Jornal das Primeiras Matemáticas

Número 7

Dezembro 2016

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Recursos Didáticos

MATERIAIS ESTRUTURADOS PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PRÉ-ESCOLAR

Alda Carvalho, Carlos Santos, Jorge Nuno Silva, Ricardo Teixeira
ISEL-CEMAPRE, CEAFEL, Universidade de Lisboa, NICA-UAc
acarvalho@adm.isel.pt,cmfsantos@fc.ul.pt,jnsilva@cal.berkeley.edu,ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Neste artigo, apresentam-se alguns métodos de utilização de materiais estruturados na educação matemática pré-escolar. A análise apresentada incide sobre os dons de Fröebel, as barras cuisenaire, o tangram e os blocos lógicos. Estes materiais, podendo também ser utilizados noutros níveis de ensino, revelam-se muito adequados para a faixa etária dos 3-5 anos.*

Palavras-chave: materiais didáticos, materiais estruturados, educação pré-escolar, dons de Fröebel, barras cuisenaire, tangram, blocos lógicos.

Nota Prévia

Este artigo é uma adaptação de um dos capítulos do livro *Investigar em Educação Matemática: Diálogos e Conjunções numa Perspetiva Interdisciplinar* [6].

1 Introdução

Ao longo dos tempos, vários estudiosos propuseram definições para o termo "material didático" [4]. Alguns fizeram distinções precisas sobre vários tipos de materiais; por exemplo, Royo distingue material educativo, material estruturado, material didático e jogo [30]. Neste artigo não precisaremos de distinções tão precisas. Não trataremos de jogos, que podem ser vistos como conjuntos de regras juntamente com um objetivo. Deixaremos o tema para um futuro artigo. Também não trataremos de materiais concretos na medida em que não serão abordados materiais envolvendo morangos, carros, animais ou outros objetos mundanos habitualmente conhecidos pelas crianças em idade pré-escolar. Os materiais concretos são importantíssimos e devem obrigatoriamente ser usados nas atividades implementadas na educação pré-escolar. Deixaremos também a sua análise para outra ocasião. Neste artigo trataremos de materiais clássicos de teor mais abstrato. Materiais como os DONS DE FRÖEBEL, as BARRAS CUISENAIRE, o TANGRAM ou os BLOCOS LÓGICOS permitem intermediar a passagem de tratamentos concretos para tratamentos abstratos através do que se pode chamar de esquemas (clássica abordagem concreto-esquemático-abstrato de origem em teorias construtivistas do conhecimento [3]). Para se perceber melhor o que se pretende dizer, 3 morangos é algo concreto; ao contrário, o numeral "3" é abstrato na medida em que é aplicável a milhares de situações quotidianas envolvendo essa quantidade. Uma das mais admiráveis características do ser humano é a faculdade de conseguir pensar e manipular conceitos abstratos de uma forma desligada da realidade. Na matemática, os números e as formas são exemplos de objetos abstratos. Se se tratasse de 3 cruzes, estaríamos perante um esquema. Quando se propõe uma atividade a uma criança que consiste em desenhar um número de bolinhas correspondente ao número de carros que vê numa imagem estamos perante uma atividade esquemática. Ainda não é a escrita matemática abstrata com os habituais numerais, mas também já não é um desenho concreto de coisas mundanas. Quando a criança pega em cubos, faz uma construção e diz que é uma ponte, está a ter um procedimento esquemático desse tipo. O imaginário infantil, carregado de brincadeiras de toda a espécie é uma das mais poderosas maneiras de percorrer o caminho para a abstração. Os materiais estruturados que abordaremos permitem a manipulação e experimentação por parte das crianças. Além de terem vantagens evidentes no desenvolvimento da motricidade, são pela sua natureza um elemento facilitador intermediário entre a vida real e as abstrações criadas pelo Homem. A manipulação orientada de material pode facilitar a aquisição de vários conceitos e é habitualmente incentivada nos currículos oficiais. Mas é necessário haver intencionalidade na utilização dos materiais. Pretende este artigo apresentar alguns exemplos juntamente com métodos de utilização. Faremos alguma contextualização histórica e considerações teóricas de uma forma fundamentada, no entanto, procuraremos que este artigo possa ajudar de uma forma bastante direta a atividade do educador. Nessa medida, poderão ser encontradas ao longo do texto diversas propostas de utilização dos vários materiais clássicos.

2 DONS DE FRÖEBEL

O pedagogo alemão Friedrich Wilhelm August Fröbel (1782–1852) foi um dos primeiros a interessar-se pela educação pré-escolar. Criou o termo *Kindergarten* que significa "Jardim de Infância", utilizado tanto em alemão como em inglês. Ciente do potencial de desenvolvimento das crianças, tinha como essencial a criação de um espaço próprio para cuidar e cultivar as crianças, assim como um jardim faz com as plantas (ver [2, 33] para mais informação). Modernamente, a existência desses espaços é um dado adquirido.

Figura 1: Friedrich Fröebel.

Em 1837, criou o *Instituto para cuidar, brincar e desenvolver atividades com crianças pequenas* na cidade alemã de Blankenburg. Fröebel desenhou uma série de conjuntos de materiais didáticos – os dons de fröebel – que foram usados pela primeira vez em Blankenburg (*Fröebel Gifts* em inglês ou *Fröbelgaben* em alemão).

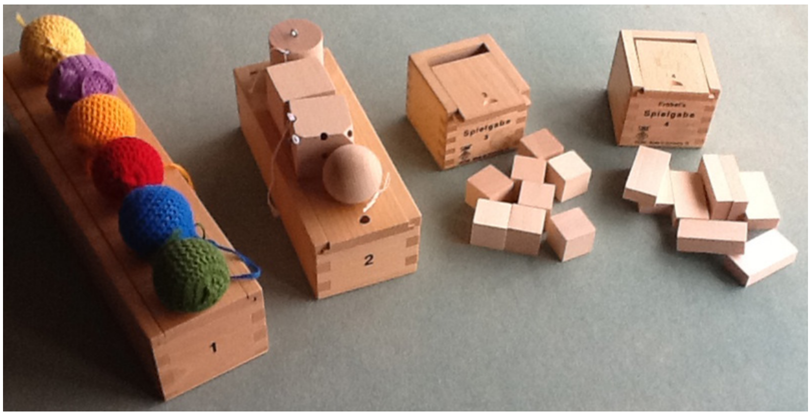


Figura 2: Os primeiros quatro Dons de Fröbel.

Em Portugal, os primeiros jardins de infância foram criados no século XIX com a afirmação de uma classe média cada vez mais esclarecida. Nesse campo, uma figura muito relevante no nosso País foi o pedagogo e poeta João de Deus (1830–1896), bastante conhecido pela criação da "Cartilha" numa altura em que havia mais de 75% de analfabetos em Portugal. Em 1908, João de Deus filho criou um modelo de escola infantil e preocupou-se, em simultâneo, com a formação de educadores. Presentemente, há algumas dezenas de jardins escola João de Deus. Em 1979, já depois da revolução dos cravos, foi promulgado o "Estatuto dos Jardins de Infância"; nos nossos dias, o ensino infantil não é obrigatório, sendo ministrado em jardins de infância públicos e privados um pouco por todo lado. Ainda assim, a taxa de pré-escolarização já é razoavelmente elevada.

Educação Pré-Escolar								
Anos	1985/86	1995/96	2000/01	2001/02	2002/03	2003/04	2004/05	2005/06
Continente	29,7	57,8	75,4	76,9	76,9	77,5	77,8	78,0
Portugal	29,3	58,0	75,6	77,2	77,3	77,9	78,3	78,4

Tabela 1: Taxa bruta de pré-escolarização
(Gabinete de estatística e planeamento de educação).

Nos jardins de infância João de Deus, os dons de fröebel são instrumento fundamental. Embora com adaptações de acordo com o nosso gosto pessoal, algumas das ideias que se apresentam em seguida são baseadas em documentos daí provenientes secularmente experimentados [4, 33]. Exemplificaremos algumas explorações do Dom 1 e do Dom 3.

2.1 Dom 1

O primeiro Dom é constituído por 6 bolas de malha coloridas: as três cores primárias, vermelho, amarelo e azul e três cores secundárias, roxo, verde e laranja. Em algumas versões são 7 cores (como no arco-íris): vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta. Além disso, nas versões modernas, cada bola costuma ter um fio agarrado (veremos qual o propósito) e a própria caixa costuma englobar um dispositivo para pendurar as bolas.

Figura 3: Dom 1.

Este material costuma ser usado para a aprendizagem das cores, noções espaciais, desenvolvimento verbal, ordenações e contagens. Pode e deve ser usado logo a partir dos 3 anos de idade. O primeiro contacto com as bolas deve ser feito de forma livre. A criança pode brincar, fazer rodar, tocar, etc.

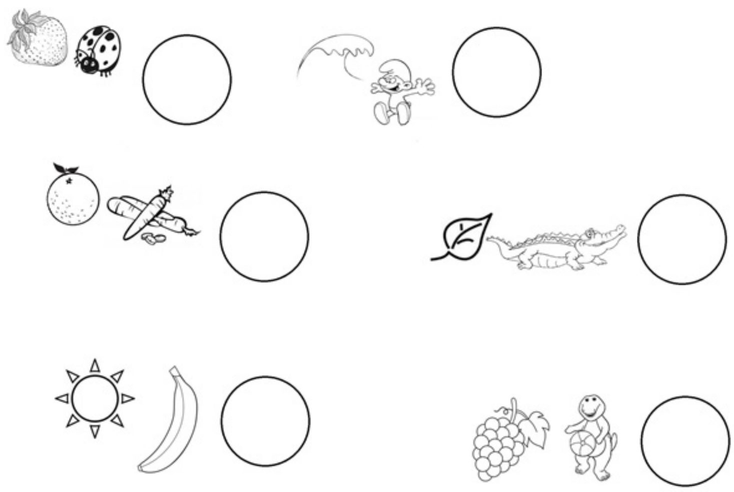


Figura 4: Cores exploradas com o Dom 1.

Podem ensinar-se as cores com ajuda das bolas. Se a criança ainda estiver na fase inicial de aprendizagem, as imagens a apresentar podem estar coloridas. Numa fase posterior, as imagens podem ser a preto e branco. Na Figura 4 pode ver-se uma típica atividade de correspondência; as crianças são convidadas a colocar as bolas nos locais certos. Deve dar-se a importância máxima à oralidade: procurem-se objetos na sala com as cores em causa. Provoque-se a conversa por parte das crianças.

Quanto às noções espaciais estáticas (de localização), "à frente", "atrás", "entre", "ao lado", "em cima", "em baixo", "dentro", "fora", "perto", "longe" "esquerda", "direita"[1], há muitas atividades apropriadas. Por vezes, fazem-se jogos envolvendo a própria caixa. As crianças podem ser convidadas a olhar para uma situação. Em seguida, fecham os olhos e o educador muda ou troca uma posição (Figura 5). Depois, as crianças são convidadas a explicar o que mudou. O dispositivo que vem com a caixa nas versões modernas é especialmente apropriado para este tipo de atividade.

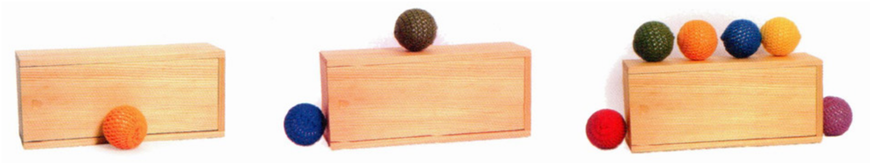


Figura 5: Noções espaciais de localização com o Dom 1.

As noções espaciais dinâmicas (verbos de movimento) também podem ser trabalhadas. As crianças poderão aprender os verbos "puxar", "girar", "rodar", "deslizar", "saltar", "balançar", etc. Mais do que aprender o seu significado, as crianças poderão executar. O fio que acompanha as bolas nas versões modernas do Dom 1 permite todo o tipo de movimentos.

Figura 6: Movimento com o Dom 1 [35].

2.2 Dom 3

O terceiro Dom é constituído por 8 cubos guardados dentro de uma caixa cúbica.

Figura 7: Dom 3.

[1] A noção de lateralidade esquerda-direita pode ser trabalhada a partir dos 4 anos.

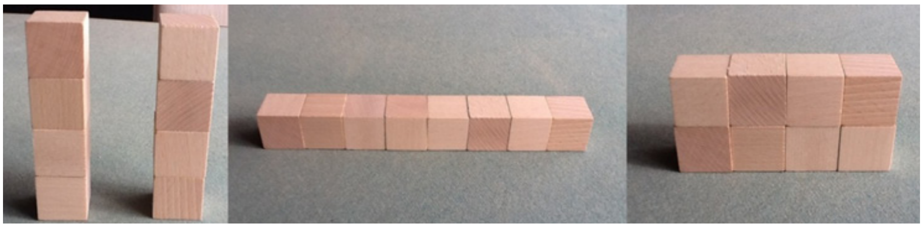
Este material costuma ser usado para desenvolver a execução de construções espaciais e treinar a oralidade. O Dom 3 desenvolve a motricidade fina e a noção de equilíbrio. Repare o leitor na diferença entre um material deste género e as tradicionais peças de lego (que constituem um ótimo brinquedo, mas de natureza diferente): as peças de lego prendem-se umas às outras, os cubos de madeira não se prendem. Dessa forma, as crianças terão de ter preocupações com o equilíbrio, o que constitui um tipo de competência muito importante nestas idades. O Dom 3 pode ser usado a partir dos 4 anos de idade.

A postura da criança face a este material merece algumas observações. Além de atenção, costas direitas, concentração para não destruir, a posição de mãos é da máxima importância. É sabido que a forma de agarrar um lápis evolui na idade infantil [34].

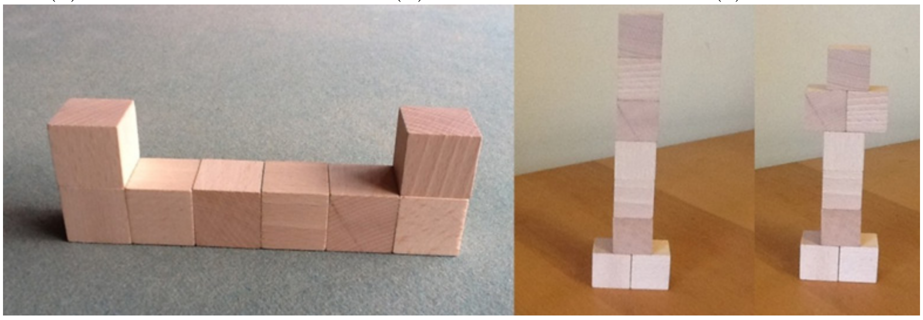
Figura 8: Forma de agarrar num lápis.

A utilização dos dedos indicador e polegar em forma de pinça constitui um objetivo que servirá a correta utilização de um lápis/caneta. As crianças devem ser incentivadas a manusear as peças dessa forma. Além disso, em algumas situações, as duas mãos devem ser usadas em simultâneo. Explorações exigindo uma maior preocupação com o equilíbrio exigem a simultaneidade.

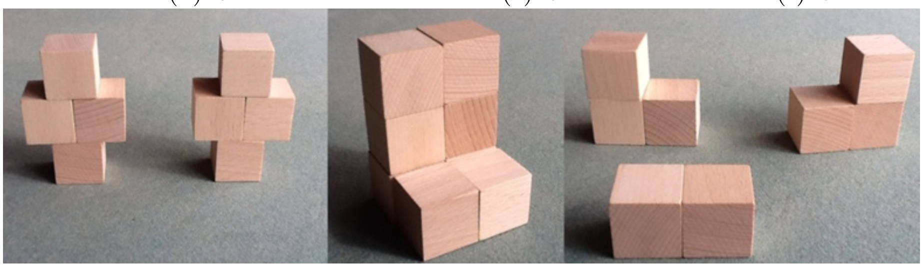
A ordem clássica das construções é ilustrada na Figura 9 (ver [4]). Experimente o leitor fazer as construções (f) e (g) e entenderá o que quisemos dizer com a ideia de equilíbrio e simultaneidade de mãos. Repare-se também na necessidade de quantificação em muitas construções, por exemplo (k).



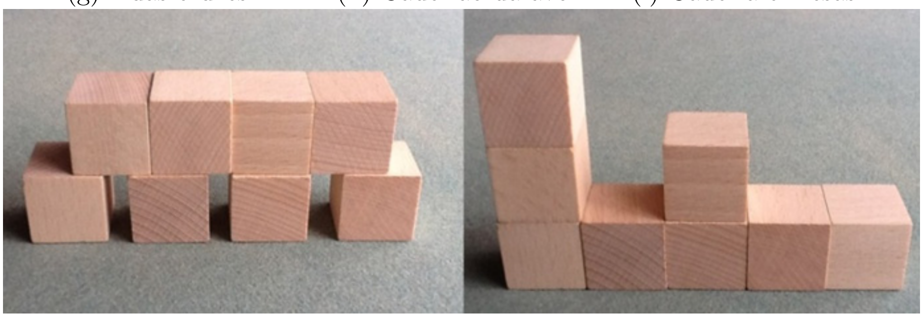
(a) Duas torres (b) Muro baixo (c) Muro alto.



(d) Cama (e) Coluna com base (f) Cruzeiro



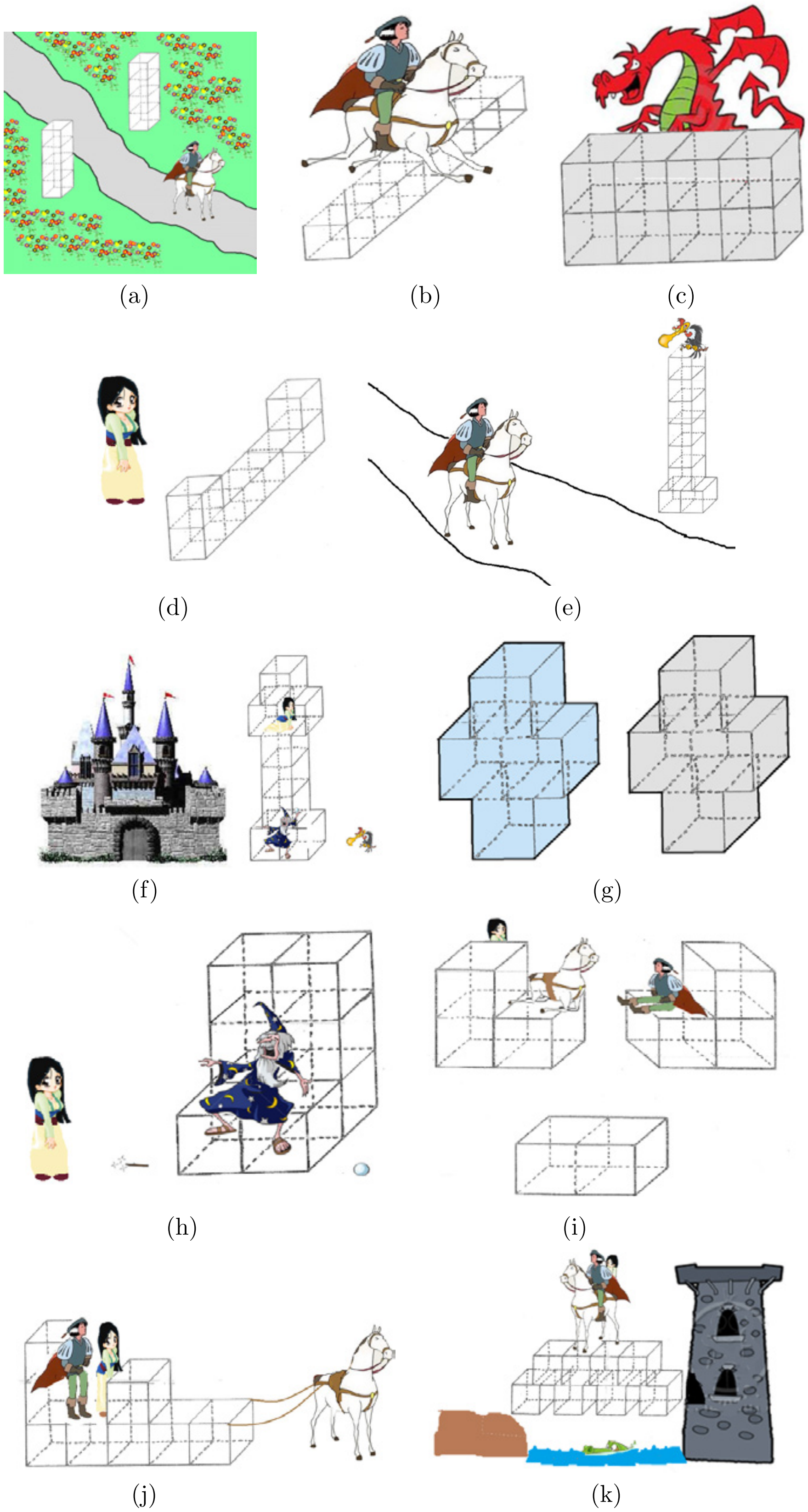
(g) Duas cruzes (h) Cadeirão da avó (i) Cadeira e mesas



(j) Ponte (k) Comboio

Figura 9: Ordem de exploração para o Dom 3.

As crianças podem executar as construções ouvindo histórias. As histórias podem durar vários dias. As crianças devem executar as construções sem verem as imagens. Isso desenvolverá a oralidade. Os educadores devem transmitir mensagens claras ao nível da idade da criança e devem acompanhar as construções à medida que estas vão sendo feitas. Havendo um cavalete, as histórias poderão ser contadas e ilustradas à medida que se fazem as construções. Uma possível proposta é exposta na Figura 10.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k)

Figura 10: Castelo de Saruman.

Uma história possível pode ser a seguinte.

Há muito, muito tempo, o terrível feiticeiro Saruman tinha raptado e levado a princesa Leonor para o seu castelo escuro, frio e todo feito de grandes blocos de pedra. Tudo o que havia no castelo de Saruman era feito de cubos de pedra muito frios e desconfortáveis. Felizmente, o príncipe Eduardo, que gostava muito da princesa Leonor, foi com o seu fiel cavalo Bucéfalo à sua procura. A certa altura, reparou em duas grandes torres, uma de cada lado da estrada. Isso era sinal de que já estava perto do castelo de Saruman.

Mensagem (Duas Colunas): Duas torres separadas. Cada uma tem 4 cubos ao alto, todos bem empilhados uns por cima dos outros.

O príncipe teria de passar por muitos obstáculos perigosos. De repente, um muro apareceu no caminho. O Bucéfalo era um excelente cavalo e conseguiu saltar por cima dele com alguma facilidade.

Mensagem (Muro Baixo): Oito cubos em linha, todos juntos uns ao lado dos outros.

O obstáculo seguinte era muito mais difícil. O muro era mais alto e tinha um dragão escondido atrás dele. O príncipe Eduardo, que era realmente valente, sacou da espada e cortou a cabeça do dragão. Juntos, Eduardo e Bucéfalo, continuaram o seu caminho em busca da princesa Leonor.

Mensagem (Muro Alto): Quatro cubos alinhados uns ao lado dos outros e os outros quatro cubos exatamente por cima deles.

Entretanto, no castelo do feiticeiro Saruman, a princesa Leonor passava um mau bocado. A cama era tão dura que ela preferia ficar no chão. E o chão era frio e desconfortável...

Mensagem (Cama): Seis cubos alinhados uns ao lado dos outros. Por cima de cada cubo, em cada ponta, colocar um cubo.

Pelo caminho, o príncipe passou por uma torre. Lá no alto, estava o malvado abutre do feiticeiro. Quando o abutre viu o príncipe imediatamente voou para avisar o seu mestre.

Mensagem (Coluna com Base): Colocar dois cubos muito juntos, um ao lado do outro. Depois, mesmo a meio, por cima desses dois cubos, colocar uma coluna feita com os seis cubos que sobraram.

Ao chegar ao castelo do terrível Saruman, o príncipe Eduardo reparou numa torre muito alta. No cimo dessa torre chorava a princesa Leonor. O príncipe só não sabia como havia de lidar com o feiticeiro. Ele sabia que bastava um toque da varinha mágica e podia ficar transformado em cubos de pedra para sempre.

Mensagem (Cruzeiro): Primeiro, colocar dois cubos muito juntos, um ao lado do outro. Depois, mesmo a meio, por cima desses dois cubos, colocar uma coluna feita com três cubos. Depois, mesmo por cima, colocar dois cubos lado a lado e, finalmente, mesmo a meio, o último cubo no cimo da torre.

Acontece que Saruman já tinha sido avisado pelo abutre e já estava à espera do príncipe escondido na parte de baixo da torre. E com dois toques da varinha transformou

Eduardo e Bucéfalo em duas peças de pedra.

Mensagem (2 Cruzes): Primeiro, colocar um cubo em cima da mesa. Depois, mesmo a meio, colocar dois cubos juntinhos por cima e, novamente por cima desses cubos, mesmo a meio, colocar mais um cubo a segurar. Repetir o processo para fazer um segundo conjunto.

Com engenho, a princesa Leonor conseguiu fugir do alto da torre. Quando Saruman estava a dormir no seu grande cadeirão, a princesa aproximou-se da varinha que estava caída no chão e tirou-a sem que o terrível feiticeiro acordasse.

Mensagem (Cadeirão da Avó): Primeiro, fazer duas linhas com dois cubos e juntar as duas linhas de forma a parecer um quadrado feito com 4 cubos. Depois, fazer outro quadrado igual a esse com os outros quatro cubos para colocar em seguida, ao alto, por cima de uma das linhas do primeiro quadrado. Vai ficar parecido com uma cadeira.

E, zás! Desta vez foi a princesa que transformou o feiticeiro em pedra. A princesa também usou a varinha para desfazer o feitiço que amaldiçoava o príncipe Eduardo e o seu cavalo. Antes de fazer a viagem de volta, Eduardo e Bucéfalo quiseram sentar-se um pouco por estarem muito cansados de tantas aventuras.

Mensagem (Cadeiras e Mesa): Primeiro, fazer uma linha com dois cubos juntos. Depois, em separado, fazer outra linha com dois cubos juntos e colocar um terceiro cubo em cima do cubo de uma das pontas. Este segundo grupo parece uma cadeira pequena. No final fazer mais outra cadeira pequena com os três cubos que sobraram.

Todos juntos, Bucéfalo, Eduardo e Leonor foram embora do maldito castelo. Para não ter problemas com o crocodilo faminto que vivia no fosso, Bucéfalo passou por cima da ponte do castelo.

Mensagem (Ponte): Colocar quatro cubos em linha e, depois, fazer com que haja um pequeno espaço entre eles. Os espaços têm de ser pequenos o suficiente para ser possível colocar uma linha de quatro cubos juntos por cima deles. No final vai parecer uma ponte.

O príncipe Eduardo e a princesa Leonor casaram e viveram felizes para sempre. No dia do casamento, a honra de puxar a carruagem dos noivos, como não podia deixar de ser, pertenceu ao cavalo Bucéfalo. E, também para sempre, o feiticeiro Saruman ficou transformado em pedra a servir de poiso para o seu abutre.

Mensagem (Comboio): Primeiro, fazer uma linha com cinco cubos todos juntos, ao lado uns dos outros. Colocar um cubo em cima do cubo do meio. Colocar os dois cubos que sobraram, ao alto, em cima do cubo de uma das pontas.

FIM

Para acabar esta secção, uma última palavra sobre a forma de abrir e fechar a caixa do Dom 3. A maneira mais fácil de abrir consiste em entreabrir um pouco a tampa, virar a caixa, tirar o resto da tampa e, no final, tirar a caixa. Para fechar, colocar 4 cubos sobre a tampa (em forma de quadrado), por cima os restantes, enfiar a caixa, virar e, no final, fechar.

3 barras cuisenaire

O belga Georges Cuisenaire (1891–1975) foi violionista do Conservatório de Música de Mons e professor de matemática em Thuin. Após anos de experimentação, propôs um conjunto de barras coloridas para desenvolver as primeiras explorações de vários conceitos matemáticos – as barras cuisenaire. A sua proposta foi adotada por milhares de professores em mais de sessenta países ([14] inclui uma lista de referências relativa ao tema). Em 1952 publicou o *Les Nombres in Couleurs* [9].

Figura 11: Georges Cuisenaire.

O egípcio Caleb Gattegno (1911–1988), especialista em educação, nomeadamente na área da matemática, conheceu Georges Cuisenaire em 1953. Ficou rendido às suas experiências e apoiou fortemente a utilização das barras coloridas [10]. Gattegno criou a *Cuisenaire Company* [36] que divulgou alguns dos métodos de que iremos falar. Além disso, organizou inúmeros vídeos e conferências expondo as suas ideias; pode consultar-se um bastante apropriado em [37].

Figura 12: Caleb Gattegno.

Em 1961 foi feita em Portugal, no Colégio Vasco da Gama em Sintra, sob a orientação de João Nabais, uma experiência educativa com as barras coloridas [5]. Em Abril de 1962, Caleb Gattegno dirigiu um curso nesse colégio em que participaram educadores de todo o País. Essa é uma das razões para vermos as barras cuisenaire tão divulgadas em Portugal nos dias de hoje.

O material Cuisenaire é constituido por 10 tipos de barras de tamanhos diferentes, cada tipo com uma cor diferente. Normalmente, cada conjunto traz 241 peças.

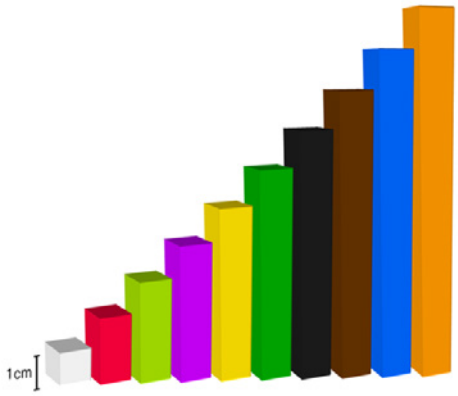


Figura 13: BARRAS CUISENAIRE.

As peças costumam ser de madeira ou de plástico. Os comprimentos variam entre 1 cm e 10 cm. A peça padrão é a peça branca com 1 cm de comprimento. As restantes podem ser medidas facilmente com a peça padrão. As peças não devem ter nada escrito[2].

Figura 14: Conjunto Cuisenaire.

A primeira coisa que se costuma fazer é deixar as crianças brincarem livremente com as peças. Podem construir todo o tipo de figuras coloridas com as barras. Com a atividade livre, as crianças poderão perceber que peças com a mesma cor têm o mesmo comprimento. Paralelamente, poderão ver que peças de comprimentos diferentes estão associadas a cores diferentes. O primeiro grande objetivo consiste em fazer com que as crianças associem a cor ao número correspondente (por exemplo, associar a barra vermelha ao 2). Para o fazer, há um certo número de atividades aconselhadas (ver [4] e partes do vídeo

[2]Já no contexto do 1.º Ciclo do Ensino Básico, as BARRAS CUISENAIRE são especialmente úteis para trabalhar as frações. Por exemplo, considerando como unidade a barra vermelha cria-se um contexto em que a barra branca corresponde a $\frac{1}{2}$. Devido a esse dinamismo ser benéfico (poder mudar-se o estatuto de unidade), as barras não devem ter nada escrito.

[37]). Durante as atividades livres, o educador pode convidar as crianças a fazer corresponder a cada peça o número de peças brancas associado (Figura 15).

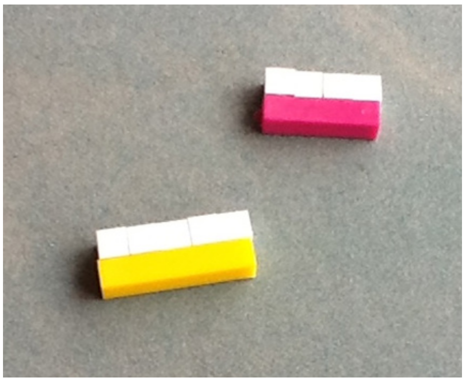


Figura 15: Utilização da peça padrão.

Outra coisa que se pode fazer é apelar a algum tipo de memorização. O educador pode convidar as crianças a tentar adivinhar a cor das peças apenas pelo tato (atrás das costas, por exemplo). Além de treinar as correspondências, este tipo de atividade ajuda um reconhecimento sensorial dos diferentes tamanhos, o que é diferente do simples reconhecimento visual.

As crianças devem aprender a nomear as barras tanto por cor como por valor. Podem ser convidadas a fazer a "escada" da Figura 13 e a "subir" dizendo a cor das peças. A dada altura, o educador manda parar num degrau e pergunta o valor. A escada pode ser "subida" e "descida" oralmente. Podem fazer-se inúmeras atividades incentivando a correspondência cor-número; a Figura 16 ilustra um exemplo possível.

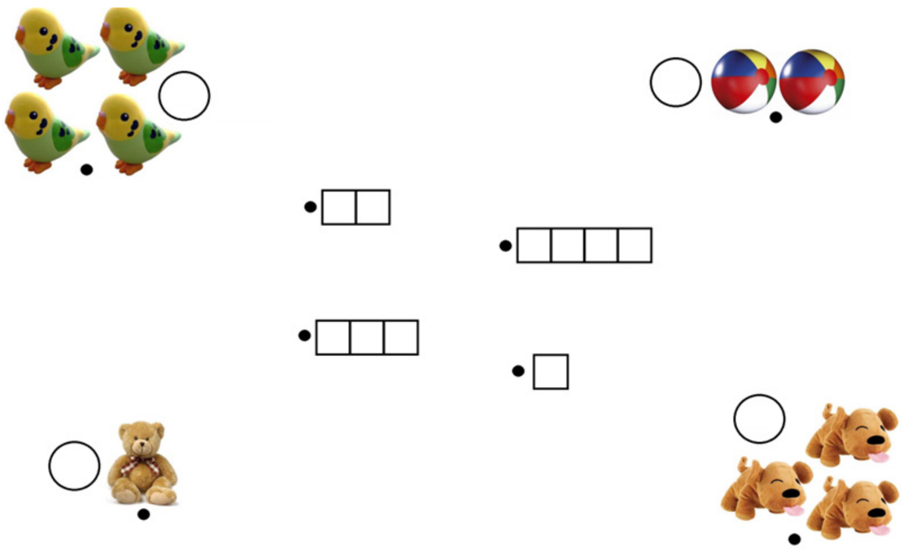
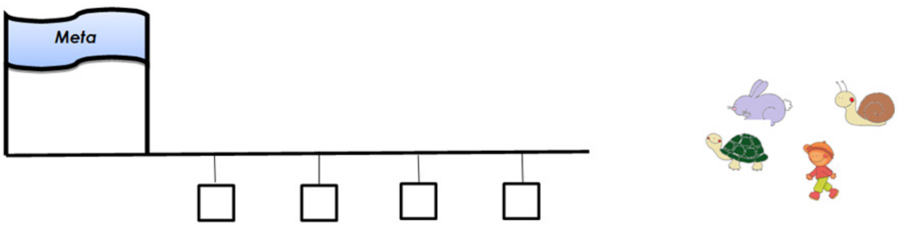


Figura 16: Correspondência com as barras cuisenaire.

A criança pode pintar as barras com a cor correta. Deverá estabelecer a correspondência correta unindo os pontinhos. Poderá, se já estiver pronta para isso, ser convidada a escrever os numerais nos círculos. Nestas atividades, o educador deverá ter o cuidado de desenhar as barras em tamanho real (os comprimentos deverão ser um número inteiro de centímetros). Dessa forma, as crianças poderão sobrepor as barras de forma exata sobre os desenhos. A sobreposição é uma atividade fundamental na educação pré-escolar. As tarefas devem ser cuidadosamente preparadas para isso.

O Cuisenaire também é útil para trabalhar a ordinalidade. Quando a criança conta uma certa quantidade e diz "são três maçãs", trata-se de uma utilização do número enquanto cardinal; não há nenhuma ordem envolvida. Quando se trata de trabalhar algum tipo de ordenação e se utilizam os ordinais (primeiro, segundo, terceiro, etc.), já não se está a trabalhar a cardinalidade, mas sim a ordinalidade. Este segundo tópico deve ser trabalhado numa fase posterior ao primeiro (tipicamente a partir dos 4 anos); se a criança não conta bem não poderá perceber os ordinais na medida em que os dois conceitos estão ligados. Por exemplo, um elemento é o terceiro uma vez que, realizando a contagem desde o ponto de referência (pode ser uma meta de uma corrida), a criança conta exatamente três elementos. O ordinal individualiza um objecto de uma sequência (individualização não existente quando se trabalha a cardinalidade). Há mesmo uma mudança linguística: um cardinal é um substantivo ("três maçãs"), um ordinal é um adjetivo ("o Faísca foi o terceiro"). A criança, ao utilizar os ordinais, nomeia os elementos. Sendo assim, convém que os objectos tenham características que ajudem o diálogo (veja-se em [21] um excelente texto sobre a ordinalidade).



Opcionalmente, antes da atividade, o educador pode contar à criança a história *A Lebre e a Tartaruga*. O educador deverá dar à criança 4 cartolinas com uma tartaruga, um caracol, um menino e um coelho. Deverá haver uma conversa sobre essas personagens (quais as mais rápidas; quais as mais lentas). No final, a criança deverá ordenar as figuras. Os numerais deverão ser escritos nos quadradinhos e os ordinais deverão ser ensinados (primeiro, segundo, terceiro, quarto). Enquanto ensina, o educador deverá ligar ordinalidade e cardinalidade; por exemplo, a tartaruga é a terceira uma vez que contando desde o primeiro são três elementos. Devem ser feitas várias perguntas sobre a ordem; quem foi o primeiro? quem ganhou a corrida? Quem ficou em último? Quem ficou em segundo? Quem vem antes da tartaruga? Quem vem depois do menino?

Figura 17: Ordinalidade.

No exemplo da Figura 17, a criança nomeia facilmente os elementos (trata-se de um menino, de uma lebre, de um caracol e de uma tartaruga). Isso facilita imenso o diálogo com o educador nas ocasiões em que faz perguntas. Quanto ao Cuisenaire, escadas como a da Figura 13 podem ser utilizadas com o mesmo propósito; "começando pela mais pequena, qual é a cor do terceiro degrau?". Uma vez que as barras são coloridas, o diálogo é facilitado: a cor é a característica que permite à criança nomear os elementos. Questões típicas da ordem podem ser incluídas "qual é a barra que vem depois da amarela?", "qual a barra que está antes da castanha?", etc. Outro tipo de imagens para trabalhar o conceito é o que se ilustra na Figura 18.

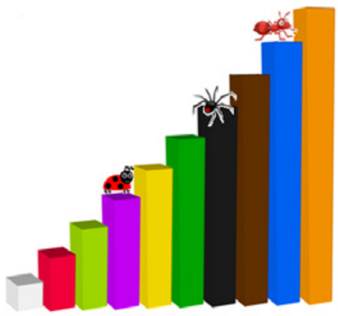


Figura 18: Ordinalidade no Cuisenaire.

O educador pode dizer algo do género "Os insetos estão a subir as escadas. Quem está em primeiro, segundo e terceiro?". Pode acrescentar questões do tipo "A aranha está muito cansada e não consegue subir mais; quantos degraus tem a joaninha de subir para a apanhar?". Uma vez que as crianças costumam interiorizar com facilidade as associações (roxo-4, preto-7), com estas questões vão interiorizando também algumas distâncias relativas entre os números da primeira dezena, o que é muito benéfico.

A partir de certa altura (5–6 anos), deverão ser propostas tarefas de decomposição. Com o objetivo de introduzir o tema, observe-se a Figura 19, retirada de [7].

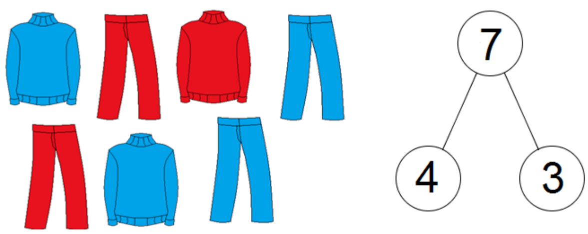


Figura 19: Decomposições.

Trata-se de uma atividade clássica de decomposição utilizada nos métodos orientais, como o de Singapura. É apresentada à criança uma imagem e uma decomposição representada através de um esquema todo-partes (*number bond*).

A criança tem de fazer um trabalho "detetivesco" e explicar "onde vê" a decomposição na imagem. No caso concreto, algo do género "Há 7 peças de roupa, 4 são azuis e 3 são vermelhas." ou "Há 7 peças de roupa, 4 são calças e 3 são camisolas.". Este tipo de atividade é executado em grandes doses com crianças de 5 e 6 anos. O todo escolhido deve ser inferior ou igual a 10. Pretende-se que as crianças interiorizem as decomposições aditivas em duas parcelas dos números da primeira dezena.

A pergunta que se impõe relaciona-se com a importância desta memorização. Qualquer pessoa habituada à matemática pode intuir facilmente a razão: as crianças (e os adultos!) poderão usar o conhecimento sobre as decomposições para executar cálculos mais sofisticados [27, 25]. Imagine-se o cálculo mental $8 + 5$. O número 8 está "a precisar" de 2 para compor a dezena. Uma vez que 5 se pode partir em 2 e 3, a resultado do cálculo é igual a 13. Utilizou-se uma decomposição do 5. Veja-se uma imagem retirada de [7].

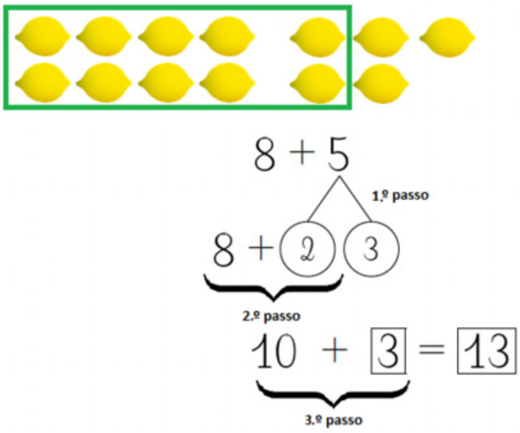


Figura 20: Esquema mental.

Repare-se que não houve contagem continuada (contagem pelos dedos). O método dá elevada importância à memorização das decomposições aditivas da primeira dezena e incentiva a sua utilização para fazer pontes compondo a dezena mais próxima. Observe-se que decompor não é o mesmo que adicionar. Se se partir das partes (2 e 5) para tentar obter o todo (7), estamos de facto a adicionar. O que acontece no exemplo exposto é o oposto, parte-se do todo (7) e separa-se de forma conviniente (2 e 5). No entanto, uma boa memorização das decomposições da primeira dezena auxilia obviamente as adições. Uma última nota para frisar que este método não é incentivado pela atual meta de aprendizagem do currículo português: Adicionar fluentemente dois números de um algarismo ([20], NO1-3.5). No método de Singapura a chave não está no facto das parcelas terem ou não um algarismo. A chave está em saber-se se o todo ultrapassa ou não 10 o que, pela natureza do sistema decimal, faz todo o sentido.

Voltando ao Cuisenaire, muitas atividades podem ser propostas para convidar as crianças a decompor. Uma conhecida é o “Jogo do Banqueiro”. Uma das crianças é o banqueiro; as restantes crianças dão-lhe peças diferentes da branca e esta tem de as trocar por duas de igual valor. Outra atividade conhecida é o “Jogo dos Comboios”: pede-se a uma criança para colocar uma peça diferente da branca na posição horizontal. Essa peça será a estação. Em seguida, as crianças colocam comboios com máquina e carruagem à frente da estação. Não pode haver comboios maiores ou menores do que a estação. As crianças deverão analisar as possibilidades.

Figura 21: Estação com um comboio parado.

Há autores que propõem comboios com mais do que 2 carruagens (decomposições aditivas em mais do que 2 parcelas, [4]). É possível, mas convém referir que vital para os esquemas mentais é o caso apenas com duas parcelas. Incentivamos esse vivamente. Outra forma de se construir atividades com o mesmo propósito baseia-se na pintura. A Figura 22, retirada de [16], é um caso desses. As crianças devem ser convidadas a realizar uma decomposição, pintando em seguida os quadrados de acordo com as cores das barras. O educador deve construir a actividade de forma a que os desenhos tenham as dimensões exatas das barras.

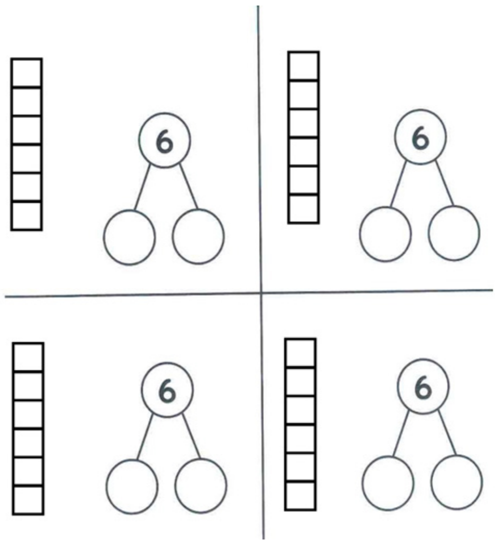


Figura 22: Decompondo e pintando.

Também na faixa dos 4–5 anos de idade (mais a cair para os 5), poderão ser propostas atividades de medição. As primeiras experiências a realizar devem incidir sobre medições diretas (ver Figura 23, [17]). Nessa altura, trabalha-se o vocabulário comparativo típico; “mais curto”, “mais comprido”, “mais alto”, “mais baixo”, “mais pesado”, “mais leve”, etc.

Uma das ideias mais importantes, relacionada com as medições, aparece quando se começa a utilizar uma unidade. É nesta altura que se começam a efetuar

Figura 23: Comparação direta.

comparações indiretas. Se os comprimentos de dois objetos, A e B, forem de 6 e 8 peças de lego, já não necessário colocar A e B, lado a lado, para tirar a conclusão que B é mais comprido do que A. É por isso que a utilização de unidades padrão permite a realização de comparações indiretas. Além disso, com este processo surgem a quantificação, os números e a matemática. Para que as crianças em idade pré-escolar contactem com os importantes conceitos de medida e unidade padrão é costume utilizar a pintura. Na Figura 24 [15], os objetos já lá estão e a criança pinta de forma a realizar uma medição (completando com vocabulário adequado). Outras atividades podem ser realizadas ao contrário: os objetos não estão lá e, em vez disso, constituem o objetivo (por exemplo, "Desenha uma linda menina com 6 quadradinhos de altura.").

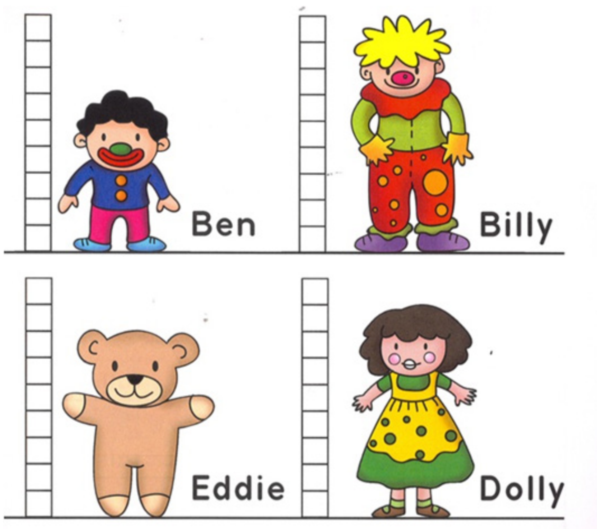


Figura 24: Medição.

O tipo de atividades exposto na Figura 24, pode ser facilmente levado a cabo com as barras cuisenaire. Na Figura 25, pode ver-se a atividade humoristicamente denominada *mini-me*.

Figura 25: *Mini-me*.

O educador deve ter cuidado com alguns pormenores. Além de construir o desenho com as medidas exatas das barras, deve ter o cuidado de colocar uma imagem com um comprimento igual a um número inteiro de unidades. Além disso, deve incentivar a criança a desenhar previamente um traço tal como se ilustra na Figura 25 (primeiro com o indicador e depois com um lápis). Repare-se que se a criança fosse medida com barras brancas o seu comprimento era 6, mas se fosse medida com barras vermelhas, o seu comprimento já seria 3. Esta problemática da relatividade da medição é magnificamente tratada na história infantil *How Big is a Foot?* de Rolf Myller [24] e pode ser trabalhada na faixa 5–6 anos de idade.

A tarefa de sobreposição com as barras cuisenaire foi também objeto de um projeto de uma equipa interdisciplinar do Instituto de Educação da Universidade do Minho. A ideia apresentada nas "Barras do Ludo" [8] consiste em convidar as crianças a contruirem algumas figuras apelativas de uma forma orientada. As crianças são convidadas a escolher bem as barras de forma a sobrepor exatamente sobre imagens previamente preparadas.

Figura 26: Barras do Ludo.

As BARRAS CUISENAIRE podem também ser usadas para trabalhar o importante conceito de ordem numérica (*place-value* em inglês). Em particular, o conceito de ordem das dezenas [26]. Por exemplo, quando escrevemos o numeral relativo a doze, ou seja "12", estamos na realidade a utilizar uma numeração mista. Isso acontece porque o nosso sistema de numeração é posicional e os símbolos valem conforme a posição que ocupam. Neste caso, em relação a 12, 1 vale uma dezena e 2 vale duas unidades. Doze, na sua escrita matemática atual, traduz a organização uma dezena mais duas unidades; no sistema que usamos, dez unidades numa ordem numérica são alvo de uma composição para uma unidade da ordem seguinte. Dez é escolha humana (temos dez dedos nas mãos) e é por isso que o nosso sistema se diz decimal. Para uma criança de 5 anos, este conceito apresenta um elevado grau de dificuldade. Se experimentar dizer que o "1" do "12" vale dez, isso não significará nada para a criança; ela vê um "1"... Para tentar evitar o problema, o educador tem de ilustrar; tem de esquematizar. Além do mais, temos um problema na língua. Em português, as palavras "onze", "doze", "treze", "catorze", "quinze", "vinte", etc., não significam nada. A palavra "dezasseis" já traduz a ideia "dez e seis". Mas temos muitas designações que não significam nada. Em inglês, também há esse problema. Por exemplo, as palavras *eleven* ou *twelve* não correspondem à usual notação matemática. Se usarmos o google tradutor para ver o que se passa em chinês simplificado (caso não saibamos chinês!) constatamos um facto muito interessante (Figura 27).

1 一 Yī
2 二 Èr
3 三 Sān
4 四 Sì
5 五 Wǔ
6 六 Liù
7 七 Qī
8 八 Bā
9 九 Jiǔ
10 十 Shí
11 十一 Shíyī
12 十二 Shí'èr
13十三 Shísān
14 十四 Shísì
(…)
20 二十 Èrshí
21 二十一 Èrshíyī
(…)
75 七十五 Qīshíwǔ

Figura 27: Primeira dezena em chinês simplificado.

Em chinês, a fala e a escrita correspondem na perfeição aos numerais! Um chinês fala de 14 como sendo "dez e quatro" ou de 75 como "sete dez e cinco". Como na língua oriental a correspondência está explícita na língua materna, as crianças têm mais facilidade com o conceito de ordem numérica. No interessantíssimo capítulo 4 de [11], na secção *The cost of speaking english*, o leitor pode ler mais sobre a análise científica e consequências deste facto.

Especialmente no caso português é importante trabalhar a ideia subjacente à noção de ordem. Mais uma vez, com uma imagem proviniente de [17] (Figura 28), vejamos como isso pode ser feito.

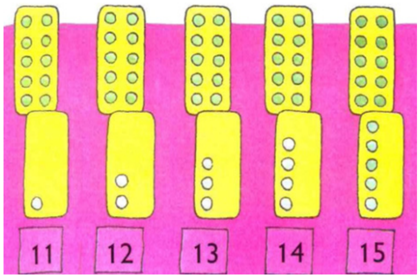


Figura 28: Ordem das dezenas.

O que se ilustra é uma abordagem emparelhada representação/numeral. Esta abordagem tem como objetivo mostrar que um numeral como "14" traduz a organização "uma dezena e quatro unidades". O que se pode fazer com crianças de 5–6 anos de idade é a tradicional atividade "Separa dez e diz o número" (Figura 29). Observe-se a utilização de "dígitos móveis", prática da maior importância.

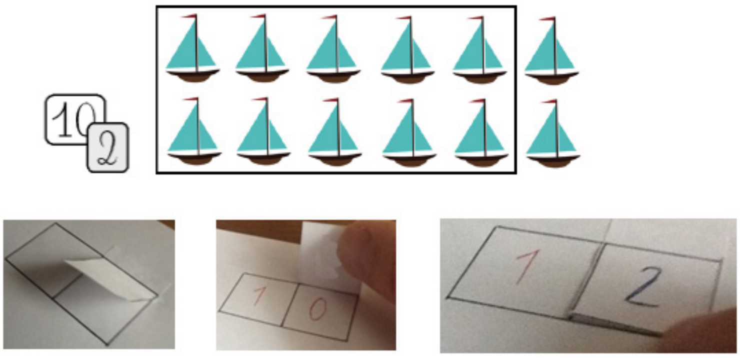


Figura 29: "Separa dez".

Quanto a este assunto, uma das actividades que se pode fazer com as barras é proposta em [37]. O educador vai colocando a barra laranja (barra de 10) ao lado das outras como se ilustra na Figura 30. À medida que faz isso, vai perguntando o número que está representado. Por exemplo, a laranja ao lado da branca é o número 11 $(10 + 1)$. O educador pode ir saltitando ao longo da escada.

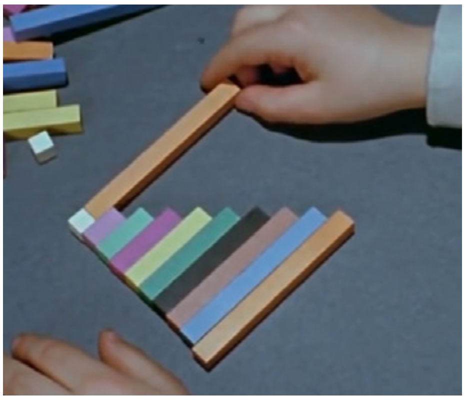


Figura 30: Ordem das dezenas com o Cuisenaire.

Também é interessante utilizar as BARRAS CUISENAIRE para promover atividades de construção de caminhos. Esse tipo de tarefa trabalha de forma benéfica a orientação espacial da criança. Um exemplo auto-explicativo pode ser visto na Figura 31. Trata-se de uma adaptação de uma ideia presente em [4]. A Capuchinho deve apanhar as flores e fugir dos lobos. A atividade deve começar de forma livre. A dada altura, pode convidar-se a criança a tentar fazer o caminho com o menor número de barras possível.

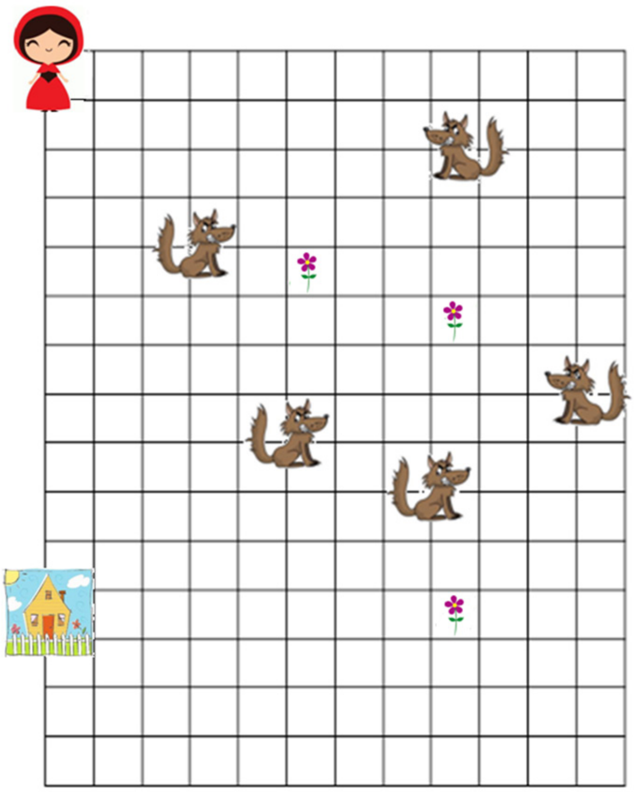


Figura 31: Caminhos com as barras.

Uma última palavra sobre a utilização das barras para trabalhar o tema dos padrões. Em [29], excelente artigo sobre o tema, abordando a caracterização de padrões utilizados na educação pré-escolar, os autores referem a componente de repetição (ABABAB), a componente de progressão (ABAABAAAB) e ainda a componente de simetria (ABABBABA). Além da estrutura, relativamente à formação de padrões, é necessário também ter em conta características particulares que poderão ser muito diversificadas: cor, som, posição, forma, movimento, tamanho, etc. Os padrões podem ser mais ou menos difíceis consoante o que é pedido às crianças; nesse mesmo artigo, os autores apontam para uma maior dificuldade sentida pela criança quando o elemento pedido está a meio e não no final da sequência. Além disso, quando o padrão não tem um bom início, não mostrando o elemento periódico em toda a sua globalidade, torna-se também mais difícil. A Figura 32 mostra alguns exemplos de pradrões de repetição elaborados com as barras Cuisenaire.

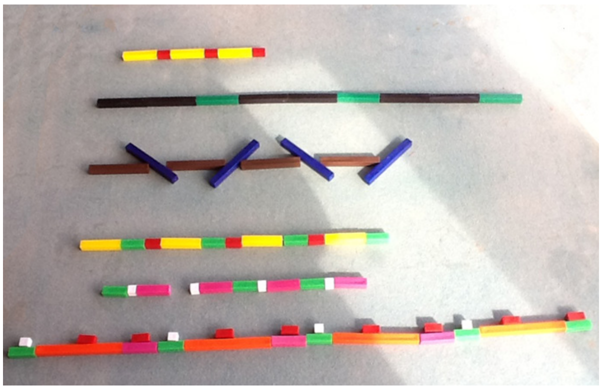


Figura 32: Padrões repetitivos.

O padrão superior é um padrão de repetição de tipo ABAB. Se a questão for descobrir que peça vem asseguir, este primeiro exemplo constitui o padrão mais fácil no contexto da educação pré-escolar. O segundo padrão é semelhante, do tipo AABAAB. O terceiro padrão tem o fator posição como propriedade adicional. O quarto padrão é do tipo ABCABC com mau início (ou mau fim, conforme se queira pensar). O quinto padrão é do tipo ABCABC, mas é solicitada uma peça a meio da sequência. O sexto padrão é misto. Em todos estes casos, o padrão deve ser cantado pelas crianças (por exemplo, em relação ao primeiro caso, “amarelo, vermelho, amarelo, vermelho. . . ”). Esta associação rítmica é a forma eficaz que o educador tem para verificar se a criança percebeu a regra lógica. Na Figura 33, mostram-se outros tipos de padrões diferentes dos padrões de repetição: padrões simétricos e padrões progressivos.

No mesmo artigo é realçada a importância destes outros tipos de padrões, pois permitem que a criança perceba que nem todos os padrões são de repetição. No caso superior, as crianças podem tentar completar a segunda borboleta com um procedimento simétrico. No caso inferior, temos um padrão progressivo e pode perguntar-se à criança o que se segue. No contexto da educação pré-escolar, só a partir dos 5 anos é que devemos trabalhar estes padrões não repetitivos.

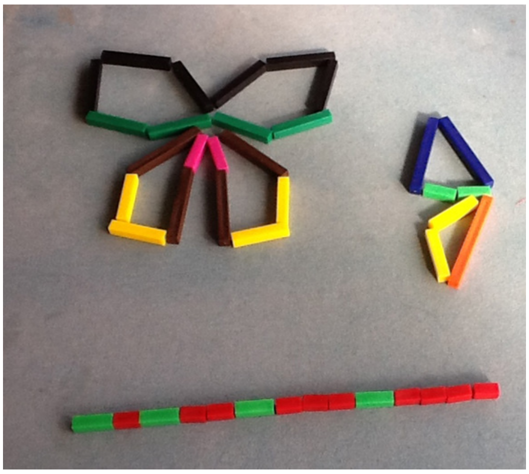


Figura 33: Padrões simétricos; padrões progressivos.

4 BLOCOS LÓGICOS

O matemático húngaro Zoltán Pál Dienes (1916–2014) tinha uma característica não muito comum no universo dos matemáticos. Não era alguém apenas fechado no seu mundo, mas sim um homem apaixonado por vários assuntos diferentes. Após o seu doutoramento em matemática pela Universidade de Londres em 1939, interessou-se pelas mais variadas vertentes da disciplina: artística, cultural, psicológica, etc. Em particular, interessou-se muito pela forma como as crianças pequenas a aprendem. Sendo assim, também completou um grau em psicologia, escreveu várias obras como *I Will Tell You Algebra Stories You've Never Heard Before* ou o livro de poesia *Calls from the Past*. Criou o conceito *psychomathematics*, tendo uma enorme curiosidade pela dificuldade que muitas pessoas têm em aprender matemática, em contraste com o facto de esta ser tão elegante e entusiasmante.

Figura 34: Zoltán Pál Dienes (a pessoa mais velha da imagem).

Zoltán Pál Dienes defendia que se deviam usar músicas e jogos para ensinar conceitos matemáticos a crianças em idade pré-escolar. Em 1950, inventou os BLOCOS LÓGICOS, um conjunto de peças geométricas com formas, tamanhos, espessuras e cores diferentes, com o intuito de ajudar as crianças a desenvolverem as primeiras noções de lógica, as transformações e as classificações [12].

Na sua versão tradicional[3], os BLOCOS LÓGICOS são 48 peças divididas em círculos, triângulos, quadrados e retângulos não quadrados (forma); amarelas, azuis ou vermelhas (cor); grandes ou pequenas (tamanho); finas ou grossas (espessura).

Figura 35: BLOCOS LÓGICOS.

Antes de exemplificar algumas formas de utilização dos blocos, falemos um pouco da lógica em si e contextualizemo-la no universo da educação pré-escolar. Algumas frases que dizemos são suscetíveis de serem consideradas verdadeiras ou falsas. Por exemplo, "Um dos autores deste texto tem um cão." é um caso desses e trata-se efetivamente de uma frase verdadeira. Acontece que nem todas as frases que dizemos são tão simples como esta. Por vezes as frases são compostas, apresentando conectores lógicos. Por exemplo, "Um dos autores deste texto tem um cão e tem um gato." (curiosamente, a frase é também verdadeira, uma vez que um dos autores deste texto tem animais dessas duas espécies). Este segundo exemplo é ligeiramente mais difícil de avaliar; a presença do conector lógico "e" faz com que não seja suficiente um autor ter um cão ou ter um gato para a frase ser verdadeira; têm de acontecer as duas coisas em simultâneo para termos a veracidade.

Há quatro conectores lógicos fundamentais que utilizamos no nosso vocabulário e nos nossos raciocínios: "não", "e", "ou" e "se". Imagine-se que colocamos alguns blocos num saco e tiramos um ao acaso. Analisemos as seguintes frases:

[3] Em versões mais modernas, podemos ainda encontrar peças hexagonais.

1. "O bloco retirado **não** é um triângulo."

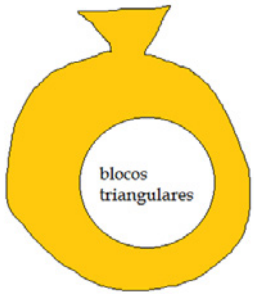


Figura 36: Negação.

Representando por um círculo o conjunto de blocos triangulares do saco (Figura 36), a frase só será verdadeira se o bloco retirado estiver na zona laranja dos não triangulares (complementar).

2. "O bloco retirado é um triângulo **e** é fino."

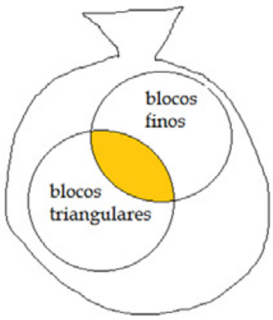


Figura 37: Conjunção.

Neste caso, para a frase ser verdadeira é necessário que o bloco retirado esteja simultaneamente no conjunto dos triangulares e no conjunto dos finos (intersecção). Por outras palavras, tem de ser um triângulo fino (Figura 37).

3. "O bloco retirado é um triângulo **ou** é fino."

   Em relação ao "ou", basta que uma das duas aconteça para que a frase seja verdadeira (reunião, Figura 38).

4. "**Se** o bloco retirado for um triângulo então é fino de certeza."

   Esta situação é mais delicada (Figura 39). A frase só é verdadeira se o conjunto dos blocos triangulares do saco for um subconjunto do conjunto dos blocos finos do saco (inclusão). Bastava que o saco tivesse um bloco triangular grosso para já não se poder dizer esta frase com veracidade.

É conhecido da psicologia infantil que estas quatro situações não têm o mesmo grau de dificuldade para uma criança (veja-se o excelente artigo [32]). Os

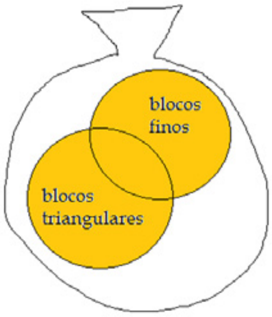


Figura 38: Disjunção.

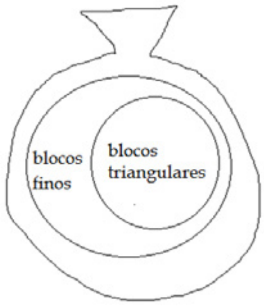


Figura 39: Condicional.

conectores mais fáceis para uma criança são os referidos em 1 e 2 (negação e conjunção). Depois, com um grau de dificuldade mais elevado, vem o referido em 3 (disjunção). Quanto a este último, há mesmo uma subtileza linguística; pode haver confusão com o caso em que o bloco tem as duas propriedades (triângulos finos). Por vezes, a pessoa que diz a frase quer rejeitar esse caso. Num português mais precavido, é comum utilizar-se duas vezes o "ou": "O bloco retirado **ou** é um triângulo **ou** é fino.". Nesse caso, quem diz a frase quer dizer que o bloco ou é uma coisa ou outra, não podendo ser as duas em simultâneo. É claro que isto é bastante elaborado para crianças pequenas. No estudo [32], pode ver-se uma clara vitória da conjunção sobre a disjunção (71% *versus* 11%).

Quanto ao referido em 4, a dificuldade é grande mesmo para adultos. Por exemplo, um candidato de um partido residual que nunca ganha que diz "Se eu ganhar as eleições, aumento substancialmente o salário de todas as pessoas." não pode ser considerado mentiroso. Ele só seria apanhado na mentira se ganhasse as eleições e não aumentasse o salário a alguém. Isto não é fácil... As inclusões são muito difíceis no contexto infantil. A esse respeito, em [11] pode ver-se uma experiência muito interessante. Imagine-se que se mostra uma imagem de 5 morangos e 3 maçãs e se pergunta a uma criança pequena "O que há mais, morangos ou frutos?". Até certa idade ela vai produzir respostas erróneas. Trata-se novamente do problema da inclusão. Por tudo isto, aconselhamos que o trabalho sobre o "se" seja deixado para mais tarde.

Um jogo lógico interessante de realizar com crianças (4–5 anos) chama-se "Chave Salvadora". Numa possível versão, uma princesa pode encontrar-se presa com uma terrível bruxa. Uma zona previamente preparada ou um brinquedo simples podem servir o propósito (Figura 40).

Figura 40: Chave salvadora.

Vários blocos são espalhados pela sala à vista das crianças. A chave que salva a princesa está escondida perto de uma das peças. Em seguida, o educador diz várias frases que servem de pistas para encontrar a chave. Uma vez que os conectores lógicos têm diversas formas na língua portuguesa, apresentamos algumas possíveis frases compostas (obviamente, também devem ser ditas frases simples).

- A chave está perto de um triângulo que não é fino.
  (corresponde a dizer que o bloco é triângulo **e não** é fino)
- A chave está perto de um bloco que nem é triângulo nem é azul.
  (corresponde a dizer que o bloco **não** é triângulo **e não** é azul)
- A chave está perto de uma peça que, sem ser triângulo, é azul.
  ("sem ser" funciona como a negação)
- A chave ou está perto de um triângulo ou está perto de uma peça azul, mas não as duas coisas ao mesmo tempo.
  ("ou" exclusivo[4])

As nuances linguísticas são da maior importância e devem ser apresentadas de forma variada[5]. Para dificultar, há variações que fazem com que o "e" possa ser confundido com o "ou". Quando o educador diz "Tragam-me todas as peças que sejam finas e vermelhas." pretende que a criança traga peças com as duas características em simultâneo. No entanto, se o educador disser

[4]Por vezes, quando não se pretende que o "ou" seja exclusivo, utiliza-se o termo "e/ou" para afastar ambiguidades.

[5]Também o "se" tem várias formas linguísticas. Por exemplo, quando dizemos "Todos os homens morrem.", estamos na prática a dizer "Se algo for um homem, então morre.".

"Tragam-me todas as peças finas e todas as peças vermelhas.", então pretende que a criança traga peças que tenham pelo menos uma das duas características ("ou"). Há mesmo casos em que a língua engana; bom português pode estar errado logicamente. Por exemplo, "Eu não quero nenhuma peça azul." é dito por quem não quer peças azuis mas, se levarmos à letra o que é dito, há uma dupla negação na frase ("não" e "nenhuma"[6]). Tudo isto deve merecer a atenção dos educadores.
Os blocos lógicos ligam muitíssimo bem com a utilização de símbolos apropriados (cartolinas ou placas magnéticas). A Figura 41 ilustra um bom conjunto.

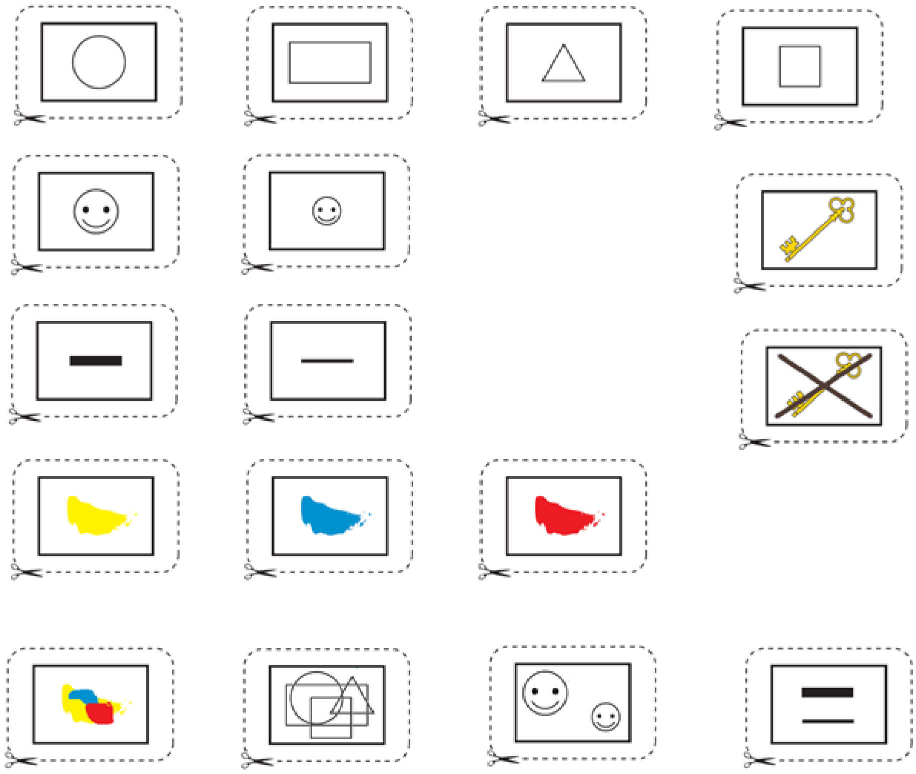


Figura 41: Símbolos.

A utilização de símbolos permite organizar a informação numa tabela de dupla entrada, o que é muito estruturante. Aconselhamos o educador a utilizar o dedo indicador para sublinhar bem os papéis das linhas e das colunas nas primeiras vezes que ensina o funcionamento de uma tabela deste género.

Considere o exemplo da Figura 42, perfeitamente plausível de ser trabalhado com um grupo de 5 anos. Imagine que as peças são espalhadas pela sala com a chave perto de uma delas.

[6]O fenómeno da dupla negação errónea não acontece em inglês ("*I don't want blue blocks.*" ou "*I want no blue blocks.*").

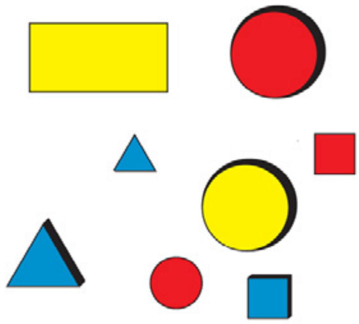


Figura 42: Exemplo de “Chave salvadora”.

À vez, são ditas as seguintes frases:

- A chave não está ao pé de uma peça grossa.
- A chave está ao pé de um triângulo ou de um quadrado.
- A chave não é grande nem é vermelha.

À medida que o jogo se desenrola, a informação pode ser organizada como se apresenta na Figura 43.

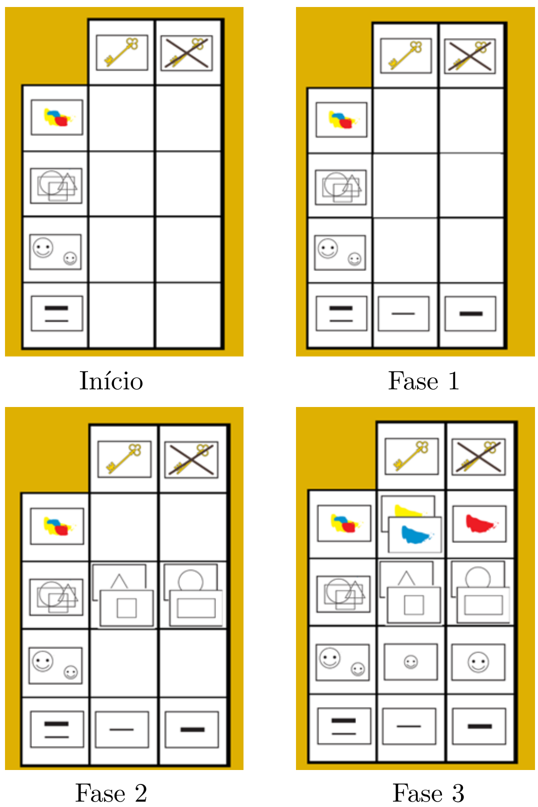


Figura 43: Tabela de dupla entrada.

Neste caso concreto, a chave estava perto do triângulo azul, pequeno e fino.

Os blocos também servem para fazer interessantes brincadeiras envolvendo transformações. Para esse efeito, um símbolo útil é uma seta. Imagine-se a situação retratada na Figura 44.

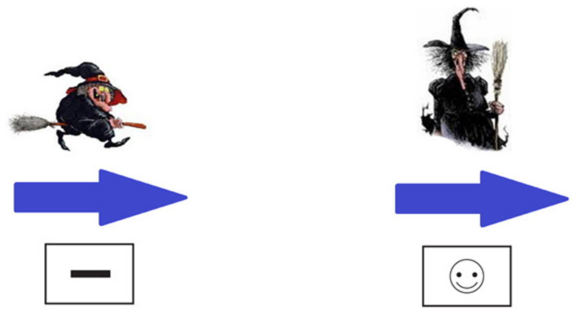


Figura 44: “Jogo das Bruxas”.

A bruxa da esquerda transforma apenas a característica espessura (transforma peças grossas em finas). A bruxa da direita transforma apenas a característica tamanho (transforma peças pequenas em grandes). A Figura 44 mostra uma possível sequência de transformação que pode ser experimentada por uma criança na faixa 4–5. A partir de certa altura, em vez de pedir experimentação direta, o educador pode pedir à criança para “adivinhar” qual será o resultado final. A prática deste imaginário de transformação é muito benéfica, estando muito relacionada com o que se vai passar em atividades matemáticas em anos vindouros. Eventualmente, cada bruxa pode ter mais do que um “poder” de transformação, o que torna progressivamente mais interessantes as transformações. Piaget analisou cuidadosamente a mente humana no que diz respeito à compreensão das estruturas das transformações [18]. Tendo os seus estudos em conta, uma total compreensão de detalhes por parte de crianças em idade pré-escolar pode ser muito difícil, em particular no que diz respeito às inversões.

Quanto a este tópico, um pormenor interessante, mas muito pouco dito, diz respeito às características tamanho e espessura (o que mostra o alcance da proposta de Dienes). Transformações envolvendo essas duas características são invertíveis (a inversa da transformação em grande é a transformação em pequeno e a inversa da transformação em fino é a transformação em grosso). Sendo assim, quanto a estas características, o educador não perde nada em experimentar de vez em quando a pergunta inversa. Como exemplo, veja-se a Figura 46.

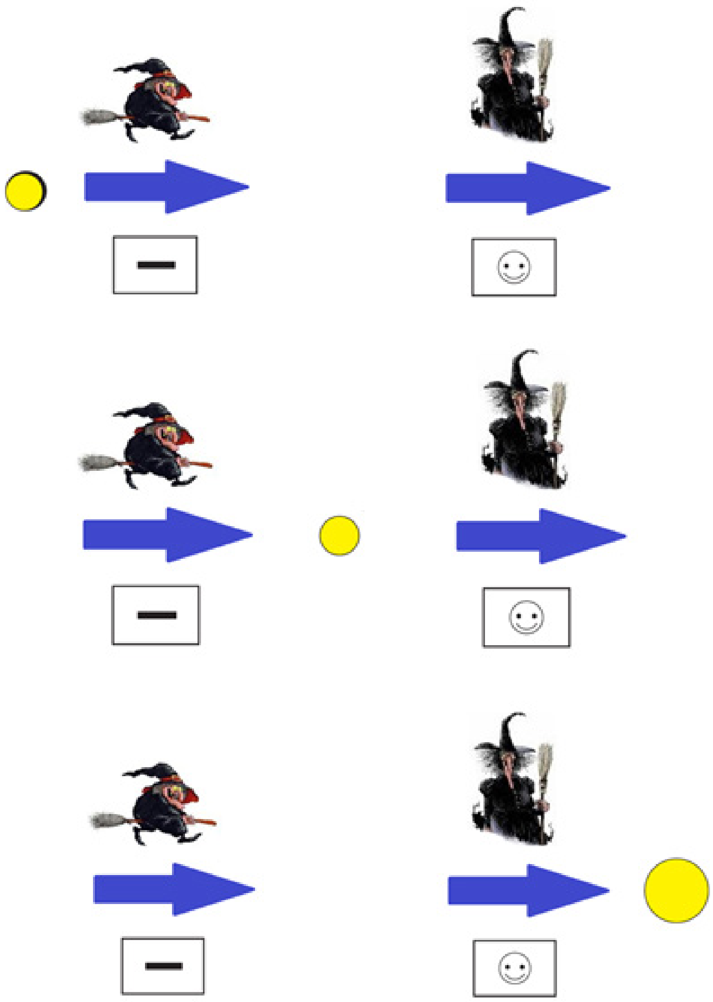


Figura 45: Sequência de transformação.

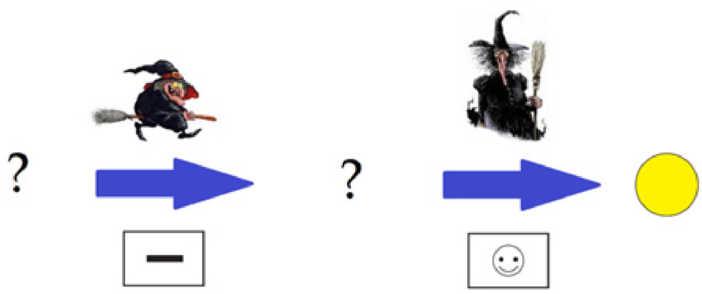


Figura 46: Inversa.

O educador pode fazer a proposta utilizando vocabulário infantil ("Como se pode quebrar o feitiço?"). Note-se que inversas envolvendo as características cor e forma são problemas com mais do que uma resposta. Se uma bruxa transforma um bloco numa peça triangular, a peça original podia ser tanto um quadrado, como um retângulo, como um círculo. E, em tudo isto, estamos a admitir que acontece sempre qualquer coisa, isto é, que há sempre uma transformação qualquer, não podendo ficar a peça inalterada. Por uma questão de simplificação, deve assumir-se que acontece sempre algo.

Atividades de transformação podem ser concebidas de forma muito variada, com bruxas constituindo personagens cuidadosamente inventadas com "poderes individualizados". É todo um mundo a explorar.

Outra coisa a trabalhar diz respeito aos diagramas de Venn. Considere-se a árvore exposta na Figura 47.

Figura 47: Árvore simples.

Com auxílio deste tipo de desenho, é possível organizar atividades no tapete como se mostra na Figura 48.

Figura 48: "Pomar" de blocos.

Os símbolos mostram a “natureza” dos galhos e o que é permitido. Os blocos são como “frutos” caídos no chão. A criança (4–5) deve dizer onde estavam antes de cair. Símbolos com negações devem ser acrescentados à lista da Figura 41.

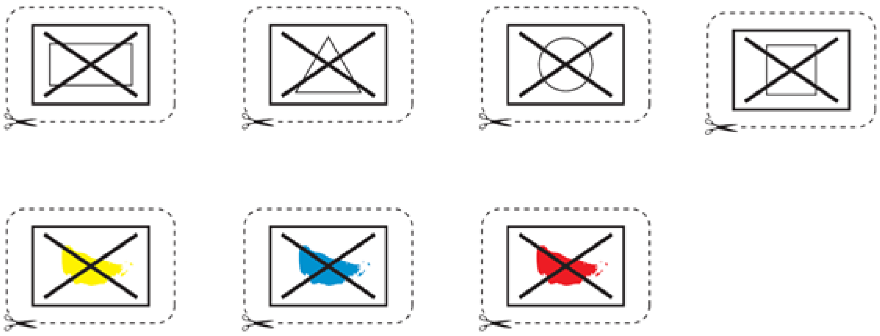


Figura 49: Mais símbolos.

Esta ideia pode ser usada com árvores mais sofisticadas. Isso permitirá trabalhar interseções. Eis alguns exemplos na Figura 50.

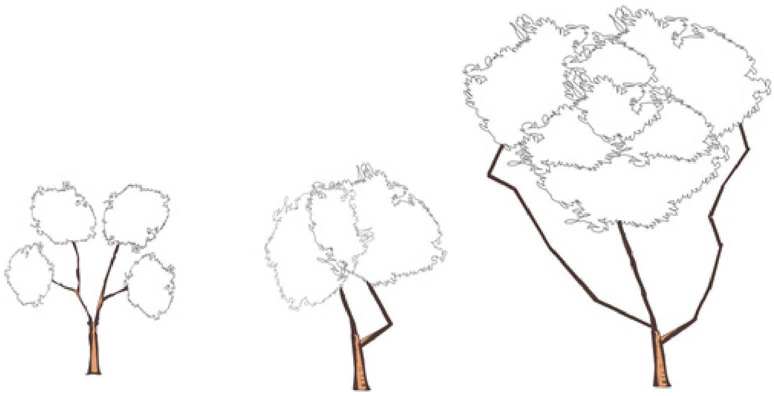


Figura 50: Mais símbolos.

Caminhos também constituem uma excelente atividade. Em [28] podemos ver essa ideia bem tratada. Para ilustrar o que se trata, vejamos a Figura 51 com uma imagem daí retirada.

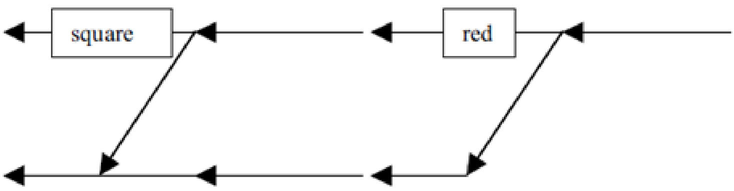


Figura 51: Caminhos.

Uma imagem mais apelativa com o mesmo conteúdo é a da Figura 52.

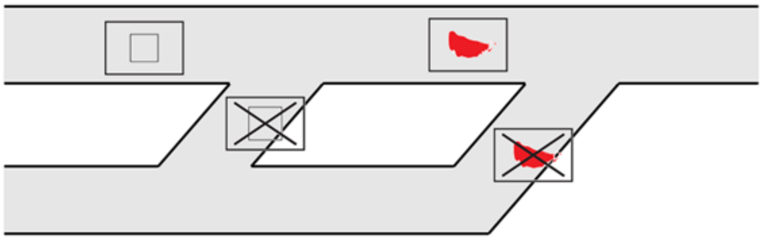


Figura 52: Estradas com sinais de trânsito.

A tarefa a propor às crianças é simples. São colocados alguns blocos no início da estrada. As crianças deverão respeitar os "sinais de trânsito" e dizer os destinos de cada bloco. No início as crianças farão movimentos com as mãos. A partir de certa altura, as crianças deverão tentar dizer os destinos sem mexer nas peças.

Quanto a construções, além das que são feitas de forma livre, algumas podem ser feitas de forma orientada. Por exemplo, ao propor a construção de mãe e filha, o educador poderá levar a conversa para as partes do corpo humano (cabeça, tronco, braços, etc.), escolhendo peças grandes para fazer a mãe. Em seguida, a filha será feita com peças exatamente iguais, exceto no tamanho. É um primeiro contacto, ainda que muito rudimentar, com o conceito de ampliação/redução (Figura 53).

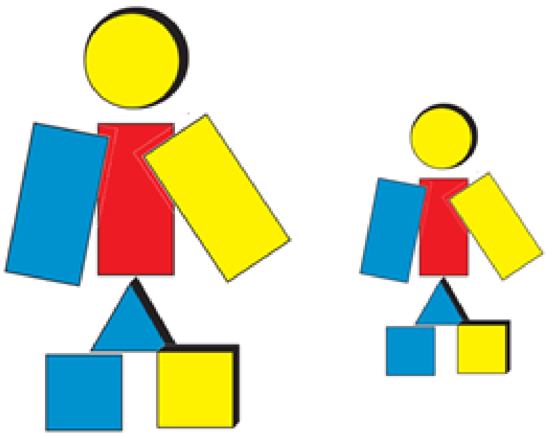


Figura 53: Mãe e filha.

Finalmente, havendo 4 características, as peças podem apresentar diferenças em relação a 1, 2, 3 ou 4 dessas características. Há muitas atividades interessantes que se podem conceber relacionadas com a contagem de diferenças. Considere-se, a título de exemplo, a Figura 54.

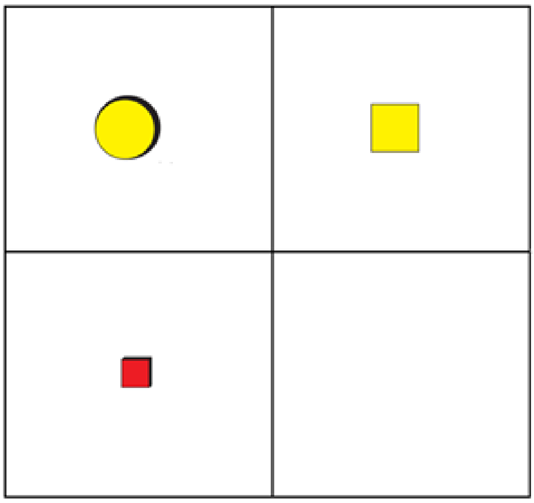


Figura 54: “Jogo das Diferenças”.

Uma criança de 5 anos é convidada a contar quantas diferenças apresentam os dois blocos da linha superior. Neste exemplo, são duas; a forma e a espessura. Em seguida, a criança deverá preencher o quadrado vazio com uma peça que tenha esse número de diferenças em relação ao bloco da linha inferior. A atividade tem mais do que uma resposta: na Figura 55 é apresentada uma.

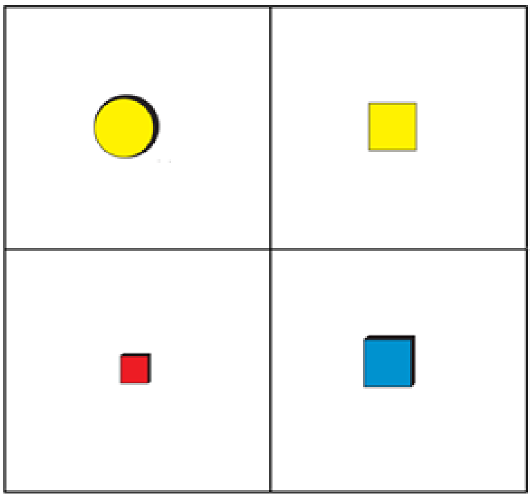


Figura 55: “Jogo das Diferenças” – solução.

Um dispositivo do mesmo género mas já mais indicado para crianças com seis anos de idade é proposto em [38]. Considere-se a Figura 56.

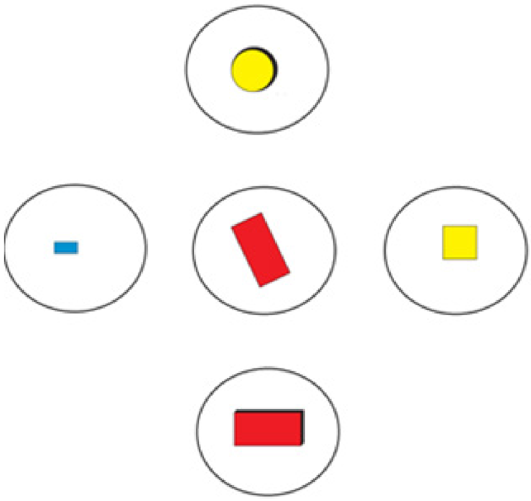


Figura 56: “Jogo das Diferenças II”.

A criança pode ser convidada a fazer um número de linhas correspondente às diferenças entre as peças. Eis a solução da Figura 57.

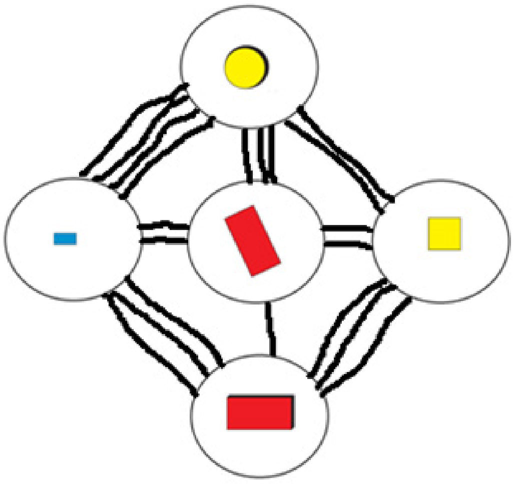


Figura 57: “Jogo das Diferenças II” – solução.

Depois da criança perceber bem a lógica, o esquema pode ser apresentado sem peças. O convite nesse caso será a colocação de peças de forma consistente com o número de linhas.

5 TANGRAM

O TANGRAM é o único dos materiais abordados neste texto que não tem um inventor claro. A sua história é mais antiga e difícil de retratar com rigor. Este antigo puzzle chinês[7] é um de muitos existentes na história humana envolvendo composição e decomposição de figuras[8]. Alguns historiadores são da opinião de que o TANGRAM apareceu no oriente antes do séc. XVIII [31]. O livro mais antigo conhecido foi publicado na China em 1813 (Figura 58). Quanto ao conjunto de peças mais antigo que se conhece, trata-se de uma prenda dada a uma criança em 1802 (Figura 59).

Figura 58: Livro mais antigo que se conhece sobre o TANGRAM.

Figura 59: Conjunto TANGRAM mais antigo que se conhece.

Um par de livros bonitos, *The Fashionable Chinese Puzzle*, foi publicado por John e Edward Wallis em 1817.

[7] 七巧板, pode ser traduzido por "Sete Peças de Astúcia".

[8] O primeiro puzzle do género conhecido é o *Stomachion* de Arquimedes (ver [22]).

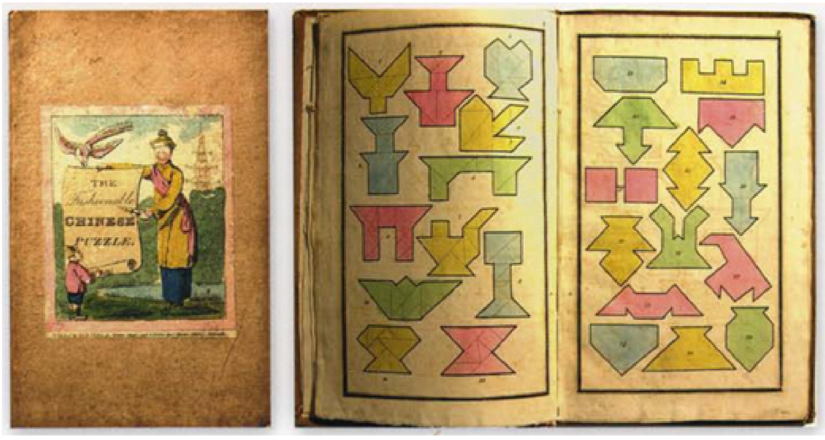


Figura 60: Livros de John e Edward Wallis.

Mais tarde, Sam Loyd (1841–1911), grande vulto da matemática recreativa, publicou o *The 8th Book of Tan* [19]. O livro contém histórias imaginativas que são abordadas com auxílio das peças do TANGRAM. Este aproveitamento do TANGRAM para ilustrar histórias é especialmente apropriado no contexto da educação pré-escolar.

Figura 61: *The 8th Book of Tan*.

Figura 62: Sete peças do TANGRAM.

O TANGRAM é um conjunto de sete peças poligonais. Há versões coloridas, há versões com uma cor única, há conjuntos feitos em materiais variáveis. Quanto à forma e tamanhos relativos das peças pode resumir-se o seguinte:

1. Há um conjunto de "peças grandes" constituído por dois triângulos iguais (verde e laranja na Figura 62).

2. Há um conjunto de "peças médias" todas com a mesma área, igual a metade da área das peças grandes. Esse conjunto é constituído por um triângulo, por um quadrado e por um paralelogramo (respetivamente, vermelho, amarelo e azul claro na Figura 62).

3. Há um conjunto de "peças pequenas" com a mesma área, igual a metade da área das peças médias. Esse conjunto é constituído por dois triângulos iguais (castanho e azul escuro na Figura 62).

Um TANGRAM pode ser feito facilmente a partir de uma boa cartolina (passos ilustrados nas Figuras 63, 64, 65, 66 67 e 68).

1.º Passo: Fazer um quadrado.

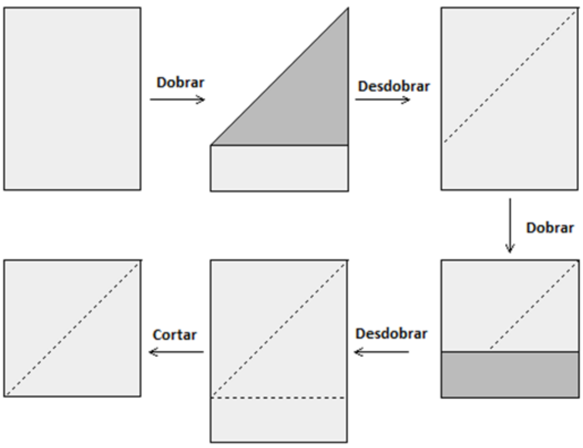


Figura 63: Como fazer um TANGRAM: 1.º passo.

2.º Passo: Dividir o quadrado feito no 1.º passo em dois triângulos (A e B).

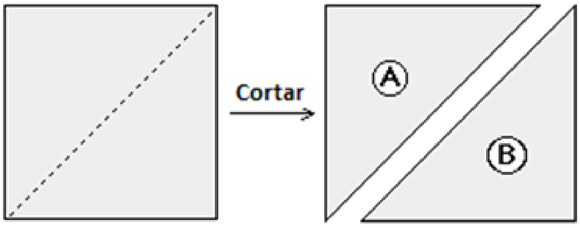


Figura 64: Como fazer um TANGRAM: 2.º passo.

3.º Passo: Dividir um dos triângulos feitos no 2.º passo (A) nos dois triângulos grandes do TANGRAM.

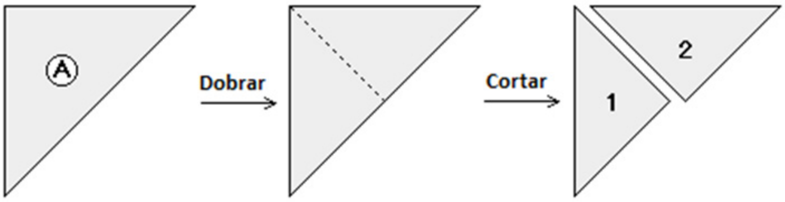


Figura 65: Como fazer um TANGRAM: 3.º, passo.

4.º Passo: Usar uma parte do outro triângulo feito no 2.º passo (B) para obter o triângulo médio do TANGRAM.

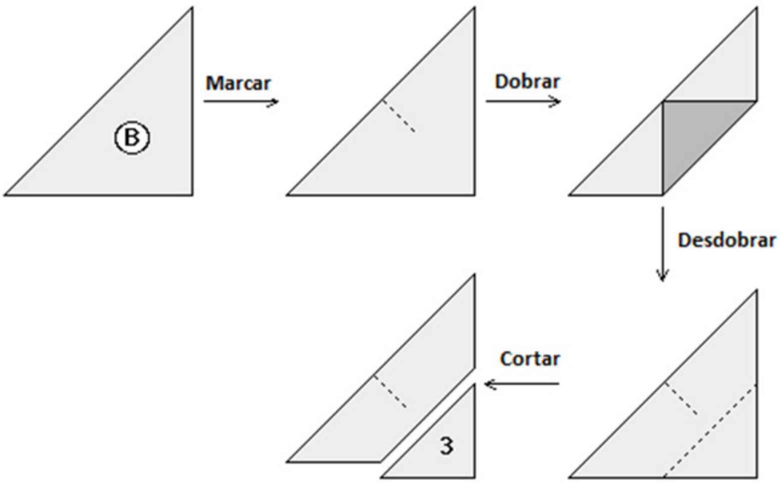


Figura 66: Como fazer um TANGRAM: 4.º passo.

5.º Passo: Usar metade da restante cartolina para fazer o quadrado e um dos triângulos pequenos do TANGRAM.

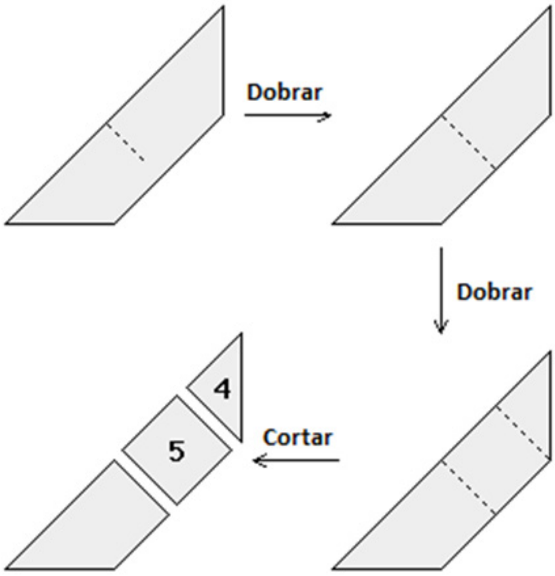


Figura 67: Como fazer um TANGRAM: 5.º passo.

6.º Passo: Usar metade da restante cartolina para fazer o quadrado e um dos triângulos pequenos do TANGRAM.

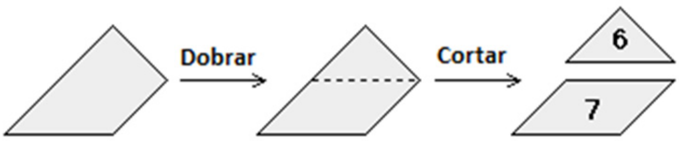


Figura 68: Como fazer um TANGRAM: 6.º passo.

O TANGRAM é muito apropriado para tarefas de composição livre e para tarefas de decomposição. Em tarefas de composição livre, as crianças são convidadas a construir livremente os seus desenhos com as peças do TANGRAM. Este deve ser um dos primeiros convites a ser feito, uma vez que permite às crianças uma primeira habituação às diferentes peças. Com as mesmas peças é possível obter um grande número de diferentes formas. Esta simples experimentação permite à criança intuir que a essência da forma de uma figura não é a área ocupada (existem infinitas formas diferentes ocupando a mesma quantidade de superfície). Além disso, estas primeiras atividades permitem às crianças levar a cabo a sobreposição. Por exemplo, os dois triângulos pequenos podem ser sobrepostos exatamente sobre o quadrado, sobre o paralelogramo ou sobre o triângulo médio. Uma vez que a sobreposição exata é basilar para o conceito de congruência de figuras, este tipo de atividade é altamente recomendado.

As tarefas de decomposição são, como o nome indica, o processo inverso da composição. Neste tipo de tarefa a figura final é dada. O objetivo é tentar sobrepor um conjunto de peças sobre a figura dada. As peças terão de coincidir exatamente: trata-se de uma espécie de puzzle. O que se está a fazer é a decompor a figura alvo em figuras mais simples. Este tipo de atividade é importante na medida em que a decomposição será, numa fase posterior à educação pré-escolar, a base para a determinação da área de diversas figuras. Com efeito, a forma mais natural de atacar o problema da determinação da área de uma figura é decompô-la em figuras mais simples cujas áreas sejam conhecidas. Por esse motivo, o treino relativo à decomposição é benéfico desde a educação pré-escolar. No que diz respeito a este tópico propomos fortemente a abordagem tratada em [1] que detalharemos nas linhas que se seguem. Acrescentámos à mesma as etapas 5, 6 e 7.

Etapa 1: Sobreposição direta

Nesta fase inicial, são apresentados modelos com figuras e divisórias bem definidas. A criança apenas tem de sobrepor corretamente as peças sobre os modelos. São ensinados os nomes das peças. São ensinados verbos como "deslizar", "sobrepor´", "rodar", "virar". Pode iniciar-se este tipo de atividade logo aos 3 anos de idade.

Figura 69: Sobreposição direta.

Etapa 2: Deslizamento

Sobre modelos com figuras e divisórias bem definidas são colocadas as peças do tangram. A criança é convidada a deslizar as peças de forma a deslocar a figura inicial para uma outra zona sem divisórias (3–4 anos).

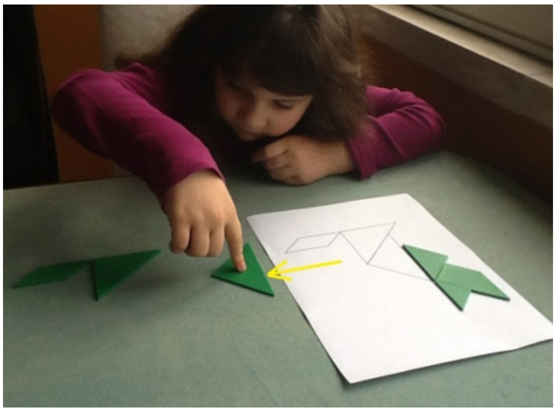


Figura 70: Deslizamento.

Etapa 3: Cópia de figuras em tamanho real sem deslizar

São apresentados à criança modelos com figuras e divisórias bem definidas em tamanho real. Ao contrário da primeira etapa, a criança é convidada a copiar a figura para uma zona sem divisórias. A ideia consiste na realização de uma cópia sem sobreposição nem deslizamento. Segundo [1], isso consegue-se aos 4 anos de idade. As crianças de 3 anos têm usualmente de sobrepor primeiro, realizando seguidamente um deslizamento.

Figura 71: Cópia de figuras em tamanho real sem deslizar.

Etapa 4: Cópia de figuras em tamanho reduzido

São apresentados à criança modelos com figuras e divisórias bem definidas em tamanho reduzido. Tal como na etapa anterior, a criança é convidada a copiar a figura (4 anos).

Figura 72: Cópia de figuras em tamanho reduzido.

Etapa 5: *Tangramming* com poucas peças

Os puzzles tornam-se mais complicados quando não apresentam divisórias. Novamente, o objetivo consiste em descobrir a forma de fazer uma figura dada com as peças do tangram. Esta atividade clássica está na base da invenção do termo *Tangramming*. Infelizmente, num grande número de casos, este tipo de atividade torna-se demasiado difícil para a idade pré escolar. Uma das formas para contornar o problema é apresentar figuras sem divisórias passíveis de serem feitas apenas com 2, 3 ou 4 peças. Esta ideia foi contextualizada de forma interessante em [39]. Numa primeira fase de um jogo, duas crianças "pescam" formas. Numa segunda fase, as formas "pescadas" servem para tapar um buraco numa ponte para que os heróis do jogo possam passar. Esta ideia tira a abstração existente num puzzle simples com poucas peças. Passa a haver um objetivo, arranjar uma ponte. Esta ideia pode ser adaptada de forma a ser executada com o tangram (5 anos).

Figura 73: "Pescaria" de formas.

Etapa 6: *Tangramming* (casos fáceis)

Mesmo não sendo em geral os mais adequados para a idade pré-escolar, alguns puzzles sem divisórias envolvendo as sete peças são muito mais fáceis do que outros. Os mais fáceis são os que apresentam algumas peças claramente separadas. Nesses casos, embora não sejam apresentadas divisórias, as separações fazem o mesmo efeito, destacando algumas peças. Desenhos deste tipo podem ser experimentados, em alguns casos, com crianças de cinco anos de idade. O coelho da Figura 74 é um exemplo.

Figura 74: Coelho sem divisórias.

Etapa 7: *Tangramming* (casos difíceis)

Os puzzles mais difíceis não têm divisórias e apresentam um aspeto compacto, não destacando peças de forma evidente. Estes puzzles não são aconselhados para a educação pré-escolar, no entanto, este texto ficaria algo incompleto sem os mencionar. Experimente o leitor fazer um triângulo com as 7 peças do TANGRAM (Figura 75). Uma estratégia que as crianças poderão aprender mais tarde consiste em partir o problema em problemas mais simples. Por exemplo, quem saiba resolver o sub-problema que consiste em fazer um quadrado com cinco peças terá mais facilidade em fazer um triângulo com as sete (Figura 76). Este tipo de organização de raciocínio, embora muito positivo, já sai do âmbito da educação pré-escolar.

Figura 75: Triângulo com sete peças sem divisórias.

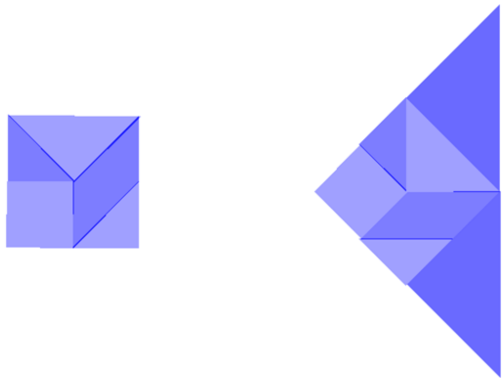
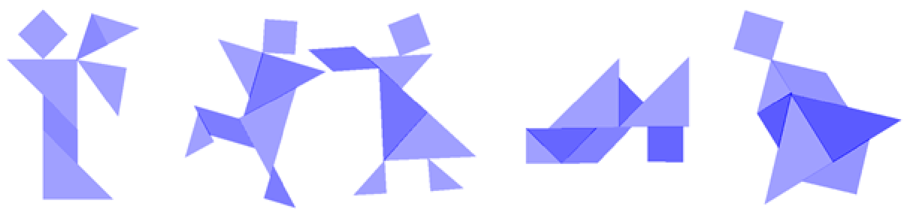


Figura 76: Quadrado com 5 peças e solução do triângulo com sete peças.

Duas inovações propostas por Sam Loyd e H. E. Dudeney consistiram em enquadrar puzzles TANGRAM em enredos de histórias infantis, bem como juntar mais do que um conjunto de peças para formar situações mais elaboradas (ver dança na história da *Cinderella* que se apresenta de seguida) [13, 19]. Estas duas ideias são muito bem-vindas no universo da educação pré-escolar na medida em que não colidem em nada com as sete etapas descritas anteriormente. Todas as etapas de desenvolvimento com TANGRAM podem ser contextualizadas desta forma e a contextualização à luz do imaginário infantil é absolutamente vital no que diz respeito ao trabalho quotidiano dos educadores. A título de exemplo, apresentamos quatro gravuras que podem ser enquadradas na história da *Cinderella* (Figura 77). Esses puzzles são um subconjunto de uma proposta feita por Sam Loyd para ilustrar esta clássica história infantil [23]. Com imaginação e uma simples busca no Google, o mesmo pode ser feito em relação a literalmente todas as histórias infantis.



Fada Dança Sapatinho 12 badaladas

Figura 77: *Cinderella*.

Neste artigo, procurámos mostrar como é possível potenciar, em termos didáticos, quatro materiais manipuláveis estruturados bastante conhecidos, mas muitas vezes utilizados com pouca profundidade na educação pré-escolar. Nesta missão, mostrou-se particularmente relevante a aplicação de numerosos estudos que explicam como o cérebro de uma criança em idade pré-escolar aprende matemática, bem como o conhecimento dos casos de sucesso do ensino da matemática no mundo, de que Singapura é um exemplo claro.

Referências

[1] Bohning, G., Althouse, J. "Using tangrams to teach geometry to young children", *Early Childhood Education Journal*, Vol. 24, Issue 4, 239-242, 1997.

[2] Brosterman, N. *Inventing kindergarten*, Harry N. Abrams, Inc., Publishers, 1997.

[3] Bruner, J. *The process of education*, Harvard University Press, 1960.

[4] Caldeira, M. F. *Aprender a matemática de uma forma lúdica*, Escola Superior de Educação João de Deus, 2009.

[5] Candeias, R. *Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário: João António Nabais e o ensino da matemática no Colégio Vasco da Gama*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, 2007.

[6] Carvalho, A., Santos, C., Silva, J. N. "Materiais didáticos para a educação matemática no pré-escolar", *Investigar em Educação Matemática: Diálogos e Conjunções numa Perspetiva Interdisciplinar*, Ana Paula Garrão, Margarida Raposo Dias, Ricardo Cunha Teixeira (Coordenadores), Letras Lavadas Edições, pp. 183–240, 2015.

[7] Carvalho, A., Pestana, I., Santos, C. *Viva a Matemática!*, Livro Prático, 1.º Ano, Volume 1, Principia, 2016.

[8] Coelho, E., Costa, A., Tavares, L., Alves, C. *Dossier pedagógico barrinhas do Ludo, o sonhador – imagina, constrói e sonha com o Cuisenaire: metodologia e finalidades de exploração*, Instituto de Educação, Universidade do Minho: Actas do I Encontro@rcaComum, 188–198, 2010.

[9] Cuisenaire, G. *Les nombres in couleurs*, Tamine, Belgique: Duculot-Roulin, 1952.

[10] Cuisenaire, G., Gattegno, C. *Numbers in colour* (3rd ed.), London: Heinemann, 1057.

[11] Dehaene, S. *The number sense*, New York: Oxford University Press, 1997.

[12] Dienes, Z., Golding, E. *Learning logic, logical games*, New York: Herder & Herder, 1966.

[13] Dudeney, H. *Amusements in mathematics*, New York: Dover Publications, 1958.

[14] Ellis, E. *The use of coloured rods in teaching primary numberwork*, Vancouver Public Schools: Wash, 1964.

[15] Har Y., Tan W. *Earlybird kindergarten mathematics (Standard Edition) Textbook A*, Singapura: Marshall Cavendish Education, 2008.

[16] Har Y., Tan W. *Earlybird kindergarten mathematics (Standard Edition) Textbook B*, Singapura: Marshall Cavendish Education, 2008.

[17] Hong K. *Primary mathematics Textbook 1A, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore*, Times Media Private Limited, 1981.

[18] Inhelder, B., Piaget, J. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*, São Paulo: Pioneira, 1976.

[19] Loyd, S. *The eighth book of Tan - 700 tangrams by Sam Loyd with an introduction and solutions by Peter Van Note*, New York: Dover Publications, 1968.

[20] Ministério da Educação. *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa: MEC, homologado a 17 de junho de 2013.

[21] Moreira, D., Oliveira, I. *Iniciação à matemática no jardim de infância*, Universidade Aberta, 2003.

[22] Netz, R., Noel, W. *O codex Arquimedes*, Universidade Aberta,O codex Arquimedes. Lisboa: Edições 70, 2007.

[23] Read, R. *Tangrams: 330 puzzles*, New York: Dover Publications, 1965.

[24] Santos, C. "Conceito de unidade na educação pré-escolar". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 1, 34–52, 2013.
`http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/67`

[25] Santos, C., Teixeira, R. C. "Matemática na educação pré-escolar: Esquemas todo-partes", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 4, 55–70, 2015.
`http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1132`

[26] Santos, C., Teixeira, R. C. "Matemática na educação pré-escolar: A ordem das dezenas", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 5, 23–39, 2015.
`http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1149`

[27] Thompson, I. "The role of counting in the idiosyncratic mental calculation algorithms of young children", *European Early Childhood Education Research Journal*, 3(1), 5–16, 1996.

[28] Olive, J. "From Dienes' blocks to javabars: A personal odyssey in the use of artifacts, materials and tools for learning and teaching mathematics", Rome: Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, 2008.

[29] Palhares, P., Mamede, E. "Os padrões na matemática do pré-escolar", *Educare/Educere*, 11, 115–131, 2002.

[30] Royo, P. *Aspectos didácticos de las matemáticas*, Ática, 1996.

[31] Slocum, J., Botermans, J., Gebhardt, D., Ma, M., Ma, X. Raizer, H., Sonneveld, D., Splunteren, C. *The tangram book: the story of the Chinese puzzle with over 2000 puzzles to solve*, New York: Sterling Publishing Company, 2003.

[32] Suppes, P., Feldman, S. "Young children's comprehension of logical connectives", *Journal of Experimental Child Psychology*, 12, 304–317, 1971.

[33] Wiggin, K., Smith, N. *Froebel's gifts*, Houghton Mifflin, 1895.
https://archive.org/details/froebelsgifts00wiggrich

[34] Rule, A. "Effects of practical life materials on kindergartner's fine motor skills", *Early Childhood Education Journal*, Vol. 30, Issue 1, 9–13, 2002.

[35] https://www.youtube.com/watch?v=8eTz9By5gY4 (Dom 1)

[36] www.cuisenaire.co.uk (Cuisenaire company)

[37] http://www.youtube.com/watch?v=JrMty8v2DqI
(Mathematics at Your Fingertips - 1961 NFB Full Video)

[38] https://www.youtube.com/watch?v=of5tNzRIxac
(Utilização de blocos lógicos)

[39] http://pbskids.org/catinthehat/games/great-shape-race.html
(PBSKids)