Változásészlelés elágazó folyamatokban

Doktori értekezés tézisei

T. Szabó Tamás

Témavezető:

Dr. Pap Gyula
tanszékvezető egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem
Szeged, 2017

1. Bevezetés

A változásészlelés kérdése természetes módon merül fel a statisztikában, azon belül is különösen az idősoranalízisben. A statisztika egyik leggyakrabban alkalmazott feltevése, hogy a folyamatunk dinamikája időben változatlan, így elegendően nagy mintát tuduk gyűjteni az elemzésünkhöz. Természetes igény tehát, hogy ezt a feltevést tesztelni tudjuk.

A probléma megoldására számos kísérlet történt, főképp a független megfigyelések és a klasszikus idősorok terén – ezek áttekintése megtalálható Csörgő és Horváth (1997) kiváló monográfiájában. A bevett eljárások itt a likelihood-módszer és a kumulatív összegek módszere (CUSUM, ld. Page, 1954, 1955) voltak.

Az elágazó folyamatok változásészlelése viszonylag kevesebb figyelmet kapott. Az elágazó mechanizmusból származó véletlenség folytán a likelihood-alapú módszerek jobbára nem használhatók, tehát más eszközökhöz kell folyamodnunk. A tesztfolyamatunk az úgynevezett kvázi-likelihood módszert használja motivációként (ld. Gombay, 2008). Ezzel a megközelítéssel sok sejtést kapunk a korábbi munkákból, és a folyamatunk végső soron CUSUM-formában is felírható. A bizonyítások azonban a klasszikus martingálelméletre épülnek, különösen Karatzas és Shreve (1991) és Jacod és Shiryaev (2003) tárgyalásában, valamint Kokoszka és Leipus (1998) egy Hájek–Rényi-típusú lemmájára, amely az alternatív hipotézis mellett központi jelentőségű lesz.

A következő jelöléseket fogjuk használni: $\otimes$ a Kronecker-szorzatot jelöli, $\mathbf{1}_i$ pedig az i-edik egységvektort. Szűréseken mindig a természetes szűrést értjük majd. A konvergenciasebességre a Landau-féle jelölést alkalmazzuk: ha X_t egy sztochasztikus folyamat, akkor $X_t = \mathrm{O}_{\mathbb{P}}(g(t))$ azt jelenti, hogy az $\left(\mathcal{L}\left(\frac{X_t}{g(t)}\right)\right)_{t>t_0}$ mértékhalmaz feszes valamely $t_0 \geqslant 0$-ra ($\mathcal{L}$ itt egy változó eloszlását jelöli). Hasonlóképp $X_t = \mathrm{o}_{\mathbb{P}}(g(t))$ azt jelenti, hogy $\frac{X_t}{g(t)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

2. A módszerünk áttekintése

Módszerünk a következő lépésekből fog állni:

1. Veszünk egy vektorértékű $\boldsymbol{X}_t$ folyamatot, amelyet vagy a természetes, vagy a nemnegatív valós számokkal indexelünk, és mintát veszünk a folyamatból a $0 \leqslant t \leqslant T$ intervallumon.

2. Választunk egy $\boldsymbol{\theta}_t$ paramétert, amely a folyamat dinamikáját irányítja. A fő kérdés az lesz, hogy ez a paraméter t-ben állandó-e, vagyis tesztelni szeretnénk a

$$\mathrm{H}_0 : \ \exists \boldsymbol{\theta} : \ \boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}, \quad t \in [0, T]$$

nullhipotézist a

$$\mathrm{H}_\mathrm{A} : \exists \rho \in (0,1), \boldsymbol{\theta}' \neq \boldsymbol{\theta}'' : \ \boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}', \ t \in [0, \rho T) \text{ és } \boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}'', \ t \in [\rho T, T]$$

alternatív hipotézissel szemben. Fontos további feltétel lesz a stabilitás: $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta}'$, $\boldsymbol{\theta}''$ olyanok kell legyenek, hogy H_0 mellett $\boldsymbol{X}$-nek legyen egyértelmű stacionárius eloszlása, H_A mellett pedig ez a folyamat változás előtti és változás utáni részére is teljesüljön.

3. Keresünk egy vektorértékű f függvényt, amelyre

$$\boldsymbol{M}_t := \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_0 - \int_0^t f(\boldsymbol{\theta}_s; \boldsymbol{X}_{s-}) \, \mathrm{d}s$$

martingál lesz. Itt $\boldsymbol{X}_{s-}$ egyszerűen $\boldsymbol{X}_s$-t jelöli folytonos s-re, és $\boldsymbol{X}_{s-1}$-et diszkrét s-re. Hasonlóképpen diszkrét s-re az integrál egyszerűen összegzést jelent.

4. Feltételezzük, hogy $\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}$ minden t-re, és Klimko és Nelson (1978) feltételes legkisebb négyzetes (CLS) módszere alapján egy $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_T$-vel jelölt becslést adunk a $\boldsymbol{\theta}$ paraméterre.

5. Beírjuk $\boldsymbol{\theta}_t$ helyére $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_T$-t az $\boldsymbol{M}_t$ folyamat definíciójában, hogy megkapjuk $\widehat{\boldsymbol{M}}_t^{(T)}$-t.

6. Belátjuk, hogy ha $\boldsymbol{\theta}_t$ állandó t-ben, akkor

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_u^{(T)} := \widehat{\boldsymbol{I}}_T^{-1/2} \widehat{\boldsymbol{M}}_{uT}^{(T)}, \ u \in [0,1]$$

eloszlásban konvergál egy standard Brown-hídhoz a $[0,1]$ intervallumon. Itt $\widehat{\boldsymbol{I}}_T$ egy véletlen normáló mátrix, amely a mintából számolható.

7. Ezt felhasználva teszteket definiálunk a $\boldsymbol{\theta}$-ban történő változásra oly módon, hogy $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_u^{(T)}$ szuprémumát vagy infimumát használjuk tesztstatisztikaként, a változás irányának függvényében.

8. Belátjuk, hogy ha $\boldsymbol{\theta}_t$ a $[0,T]$ intervallumon egyetlen pontban változik, akkor a tesztstatisztikánk $T \to \infty$ mellett sztochasztikusan végtelenhez tart, azaz a tesztünk gyengén konzisztens.

9. Belátjuk, hogy az $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_u^{(T)}$ folyamat minimum-, illetve maximumhelye jó becslés a $\boldsymbol{\theta}_t$-ben történt változás időpontjára.

3. Változásészlelés az INAR(p) folyamatra

Először a Pap és Szabó (2013) által elért eredményeket tekintjük át. A p-edrendű egészértékű autoregressziós (INAR(p)) folyamat definíciója a következő:

$$X_k = \alpha_1 \circ X_{k-1} + \cdots + \alpha_p \circ X_{k-p} + \varepsilon_k, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

Itt az ε_k-k független, azonos eloszlású véletlen változók μ várható értékkel, és ha Y nemnegatív egész értékű véletlen változó és $\alpha \in (0,1)$, akkor $\alpha \circ Y$ jelöli Y darab, egymástól és Y-tól is független α várható értékű Bernoulli-eloszlású véletlen változó összegét. A modellt Alzaid és Al-Osh (1987) vezette be $p = 1$-re, majd Du és Li (1991) magasabb p értékekre.

A szokásos módon kiterjesztjük az állapotteret, hogy Markov-láncot kapjunk, és felírjuk a paramétervektorunkat:

$$\boldsymbol{X}_k := \begin{bmatrix} X_k \\ X_{k-1} \\ \vdots \\ X_{k-p} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mu \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Az általános INAR(p) folyamatokra (ellentétben a speciális alakúakkal, pl. a széles körben vizsgált Poisson INAR-ral, ahol a bevándorlás, és így az egész folyamat eloszlása is Poisson), csak néhány cikkben található változás-észlelési eljárás. Különösen Kang és Lee (2009) közleményére hivatkozunk itt, ahol a szerzők a miénkhez hasonló tesztstatisztikát adnak egy, a miénknél általánosabb modellre. Azonban nem tesznek állításokat az alternatív hipotézis esetén, és a változás időpontjának becslését sem vizsgálják közelebbről. Mi mindkét kérdéssel foglalkozunk, ami stabilabb elméleti alapot ad az eljárásnak. A martingálunkat a differenciáival fogjuk definiálni, melyeket úgy kapunk, hogy a folyamatból levonjuk az előző időpontra vett feltételes várható értéket:

$$M_k = X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) = X_k - \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{X}_{k-1} - \mu, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Ezen kifejezések négyzetösszegét minimalizálva kapjuk a CLS becsléseket:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n := \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n \\ \widehat{\mu}_n \end{bmatrix} := \boldsymbol{Q}_n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{Q}_n := \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix}^\top. \tag{3.3}$$

A tesztfolyamatunk definíciója a következő lesz:

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_n(t) := \widehat{\boldsymbol{I}}_n^{-1/2} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \widehat{M}_k^{(n)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

ahol $\widehat{\boldsymbol{I}}_n$ egy becslése az információs mátrixnak, melyet a „score vector” módszer analógiájával kaphatunk meg:

$$\widehat{\boldsymbol{I}}_n := \sum_{k=1}^{n} ((\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n^*)^\top \boldsymbol{X}_{k-1} + \widehat{\sigma}_n^2) \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix}^\top,$$

és

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n^* := \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_n^{(1)}(1-\widehat{\alpha}_n^{(1)}) \\ \vdots \\ \widehat{\alpha}_n^{(p)}(1-\widehat{\alpha}_n^{(p)}) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_n^2 := -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\widehat{M}_k^{(n)} \right)^2 - (\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_n^*)^\top \boldsymbol{X}_{k-1} \right).$$

A folyamatra további regularitási feltételeket teszünk, különösen azt, hogy az α-k összege 1-nél kisebb legyen, azaz *stabil* legyen a folyamat. Ezek a feltételek garantálják az ergodicitást, és az egyértelmű stacionárius eloszlás létezését.

3.1 Definíció. *Az $(X_k)_{k \geqslant -p+1}$ INAR(p) folyamat teljesíti a $\mathbf{C}_0$ feltételt, ha $\mathbb{E}(X_0^6) < \infty, \ldots, \mathbb{E}(X_{-p+1}^6) < \infty$, $\mathbb{E}(\varepsilon_1^6) < \infty$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < 1$, $\mu > 0$ mind teljesülnek rá, továbbá ha $\alpha_p > 0$ és a 0-nál nagyobb α-k indexeinek legnagyobb közös osztója 1.*

A nullhipotézis mellett a fő eredményünk a következő:

3.2 Tétel. *Ha $(X_k)_{k \geqslant -p+1}$ teljesíti a $\mathbf{C}_0$ feltételt, és H_0 is teljesül, akkor*

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \boldsymbol{\mathcal{B}} \qquad \text{as} \;\; n \to \infty,$$

ahol $(\boldsymbol{\mathcal{B}}(t))_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ egy $(p+1)$-dimenziós standard Brown-híd, és $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ eloszlásbeli konvergenciát jelöl a $D([0,1])$ Szkorohod-téren.

Ezen eredmény alapján könnyen konstruálhatunk teszteket a paraméterek változására oly módon, hogy a tesztfolyamat valamely funkcionálját (pl. szuprémumát vagy infimumát) összehasonlítjuk a Brown-híd megfelelő funkcionáljának ismert eloszlásával.

Az alternatív hipotézis mellett a következő további feltételeket tesszük:

3.3 Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(X_k)_{k\geqslant -p+1}$ INAR(p) folyamatra teljesül a $\mathbf{C}_{\mathrm{A}}$ feltétel, ha $\tau = \lfloor n\rho \rfloor$ valamely $\rho \in (0,1)$-re, valamint igaz, hogy $(X_k)_{-p+1\leqslant k\leqslant \tau}$ és $(X_k)_{k\geqslant \tau+1}$ is teljesítik a $\mathbf{C}_0$ feltételt. Az $(X_k)_{-p+1\leqslant k\leqslant \tau}$ és $(X_k)_{k\geqslant \tau+1}$ folyamatok paraméterverktorait rendre a következőképp jelöljük:*

$$\boldsymbol{\theta}' := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}' \\ \mu' \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\theta}'' := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}'' \\ \mu'' \end{bmatrix}.$$

A folyamat két felének egyértelmű stacionárius eloszlásával rendelkező vektorok jelölése rendre $\widetilde{\boldsymbol{X}}'$ és $\widetilde{\boldsymbol{X}}''$ lesz. A következő további jelöléseket használjuk:

$$\boldsymbol{Q}' := \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{X}}' \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{X}}' \\ 1 \end{bmatrix}^\top\right), \ \boldsymbol{Q}'' := \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{X}}'' \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{X}}'' \\ 1 \end{bmatrix}^\top\right), \ \widetilde{\boldsymbol{I}} := \lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{\boldsymbol{I}}_n}{n}.$$

A teszt gyenge konzisztenciáját az alábbi tétel bizonyítja:

3.4 Tétel. *Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{C}_A$ teljesül. Az $i = 1, 2, \ldots, p+1$ értékekre legyen*

$$\psi_i := \mathbf{1}_i^\top \widetilde{\boldsymbol{I}}^{-1/2}((\rho\boldsymbol{Q}')^{-1} + ((1-\rho)\boldsymbol{Q}'')^{-1})^{-1}(\boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta}'').$$

Ha $\psi_i > 0$, akkor a tesztfolyamat i-edik komponensére

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_n(t)^{(i)} = n^{1/2}\psi_i + \mathrm{o}_{\mathbb{P}}(n^{1/2}),$$

és fordítva, ha $\psi_i < 0$, akkor

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant 1} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_n(t)^{(i)} = n^{1/2}\psi_i + \mathrm{o}_{\mathbb{P}}(n^{1/2}).$$

Mint korábban említettük, a változás időpontjának $\widehat{\tau}_n$ becslése a tesztfolyamat minimum- vagy maximumhelye lesz. Erre vonatkozóan a következő állítást kapjuk:

3.5 Tétel. *Ha $\mathbf{C}_A$ teljesül, akkor*

$$\widehat{\tau}_n - \lfloor n\rho \rfloor = \mathrm{O}_{\mathbb{P}}(1), \qquad \text{amint} \ \ n \to \infty.$$

3.6 Következmény. *A $\widehat{\rho}_n := \frac{\widehat{\tau}_n}{n}$ definícióval $\widehat{\rho}_n - \rho = \mathrm{O}_{\mathbb{P}}(n^{-1})$.*

4. Változásészlelés a Cox–Ingersoll–Ross folyamatra

Az előzőekben leírt eljárás folytonos időre is kiterjeszthető. A következőkben ennek a részleteit adjuk meg Pap és Szabó (2016) alapján. A Cox–Ingersoll–Ross (CIR) folyamat definíciója a következő:

$$\mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

ahol $a > 0$, $b > 0$, $\sigma > 0$ és $(W_t)_{t\geqslant 0}$ egy standard Wiener-folyamat. Ezek a feltételek biztosítják az egyértelmű stacionárius eloszlás létezését és az ergodicitást, továbbá azt is, hogy egy nemnegatív értékből induló megoldás majdnem biztosan végig nemnegatív marad.

A Feller-diffúzióként is ismert CIR-folyamatot először Feller (1951) vizsgálta, majd Cox et al. (1985) javasolták ún. „short-term” kamatlábmodellként. A folyamat statisztikai vizsgálata így természetesen fontos kérdés volt és sok figyelmet kapott.

Változásészlelési eljárás ennek ellenére kevés található az irodalomban: Schmid és Tzotchev (2004) kontrollgörbék segítségével alakítottak ki egy szekvenciális, vagyis online eljárást, míg Guo és Härdle (2017) a lokális paramétermódszert használták a kvázi-maximum-likelihood becslésekre építve – lényegében a legnagyobb intervallumot akarták megtalálni, amelyre a modell jól illeszkedik a mintára.

A paramétervektorunk most a következő lesz:

$$\boldsymbol{\theta} := \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

A σ-ban való változásészlelés nem szükséges, ugyanis a paraméter értékét majdnem biztosan meghatározhatjuk egy tetszőlegesen kis folytonos mintából, így az állandóságát is megállapíthatjuk.

A következő martingált fogjuk használni:

$$M_s := Y_s - Y_0 - \int_0^s (a - bY_u)\,\mathrm{d}u = \sigma \int_0^s \sqrt{Y_u}\,\mathrm{d}W_u, \qquad s \geqslant 0. \tag{4.2}$$

A becsléseink egy formális analógiára épülnek, de megkaphatók a diszkrét idejű CLS becslések határértékeként is (Overbeck és Rydén, 1997, Theorem 3.1 és Theorem 3.3). Mindenesetre a levezetés pontos módja kevésbé lesz fontos, mint a becslések szerkezete, amely lehetővé teszi a teszt felépítését.

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_T := \begin{bmatrix} \widehat{a}_T \\ \widehat{b}_T \end{bmatrix} := \left(\int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_s \end{bmatrix}^\top \mathrm{d}s \right)^{-1} \int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_s \end{bmatrix} \mathrm{d}Y_s. \tag{4.3}$$

Ez alapján a tesztfolyamatunk a következő:

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_t^{(T)} := \boldsymbol{I}_T^{-1/2} \int_0^{tT} \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_s \end{bmatrix} \mathrm{d}\widehat{M}_s^{(T)}, \qquad t \in [0,1]. \tag{4.4}$$

Az információs mátrix ebben az esetben viszonylag egyszerű:

$$\boldsymbol{I}_{tT} := \sigma^2 \int_0^{tT} \begin{bmatrix} Y_s & -Y_s^2 \\ -Y_s^2 & Y_s^3 \end{bmatrix} \mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1].$$

A nullhipotézis mellett a következő eredményt láthatjuk be, amelynek segítségével ismét konstruálhatunk egy- és kétoldali teszteket is a változás észlelésére. A $\mathbf{C}_0$-beli momentumfeltételekre itt nincs szükség, hisz egy CIR-folyamat minden momentuma véges.

4.1 Tétel. *Legyen $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ egy CIR-folyamat, melyre $\mathbb{P}(Y_0 \in \mathbb{R}_+) = 1$. Ekkor*

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}^{(T)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \boldsymbol{\mathcal{B}} \qquad \text{as} \;\; T \to \infty,$$

ahol $(\boldsymbol{\mathcal{B}}(t))_{0\leqslant t\leqslant 1}$ egy kétdimenziós standard Brown-híd, és a konvergenciát eloszlásban értjük a $D([0,1])$ Szkorohod-téren.

Az alternatív hipotézis mellett a következő tételt láthatjuk be, amely a 3.4 Tétel megfelelője a CIR-folyamatra. A bizonyítás is a 3.4 Tételéhez hasonló alapötlettel történik, de a szükséges segédlemmák több esetben jóval bonyolultabbak.

4.2 Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\boldsymbol{\theta}$ *változása* $\boldsymbol{\theta}'$*-ról* $\boldsymbol{\theta}''$*-re történik, a* ρT *időpontban, ahol* $\rho \in (0,1)$*, valamint* $\boldsymbol{\theta}' > \mathbf{0}$ *és* $\boldsymbol{\theta}'' > \mathbf{0}$ *komponensenként. Legyen* $i \in \{1,2\}$*, és*

$$\psi_i := \mathbf{1}_i^\top \widetilde{\boldsymbol{I}}^{-1/2}((\rho \boldsymbol{Q}')^{-1} + ((1-\rho)\boldsymbol{Q}'')^{-1})^{-1}(\boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta}''), \ \widetilde{\boldsymbol{I}} := \lim_{T\to\infty} \frac{\boldsymbol{I}_T}{T}.$$

Ha $\psi_i > 0$*, akkor*

$$\sup_{t\in[0,T]} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{t,i}^{(T)} = T^{1/2}\psi_i + \mathrm{o}_{\mathbb{P}}(T^{1/2}).$$

Másfelől, ha $\psi_i < 0$*, akkor*

$$\inf_{t\in[0,T]} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}_{t,i}^{(T)} = T^{1/2}\psi_i + \mathrm{o}_{\mathbb{P}}(T^{1/2}).$$

A CIR-folyamat esetében a változás időpontját $\widehat{\tau}_T$-vel becsüljük, és a $\widehat{\rho}_T := \frac{\widehat{\tau}_T}{T}$ becslés tulajdonságait vizsgáljuk. A következő tétel könnyen megkapható a 3.5 Tétel megfelelőjéből a CIR-folyamatra.

4.3 Tétel. *A 4.2 Tétel feltételei mellett, a megfelelő becslésre teljesül, hogy*

$$\widehat{\rho}_T - \rho = \mathrm{O}_{\mathbb{P}}(T^{-1}).$$

5. CLS-szerű paraméterbecslés a Heston-modellre

Végül Barczy et al. (2016) alapján bemutatunk egy feltételes legkisebb négyzeteken alapuló módszert a Heston-modellre, amely a következő sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}X_t = (\alpha - \beta Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{Y_t}\big(\varrho\,\mathrm{d}W_t + \sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}B_t\big), \end{cases} \tag{5.1}$$

ahol $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\varrho \in (-1,1)$, és $(W_t, B_t)_{t\geqslant 0}$ egy kétdimenziós standard Wiener-folyamat, ld. Heston (1993). Azonnal látható, hogy Y éppen a (4.1) által definiált Cox–Ingersoll–Ross folyamat. Az Y és X folyamatok pénzügyi jelentőségéről ld. pl. Hurn et al. (2013, 4. szakasz).

A legtöbb kutatás ezidáig a CIR-modell és nem a magasabb dimenziós Heston-modell paraméterbecslésére irányult. A CIR-modell diszkrét idejű megfigyeléseire Overbeck és Rydén (1997) 3.1 és 3.3 Tétele áll rendelkezésre, melyek a mi 5.2 Tételünk megfelelői, de a σ_1 volatilitás-paramétert is becsülik, amelyet mi ismertnek feltételezünk. A becsléseink alakja, amely hasonlít a korábbiakhoz, egy lehetséges módot ad arra is, hogy kutatásainkat a változásészlelés irányába folytassuk.

Ugyanúgy, mint a CIR-folyamatnál, itt is kizárólag a $b > 0$ által definiált stabil esetre szorítkozunk. Ugyanúgy nem becsüljük a σ_1, σ_2 és ϱ paramétereket, hiszen ezeket majdnem biztosan kiszámíthatjuk egy tetszőlegesen rövid folytonos idejű mintából. Szeretnénk diszkrét idejű megfigyelések alapján CLS becslést adni az (a, b, α, β) paraméterekre. Ez azonban nehezen kivitelezhető, mert a minimalizáláshoz szükséges parciális deriváltak nemlineáris módon függnek a paraméterektől, így a megoldást nem tudjuk analitikusan meghatározni. Ezért átalakítjuk a paraméterteret, és a következő transzformált paraméterekre számolunk CLS becsléseket:

$$\begin{bmatrix} c \\ d \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \int_0^1 \mathrm{e}^{-bu} \, \mathrm{d}u \\ \mathrm{e}^{-b} \\ \alpha - a\beta \int_0^1 \left(\int_0^u \mathrm{e}^{-bv} \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \\ -\beta \int_0^1 \mathrm{e}^{-bu} \, \mathrm{d}u \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Az ezen paraméterekre vonatkozó parciális deriváltak már lineárisak, így megkaphatjuk a szokásos CLS becsléseket, amelyek feltűnően hasonlítanak az előző esetekben kapottakra:

$$\begin{bmatrix} \widehat{c}_n \\ \widehat{d}_n \\ \widehat{\gamma}_n \\ \widehat{\delta}_n \end{bmatrix} := \left(\boldsymbol{E}_2 \otimes \left(\sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{i-1} \end{bmatrix}^\top \right)^{-1} \right) \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} Y_i \\ X_i - X_{i-1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{i-1} \end{bmatrix}.$$

Ezen becslések a következő tétel szerint rendelkeznek két igen előnyös tulajdonsággal. A bizonyítás ugyanazokat a martingálelméleti eszközöket használja, mint a CIR-folyamat változásészlelése, ezt pedig éppen a becslések korábbiakhoz hasonló szerkezete teszi lehetővé.

5.1 Tétel. *Ha $b > 0$, és $(Y_0, X_0) = (y_0, x_0)$, ahol $y_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, akkor $(\widehat{c}_n, \widehat{d}_n, \widehat{\gamma}_n, \widehat{\delta}_n)$ erősen konzisztens és aszimptotikusan normális, azaz, amint $n \to \infty$, valamely $\boldsymbol{G}$ szigorúan pozitív definit mátrixra*

$$(\widehat{c}_n, \widehat{d}_n, \widehat{\gamma}_n, \widehat{\delta}_n) \stackrel{\text{m.b.}}{\longrightarrow} (c, d, \gamma, \delta) \quad \text{és} \quad \sqrt{n} \begin{bmatrix} \widehat{c}_n - c \\ \widehat{d}_n - d \\ \widehat{\gamma}_n - \gamma \\ \widehat{\delta}_n - \delta \end{bmatrix} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}_4\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{G}\right).$$

Az eredeti paraméterek becsléseit úgy kapjuk, hogy az (5.2) becslésekre alkalmazzuk a transzformáció inverzét. Ez a művelet 1-hez tartó valószínűséggel elvégezhető.

$$\begin{bmatrix} \widehat{a}_n \\ \widehat{b}_n \\ \widehat{\alpha}_n \\ \widehat{\beta}_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -\widehat{c}_n \frac{\log \widehat{d}_n}{1-\widehat{d}_n} \\ -\log \widehat{d}_n \\ \widehat{\gamma}_n - \widehat{c}_n \widehat{\delta}_n \frac{\widehat{d}_n - 1 - \log \widehat{d}_n}{(1-\widehat{d}_n)^2} \\ \widehat{\delta}_n \frac{\log \widehat{d}_n}{1-\widehat{d}_n} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Ezen transzformáció után az ún. delta-módszer segítségével kapjuk a következő eredményt:

5.2 Tétel. *Az 5.1 Tétel feltételei mellett $\left(\widehat{a}_n, \widehat{b}_n, \widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n\right)$ is erősen konzisztens és aszimptotikusan normális, azaz, amint $n \to \infty$,*

$$(\widehat{a}_n, \widehat{b}_n, \widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n) \stackrel{\text{m.b.}}{\longrightarrow} (a, b, \alpha, \beta) \quad \text{és} \quad \sqrt{n} \begin{bmatrix} \widehat{a}_n - a \\ \widehat{b}_n - b \\ \widehat{\alpha}_n - \alpha \\ \widehat{\beta}_n - \beta \end{bmatrix} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}_4\left(0, \boldsymbol{J}\boldsymbol{G}\boldsymbol{J}^\top\right),$$

ahol

$$\boldsymbol{J} := \begin{bmatrix} -\frac{\log d}{1-d} & -c\frac{\log d - 1 + d^{-1}}{(1-d)^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{d} & 0 & 0 \\ \delta\frac{\log d + 1 - d}{(1-d)^2} & c\delta\frac{2\log d - d + d^{-1}}{(1-d)^3} & 1 & c\frac{\log d + 1 - d}{(1-d)^2} \\ 0 & \delta\frac{\log d - 1 + d^{-1}}{(1-d)^2} & 0 & \frac{\log d}{1-d} \end{bmatrix},$$

az (5.3) egyenletben szereplő transzformáció Jacobi-mátrixa.

Hivatkozások

Alzaid, A. A. és Al-Osh, M. A. (1987). First order integer-valued autoregressive (INAR(1)) processes. *J. Time Series Anal.*, 8, 261–275.

Barczy, M., Pap, G., és T. Szabó, T. (2016). Parameter estimation for the subcritical Heston model based on discrete time observations. *Acta Sci. Math.*, 82(1-2), 313–338.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., és Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.

Csörgő, M. és Horváth, L. (1997). *Limit Theorems in Change-point Analysis*. Wiley.

Du, J.-G. és Li, Y. (1991). The integer valued autoregressive (INAR(p)) model. *J. Time Series Anal.*, 12, 129–142.

Feller, W. (1951). Two singular diffusion problems. *Ann. of Math.*, 54, 173–182.

Gombay, E. (2008). Change detection in autoregressive time series. *J. Multivariate Anal.*, 99, 451–464.

Guo, M. és Härdle, W. K. (2017). Adaptive interest rate modelling. *J. Forecast.*, 36(3), 241–256.

Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6, 327–343.

Hurn, A., Lindsay, K., és McClelland, A. (2013). A quasi-maximum likelihood method for estimating the parameters of multivariate diffusions. *J. Econometrics*, 172(1), 106–126.

Jacod, J. és Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag.

Kang, J. és Lee, S. (2009). Parameter change test for random coefficient integer-valued autoregressive processes with application to polio data analysis. *J. Time Series Anal.*, 30, 239–258.

Karatzas, I. és Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag.

Klimko, L. A. és Nelson, P. I. (1978). On conditional least squares estimation for stochastic processes. *Ann. Statist.*, 6, 629–642.

Kokoszka, P. és Leipus, R. (1998). Change-point in the mean of dependent observations. *Statist. Probab. Lett.*, 40, 385–393.

Overbeck, L. és Rydén, T. (1997). Estimation in the Cox–Ingersoll–Ross model. *Econometric Theory*, 13(3), 430–461.

Page, E. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41(1-2), 100–115.

Page, E. (1955). A test for a change in a parameter occurring at an unknown point. *Biometrika*, 42(3-4), 523–527.

Pap, G. és Szabó, T. T. (2013). Change detection in INAR(p) processes against various alternative hypotheses. *Comm. Statist. Theory Methods*, 42(7), 1386–1405.

Pap, G. és Szabó, T. T. (2016). Change detection in the Cox–Ingersoll–Ross model. *Statistics & Risk Modeling*, 33(1-2), 21–40.

Schmid, W. és Tzotchev, D. (2004). Statistical surveillance of the parameters of a one-factor Cox–Ingersoll–Ross model. *Sequential Anal.*, 23(3), 379–412.