiome 5** (Réduction de loteries) :
$\langle \lambda/x, \mu/(\alpha/x, \beta/y) \rangle \sim \langle \max(\lambda, \min(\mu, \alpha))/x, \min(\mu, \beta)/y \rangle$
$\forall \lambda, \mu, \alpha, \beta$ t.q. $\max(\lambda, \mu) = \max(\alpha, \beta) = 1$ (normalisation des loteries composées).

– **Axiome 6** (Continuité de $\mathcal{L}$) : Si $\forall x \in X, L[x] \geq L'[x]$ alors $\exists \lambda$ t.q. $L' \sim \langle 1/L, \lambda/X \rangle$.

Pour axiomatiser la fonctionnelle d'utilité optimiste $U^{+\max}$, il faut remplacer les axiomes 3 et 6 par leur version optimiste :

– **Axiome 3'** (Attirance pour les gains) : Si $\forall x \in X, L'[x] \geq L[x]$ (L est plus spécifique que L'), alors $L' \trianglerighteq L$.

– **Axiome 6'** (Continuité) : Si $\forall x \in X, L[x] \geq L'[x]$ alors $\exists \lambda$ t.q. $L' \sim \langle 1/L', \lambda/X \rangle$.

4.1. *Propriétés des utilités collectives possibilistes*

Dans un premier temps, il nous faut vérifier la cohérence de ces ensembles d'axiomes, et plus généralement, vérifier que nos utilités collectives les satisfont. C'est l'objet de cette sous section. Nous représenterons nos deux théorèmes de représentation (et les principes de leurs démonstrations) dans les deux sections suivantes.

Soit donc un ensemble $\mathcal{L}$ de loteries possibilistes, un vecteur de poids $\vec{w} \in [0,1]^p$ (w_i est le poids de l'agent i) et une famille u_i ($i \in \mathcal{A}$) de p fonctions d'utilité sur X à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que X est assez riche pour que l'axiome C soit satisfait. Nous pouvons montrer respectivement pour les utilités optimiste et pessimiste que :

PROPOSITION 7. — *Les relations de préférence $\succeq$ et $\succeq_i$ définies par :*

– *$L \succeq L'$ ssi $U^{+\max}(L) \geq U^{+\max}(L')$,*
– *$L \succeq_i L'$ ssi $U_i^{+}(L) \geq U_i^{+}(L')$*

satisfont les axiomes $1, 2, 3', 4, 5$ et $6'$, ainsi que l'axiome de Pareto unanimité.

PROPOSITION 8. — *Les relations de préférence $\succeq$ et $\succeq_i$ définies par :*

– *$L \succeq L'$ ssi $U^{-\min}(L) \geq U^{-\min}(L')$,*
– *$L \succeq_i L'$ ssi $U_i^{-}(L) \geq U_i^{-}(L')$*

satisfont les axiomes $1, 2, 3, 4, 5$ et 6, ainsi que l'axiome de Pareto unanimité.

La satisfaction des axiomes de Dubois et Prade par les $\succeq_i$ découle de la construction : ce sont par définition des ordres d'utilité pessimistes (si on considère les U_i^-) ou optimistes (si l'on considère les U_i^+) .

$U^{-\min}$ (resp. $U^{+\max}$) est clairement une fonctionnelle d'utilité pessimiste (resp. optimiste) bâtie sur la fonction d'utilité $u(x) = \min\limits_{i=1,p} \max(u_i(x_j), (1 - w_i))$ (resp. $u(x) = \max\limits_{i=1,p} \min(u_i(x_j), w_i))$; donc l'ordre $\succeq$ défini par $U^{-\min}$ (resp. $U^{+\max}$) satisfait les axiomes $1, 2, 3, 4, 5$ *et* 6 (resp. $1, 2, 3', 4, 5$ *et* $6'$).

La preuve de la Pareto unanimité est également simple : $L \succeq_i L'$ ssi pour l'utilité optimiste $U_i^+(L) \geq U_i^+(L')$ et ssi $U_i^-(L) \geq U_i^-(L')$ pour l'utilité pessimiste ; $L \geq_i L'$ pour tout i implique donc que l'agrégation par le $\max$ pondéré des U_i^+ ou le $\min$ pondéré des U_i^- a une valeur pour L au moins aussi grande que pour L' - le $\max$ comme le $\min$ pondéré sont des opérations monotones croissantes. Donc $U_{post}^{-\min}(L) \geq U_{post}^{-\min}(L')$ et $U_{post}^{+\max}(L) \geq U_{post}^{+\max}(L')$.

Si l'on considérait les utilités mixtes $U_{post}^{+\min}$, $U_{post}^{-\max}$, on pourrait montrer de la même façon que les relations définies par les approches *ex-post* satisfont tous les axiomes de l'utilité pessimiste pour l'une, et de l'utilité optimiste pour l'autre. En revanche, et c'est rédhibitoire, elles ne satisfont pas l'axiome de Pareto unanimité, comme le montre le contre-exemple suivant :

CONTRE-EXEMPLE 9. — *Soient deux agents 1 et 2, de poids égaux ($w_1 = w_2 = 1$) et les deux loteries L_1 et L_2 relatives aux conséquences x_1, x_2 et x_3 (Figure 4).*

L'agent 1 *préfère* L_1 *à* L_2 *(puisque* $U_1^+(L_1) = 0,9 > U_1^+(L_2) = 0,8$*) alors que ces deux loteries sont équivalentes pour l'agent* 2 *(*$U_2^+(L_1) = U_2^+(L_2) = 0,8$*).*
Par contre, le calcule de l'utilité globale $U_{post}^{+\min}$ *donne :*
$U_{post}^{+\min}(L_1) = \max(\min(1, \min(\max(0,9;(1-1)), \max(0,1;(1-1)))), \min(0,9; \min(\max(0,1;(1-1)), \max(0,8;(1-1))))) = 0,1$ *et* $U_{post}^{+\min}(L_2) = 0,8$.
c'est-à-dire $U_{post}^{+\min}(L_2) > U_{post}^{+\min}(L_1)$*, ce qui contredit l'axiome de Pareto unanimité.*

Figure 4. Loteries du contre-exemple 9

De même pour $U_{post}^{-\max}$*, en utilisant la Proposition 6, on modifie le contre-exemple en replaçant les vecteurs d'utilité relatifs à* x_1*,* x_2 *et* x_3 *par respectivement* $\langle 0,1; 0,9 \rangle$ *,* $\langle 0,9; 0,2 \rangle$ *et* $\langle 0,2; 0,2 \rangle$*.*

On peut vérifier que l'agent 1 *préfère* L_2 *à* L_1 *(puisque* $U_1^{-\tau}(L_2) = 0.2 > U_1^{-\tau}(L_1) = 0,1$*) alors que ces deux loteries sont équivalentes pour l'agent* 2 *(*$U_2^{-\tau}(L_1) = U_2^{-\tau}(L_2) = 0,2$*). Par contre, on peut vérifier que :* $U_{post}^{-\max}(L_1) > U_{post}^{-\max}(L_2)$*. Donc* $U_{post}^{-\max}$ *ne satisfait pas l'axiome P.*

Les utilités $U_{ante}^{+\min}$ et $U_{ante}^{-\max}$, quant à elles, satisfont l'axiome de Pareto ; en revanche, elles ne satisfont pas l'indépendance faible, comme le montre le contre-exemple 10. Ce ne sont donc pas des utilités qualitatives au sens de Dubois et Prade.

CONTRE-EXEMPLE 10. — *Considérons deux agents* 1 *et* 2*, tel que* w_1 *= 0.5 et* w_2 *= 1 et les trois loteries* L_1*,* L_2 *et* L_3 *relatives à deux conséquences* x_1 *et* x_2 *(Figure 5). Considérons aussi les deux loteries composées* L *et* L' *définies par* $L = \langle 1/L_1, 0.9/L_3 \rangle$ *et* $L' = \langle 1/L_2, 0.9/L_3 \rangle$*.*

Nous pouvons vérifier que l'axiome d'indépendance faible est violé par $U_{ante}^{+\min}$*. En effet,* L_1 *et* L_2 *sont équivalentes :* $U_{ante}^{+\min}(L_1) = U_{ante}^{+\min}(L_2) = 0,5$ *alors que :* $U_{ante}^{+\min}(L)$ = $\min(\max((1-0,5), \max(\min(0,5;0,3), \min(1;0,6))), \max((1-1), \max(\min(0,5;0,8), \min(1;0,4)))) = 0,5$ *et* $U_{ante}^{+\min}(L') = 0,6$.
C'est-à-dire $U_{ante}^{+\min}(L') > U_{ante}^{+\min}(L)$ *ce qui contredit l'axiome d'indépendance faible.*

Figure 5. Loteries du contre-exemple 10

En utilisant la Proposition 6 et le fait que $U^{-\max}_{ante} = 1 - U^{\tau+\min}_{ante}$ on modifie ce contre-exemple afin de prouver que $U^{-\max}_{ante}$ ne satisfait pas non plus cet axiome d'indépendance faible. On considère les mêmes agents 1 et 2 avec les poids respectifs : w_1 = 0,5 et w_2 = 1, les loteries L_1, L_2 L_3, L et L' et les fonctions d'utilité sont redéfinit comme suit : $u^\tau_1(x_1) = 0,7$, $u^\tau_2(x_1) = 0,2$, $u^\tau_1(x_2) = 0,4$ et $u^\tau_2(x_2) = 0,6$.

On peut vérifier que L_1 et L_2 sont équivalentes ($U^{-\max}_{ante}(L^\tau_1) = U^{-\max}_{ante}(L^\tau_2) = 0,5$) alors que : $U^{-\max}_{ante}(L) = 0,5 \neq U^{-\max}_{ante}(L') = 0,4$, ce qui prouve que $U^{-\max}_{ante}$ ne satisfait pas l'axiome d'indépendance faible.

Les utilités non homogènes souffrent, on l'a vu, du Timing Effect. Elles ne peuvent pas non plus satisfaire à la fois le principe de Pareto unanimité et l'indépendance faible, qui sont des propriétés de rationalité fondamentales. C'est pourquoi nous consacrons la suite de cette étude aux utilités homogènes, $U^{+\min}$ et $U^{-\max}$: notre objectif maintenant est de montrer que seules les utilités totalement pessimiste et totalement optimiste satisfont les axiomes de rationalité présentés dans la section précédente.

4.2. Un théorème de représentation pour l'agrégation collective possibiliste égalitariste

Dans la section précédente, on a montré que $U^{-\min}$ satisfait les axiomes d'exhaustivité de X, de Pareto unanimité ainsi que les axiomes de l'utilité possibiliste pessimiste. Nous allons maintenant procéder inversement : on considère une relation $\succeq$ sur $\mathcal{L}$ (construite sur X et V) qui satisfait les axiomes $1 - 6$, un ensemble de relations $\succeq_i$ sur le même $\mathcal{L}$ qui les satisfont également, et on suppose que les axiomes de Pareto unanimité et d'exhaustivité de X sont satisfaits, et on montre que cette relation peut être représentée par une utilité égalitariste possibiliste - en d'autres termes qu'il existe un vecteur de poids et un vecteur de fonctions d'utilité tel que $L \succeq L'$ ssi $U^{-\min}(L) \geq U^{-\min}(L')$. Nous commençons par présenter la preuve de notre théorème de représentation dans le cas général - en permettant aux agents d'avoir différents degrés d'importance. Par la suite, on imposera l'équité entre les agents, pour converger vers la version purement égalitariste de l'utilité pessimiste.

Puisque les axiomes (1 à 6) de Dubois et Prade sont satisfaits par $\succeq$ et par les $\succeq_i$, il est évident que ces relations peuvent être représentées par des utilités qualitatives pessimistes.

Considérons pour chaque $i \in \mathcal{A}$, $\top_i = \{x \in X, \forall y, x \succeq_i y\}$ - l'ensemble des conséquences qui sont les meilleures au sens de i (cet ensemble n'est pas vide puisque les $\succeq_i$ sont complets et transitifs). En vertu de l'axiome C, et puisque les relations de préférence sont complètes et transitives, il existe un acte constant qui appartient à tous les $\top_i$. On le note x^*. Par Pareto unanimité, $x^* \succeq y, \forall y \in X$. De la même façon, il existe un élément x_* qui est parmi les pires pour tous les agents.

Prenons maintenant un élément quelconque x de X ; en vertu de l'axiome Ex, pour tout i nous pouvons considérer l'acte constant $x^i \in X$ défini par :

DÉFINITION 11. — *$\forall x \in X$, pour tout agent i, x^i est un acte constant tel que : $x^i \sim_i x$ et $x^i \sim_j x^*$; pour tout $j \neq i$*

x^i représente l'utilité de x pour l'agent i et peut être vu comme un vecteur d'utilité relatif à la conséquence x pour l'agent i, qui prend une valeur correspondant à l'utilité de x pour l'agent i et x^* pour tout autre agent $j \neq i$. On note $\Delta_i = \{x^i, x \in X\}$ l'ensemble de ces "utilités" de i. Puisque $\succeq$ est un pré-ordre complet, cet ensemble contient un élément maximal et un élément minimal pour i ; on peut montrer qu'il sont égaux à $(x^*)^i = x^*$ et $(x_*)^i$, respectivement.

PROPOSITION 12. — $\forall x \in X, \forall i, (x^*)^i \succeq_i x \succeq_i (x_*)^i$

Si l'on considère maintenant la relation globale, on peut montrer que cet ordre est conservé :

PROPOSITION 13. — $\forall x \in X, \forall i, (x^*)^i \succeq x^i \succeq (x_*)^i$

L'union des Δ_i, c-à-d l'ensemble $\Delta = \{x^i, x \in X, i \in \mathcal{A}\}$ va jouer un rôle important dans notre démonstration - il permettra de construire l'échelle d'évaluation commune. L'ensemble Δ est naturellement ordonné par $\succeq$, et les ensembles Δ_i sont ordonnés par les $\succeq_i$.

Pour l'agent i, $(x^*)^i$ est l'une des meilleures conséquences et $(x_*)^i$ l'une des pires conséquences. Il peut arriver qu'un x^i soit équivalent selon $\succeq$ à $(x_*)^i$, le moins bon des éléments pour l'agent i, alors que i préfère x^i à $(x_*)^i$, évidemment. Cela est dû au fait que comme l'agent i est peu important, les conséquences qu'il considère comme mauvaises, et en particulier $(x_*)^i$ sont considérées globalement comme n'étant pas si mauvaises que ça - elles sont "remontées" à un niveau de satisfaction supérieur.

Notons $B_i = \{x^i \in \Delta_i,\ x^i \sim (x_*)^i\}$, l'ensemble des éléments de Δ_i qui sont considérés comme équivalents globalement à $(x_*)^i$, et ce même si l'agent i fait une différence. Les éléments de B_i forment une classe d'équivalence au sens de $\succeq$ mais pas forcement au sens de $\succeq_i$. Notons m_i le meilleur (au sens de $\succeq_i$) de ces éléments "remontés" par $\succeq$ [5]. Formellement, on définit :

DÉFINITION 14. — [6] *Pour tout $i \in \mathcal{A}$, $m_i = argmax_{\succeq_i}\{x^i\ :\ x^i \sim (x_*)^i\}$*

L'élément m_i reflète l'importance de l'agent : moins l'agent i est important, plus m_i, le niveau auquel on remonte les conséquences qu'il considére comme mauvaises, est haut.

---

5. S'il y a plusieurs éléments ex-aequo au sens de $\succeq_i$ dans B_i, m_i peut être n'importe lequel ce ceux-ci.
6. Dans la suite de la preuve, plusieurs pré-ordres complets sont utilisés - par soucis de clarté, nous indiquons pour toute opération de maximum ou de minimum à quel ordre elle fait référence. Dans la définition présente, on parle du $\max$ par rapport à $\succeq_i$.

Maintenant nous montrons ces deux Lemmes (Lemme 15 et Lemme 16) :

LEMME 15. — $\forall x \in X, i = 1, p$, $x^i \sim \max_{\succeq_i}(m_i, x^i)$
où $m_i = argmax_{\succeq_i}\{x^i, x^i \sim (x_*)^i\}$.

LEMME 16. — $\forall x \in X$, $x \sim argmin_{\succeq}\ \{x^i, i \in \mathcal{A}\}$.

Des Lemmes 15 et 16 on peut déduire le principe de base de comparaison des x par la collectivité :

COROLLAIRE 17. — *Pour tout* $x \in X$, $x \sim argmin_{\succeq}\{\max_{\succeq_i}(m_i, x^i), i \in \mathcal{A}\}$.

Reprenons maintenant la preuve de Dubois et Prade qui démontre que $\succeq$ satisfaisant les axiomes 1 à 6 est représentable par une fonctionnelle d'utilité pessimiste ; dans cette preuve, les auteurs considèrent une échelle $U = \{[x], x \in X\}$ où $[x]$ est la classe d'équivalence de x pour $\succeq$ (on quotiente l'ensemble des x par la relation d'équivalence $\sim$). U est totalement ordonnée par $\succeq$. Dans la présente preuve, on utilisera une relation $\trianglerighteq$ un peu plus fine sur l'ensemble $\Delta = \{x^i, x \in X, i \in \mathcal{A}\}$ (et par extension, sur tout X, vu que $x \sim argmin_{\succeq}\{x^i, i \in \mathcal{A}\}$). Cette relation est alors définie comme suit :

DÉFINITION 18. — *Pour tout* $x, y \in X, i, j \in \mathcal{A}$ *:*

– $x^i \trianglerighteq y^i$ *ssi* $x^i \succeq_i y^i$
– *pour tout* $i \neq j$, $x^i \trianglerighteq y^j$ *ssi* $x^i \succeq_i m_i$, $y^j \succeq_j m_j$ *and* $x^i \succeq y^j$

Cette relation est un pré-ordre partiel : elle est évidement réflexive, et elle est transitive, principalement parce que $x^i \sim_k y^j$ dès que $k \neq i, j$.

PROPOSITION 19. — $\trianglerighteq$ *est réflexive et transitive.*

$\trianglerighteq$ n'est pas complète : si $x^i \prec m_i$ ou $y^j \prec m_j$ pour $i \neq j$, x^i et y^j deviennent incomparables : on a ni $x^i \trianglerighteq y^j$ ni $y^j \trianglerighteq x^i$. Ceci n'est pas problématique, puisque (i) la restriction de $\trianglerighteq$ pour chaque Δ_i est un pré-ordre complet (pour Δ_i, $\trianglerighteq = \succeq_i$) et que (ii) chaque x^i qui est au moins aussi bon que m_i pour i est comparable à chaque x^j qui est au moins aussi bon que m_j pour j.

Ces propriétés garantissent l'existence de la fonction $v(x)$=$\min_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i)$: $i \in \mathcal{A}\}$ qui est définie pour tout x. Du corollaire 17 et de la définition de $\trianglerighteq$ (Définition 18), nous pouvons déduire que : $x \sim argmin_{\trianglerighteq}\{\ \max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i), i \in \mathcal{A}\}$ $(x \sim v(x))$. Soit k l'agent pour lequel on atteint la plus petite valeur dans l'expression de $v(x)$: $\max_{\trianglerighteq}(m_k, x^k)$ appartient à Δ_k ; et forcément $v(x) \succeq_k m_k$. Par conséquent, $v(x)$ et $v(y)$ sont comparables par $\trianglerighteq$ quels que soient x et y. Ce qui nous permet d'écrire le Lemme suivant :

LEMME 20. —
$x \succeq y$ *ssi* $argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i) : i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, y^i) : i \in \mathcal{A}\}$.

Parce que travailler avec un pré-ordre partiel n'est pas commode, on peut utiliser n'importe quel pré-ordre complet $\trianglerighteq'$ sur Δ (il en existe toujours un), tel que $x \trianglerighteq y \Rightarrow x \trianglerighteq' y$. Alors on obtient :

LEMME 21. —
$x \succeq y$ *ssi* $argmin_{\trianglerighteq'}\{\max_{\trianglerighteq'}(m_i, x^i){:}i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq' argmin_{\trianglerighteq'}\{\max_{\trianglerighteq'}(m_i, y^i){:}i \in \mathcal{A}\}$.

Puisque $\succeq$ satisfait les axiomes 1 à 6 de Dubois et Prade, on peut maintenant reprendre leur résultat relatif à l'utilité qualitative pessimiste : il existe une fonction de renversement d'ordre $n : V \mapsto X$ telle que :
$L \succeq L'$ ssi $\min_{\substack{\succeq\\ x\in X}} \max_{\succeq}(n(L[x]), u(x)) \succeq \min_{\substack{\succeq\\ x\in X}} \max_{\succeq}(n(L'[x]), u(x))$.

Notons maintenant $u(x) = argmin_{\trianglerighteq'}\{\max_{\trianglerighteq'}(m_i, x^i), i \in \mathcal{A}\}$ et $n^{ext}(v) = u(n(v))$ ($n(v)$ est bien un élément de Δ). En appliquant le Lemme 21, on peut réécrire :

$$L \succeq L' \; ssi \quad \min_{\substack{\trianglerighteq'\\ x\in X}} \max_{\trianglerighteq'}(n^{ext}(L[x]), u(x)) \trianglerighteq' \min_{\substack{\trianglerighteq'\\ x\in X}} \max_{\trianglerighteq'}(n^{ext}(L'[x]), u(x)).$$

$n^{ext}(v)$ ainsi que les m_i et les x^i sont des éléments de Δ. Dans leur démonstration originale, pour se ramener à une échelle ordinale (identifiable à un sous ensemble de $[0, 1]$), Dubois et Prade utilisent une fonction d'utilité qui associe à chaque x sa classe d'équivalence dans X selon $\succeq'$. Nous considérons ici l'échelle : $U^{ext} = \{[x], x \in X\}$ où $[x]$ est la classe d'équivalence de x selon $\trianglerighteq$. U^{ext} contient les classes d'équivalence pour $\succeq$ de tous les $x \in X$ (puisque $x = argmin_{\succeq}\{x^i, i \in \mathcal{A}\}$ en vertu du Lemme 16) et en particulier les classes d'équivalence $[x^i]$ de tous les x^i ; U^{ext} est totalement ordonnée par $\trianglerighteq'$; ses éléments minimal et maximal sont respectivement $[x_*]$ et $[x^*]$.

Posons : $u_i(x) = [x^i]$, $n(w_i) = [m_i]$ et $n(v) = [n^{ext}(v)]$. Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} L \succeq L' \; ssi \quad & \min_{\substack{\trianglerighteq'\\ x\in X}} \max_{\trianglerighteq'}(n(L[x]), \min_{\substack{\trianglerighteq'\\ i\in\mathcal{A}}} \max_{\trianglerighteq'}(u_i(x), n(w_i))) \trianglerighteq' \\ & \min_{\substack{\trianglerighteq'\\ x\in X}} \max_{\trianglerighteq'}(n(L'[x]), \min_{\substack{\trianglerighteq'\\ i\in\mathcal{A}}} \max_{\trianglerighteq'}(u_i(x), n(w_i))) \end{aligned}$$

D'où le résultat principal de cet article, qui constitue une contrepartie qualitative égalitariste du théorème de Harsanyi :

THÉORÈME 22. — *Si $\succeq$ satisfait les axiomes 1 à 6 de l'utilité pessimiste ; que pour tout $i \in \mathcal{A}$, $\succeq_i$ satisfait les mêmes axiomes 1 à 6 et que les axiomes de Pareto unanimité et d'exhaustivité de X sont satisfaits, alors il existe une échelle U^{ext} totalement ordonnée par une relation $\trianglerighteq'$, une distribution de poids $nw : \mathcal{A} \mapsto U^{ext}$, un ensemble de fonctions $u_i : X \mapsto U^{ext}$ et une fonction de renversement d'ordre $n : V \mapsto U^{ext}$ telle que pour toute paire de loteries L et L' :*

$$\begin{aligned} L \succeq L' ssi \quad & \min_{x\in X} \max(n(L[x]), \min_{i\in\mathcal{A}} \max(u_i(x), n(w_i))) \trianglerighteq' \\ & \min_{x\in X} \max(n(L'[x]), \min_{i\in\mathcal{A}} \max(u_i(x), n(w_i))) \end{aligned}$$

L'interprétation de ce théorème est la suivante : Si les axiomes 1 à 6 de l'utilité pessimiste sont satisfaits par $\succeq$ et $\succeq_i$, l'axiome P et l'axiome Ex sont aussi satisfaits alors on peut définir une échelle U^{ext} totalement ordonnée par une relation $\trianglerighteq'$, une distribution de poids, un ensemble de fonctions $u_i(x)$ et une fonction de renversement d'ordre telle que pour toute paire de loteries L et L', L est préférée par la collectivité à L', si l'utilité pessimiste égalitariste de L et meilleure que celle de L'.

On peut maintenant ajouter deux axiomes de pur égalitarisme :

Axiome E : $\forall i, j, (x_*)^i \sim (x_*)^j$

Axiome PW : $\forall i$, si $x \succ_i y$ alors $x^i \succ y^i$

L'axiome E assure que l'insatisfaction d'un agent n'a pas plus d'importance que l'insatisfaction d'un autre. Ceci implique que tous les agents ont le même degré de discount m_i.

L'axiome PW, garantit que les agents ont un minimum de pouvoir de décision : Lorsque les autres agents sont totalement satisfaits par x et y, la préférence collective suit celle de l'agent qui a une préférence stricte. Cet axiome implique que $m_i \sim_i x_*$ pour chaque agent i ; et puisque tous les agents possèdent le même degré de discount m_i, par Pareto unanimité on a $m_i \sim x_*$.

D'où le théorème de représentation suivant pour la fonctionnelle d'utilité collective pessimiste purement égalitariste :

THÉORÈME 23. — *Si les relations de préférence $\succeq_i$ ainsi que $\succeq$ satisfont les axiomes $1 - 6$ de l'utilité pessimiste, les axiomes de Pareto unanimité, d'exhaustivité de X et les axiome P, E et PW sont satisfaits, alors il existe une échelle U^{ext} totalement ordonnée par une relation $\trianglerighteq'$, un ensemble de fonctions $u_i : X \mapsto U^{ext}$ et une fonction de renversement d'ordre $n : V \mapsto U^{ext}$ telle que pour toute paire de loteries L et L' :*

$$L \succeq L' \textit{ ssi } \min_{x \in X} \max\,(n(L[x]), \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(x)) \trianglerighteq' \min_{x \in X} \max\,(n(L'[x]), \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(x)).$$

Ce théorème constitue une adaptation du théorème 22 dans un contexte ou les agents ont la même importance.

4.3. Un théorème de représentation pour l'agrégation optimiste

Nous proposons maintenant un théorème de représentation relatif à la fonctionnelle d'utilité optimiste homogène, $U^{+\max}$, qui constitue une contrepartie optimiste du théorème de représentation précédent. Pour ce faire on considère une relation $\succeq$ sur $\mathcal{L}$ qui satisfait les axiomes de Dubois et Prade pour l'utilité optimiste, un ensemble de relations $\succeq_i$ sur le même $\mathcal{L}$ qui satisfont également ces mêmes axiomes, et supposons que les axiomes de Pareto unanimité et d'exhaustivité de X soient satisfaits. Puisque les axiomes (1 à 6') de Dubois et Prade sont satisfaits par $\succeq$ et par les $\succeq_i$, il est évident que ces relations peuvent être représentées par des utilités optimistes.

Donc dans la section précédente, une conséquence de l'axiome C et de l'axiome 1 est qu'il existe un acte constant x^* qui est parmi les meilleurs pour tous les agents, et un acte constant x_* qui est parmi les pires pour tous les agents.

On considère, pour chaque agent i, l'ensemble des actes constants qu'il apprécie le moins : $\perp_i = \{x \in X, \forall y, y \succeq_i x\}$. x_* appartient évidement à tous les $\perp_i$.

On peut définir l'acte constant $x_i \in X$, qui représente l'utilité de l'agent i pour une conséquence x, de la manière suivante :

DÉFINITION 24. — *$\forall x \in X$, pour tout agent i, x_i est l'acte constant tel que : $x_i \sim_i x$ et $x_i \sim_j x_*$; pour tout $j \neq i$*

Pour chaque agent $i \in \mathcal{A}$, on considère l'ensemble des actes constants $\Delta_i = \{x_i, x \in X\}$. Δ_i est ordonné par $\succeq_i$. Soit Δ l'union des Δ_i (c'est l'ensemble de tous les x_is) ; il est ordonné par $\succeq$.

Il peut arriver qu'un x_i soit équivalent par $\succeq$ à $(x^*)_i$, la meilleure conséquence pour l'agent i alors que i préfère strictement $(x^*)_i$ à x_i. Cela est dû au fait que comme l'agent i est peu important, les x qu'il considère comme bonnes, et typiquement $(x^*)_i$, ne sont pas considérées comme si bonnes que ça par le choix collectif - i a peu de pouvoir pour imposer sa préférence au groupe : elles sont en quelque sorte ramenées à un niveau plus bas. Construisons maintenant pour chaque agent l'ensemble $B^i = \{x_i \in \Delta_i, x_i \sim (x^*)_i\}$, qui contient les éléments de Δ_i qui sont considérées comme équivalentes globalement à $(x^*)_i$, et ce même si l'agent i préfère strictement $(x^*)_i$ à x_i. Notons m^i le moins bon (au sens de $\succeq_i$) de ces éléments :

DÉFINITION 25. — *Pour tout $i \in \mathcal{A}$, $m^i = argmin_{\succeq_i}\{x_i : x_i \sim (x^*)_i\}$*

On peut maintenant démontrer les deux Lemmes suivants :

LEMME 26. — $\forall x \in X, i = 1, p$, $x_i \sim \min_{\succeq_i}(m^i, x_i)$

LEMME 27. — $\forall x \in X$, $x \sim argmax_{\succeq}\ \{x_i, i \in \mathcal{A}\}$.

De ces deux Lemmes, on peut déduire le principe de base de comparaisons des x par la règle du choix collectif :

COROLLAIRE 28. — *Pour tout $x \in X$, $x \sim argmax_{\succeq}\{\min_{\succeq_i}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\}$.*

On construit maintenant une relation $\trianglerighteq_o$ sur l'ensemble $\Delta = \{x_i, x \in X, i \in \mathcal{A}\}$ (et elle s'étend à X tout entier, puisque $x \sim argmax_{\succeq}\{x_i, i \in \mathcal{A}\}$). On définit cette relation par :

DÉFINITION 29. — *Pour tout $x, y \in X, i, j \in \mathcal{A}$:*

- *$x_i \trianglerighteq_o y_i$ ssi $x_i \succeq_i y_i$*
- *pour tout $i \neq j$, $x_i \trianglerighteq_o y_j$ ssi $m^i \succeq_i x_i$, $m^j \succeq_j y_j$ et $x_i \succeq y_j$*

PROPOSITION 30. — *$\trianglerighteq_o$ réflexive et transitive.*

Cette relation est un pré-ordre, elle est réflexive et transitive, mais elle est partielle. Comme précédemment, cette incomparabilité ne pose pas de difficulté puisque (i) la restriction de $\trianglerighteq_o$ pour chaque Δ_i est un pré-ordre complet (pour Δ_i, $\trianglerighteq_o$ = $\succeq_i$) et que (ii) chaque x_i qui est toujours inférieur ou égal à m^i pour i est comparable à chaque x_j qui est inférieur ou égal à m^j pour j. Ces propriétés assurent l'existence d'une fonction $u(x) = \max_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq}(m^i, x_i) : i \in \mathcal{A}\}$.

Du corollaire 28 et de la Définition 29, on peut donc obtenir le Lemme suivant :

LEMME 31. —
$x \succeq y$ *ssi* $argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, y_i), i \in \mathcal{A}\}$.

Puisque $\trianglerighteq_o$ est pré-ordre partiel sur Δ, on peut utiliser n'importe quel pré-ordre complet $\trianglerighteq'_o$ sur Δ qui complète $\trianglerighteq_o$, tel que $x \trianglerighteq_o y \Rightarrow x \trianglerighteq'_o y$. On obtient alors :

LEMME 32. —
$x \succeq y$ *ssi* $argmax_{\trianglerighteq'_o}\{\min_{\trianglerighteq'_o}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq'_o argmax_{\trianglerighteq'_o}\{\min_{\trianglerighteq'_o}(m^i, y_i), i \in \mathcal{A}\}$.

Maintenant, puisque $\succeq$ satisfait les axiomes de l'utilité qualitative optimiste (Proposition 7), on peut reprendre le résultat de Dubois et Prade : il existe une fonction u telle que :
$L \succeq L'$ ssi $\max_{\succeq, x \in X} \min_{\succeq}(L[x], u(x)) \succeq \max_{\succeq, x \in X} \min_{\succeq}(L'[x], u(x))$.

Notons maintenant $u(x) = argmax_{\trianglerighteq'_o}\{\min_{\trianglerighteq'_o}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\}$ en appliquant le Lemme 32, on obtient :
$L \succeq L'$ ssi $\max_{\trianglerighteq'_o, x \in X} \min_{\trianglerighteq'_o}(L[x], u(x)) \trianglerighteq'_o \max_{\trianglerighteq'_o, x \in X} \min_{\trianglerighteq'_o}(L'[x], u(x))$.

D'où une contrepartie optimiste du théorème de représentation 22 :

THÉORÈME 33. — *Si $\succeq$ satisfait les axiomes $1 - 6'$ de l'utilité optimiste ; que pour tout $i \in \mathcal{A}$, $\succeq_i$ satisfait les mêmes axiomes $1 - 6'$ et que les axiomes de Pareto unanimité et d'exhaustivité de X sont satisfaits, alors il existe une échelle U^{ext} totalement ordonnée par une relation $\trianglerighteq'_o$, une distribution de poids $w : \mathcal{A} \mapsto U^{ext}$, un ensemble de fonctions $u_i : X \mapsto U^{ext}$ telle que pour toute paire de loteries L et L' :*

$$L \succeq L' \text{ ssi } \max_{x \in X} \min(L[x], \max_{i \in \mathcal{A}} \min(u_i(x), w_i)) \trianglerighteq_o \max_{x \in X} \min(L'[x], \max_{i \in \mathcal{A}} \min(u_i(x), w_i)).$$

Ce théorème veut dire que : si les axiomes 1 à 6' de l'utilité optimiste sont satisfaits par $\succeq$ et $\succeq_i$, l'axiome P et l'axiome Ex sont aussi satisfaits alors on peut définir une échelle U^{ext} totalement ordonnée par une relation $\trianglerighteq'$, une distribution de poids et un ensemble de fonctions $u_i(x)$ telle que pour toute paire de loteries L et L', L est préférée par la collectivité à L', si l'utilité optimiste non égalitariste (aristocratique) de L et meilleure que celle de L'.

On peut maintenant ajouter un axiome qui impose que tous les agents ont la même importance quand ils sont totalement satisfaits. Il implique que tous les agents ont la même importance.

Axiome E' : $\forall i, j, (x^*)_i \sim (x^*)_j$

De **E'** et de **PW** (le même **PW** que dans le cas pessimiste), on déduit que tous les agents sont de même importance. On obtient alors le théorème suivant :

THÉORÈME 34. — *Si les relations de préférence* $\succeq_i$ *ainsi que* $\succeq$ *satisfont les axiomes* $1-6$ *de l'utilité optimiste, les axiomes de Pareto unanimité, d'exhaustivité de* X *et les axiomes* E' *et* PW *sont satisfaits, alors il existe une échelle* U^{ext} *totalement ordonnée par une relation* $\trianglerighteq'_o$ *et un ensemble de fonctions* $u_i : X \mapsto U^{ext}$ *telle que pour toute paire de loteries* L *et* L' *:*

$$L \succeq L' \ ssi \quad \max_{x \in X} \min(L[x], \max_{i \in \mathcal{A}} u_i(x)) \quad \trianglerighteq'_o \quad \max_{x \in X} \min(L'[x], \max_{i \in \mathcal{A}} u_i(x)).$$

5. Conclusion

Cet article a présenté un certain nombre de fonctions d'utilité agrégées utilisables en décision collective sous incertitude possibiliste, et étudié les propriétés que satisfont les ordres de préférence qui en découlent. Il apparaît que l'utilitarisme n'est pas la seule manière de réconcilier l'approche *ex-ante* et l'approche *ex-post* ; dans le théorème de Harsanyi, l'utilitarisme n'est qu'une conséquence de la nature fortement additive de la connaissance (ce qui s'accorde avec la notion des probabilités subjectives). L'axiomatisation que nous avons élaborée de la plus intéressante des utilités collectives, l'utilité pessimiste égalitariste permettra même d'avancer que dans le cas qualitatif prudent, seul l'égalitarisme permet d'éviter tout risque de décalage entre approche *ex-post* et approche *ex-ante*.

Ce premier travail utilise des utilités qui sont des intégrales doubles de Sugeno (1974) - par exemple, l'intégrale doublement fondée sur une mesure de nécessité pour le cas prudent égalitariste, et l'intégrale doublement fondée sur une mesure de possibilité pour son pendant optimiste. Au niveau théorique, la question se posera ensuite de l'étude d'autres intégrales doubles de Sugeno, homogènes ou non.
Le second axe de recherche à développer serait celui d'une axiomatisation "à la Savage", en étendant les travaux de Dubois et al. (Dubois, Prade, Sabbadin, 2001) au cas multi-agent ; ce formalisme ne définissant pas a priori les degrés de possibilité que chaque acte associe à chaque conséquence, il devrait permettre de modéliser des problèmes dans lesquels tous les agents n'ont pas la même connaissance sur les états du monde. Il serait également intéressant de développer une contrepartie en modélisation logique de ce travail en se basant sur des travaux antérieurs permettant la définition de la règle de décision optimiste et pessimiste en logique possibiliste (Dubois, Le Berre *et al.*, 1999) et l'adaptation de cette dernière en logique possibiliste multi-agent (Belhadi *et al.*, 2013).

Bibliographie

Belhadi A., Dubois D., Khellaf-Haned F., Prade H. (2013). Multiple agent possibilistic logic. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 23, nº 4, p. 299–320.

Ben Amor N., Essghaier F., Fargier H. (2014a). Décision collective égalitariste sous incertitude possibiliste : principes et axiomatisation. In *Proceedings of LFA'2014*, p. 69-76.

Ben Amor N., Essghaier F., Fargier H. (2014b). Solving multi-criteria decision problems under possibilistic uncertainty using optimistic and pessimistic utilities. In *Proceedings of IPMU'2014*, p. 269-279.

Dubois D., Godo L., Prade H., Zapico A. (1998). Making decision in a qualitative setting: from decision under uncertainty to case-based decision. In *Proceedings of KR'98*, p. 594-607.

Dubois D., Godo L., Prade H., Zapico A. (1999). On the possibilistic decision model: from decision under uncertainty to case-based decision. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 7, nº 6, p. 631–670.

Dubois D., Le Berre D., Prade H., Sabbadin R. (1999). Using possibilistic logic for modeling qualitative decision: Atms-based algorithms. *Fundam. Inform.*, nº 1-2, p. 1-30.

Dubois D., Marichal J., Prade H., Roubens M., Sabbadin R. (2001). The use of the discrete sugeno integral in decision-making: A survey. *Int J Uncertain Fuzz*, vol. 9, p. 539-561.

Dubois D., Prade H. (1986). Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. *J Inform Sci*, vol. 39, p. 205-210.

Dubois D., Prade H. (1995). Possibility theory as a basis for qualitative decision theory. In *Proceedings of IJCAI'95*, p. 1924-1930.

Dubois D., Prade H., Sabbadin R. (2001). Decision-theoretic foundations of qualitative possibility theory. *EJOR*, vol. 128, p. 459-478.

Harsanyi J. (1955). Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. *J Polit Econ*, vol. 63, p. 309-321.

Marichal J. (2001). An axiomatic approach of the discrete sugeno integral as a tool to aggregate interacting criteria in a qualitative framework. *IEEE T. on Fuzzy Systems*, vol. 9, p. 164-172.

Morgenstern O., Von Neumann J. (1947). *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press.

Moulin H. (2003). *Fair division and collective welfare*. MIT Press.

Myerson R. (1981). Utilitarianism, egalitarianism, and the timing effect in social choice problems. *Econometrica*, vol. 49, p. 883-97.

Sugeno M. (1974). *Theory of fuzzy integrals and its applications*. Thèse de doctorat non publiée, Tokyo Institute of Technology.

Yager R. R., Kacprzyk J. (Eds.). (1997). *The ordered weighted averaging operators: Theory and applications*. Norwell, MA, USA, Kluwer Academic Publishers.

Annexe : Preuves

PREUVE (Proposition 3). —
Dans ce qui suit, on illustre la preuve relative à l'Equation 6. La preuve relative à $U^{+\max}(L)$ peut être obtenue en replaçant le $\min$ par $\max$, le $\max$ par $\min$, $(1 - L[x]$ par $L[x]$ et $(1 - w_i)$ par w_i.
$U^{-\min}_{post}(L) = \min_{x \in X} \max(1 - L[x], \min_{i \in \mathcal{A}} \max(1 - w_i, u_i(x)))$
$= \min_{x \in X} \min_{i \in \mathcal{A}} \max(1 - L[x], \max(1 - w_i, u_i(x)))$
$= \min_{i \in \mathcal{A}} \min_{x \in X} \max(1 - L[x], \max(1 - w_i, u_i(x)))$
$= \min_{i \in \mathcal{A}} \min_{x \in X} \max(1 - w_i, \max(1 - L[x], u_i(x)))$
$= \min_{i \in \mathcal{A}} \max(1 - w_i, \min_{x \in X} \max(1 - L[x], u_i(x)))$
$= U^{-\min}_{ante}(L)$ ■

PREUVE (Proposition 4). —
Cette preuve permet de montrer que $U^{+\min}_{ante}(L) \leq U^{+\min}_{post}(L)$, celle relative à $U^{-\max}$ peut être prouvée de la même façon.
Soit $u'_i(x) = \max(u_i(x), 1 - w_i)$
$U^{+\min}_{post}(L) = \max_{x \in X} \min(L[x], \min_{i \in \mathcal{A}} \max(1 - w_i, u_i(x)))$
$= \max_{x \in X} \min(L[x], \min_{i \in \mathcal{A}} u'_i(x))$
$= \max_{x \in X} \min_{i \in \mathcal{A}} \min(L[x], u'_i(x))$

$U^{+\min}_{ante}(L) = \min_{i \in \mathcal{A}} \max(1 - w_i, \max_{x \in X} \min(u_i(x), L[x]))$
$= \min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} \max(1 - w_i, \min(u_i(x), L[x]))$
$= \min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} \min(\max(1 - w_i, u_i(x)), \max(1 - w_i, L[x]))$
$= \min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} \min(u'_i(x), \max(1 - w_i, L[x]))$

Aussi, puisque $\forall x \in X, \forall i \in \mathcal{A}$, $\max(1 - w_i, L[x]) \geq L[x]$; on a :
(i) $\min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} \min(u'_i(x), \max(1 - w_i, L[x])) \geq \min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} \min(u'_i(x), L[x])$

Soit f(x,i) = $\min(u'_i(x), L[x])$
Alors, on a $\forall x \in X, \forall i \in \mathcal{A}$, $\max_{x \in X} f(x, i) \geq f(x, i)$
$\min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} f(x, i) \geq \min_{i \in \mathcal{A}} f(x, i)$; $\forall x \in X$
$\min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} f(x, i) \geq \max_{x \in X} \min_{i \in \mathcal{A}} f(x, i)$
On peut donc déduire (ii) $\min_{i \in \mathcal{A}} \max_{x \in X} \min(u'_i(x), L[x]) \geq \max_{x \in X} \min_{i \in \mathcal{A}} \min(u'_i(x), L[x])$
Donc, de (i) et (ii) on peut conclure que $U^{+\min}_{ante}(L) \geq U^{+\min}_{post}(L)$ ■

PREUVE (Proposition 6). —
Cette preuve permet de montrer que $U^{+\min}_{ante}(L) = 1 - U^{\tau-\max}_{ante}(L)$, (i.e. $1 - U^{+\min}_{post}(L) = U^{\tau-\max}_{post}(L)$), les autres utilités peuvent être prouvées de la même façon.

$1 - U_{ante}^{+\min}(L) = 1 - [\min_{i \in \mathcal{A}} \max((1 - w_i), \max_{x \in X} \min(u_i(x), L[x]))]$
$= \max_{i \in \mathcal{A}} \min(w_i, \min \min_{x \in X} \max(1 - u_i(x), (1 - L[x])))$
$= \max_{i \in \mathcal{A}} \min(w_i, \min_{x \in X} \max(u_i^{\tau}(x), (1 - L[x])))$
$= U_{ante}^{\tau - \max}(L).$ ■

PREUVE (Preuve des Propositions 7 et 8). —
Cette preuve est relative à la Proposition 8. Celle de la Proposition 7 peut être déduite en remplaçant le $\min$ par le $\max$, le $\max$ par le $\min$, $(1 - L[x])$ par $L[x]$, $(1 - w_i)$ par w_i et les axiomes 1-6 par les axiomes 1-6'.

– La relation $\succeq_i$ définie par U_i^- satisfait les axiomes 1-6 :
Par définition, l'utilité U_i^- de chaque agent est une utilité pessimiste, donc il est évident que les $\succeq_i$ satisfont les axiomes 1-6.

– La relation $\succeq$ définie par $U^{-\min}$ satisfait les axiomes 1-6 :
Par définition, on a $\forall i \in \mathcal{A}$, $\succeq_i$ satisfait les axiomes 1-6.
Aussi, on a : $U_{post}^{-\min} = \min_{x \in X} \max(1 - L[x], \min_{\in \mathcal{A}} \max(u_i(x), 1 - w_i))$
On définit $u(x) = \min_{i \in \mathcal{A}} \max(u_i(x), 1 - w_i)$
Alors, $U_{post}^{-\min} = \min_{x \in X} \max(1 - L[x], u(x))$
Donc, $U_{post}^{-\min}$ peut être vu comme une utilité pessimiste basée sur la fonction d'utilité u(x). Puisque $U_{post}^{-\min} = U_{ante}^{-\min} = U^{-\min}$, donc $U^{-\min}$ satisfait les axiomes de Dubois and Prade.

– La relation $\succeq$ définie par $U^{-\min}$ satisfait l'axiome de Pareto unanimité :
On suppose que : $\forall i \in \mathcal{A}$, $L \succeq_i L'$
Par définition de l'utilité pessimiste on a : $L \succeq_i L'$ ssi $U_i^-(L) \geq U_i^-(L')$
Alors, $\forall i \in \mathcal{A}, \max(1 - w_i, U_i^-(L)) \geq \max(1 - w_i, U_i^-(L))$
Donc, $\min_{i \in \mathcal{A}} \max(1 - w_i, U_i^-(L)) \geq \min_{i \in \mathcal{A}} \max(1 - w_i, U_i^-(L'))$
On obtient, $U_{ante}^{-\min}(L) \geq U_{ante}^{-\min}(L')$; ce qui implique que $L \succeq L'$
Puisque $U_{ante}^{-\min} = U_{post}^{-\min} = U^{-\min}$, alors $U^{-\min}$ satisfait l'axiome P (Pareto unanimité). ■

PREUVE (Proposition 12). —
Par définition de x^* et en vertu de l'axiome Ex on a : $\forall i \in \mathcal{A}, \forall x \in X$; $x^* \succeq_i x$.
Aussi, par définition de $(x^*)^i$ on a : $\forall i \in \mathcal{A}$; $(x^*)^i \sim_i x^*$.
Alors, on obtient par transitivité de $\succeq_i$: (i) $(x^*)^i \succeq_i x$.
De la même façon, par définition de x_* on a : $\forall i \in \mathcal{A}, \forall x \in X$; $x \succeq_i x_*$.
et par définition de $(x_*)^i$ on a : $\forall i \in \mathcal{A}$; $(x_*)^i \sim_i x_*$.
Par transitivité on obtient : (ii) $x \succeq_i (x_*)^i$.
De (i) et (ii) on peut déduire que : $\forall x \in X, (x^*)^i \succeq_i x \succeq_i (x_*)^i$. ■

PREUVE (Proposition 13). —
Par définition de x^i, on a : $\forall i \in \mathcal{A}, \forall x \in X$; $x^i \sim_i x$.
En vertu de la Proposition 12, on a : $\forall i \in \mathcal{A}, \forall x \in X$; $(x^*)^i \succeq_i x$.
Alors, on obtient par transitivité : $(x^*)^i \succeq_i x^i$.
De plus, $(x^*)^i \succeq_k x^i$, quelque soit k (car $(x^*)^i \sim_k x^*$, tel que k égal ou pas à i).

Alors, $(x^*)^i \succeq_k x^i$ et $\succeq_i$ transitive ; par Pareto unanimité on obtient (i) $(x^*)^i \succeq x^i$.
De la même façon, par définition de x^i, on a : $\forall i \in \mathcal{A}, \forall x \in X$; $x^i \sim_i x$.
En vertu de la Proposition 12, on a : $\forall i \in \mathcal{A}, \forall x \in X$; $x \succeq_i (x_*)^i$.
Alors, par transitivité on obtient : $x^i \succeq_i (x_*)^i$; et aussi par Pareto unanimité on obtient (ii) $x^i \succeq (x_*)^i$.
De (i) et (ii) on déduit : $\forall x^i, (x^*)^i \succeq x^i \succeq (x_*)^i$. ■

PREUVE (Lemme 15). —

– Cas 1 : $x^i \succ_i m_i$: alors trivialement $\max_{\succeq_i}(m_i, x^i) = x^i$.

Puisque $\succeq$ est réflexive, alors $x^i \sim \max_{\succeq_i}(m_i, x^i)$.

– Cas 2 : $m_i \succeq_i x^i$: par définition de m_i, on a :

$m_i = argmax_{\succeq_i}\{x^i : x^i \sim (x_*)^i\}$, alors m_i est un des x^i particulier, tel que $x^i \sim (x_*)^i$. Donc, on peut dire que (i) $m_i \sim (x_*)^i$.
De plus, de la Proposition 13 on a (ii) $x^i \succeq (x_*)^i$.
De (i) et (ii) et comme $\succeq$ est transitive et réflexive on peut dire que $x^i \succeq m_i$.
Donc, on peut déduire que $m_i \succeq_i x^i$ implique $x^i \sim \max_{\succeq_i}(m_i, x^i)$.

PREUVE (Lemme 16). — ■
Nous construisons la loterie $L = \langle 1/x^1, \ldots, 1/x^p \rangle$.
Puisque $\succeq$ est une utilité pessimiste (elle satisfait les axiomes de Dubois et Prade) et les x^i sont des actes constants ; on a : $L \sim argmin_{\succeq}\{x^i, i \in \mathcal{A}\}$.
Montrons que $L \sim x$.
Puisque les $\succeq_i$ sont des utilités pessimistes (ils satisfont les axiomes de Dubois et Prade), pour chaque agent i nous avons : $L \sim_i argmin_{\succeq_i}\{x^k, k = 1, p\}$.
Comme $\forall k \neq i, x^k \sim_i x^*$, et que $x^* \succeq_i x^i$, par transitivité nous avons $\forall k \neq i, x^k \succeq_i x^i$. Donc $L \sim_i x^i$.
Comme $x \sim_i x^i$ et $\sim_i$ est transitive, on obtient $L \sim_i x$, et ce pour tout agent i. En utilisant la Pareto unanimité, nous déduisons $L \sim x$.
De $L \sim x$ et $L \sim argmin_{\succeq}\{x^i, i \in \mathcal{A}\}$, nous déduisons par transitivité que : $x \sim argmin_{\succeq}\{x^i, i \in \mathcal{A}\}$. ■

PREUVE (Corollaire 17). —
Des deux Lemmes 15 et 16, on a respectivement :
(i) $\forall x \in X, i \in \mathcal{A}, x^i \sim \max_{\succeq_i}(m_i, x^i)$.
(ii) $\forall x \in X, x \sim\ argmin_{\succeq}\ \{x^i : i \in \mathcal{A}\}$.
Donc la preuve du corollaire est triviale en replaçant x^i en (ii) par $\max_{\succeq_i}(m_i, x^i)$ de (i). ■

PREUVE (Proposition 19). —

– Cas 1 : $\forall x, y, z \in X, \forall i \in \mathcal{A}$, si $x^i \trianglerighteq y^i$ et $y^i \trianglerighteq z^i$ alors par définition de $\trianglerighteq$ on a : $x^i \succeq_i y^i$ et $y^i \succeq_i z^i$. Puisque $\succeq_i$ est transitive alors $x^i \succeq_i z^i$ donc, $x^i \trianglerighteq z^i$.

– Cas 2 : $\forall x, y, z \in X$, si $x^i \trianglerighteq y^i$ et $y^i \trianglerighteq z^j$ (tel que : $i \neq j$), par définition de $\trianglerighteq$ on peut écrire $x^i \succeq_i y^i$, donc par Pareto unanimité on peut écrire : $x^i \succeq y^i$.

De plus par la Définition 18 on a : (i) $y^i \succeq_i m_i$, $z^j \succeq_j m_j$ et $y^i \succeq z^j$.
On a $x^i \succeq y^i$ et $y^i \succeq z^j$ donc par transitivité de $\succeq$ on obtient : (ii) $x^i \succeq z^j$
De (i) et (ii) on peut déduire que $x^i \succeq_i m_i$, $z^j \succeq_j m_j$ et $x^i \succeq z^j$ aussi par définition

de $\trianglerighteq$ on obtient $x^i \trianglerighteq z^j$.

– Cas 3 : $\forall x, y, z \in X$, si $x^i \trianglerighteq y^j$ et $y^j \trianglerighteq z^k$ (tel que : $i \neq j \neq k$), par définition de $\trianglerighteq$ on a $x^i \succ_i m_i$, $y^j \succ_j m_j$ et $x^i \succ y^j$ (i) et $y^j \succ_j m_j$, $z^k \succ_k m_k$ et $y^j \succ z^k$(ii). Alors de (i) et (ii) et par transitivité de $\succ$ on peut conclure que $x^i \succ_i m_i$, $z^k \succ_k m_k$ et $x^i \succ z^k$, aussi par définition de $\trianglerighteq$ on obtient $x^i \trianglerighteq z^k$.

Donc, $\forall x, y \in X$ et pour tout $i \neq j$; on peut conclure que $\trianglerighteq$ est transitive. ■

PREUVE (Lemme 20). —
Par le Lemme 15 on a : $\forall x \in X, i \in \mathcal{A}$, $x^i \sim \max_{\succeq_i}(m_i, x^i)$.
Alors, par la Définition 18 on peut écrire : (i) $x^i \sim \max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i)$.
Aussi, par le Lemme 16 on a : $\forall x \in X$, $x \sim\ argmin_{\succeq}\ \{x^i : i \in \mathcal{A}\}$.
De la même façon, par la Définition 18 on peut écrire : (ii) $x \sim\ argmin_{\trianglerighteq}\ \{x^i, i \in \mathcal{A}\}$.
En utilisant le corollaire 17 et de (i) et (ii) on obtient :
$x \sim argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i), i \in \mathcal{A}\}$.
Alors on peut déduire que :
$x \sim\ argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i), i \in \mathcal{A}\}$ et $y \sim\ argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, y^i), i \in \mathcal{A}\}$
Donc, par la Définition 18 on obtient :
$x \succeq y$ ssi $argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i), i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, y^i), i \in \mathcal{A}\}$. ■

PREUVE (Lemme 21). —
La preuve de ce Lemme et similaire à celle du Lemme 20 comme ils expriment exactement la même chose ; avec un pré-ordre partiel ($\trianglerighteq$) sur Δ pour le Lemme 20 et un pré-ordre complet ($\trianglerighteq'$) pour le Lemme 21. ■

PREUVE (Théorème 22). —
Selon le résultat de Dubois et Prade relatif à l'utilité pessimiste : Puisque $\succeq$ satisfait les axiomes de 1 à 6 il existe une fonction de renversement d'ordre $n : V \mapsto X$ tel que : $L \succeq L'$ ssi $\min_{\succeq, x\in X} \max_{\succeq}(n(L[x]), x) \succeq \min_{\succeq, x\in X} \max_{\succeq}(n(L'[x]), x)$.

En utilisant Définition 18 et puisque la restriction de $\trianglerighteq$ à chaque Δ_i est un pré-ordre complet (sur Δ_i, $\trianglerighteq = \succeq_i$) et chaque x^i est au moins aussi bon que m_i (pour i) est comparable avec chaque x^j qui est au moins aussi bon que m_j (pour j) on peut dire que : $u(x) =\ argmin_{\trianglerighteq}\{\max_{\trianglerighteq}(m_i, x^i) : i \in \mathcal{A}\}$. En utilisant le Lemme 21 on peut écrire : $u(x) =\ argmin_{\trianglerighteq'}\{\max_{\trianglerighteq'}(m_i, x^i), i \in \mathcal{A}\}$
En appliquant encore le Lemme 21 et utilisant la définition de Dubois et Prade relative à l'utilité pessimiste, on obtient :
$$L \succeq L' \text{ ssi } \min_{\trianglerighteq', x\in X} \max_{\trianglerighteq'}(n^{ext}(L[x]), u(x)) \trianglerighteq' \min_{\trianglerighteq', x\in X} \max_{\trianglerighteq'}(n^{ext}(L'[x]), u(x)).$$

$n^{ext}(v)$, m_i and x^i, $u(x)$ appartiennent à Δ. Afin d'avoir un ordre total, on considère les classes d'équivalence de Δ, c'est-à-dire l'ensemble $U^{ext} = \{[x] : x \in X\}$ où $[x]$ est la classe d'équivalence de x pour $\trianglerighteq'$. Puisque $x =\ argmin_{\succeq}\{x^i : i \in \mathcal{A}\}$ (Lemme 16) U^{ext} contient la classe d'équivalence de chaque $x \in X$ pour $\succeq$,en particulier, la classe d'équivalence de $[x^i]$ pour chaque x^i ; U^{ext} est totalement ordonnée par $\trianglerighteq'$, son élément maximal est $[x^*]$ et son élément minimal est $[x_*]$.

On pose $u_i(x) = [x^i]$, $nw_i = [m_i]$ et $n(v) = [n^{ext}(v)]$, alors on obtient :

$$L \succeq L' \text{ ssi } \begin{array}{l} \min_{\rhd\, x\in X} \max_{\unrhd}(n(L[x]), \min_{\rhd\, i\in\mathcal{A}} \max_{\unrhd}(u_i(x), nw_i)) \\ \unrhd \\ \min_{\rhd\, x\in X} \max_{\unrhd}(n(L'[x]), \min_{\rhd\, i\in\mathcal{A}} \max_{\unrhd}(u_i(x), nw_i)). \end{array} \qquad \blacksquare$$

PREUVE (Théorème 23). —
Du Lemme 15 on a : $\forall x \in X$, $i \in \mathcal{A}$, $x^i \sim \max_{\succ_i}(m_i, x^i)$.
Donc on peut considérer que m_i est un x^i particulier tel que : $x^i \sim (x_*)^i$. c'est-à-dire : $m_i \sim (x_*)^i, \forall i \in A$. En utilisant l'Axiome E ($(x_*)^i \sim (x_*)^j$) on peut dire que $m_i \sim (x_*)^j$ ($j \neq i$). Donc on peut déduire que : $\forall i, j; m_i \sim (x_*)^i \sim m_j \sim (x_*)^j$.
D'après le Lemme 21 on a :
$x \succeq y$ ssi $argmin_{\rhd'}\{\max_{\rhd'}(m_i, x^i){:}i \in \mathcal{A}\} \unrhd' argmin_{\rhd'}\{\max_{\rhd'}(m_i, y^i){:}i \in \mathcal{A}\}$.
De plus, puisque chaque agent i a la possibilité de décider pour la collectivité lorsque les autres sont indifférents (Axiome PW), alors on peut réécrire le Lemme 21 tel que :
$x \succeq y$ ssi $argmin_{\rhd'}\{x^i{:}i \in \mathcal{A}\} \unrhd' argmin_{\rhd'}\{y^i{:}i \in \mathcal{A}\}$.
En reprenant le résultat de Dubois et Prade relatif à l'utilité pessimiste et en posant u(x) = $argmin_{\rhd'} x^i$, on peut réécrire le Théorème 22 tel que :

$$L \succeq L' \text{ ssi } \begin{array}{l} \min_{x\in X} \max(n(L[x]), \min_{i\in\mathcal{A}} u_i(x)) \\ \unrhd' \\ \min_{x\in X} \max(n(L'[x]), \min_{i\in\mathcal{A}} u_i(x)). \end{array} \qquad \blacksquare$$

PREUVE (Lemme 26). —

– Cas 1 : $m^i \succ_i x_i$: alors trivialement $\min_{\succeq_i}(m^i, x_i) = x_i$.
Puisque $\succeq$ est réflexive, alors $x_i \sim \min_{\succeq_i}(m^i, x_i)$.

– Cas 2 : $x_i \succeq_i m^i$: par définition de m^i, on a : $m^i = argmin_{\succeq_i}\{x_i : x_i \sim (x^*)_i\}$, alors m^i est un des x_i particulier, tel que $x_i \sim (x^*)_i$. Donc, on peut dire que (i) $m^i \sim (x^*)_i$.
De plus, de la Proposition 13 on a (ii) $(x^*)_i \succeq x_i$.
De (i) et (ii) et comme $\succeq$ est transitive et réflexive on peut dire que $m^i \succeq x_i$.
Donc, on peut déduire que $x_i \succeq_i m^i$ implique $x_i \sim \min_{\succeq_i}(m^i, x_i)$.

PREUVE (Lemme 27). — $\blacksquare$
Nous construisons la loterie $L = \langle 1/x_1, \ldots, 1/x_p \rangle$.
Puisque $\succeq$ est une utilité optimiste (elle satisfait les axiomes de Dubois et Prade) et les x_i sont des actes constants ; on a : $L \sim argmax_{\succeq}\{x_i, i \in \mathcal{A}\}$.
Montrons que $L \sim x$.
Puisque les $\succeq_i$ sont des utilités optimistes (ils satisfont les axiomes de Dubois et Prade), pour chaque agent i nous avons : $L \sim_i argmax_{\succeq_i}\{x_k, k = 1, p\}$.
Comme $\forall k \neq i, x_k \sim_i x_*$, et que $x_i \succeq_i x_*$, par transitivité nous avons $\forall k \neq i, x_i \succeq_i x_k$. Donc $L \sim_i x_i$.
Comme $x \sim_i x_i$ et $\sim_i$ est transitive, on obtient $L \sim_i x$, et ce pour tout agent i. En utilisant la Pareto unanimité, nous déduisons $L \sim x$.
De $L \sim x$ et $L \sim argmax_{\succeq}\{x_i, i \in \mathcal{A}\}$, nous déduisons par transitivité que : $x \sim argmax_{\succeq}\{x_i, i \in \mathcal{A}\}$. $\blacksquare$

PREUVE (Corollaire 28). —
Du Lemme 26 et Lemme 27, on a respectivement :
(i) $\forall x \in X, i \in \mathcal{A}$, $x_i \sim \min_{\succeq_i}(m^i, x_i)$.
(ii) $\forall x \in X, x \sim \ argmax_{\succeq} \ \{x_i : i \in \mathcal{A}\}$.
Donc la preuve du corollaire est triviale en replaçant x_i en (ii) par $\min_{\succeq_i}(m^i, x_i)$ de (i). ■

PREUVE (Proposition 30). —

– Cas 1 : $\forall x, y, z \in X$, $\forall i \in \mathcal{A}$, si $x_i \trianglerighteq_o y_i$ et $y_i \trianglerighteq_o z_i$ alors par définition de $\trianglerighteq_o$ on a : $x_i \succeq_i y_i$ et $y_i \succeq_i z_i$. Puisque $\succeq_i$ est transitive alors $x_i \succeq_i z_i$ donc, $x_i \trianglerighteq_o z_i$.

– Cas 2 : $\forall x, y, z \in X$, si $x_i \trianglerighteq_o y_i$ et $y_i \trianglerighteq_o z_j$ (tel que : $i \neq j$), par définition de $\trianglerighteq_o$ on peut écrire $x_i \succeq_i y_i$, donc par Pareto unanimité on peut écrire : $x_i \succeq y_i$.
De plus par la Définition 29 on a : (i) $m^i \succeq_i y_i$, $m^j \succeq_j z_j$ et $y_i \succeq z_j$.
On a $x_i \succeq y_i$ et $y_i \succeq z_j$ donc par transitivité de $\succeq$ on obtient : (ii) $x_i \succeq z_j$
De (i) et (ii) on peut déduire que $m^i \succeq_i x_i$, $m^j \succeq_j z_j$ et $x_i \succeq z_j$ aussi par définition de $\trianglerighteq_o$ on obtient $x_i \trianglerighteq_o z_j$.

– Cas 3 : $\forall x, y, z \in X$, si $x_i \trianglerighteq_o y_j$ et $y_j \trianglerighteq_o z_k$ (tel que : $i \neq j \neq k$), par définition de $\trianglerighteq_o$ on a $m^i \succ_i x_i$, $m^j \succ_j y_j$ et $x_i \succ y_j$ (i) et $m^j \succ_j y_j$, $m^k \succ_k z_k$ et $y_j \succ z_k$(ii). Alors de (i) et (ii) et par transitivité de $\succ$ on peut conclure que $m^i \succ_i x_i$, $m^k \succ_k z_k$ et $x_i \succ z_k$, aussi par définition de $\trianglerighteq_o$ on obtient $x_i \trianglerighteq_o z_k$.

Donc, $\forall x, y \in X$ et pour tout $i \neq j$; on peut conclure que $\trianglerighteq_o$ est transitive. ■

PREUVE (Lemme 31). —
Par le Lemme 26 on a : $\forall x \in X, i \in \mathcal{A}$, $x_i \sim \min_{\succeq_i}(m^i, x_i)$.
Alors, par la Définition 29 on peut écrire : $x_i \sim \min_{\trianglerighteq_o}(m^i, x_i)$ (i).
Aussi, par le Lemme 27 on a : $\forall x \in X, x \sim \ argmax_{\succeq} \ \{x_i : i \in \mathcal{A}\}$.
De la même façon, par la Définition 29 on peut écrire :
(ii) $x \sim \ argmax_{\trianglerighteq_o} \ \{x_i, i \in \mathcal{A}\}$.
En utilisant le corollaire 28 et de (i) et (ii) on obtient :
$x \sim argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\}$.
Alors on peut déduire que :
$x \sim \ argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\}$ et $y \sim \ argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, y_i), i \in \mathcal{A}\}$
Donc, par la Définition 29 on obtient :
$x \succeq y$ ssi $argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq_o argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, y_i), i \in \mathcal{A}\}$. ■

PREUVE (Lemme 32). —
La preuve de ce Lemme et similaire à celle du Lemme 31 comme ils expriment exactement la même chose ; avec un pré-ordre partiel ($\trianglerighteq_o$) sur Δ pour le Lemme 31 et un pré-ordre complet ($\trianglerighteq'_o$) pour le Lemme 32. ■

PREUVE (Théorème 33). —
Selon le résultat de Dubois et Prade relatif à l'utilité optimiste : Puisque $\succeq$ satisfait

les axiomes de 1 à 6' on peut écrire :
$L \succeq L'$ ssi $\max\limits_{x\in X}{}_{\succeq} \min_{\succeq}(L[x], x) \succeq \max\limits_{x\in X}{}_{\succeq} \min_{\succeq}(L'[x], x)$.
En utilisant la Définition 29 et puisque la restriction de $\trianglerighteq_o$ à chaque Δ_i est un pré-ordre complet (sur Δ_i, $\trianglerighteq_o =\succeq_i$) et chaque x_i est inférieur ou égal à m^i (pour i) est comparable avec chaque x_j qui est inférieur ou égal à m^j (pour j) on peut dire que : $u(x) = \ argmax_{\trianglerighteq_o}\{\min_{\trianglerighteq_o}(m^i, x_i) \ : \ i \in \mathcal{A}\}$. En utilisant le Lemme 32 on peut écrire : $u(x) = \ argmax_{\trianglerighteq'_o}\{\min_{\trianglerighteq'_o}(m^i, x_i), i \in \mathcal{A}\}$
En appliquant encore le Lemme 32 et en utilisant la définition de Dubois et Prade relative à l'utilité optimiste, on obtient :

$$L \succeq L' \text{ ssi } \quad \max_{x\in X}{}_{\trianglerighteq'_o} \min_{\trianglerighteq'_o}(L[x], u(x)) \quad \trianglerighteq'_o \quad \max_{x\in X}{}_{\trianglerighteq'_o} \min_{\trianglerighteq'_o}(L'[x], u(x)).$$

m^i, x_i et $u(x)$ appartiennent à Δ. Afin d'avoir un ordre total, on considère les classes d'équivalence de Δ, c'est-à-dire l'ensemble $U^{ext} = \{[x] : x \in X\}$ où $[x]$ est la classe d'équivalence de x pour $\trianglerighteq'_o$. Puisque $x = \ argmax_{\succeq}\{x_i : i \in \mathcal{A}\}$ (Lemme 27) U^{ext} contient la classe d'équivalence de chaque $x \in X$ pour $\succeq$, en particulier, la classe d'équivalence de $[x_i]$ pour chaque x_i ; U^{ext} est totalement ordonnée par $\trianglerighteq'_o$, son élément maximal est $[x^*]$ et son élément minimal est $[x_*]$.
On pose $u_i(x) = [x_i]$ et $w_i = [m^i]$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} L \succeq L' \text{ ssi } \quad & \max_{x\in X}{}_{\trianglerighteq'_o} \min_{\trianglerighteq'_o}(L[x], \max_{i\in\mathcal{A}}{}_{\trianglerighteq'_o} \min_{\trianglerighteq'_o}(u_i(x), w_i)) \\ & \trianglerighteq'_o \\ & \max_{x\in X}{}_{\trianglerighteq'_o} \min_{\trianglerighteq'_o}(L'[x], \max_{i\in\mathcal{A}}{}_{\trianglerighteq'_o} \min_{\trianglerighteq'_o}(u_i(x), w_i)). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

PREUVE (Théorème 34). —
Du Lemme 26 on a : $\forall x \in X$, $i \in \mathcal{A}$, $x_i \sim \min_{\succ_i}(m^i, x_i)$.
Donc on peut considérer que m^i est un x_i particulier tel que : $x_i \sim (x^*)_i$. C'est-à-dire : $m^i \sim (x^*)_i, \forall i \in A$.
En utilisant l'Axiome E' ($(x^*)_i \sim (x^*)_j$) on peut dire que $m^i \sim (x^*)_j$ ($j \neq i$). Donc on peut déduire que : $\forall i, j m^i \sim (x^*)_i \sim m^j \sim (x^*)_j$.
D'après le Lemme 32 on a :
$x \succeq y$ ssi $argmax_{\trianglerighteq'_o}\{\min_{\trianglerighteq'_o}(m^i, x_i){:}i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq'_o argmax_{\trianglerighteq'_o}\{\min_{\trianglerighteq'_o}(m^i, y_i){:}i \in \mathcal{A}\}$.
De plus, puisque chaque agent i a la possibilité de décider pour la collectivité lorsque les autres sont indifférents (Axiome PW), alors on peut réécrire le Lemme 32 tel que :
$x \succeq y$ ssi $argmax_{\trianglerighteq'_o}\{x_i{:}i \in \mathcal{A}\} \trianglerighteq'_o argmax_{\trianglerighteq'_o}\{y_i{:}i \in \mathcal{A}\}$.
En reprenant le résultat de Dubois et Prade relatif á l'utilité optimiste et on pose u(x) = $argmax_{\trianglerighteq'_o} x_i$ alors on peut réécrire le Théorème 33 tel que :

$$L \succeq L' \text{ ssi } \quad \max_{x\in X} \min(L[x], \max_{i\in\mathcal{A}} u_i(x)) \quad \trianglerighteq'_o \quad \max_{x\in X} \min(L'[x], \max_{i\in\mathcal{A}} u_i(x)). \qquad \blacksquare$$