ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ.

Василь Кушнір, Григорій Кушнір, Ренат Ріжняк

В статті розглядається використання приписів алгоритмічного типу при розв'язуванні рівнянь та нерівностей з параметром у контексті застосування сформованих в учнів умінь дослідження властивостей функцій.

The using of algorithmic directions in equations and inequalities with a parameter solving in the movement of application of students' skills in exploration of functions' properties is considered in the article.

Розв'язування математичної задачі можливе за відомими алгоритмами. Тоді процес розв'язання такої задачі буде полягати в створенні її математичної моделі та перетворенні цієї моделі за скінчену кількість визначених кроків (скінчену кількість визначених перетворень чи операцій), що й приведе до розв'язку вихідної задачі.

Математичні задачі, які розв'язуються за відомими алгоритмами − відносно прості задачі. Такі задачі формують з учнів операціоналістів, аналітиків. Поле можливостей для діяльності учнів є досить структурованим, тому процес перетворень математичної моделі задачі згідно вибраного (чи створеного) алгоритму вимагає певних знань, умінь і навичок, а не значної творчості. Значні творчі зусилля тут потрібно прикласти тільки при побудові математичної моделі вихідної задачі.

Однак, у багатьох випадках математичні задачі не розв'язуються за алгоритмами у наведеному вище змісті. Зокрема, до таких задач відносяться системи декількох нелінійних рівнянь з таким же чи іншим числом невідомих, рівняння й нерівності з параметрами, якісні дослідження розв'язків рівнянь та нерівностей і т.п. Кожна конкретна задача наведених типів вимагає "власного" розв'язання. Такі задачі називають нестандартними, творчими, неалгоритмічними, такими, що слабко формалізуються тощо. Поле можливостей при розв'язуванні таких задач слабко структуроване, перетворення, які необхідно вести над моделлю вихідної задачі, невизначені, невизначене й число та послідовність таких перетворень. Тоді розробляється послідовність приписів, яка має певні властивості алгоритмів, але не є алгоритмом у математичному розумінні. Послідовність таких приписів називають "алгоритмічними приписами" (Л. Ланда), "евристичними алгоритмами (Д. Пойя)" розв'язання вихідної математичної задачі. Головним завданням такої послідовності приписів чи евристик є зменшення невизначеності поля можливостей розв'язання вихідної математичної задачі за рахунок його часткового структурування й упорядкування.

Важливими моментами творчості при розв'язуванні таких математичних задач є: *формування вихідної задачі; створення її математичної моделі; вибір "апарату" дослідження математичної моделі; застосування вибраного "апарату" до дослідження й перетворення моделі; трансляція отриманих при дослідженні й перетворенні моделі результатів на вихідну задачу.*

Наведені моменти та їх послідовність можуть слугувати загальним евристичним алгоритмом математизації задач творчого плану нестандартних, неалгоритмічних, слабо структурованих задач.

Метою нашого дослідження є створення приписів алгоритмічного типу (чи евристичних алгоритмів) розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та дослідження коренів нелінійних рівнянь. Об'єктом дослідження є рівняння й нерівності з параметрами та нелінійні рівняння, предметом дослідження є евристичні правила, послідовність яких може привести до розв'язання задач наведеного вище типу. Завданнями дослідження є: створення евристичних алгоритмів для розв'язання задач наведеного вище типу; створення та дослідження евристичного алгоритму та моделей вихідних задач; створення математичних алгоритмів процесу розв'язання математичних моделей на кожному кроці евристичного алгоритму; трансляція результатів дослідження на вихідну задачу.

У збірниках та посібниках з математики, що призначені для школярів, абітурієнтів, студентів педагогічних університетів (відомі збірники задач за авторства та редакцією М.І.Сканаві, В.В.Ясінського, В.Н.Литвиненка, А.Г.Мордковича), є чимала частина задач творчого характеру, які не розв'язуються за допомогою відомих алгоритмів.

У даній статті ми опишемо застосування уже сформованих в учнів умінь дослідження властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. Загальний вигляд евристичного алгоритму використання таких знань і умінь учнів зображений на рисунку 1.

Розглянемо детальніше 3-й пункт алгоритму. Очевидно, що дослідження властивостей заданої функції може здійснюватися різними способами в залежності від змісту та вибраного способу розв'язання вихідної математичної задачі. Тобто, використовуватиметься один із способів або їх комбінація:

1.Повне дослідження заданої функції.

2.Визначення властивостей функції за побудованим графіком (графік побудований, наприклад, методом перетворень, або з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, або схематично).

3.Визначення властивостей функції з використанням таких пакетів математичних програм, як ’’Advanced Grafer’’, ’’GRAN’’ та інші.

4.Дослідження окремих властивостей заданої функції – монотонності, екстремумів, тощо (рис. 1).

Розглянемо детальніше висловлені ідеї на прикладах.

Приклад 1. *Розв’язати систему нерівностей:*

$$\begin{cases} x^2-(a+1)x+a \prec 0 \\ x^2+(a+3)x+3a \prec 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) є вихідною математичною задачею. Таким чином, вимога вихідної задачі полягає в тому, щоб встановити залежність між розв’язками системи (1) та параметром *a*. Задачу можна розв’язувати різними способами, виходячи з наведених вище думок. Розглянемо деякі з них детально.

<u>Спосіб 1.</u> Створимо *математичну модель задачі*. Ліва частина кожної з нерівностей – це квадратний тричлен, у якому x - змінна, а m - параметр. Тому, ліву частину нерівностей можна представити як формулу, яка задає квадратичну функцію. Це і буде *математичною моделлю задачі*, розв’язання якої приведе до знаходження розв’язків системи (1). Використаємо *спосіб дослідження властивостей заданих квадратичних функцій:*

$$y=x^2-(a+1)x+a\,,\quad y=x^2+(a+3)x+3a$$

які впливають на визначення знаку значень функцій.

Скористаємося відомим алгоритмом дослідження властивостей квадратичної функції (рис 2). Очевидно, що кожну з нерівностей системи (1) можна записати у вигляді: $a_1x^2+a_2x+a_3<0$,

Загальний вигляд алгоритму розв’язування отриманої нерівності представимо у вигляді блок-схеми, поклавши, що $D=a_2^2-4a_1a_3$, а $x_1(a)$ та $x_2(a)$ – корені тричлена $(x_1 \prec x_2)$ у випадку $D \succ 0$, $x_0(a)$ – корінь тричлена у випадку $D=0$.

1) $x^2-(a+1)x+a \prec 0$. Дискримінант квадратного тричлена відносно *x*, що знаходиться у лівій частині нерівності $D=(a-1)^2 \geq 0$. Розглянемо такі випадки:

а) $D=0 \Leftrightarrow a=1$. Очевидно, враховуючи властивості квадратичної функції, можна стверджувати, що при $a=1$ $x \in \emptyset$. б) $D>0 \Leftrightarrow a \in \Re \setminus \{1\}$. При цьому квадратний тричлен буде мати корені $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a+1+|a-1|}{2} \\ x=\dfrac{a+1-|a-1|}{2} \end{array}\right.$.

Отже, для першої нерівності системи − при $a \prec 1$ $x \in (1;a)$, при $a \succ 1$ $x \in (a;1)$.

2) $x^2+(a+3)x+3a \prec 0$ $D=(a+3)^2-4\cdot 3a=(a-3)^2 \geq 0$. Маємо такі випадки:

а) $D=0 \Leftrightarrow a=3$. Тому, при $a=3$ $x \in \emptyset$

b) $D \succ 0 \Leftrightarrow a \in \Re \setminus \{3\}$. При цьому квадратичний тричлен лівої частини нерівності матиме корені $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-(a+3)+|a-3|}{2} \\ x = \dfrac{-(a+3)-|a-3|}{2} \end{array}\right.$

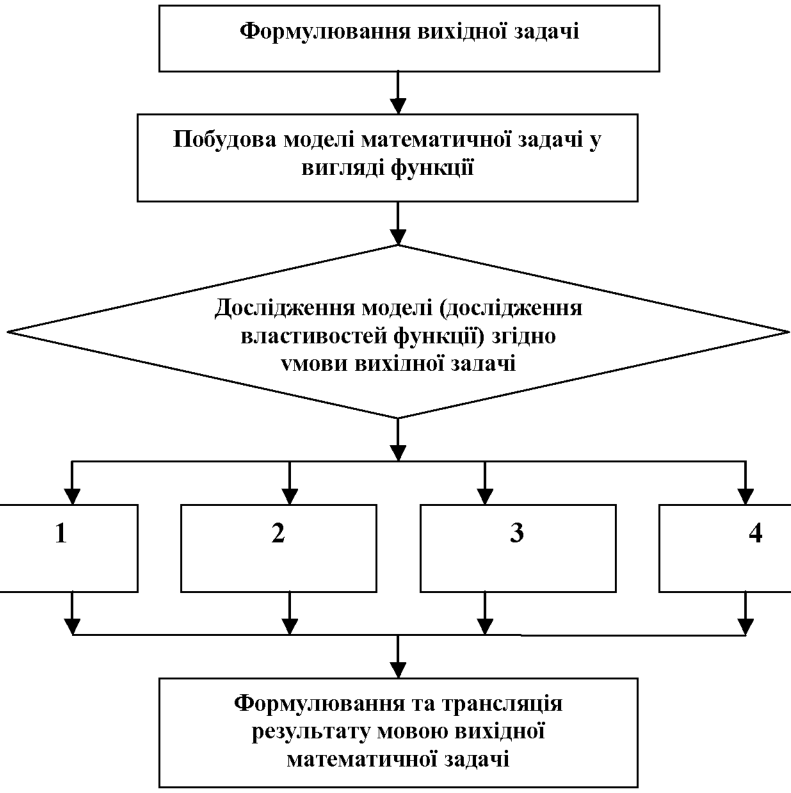

Рис. 1. Евристичний алгоритм розв'язання рівнянь і нерівностей з використанням знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей.

Отже, сформулюємо відповідь для другої нерівності − при $a \prec 3$ $x \in (-3;-a)$, при $a \succ 3$ $x \in (-a;-3)$.

Очевидно, що для знаходження розв'язків системи (1) треба знайти переріз множин розв'язків кожної нерівності. Для наочності проілюструємо це графічно. Зобразимо в системі координат *xOa* графіки функцій $a = x$ і $a = -x$, та ліній $x = -3$ і $x = 1$, позначимо розв'язки першої нерівності штриховою з нахилом вліво, а розв'язки другої нерівності штриховкою з нахилом вправо. В результаті буде легко побачити спільний розв'язок цієї системи нерівностей як переріз заштрихованих множин (рис. 3).

На етапі *трансляції отриманого результату* описуємо аналітично переріз заштрихованих областей так само, як ми показували це в [2]:

$$\left[\begin{array}{l} при \cdot a \in (-\infty;-3) \cdot x \in (-3;1) \\ при \cdot a \in [-3;-1] \cdot x \in (a;1) \\ при \cdot a \in (-1;0) \cdot x \in (a;-a) \\ при \cdot a \in [0;+\infty) \cdot x \in \emptyset \end{array}\right.$$

Рис. 2. Блок-схема дослідження квадратного тричлена.

Спосіб 2. Змінимо *вигляд математичної моделі задачі.* Представимо кожну нерівність системи рівнянням і побудуємо його графік. Графіки рівнянь розіб'ють координатну площину на декілька областей, кожну з яких перевіримо на предмет виконання умови системи нерівностей. Відповіддю буде аналітичний опис тих областей, де умова системи нерівностей (1) виконується. Отже:

$$x^2 - (a+1)x + a = 0 \text{ та } x^2 + (a+3)x + 3a = 0$$

Дані рівняння – це *модель вихідної задачі* (1). Шляхом елементарних перетворень лівої частини отримаємо:

$$(x-1)(x-a) = 0 \text{ для першої нерівності та } (x+3)(x+a) = 0 \text{ для другої.}$$

Побудуємо графіки рівнянь у системі координат *xOa* (рис. 4). Побудовані лінії

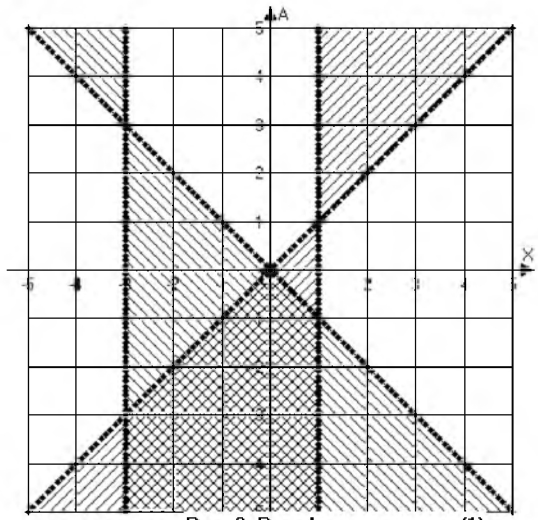

Рис. 3. Розв'язок системи (1)

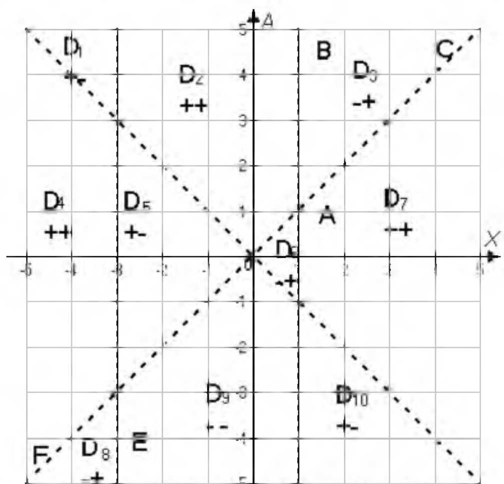

Рис. 4. Розв'язання системи (1) методом областей

ділять усю площину на десять областей $D_1, \ldots D_{10}$. Визначивши знаки виразів, що стоять у лівій частині кожної з нерівностей системи, бачимо, що єдина область, яка задовольняє умови системи – це описаним в [2], прийдемо до вказаної вище відповіді.

Очевидно, що мал. 5 може бути використаний для подальшої роботи над вправою. Наприклад, даємо учням (студентам) завдання: за результатами графічного способу розв'язування прикладу 1 скласти нові завдання. Очевидно, що коли взяти об'єднання областей D_2, D_4, D_7, то бачимо, що ця множина є розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a \succ 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a \succ 0 \end{cases}$$

Можлива також робота і з нестрогими нерівностями системи. Наприклад, розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a \le 0 \\ x^2 + (a+3)x + 3a \succ 0 \end{cases}$$

буде об'єднання областей D_3, D_8 та ліній AB, AC та EF.

Важливим моментом використання геометричної картини розв'язку задачі (рис. 4) є можливість організації творчої роботи над задачею у контексті її розв'язування з новими умовами:

- розв'язати системи нестрогих нерівностей;
- змінити питання до прикладу 1 на таке: при яких значення параметра розв'язки системи (1) (або інших систем, похідних від даної, є додатними (від'ємними);
- змінити питання до прикладу 1 на таке: при яких значеннях параметра розв'язки системи (1) лежать у заданому проміжку.

Очевидно, що такий спосіб розв'язування дає можливість посилити вплив функціональної лінії шкільного курсу математики на вдосконалення математичної підготовки учнів. Такий підхід доповнює традиційний. Запропонований нами підхід використання знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей різними способами при розв'язуванні математичних задач на основі евристичних алгоритмів має бути одним із різноманітних підходів, що в системі утворюють для суб'єкта навчання поле можливостей, необхідне для свідомого прийняття рішень у процесі вирішення математичних проблемних ситуацій. Наявність геометричної картини (рис. 3, 4) дозволяє вчителю видозмінювати та трансформувати умову задачі та формувати в учнів елементи творчого та критичного мислення.

Наведемо ще один спосіб розв'язування прикладу 1. Пропонуємо скористатися прикладним комп'ютерним пакетом «Advanced Grafer», за допомогою якого будуватимемо графік системи (1). Зауважимо, що, на нашу думку, це можна робити лише після того, як основні знання і уміння про властивості функцій та основні способи їх використання до розв'язування математичних задач певною мірою в учнів уже сформовані.

Для цього у меню робочого вікна обираємо функцію «Додати графік» та вводимо формули нерівностей системи.

У вказаному пакеті немає можливості використовувати інші змінні, ніж *x* та *y*, хоча є можливість перейменувати осі координат. Вийдемо із ситуації так – змінимо параметр рівняння з *a* на *y*.

На робочій області будується *модель системи (1)* – графік системи (див. рис.5). Залишається лише оформити пропорції міток на осях *0x* та *0y*, задати для більш точного відображення графіка в меню «Параметри побудови» максимальну кількість кроків по горизонталі та вертикалі – 200 та максимальний розрив, рівний 10.

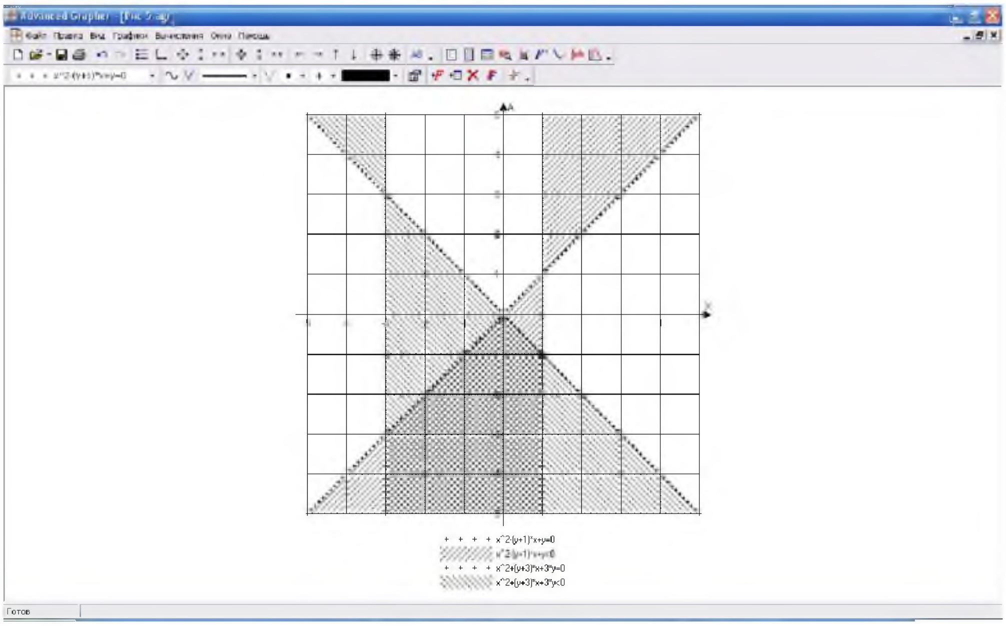

Рис. 5. Розв'язки системи (1).

Очевидно, що побудований графік системи ще потребує аналітичного дослідження (див. аналітичні викладки вище). Після такої обробки можна прийти до *трансляції та формулювання* вказаної вище *відповіді* для системи (1).

Як бачимо з проілюстрованих прикладів, знання про властивості функцій та уміння вести дослідження цих властивостей різними способами досить часто знаходять своє використання у процесі розв'язування математичних навчальних задач творчого типу. Запропонований нами евристичний алгоритм дозволяє використати знання учнів про властивості функцій та уміння вести їх дослідження для розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для нелінійних рівнянь.

У процесі навчання важливим є етап відтворення названих вище знань та умінь не просто в контексті репродуктивного відображення, а в контексті продуктивного, більше того, творчого застосування інформації про функції та основні способи їх дослідження. При цьому на перший план виступає проблема вибору необхідного способу дослідження функції та оцінка ефективності вибраного способу у контексті розв'язування моделі задачі.

Разом з тим вкажемо, що даний підхід (а саме використання на основі наведеного евристичного алгоритму знань про властивості функцій та умінь дослідження цих властивостей різними способами для розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами та для відшукання наближених розв'язків нелінійних рівнянь) має обмеження. Зокрема, його використання є проблематичним у тому випадку, коли побудова графіка функції (моделі) та дослідження її властивостей є досить складною задачею.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Збірник задач з математики для вступників до втузів / За редакцією М.І.Сканаві. – К.: Вища школа, 1992. – 445 с.
2. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Формування умінь розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром з використанням інтеграції знань з математики // Математика в школі. – 2006. − № 6. − С. 47-50.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ.

Кушнір Василь Андрійович – доктор педагогічних наук, професор кафедри педагогіки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Кушнір Григорій Андрійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри обчислювальної техніки й прикладної математики Кіровоградського національного технічного університету.

Ріжняк Ренат Ярославович – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.
Наукові інтереси: використання інноваційних технологій у навчальному процесі середньої та вищої школи.