ENSAYOS

Métodos matemáticos para el diseño

Rosa Elena Alvarez Martínez

María Dolores González Martínez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

Métodos matemáticos para el diseño

Métodos matemáticos para el diseño
Rosa Elena Álvarez
María Dolores González

Diseño de portada
Aldo Hugo Montero Rincón
Leonardo Mizrahi Perkulis
Ilustración de portada
Mark Rothko
Cuidado de la edición
Sección dé Producción Editorial UAM — A
PROTEA, S.A. de C.V.

Impreso por PROTEA, S.A. de C.V.
Magdalena 22-302. Col. del Valle
México, D.F. 03100

1a. Edición, 1989
Impreso en México — Printed in Mexico
ISBN 968-840-705-4

Métodos matemáticos para el diseño

Rosa Elena Alvarez Martínez

María Dolores González Martínez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-AZCAPOTZALCO

Indice

Introducción

La tecnología avanza rápidamente y no puede prescindir de la matemática. En cualquier área del conocimiento encontramos que lo esencial en cuanto a su estructura y relaciones internas, se basa en la matemática, considerada, no tanto como ciencia exacta sino como un lenguaje universal con el cual se puede explicar cualquier concepto de una manera clara y precisa.

La intención de incluir estos temas en los programas de estudio de las carreras de diseño, lleva implícita la idea de que un estudiante debe tener agilidad mental, capacidad de análisis, de deducción y de razonamiento, para condicionar su mente a la concepción de ideas y al desarrollo de proyectos de manera racional con un enfoque formal y funcional.

El diseñador debe considerar a esta disciplina como una herramienta de ordenamiento mental y como un lenguaje para planear, analizar y enfocar adecuadamente los problemas cuando involucren forma, orden o tamaño.

Este volumen desarrolla los conceptos con un enfoque sencillo y claro, explicando desde lo más elemental, ejemplificando gráfica y analíticamente y mostrando aplicaciones a problemas de diseño.

El contenido es variado; incluye los elementos básicos de álgebra lineal: álgebra de vectores y álgebra de matrices y algunos temas de geometría analítica con un intento de análisis, pero poniendo énfasis en la graficación de curvas especialmente las cónicas y las funciones trigonométricas, en coordenadas polares y en coordenadas cartesianas.

Álgebra lineal

Capítulo I

Álgebra de vectores

Desde el punto de vista analítico:

Se llama vector a un conjunto ordenado de elementos. (En renglón o en columna)

Ejemplo:

$\bar{a} = \{ a_1, a_2 \ldots\ldots a_n \}$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}$$

a los elementos $a_1, a_2, \ldots a_n$ se les llama: "componentes del vector"

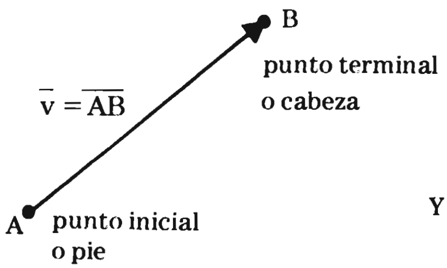
"n" representa el número de componentes y se dice que es un vector n-dimensional o de dimensión "n".

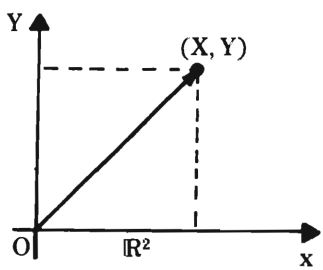
Desde el punto de vista geométrico:

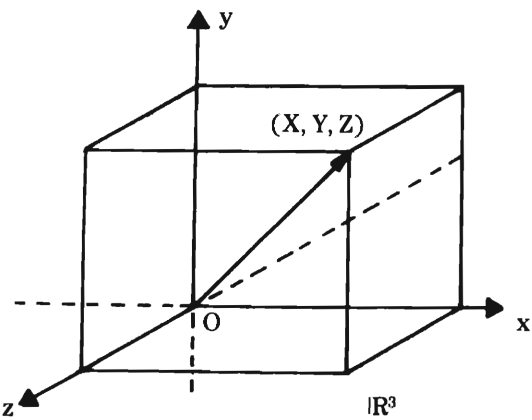
Se suponen conocidas las representaciones geométricas $\mathbb{R}^2$

y $\mathbb{R}^3$, el plano cartesiano y el espacio euclidiano tridimensional.

Así un "vector" es un segmento rectilíneo (o flecha) con dirección y magnitud o módulo.

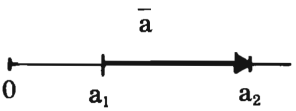




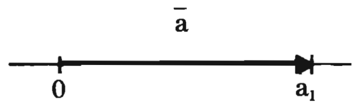


Sistemas dimensionales

Sistema unidimensional: Es colineal al eje "x"



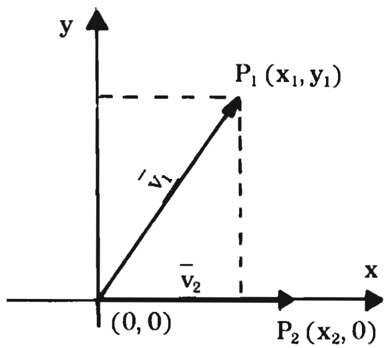
$\bar{a} = (a_2 - a_1)$



$\bar{a} = a_1$

Sistema bidimensional: $\mathbb{R}^2$

Aquí el vector $\bar{v}$ tiene 2 componentes llamados pareja o diada, y determinan el punto extremo o cabeza del vector definido por una referencia a los ejes ortogonales.

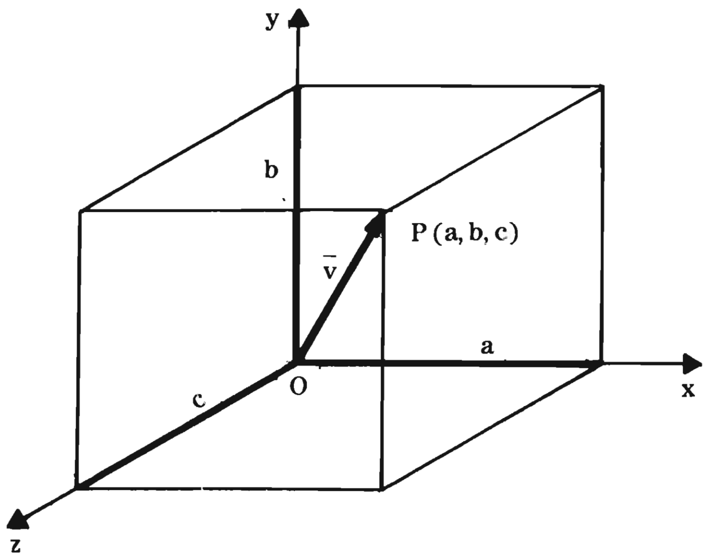


$\bar{v}_1 = (x_1, y_1)$
$\bar{v}_2 = (x_2, 0)$

Sistema tridimensional $\mathbb{R}^3$:

Un vector de 3 componentes puede representarse en un sistema de 3 ejes ortogonales que se formen agregando al sistema bidimensional un eje perpendicular llamado "Z" o polar.

La representación gráfica se hace en perspectiva ortogonal.



$\bar{v} = (a, b, c,)$

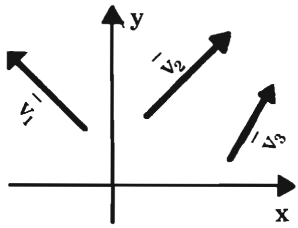
Tipo de vectores

En un sistema n– dimensional existen 2 tipos de vectores:

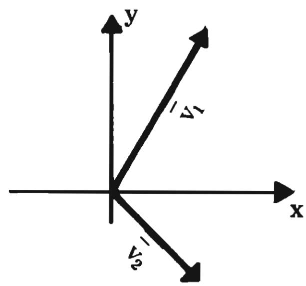
1) Vectores libres

2) Vectores de origen.

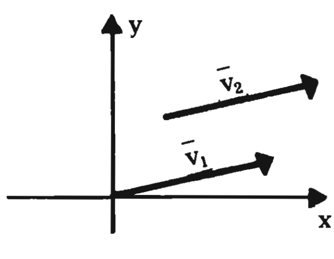
Vector libre: Su origen o pie no coincide con el origen.

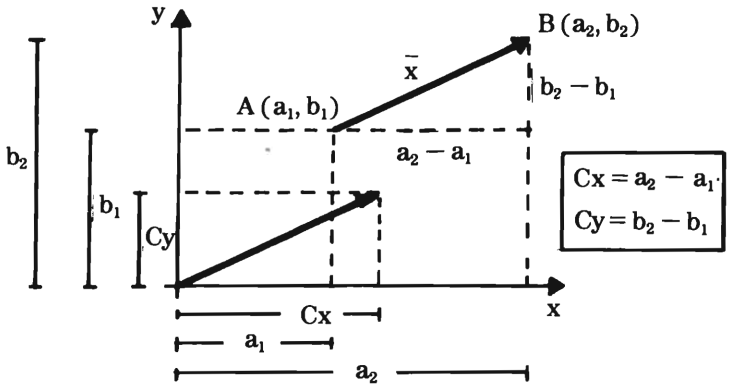


Vector de origen: Su origen o pie coincide con el origen del sistema n– dimensional.

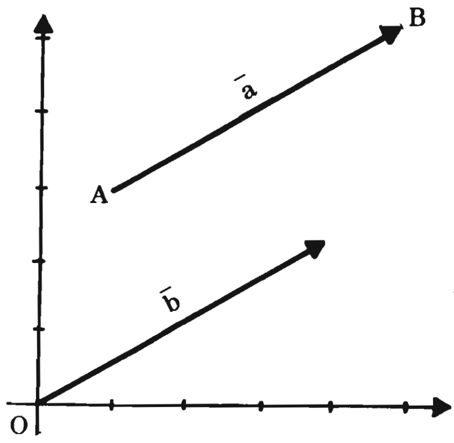


Todo vector se asocia con un vector "anclado" en el origen. En este caso $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son: "Equivalentes".





Ejemplo: teniendo el vector libre de coordenadas A(1,3) y B(5,5) obtener el vector de origen correspondiente.



$Cx = x_2 - x_1 =$

$Cx = 5-1 \;|\; Cx = 4$

$Cy = y_2 - y, =$

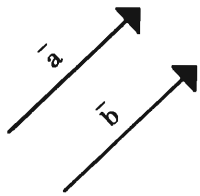
$5-3 = 2 = Cy$

$\therefore (4, 2) = \bar{b}$

$\bar{a} \Leftrightarrow \bar{b}$

Vectores equivalentes

Se dice que dos o más vectores son equivalentes si tienen la misma norma y la misma dirección.



Si son equivalentes se escriben $\bar{a} = \bar{b}$

Los vectores equivalentes se consideran iguales aunque puedan tener posiciones diferentes dado que un vector queda totalmente definido por su norma y dirección.

Analíticamente dos vectores definidos por $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ son equivalentes si $Q-P = S-R$.

Ejemplo: Demostrar que los vectores

$\overline{PQ} = \bar{a}$ y $\overline{RS} = \bar{a}_1$

son equivalentes

1) $P(1,4)$ $Q(-3,5)$; $R(5,7)$ $S(1,8)$

$Q - P = S - R$

$$(-3,5) - (1,4) = (1,8) - (5,7)$$
$$(-4,1) = (-4,1)$$
$$\bar{a} = \bar{a}_1$$

2) $P(2,3,-4)$ $Q(-1,3,5)$; $R(-2,3,-1)$ $S(-5,3,8)$

$$Q - P = S - R$$
$$(-1,3,5) - (2,3,-4) = (-5,3,8) - (-2,3-1)$$
$$(-3,0,9) = (-3,0,9)$$
$$\bar{a} = \bar{a}_1$$

Aplicando vectores equivalentes escribir la coordenada faltante para formar un paralelogramo.

$P(1,1) \quad Q(3,3) \quad S(5,\frac{1}{2}) \quad R(x,y)$

$Q - P = R - S$

$(3,3)-(1,1)=(x,y)-(5,\frac{1}{2})$

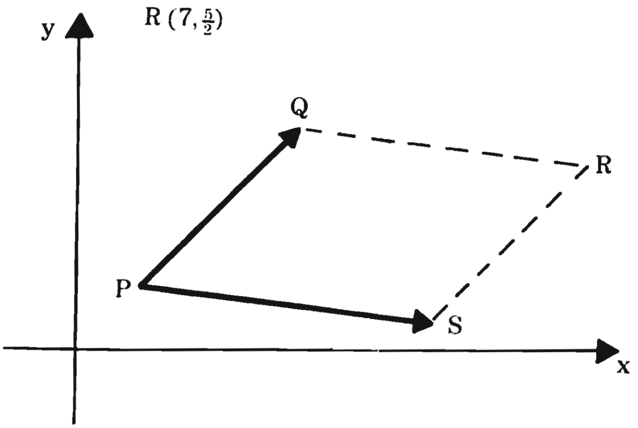
$(2,2)=(x-5, y-\frac{1}{2})$

igualando términos correspondientes:

$x-5=2 \qquad x=2+5=7$

$y-\frac{1}{2}=2 \qquad y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$R(7,\frac{5}{2})$



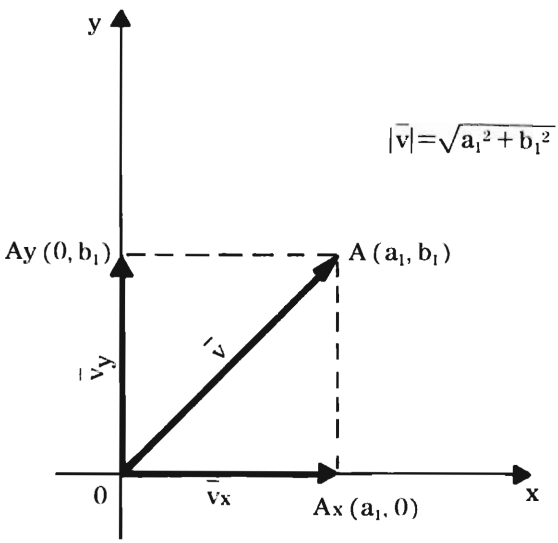
Módulo o norma de un vector:

Se llama así a la longitud del vector y se representa por lo tanto como un escalar.

En un sistema $\mathbb{R}^2$ (bidimensional)

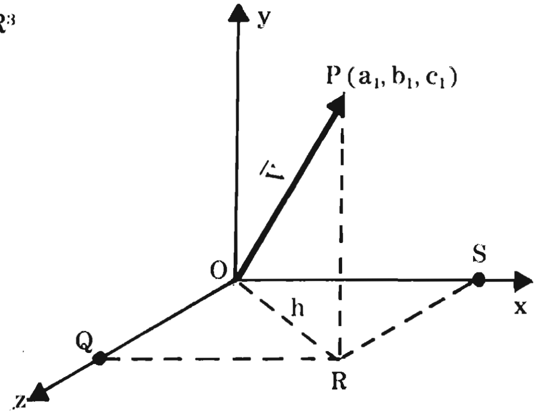
$\bar{v} = (a_1, b_1)$

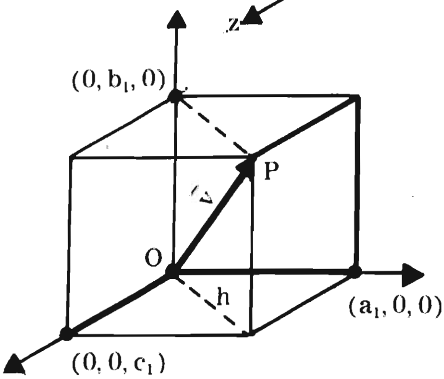
Por Teorema de Pitágoras:



En un sistema $\mathbb{R}^3$

$\overline{V} = (a_1, b_1, c_1)$





Aplicando el Teorema de Pitágoras dos veces

$\therefore |\overline{V}| = \sqrt{(OR)^2 + (PR)^2}$

pero $\qquad (OR)^2 = (OQ)^2 + (OS)^2$

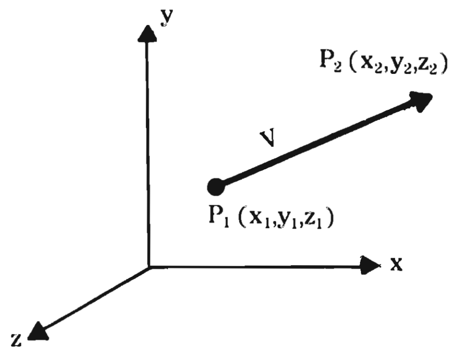
$\therefore |\overline{V}| = \sqrt{(OQ)^2 + (OS)^2 + (PR)^2}$

$|\overline{V}| = \sqrt{c_1^2 + a_1^2 + b_1^2}$

Nota: Así en un vector "n" dimensional:

$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .... an^2}$

Interpretación geométrica de la norma de un vector



La distancia entre P_1 y P_2 es la norma del vector P_1P_1 ó $\bar{v}$

Dado que

$$\bar{v} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\ ,\ z_2 - z_1)$$

Si $\quad d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$$d = \|\bar{v}\|$$

de manera análoga para un vector en $\mathbb{R}^2$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Ejemplo:

1) La norma del vector $\bar{v} = (-3, 2, 1)$ es

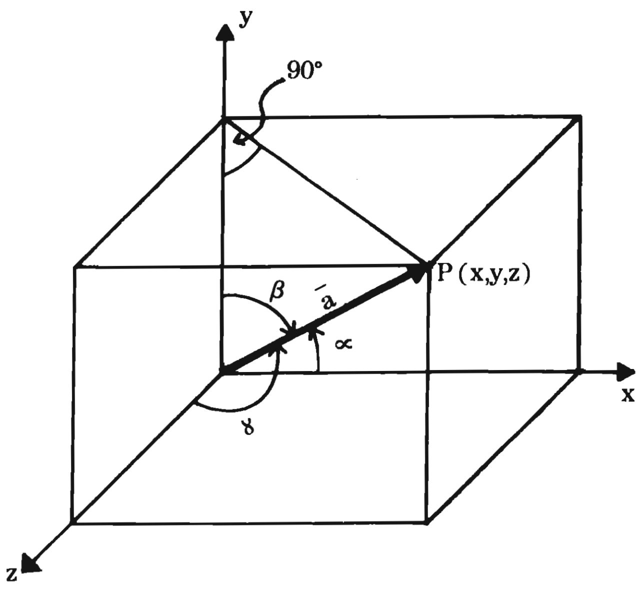
$$\|\bar{v}\| \ = \ \sqrt{(-3)^2+(2)^2+1^2} = \sqrt{14}$$

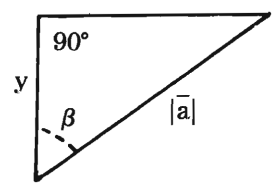
2) La distancia entre los puntos

$P_1\ (2, -1, -5) \qquad P_2\ (4, -3, 1)$ es

$$d = \sqrt{(4-2)^2+(-3+1)^2+(1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Ángulos direccionales y cosenos directores





$$\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}$$

Un vector de origen $\bar{a}$ se puede determinar además de por sus componentes, por el $\measuredangle$ que forma el vector con cada uno de los ejes coordenados llamándose **ángulos direccionales**

$$\alpha, \beta, \gamma$$

Las proyecciones del vector $\bar{a}$:

$x = |\bar{a}| \cos \alpha \quad$ Si $|\bar{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow |\bar{a}|^2 = x^2+y^2+z^2$

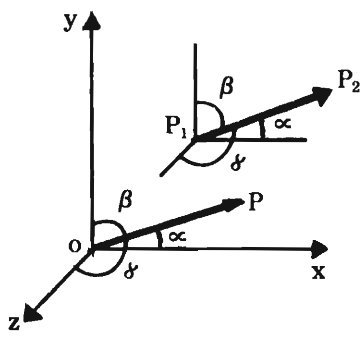
$y = |\bar{a}| \cos \beta \quad$ sustituyendo:

$z = |\bar{a}| \cos \gamma \quad |\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cos^2 \gamma$

$$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Para vector libre

$$\overline{OP} // \overline{P_1P_2}$$



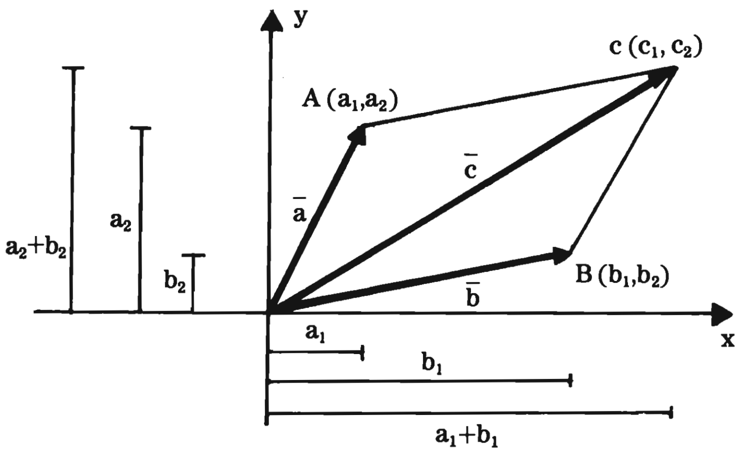
Los ángulos directores se toman sobre un vector de origen que sea paralelo al vector libre y tenga la misma dirección.

Operaciones con vectores

Suma

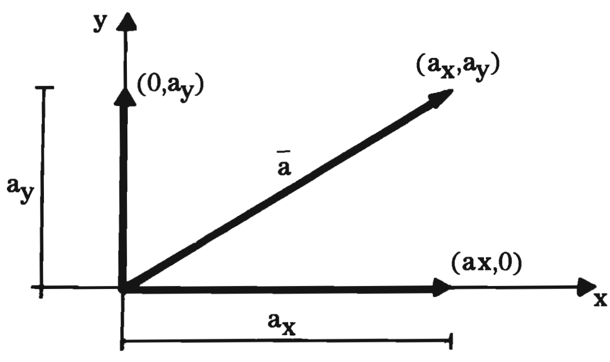
$\bar{a} = (a_1, a_2) \qquad \bar{b} = (b_1, b_2)$

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} = (a_1+b_1, a_2 + b_2)$



Un vector se puede expresar como la suma de sus vectores componentes:

$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$



Propiedades de la suma de vectores.

a) Cerradura

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$$

b) Conmutatividad

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

$$(a_1,a_2) + (b_1,b_2) = (a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$

$$(b_1,b_2) + (a_1,a_2) = (b_1+a_1,\ b_2+a_2)$$

c) Asociatividad

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{d} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{d} = (\bar{a}+\bar{d})+\bar{b}, \text{ etc.}$$

d) Existencia del idéntico (vector cero)

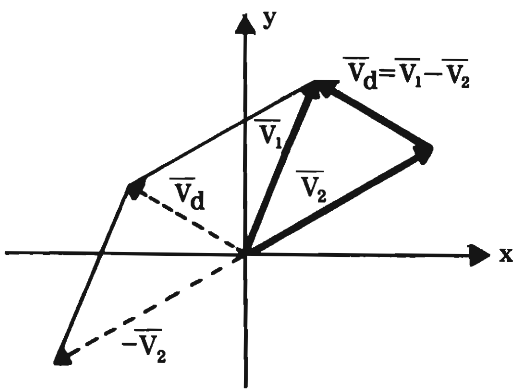
$$\bar{a} + \tilde{0} = \bar{a}$$

e) Existencia del inverso aditivo

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \tilde{0}$$

Diferencia

$$\overline{V_d} = \overline{V_1} - \overline{V_2} = \overline{V_1} + (-\overline{V_2})$$



Observar que el inverso aditivo de $\overline{vd}$ es $\overline{V_2} - \overline{V_1}$

Producto de un escalar por un vector

Es el producto de un escalar por cada uno de los componentes del vector.

Si $\bar{a}$ es un vector y λ un escalar

$$\lambda\,\bar{a} = \lambda\,(a_1, a_2, \ldots\, a_n)$$

$$\lambda\,\bar{a} = (\lambda\, a_1, \lambda\, a_2, \ldots\, \lambda\, a_n)$$

Ejemplo: Si $\overline{V} = (1, -2)$ y $\lambda = 4$

$$\lambda\overline{V} = 4\,\overline{V} = 4\,(1,-2) = (4, -8)$$

el resultado es otro vector de la misma dimensión

Propiedades

1) Cerradura:
   El producto de un vector por un escalar da como resultado otro vector del mismo espacio dimensional.

2) Distributividad:
   $\lambda\,(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\,\bar{a} + \lambda\,\bar{b}$
   $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\,\bar{a} + \mu\bar{a}$

3) Producto por el escalar 1:
   Si $\lambda = 1 \qquad 1\,\bar{a} = \bar{a}$

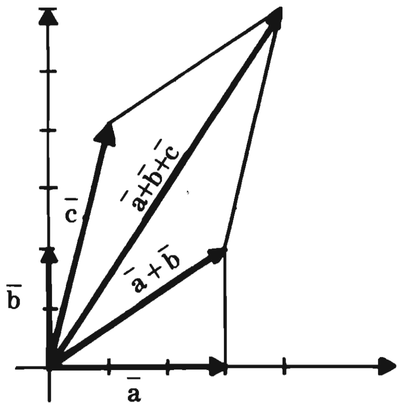
4) Producto por el escalar 0:
   Si $\lambda = 0 \Longrightarrow 0\,\bar{a} = \tilde{0}$

Ejemplos:

1) Sumar los vectores
   $\bar{a} = (3,0), \bar{b} = (0,2), \bar{c} = (1,4)$

$\bar{a} + \bar{b} = (3+0,0+2) = (3,2)$

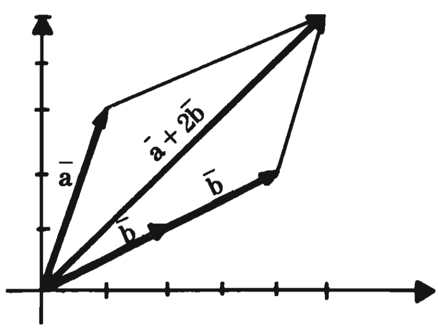
$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = (3+1, 2+4) = (4,6)$



2) Sumar $\bar{a} + 2\bar{b}$ si $\bar{a} = (1,3)$ y $\bar{b} = (2,1)$

$\bar{a} + 2\bar{b} = (1,3) + 2\ (2,1)$

$= (1,3) + (4,2) = (5,5)$



Producto escalar o producto punto

(Producto interior Euclidiano)

Se llama así al producto de 2 vectores del mismo sistema dimensional cuyas componentes se multiplican entre sí ordenadamente en forma de sumandos.

El resultado es siempre un escalar
Si $\bar{a} = (a_1, a_2 \ldots . a_n)$

y $\bar{b} = (b_1, b_2 \ldots . b_n)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 \ldots . + a_n b_n)$

Puede ordenarse en renglón o en columna:

$\bar{a} = (a_1, a_2 \ldots . a_n)$ y $\qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$

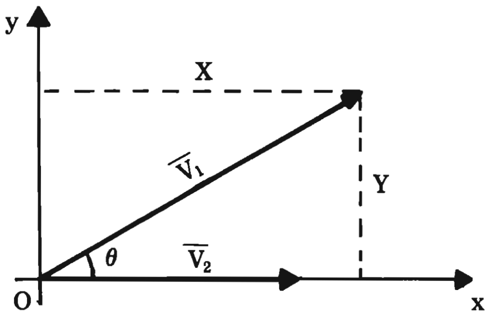
$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 \ldots . + a_n b_n)$

Producto escalar o producto punto de dos vectores dado el ángulo que forman entre sí.

1) Caso en que un vector está contenido en uno de los ejes.

$\bar{v}_1 = (|\bar{v}_1| \cos\theta, |\bar{v}_1| \operatorname{sen}\theta)$

$\bar{v}_2 = (|\bar{v}_2|, 0)$



$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = |\overline{v}_1| \cdot |\overline{v}_2| \cos\theta + \underbrace{|\overline{v}_1| \operatorname{sen}\theta \cdot 0}_{0}$$

$$\therefore \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = |\overline{v}_1| \cdot |\overline{v}_2| \cos\theta$$

El producto de 2 vectores que coinciden en un punto, será igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

De donde: $$\boxed{\cos\theta = \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{|\overline{v}_1| \cdot |\overline{v}_2|}}$$

De la expresión anterior, se tiene

si $\theta = 90°$, Cos $90° = 0$ y $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = 0$

$\therefore$ los vectores son perpendiculares.

si $0 < \theta < 90°$, $0 < \cos\theta < 1$ y $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 > 0$

$\therefore$ los vectores forman un ángulo agudo

si $90 < \theta < 180°$, $-1 < \cos\theta < 0$ y $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 < 0$

$\therefore$ los vectores forman un ángulo obtuso

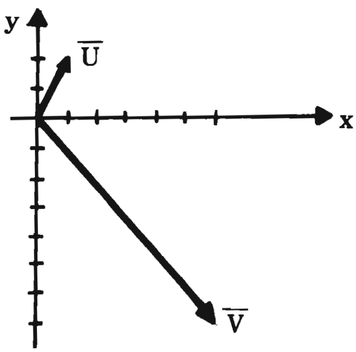
Ejemplo: 1) Calcular $\overline{U} \cdot \overline{V}$ para

$\overline{U} = (1,2)$

$\overline{V} = (6,-8)$

$\overline{U} \cdot \overline{V} = (1)(6) + (2)(-8) = 6 - 16 = -10$

$\therefore$ el ángulo que forman será obtuso



Ejemplo: Si $\overline{U} = (1, -2, 3)$

$\overline{V} = (-3, 4, 2)$

$\overline{W} = (3, 6, 3)$

$\overline{U} \circ \overline{V} = 1\,(-3) + (-2)\,(4) + 3\,(2) = -3 -8+6 = -5$ (obtuso)

$\overline{V} \circ \overline{W} = (-3)\,(3) + (4)\,(6) + 2\,(3) = -9+24+6 = 21$ (agudo)

$\overline{U} \circ \overline{W} = 1\,(3) + (-2)\,(6) + 3\,(3) = 3-12+9 = 0$ ($\perp$)

Ejemplo:

$$\overline{U} = (1, 2)$$

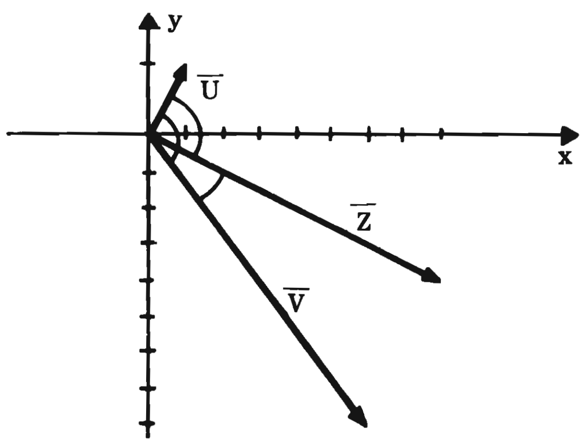
$$\overline{V} = (6, -8)$$

$$\overline{Z} = (8, -4)$$

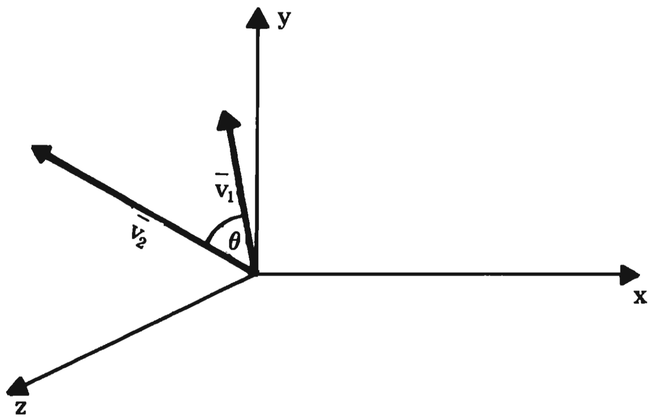
$\overline{U} \circ \overline{V} = (1)\,6 + 2\,(-8) = -10$
(obtuso)

$\overline{U} \circ \overline{V} = 1\,(8) + (2)\,(-4) = 8 - 8 = 0$
(perpendiculares)

$\overline{V} \circ \overline{Z} = 6\,(8) + (-8)\,(-4) = 48 + 32 + 80$
(agudo)



Ejemplo: en $\mathbb{R}^3$
$\overline{V_1} = (5, 7, 6)$ $\overline{V_2} = (1, 7, 8)$



$$\cos\theta = \frac{(5x1)+(7x7)+(6x8)}{\sqrt{25+49+36}\ \sqrt{1+49+64}} = \frac{5+49+48}{\sqrt{110}\quad\sqrt{114}} =$$

$$\cos\theta = \frac{102}{111.9} = 0.92$$

$0 = \text{arc} \quad \cos 0.92 = 23°$

Ejemplo: El ángulo entre los vectores

$\overline{U} = (0,0,1)$ y
$\overline{V} = (0,2,2)$
es de 45°; obtener $\overline{U}\cdot\overline{V}$
$\overline{U}\cdot\overline{V} = |\overline{U}| \quad |\overline{V}| \quad \cos\ 45°$

$$(\sqrt{0^2+0^2+1^2})\ (\sqrt{O^2+2^2+2^2}) \quad (\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\sqrt{1} \quad \sqrt{8} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\ \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

Ejemplo: 2) Sean los vectores

$\overline{U} = (2, -1, 1)$
$\overline{V} = (1, 1, 2)$

encontrar $\overline{U} \cdot \overline{V}$ y determinar el ángulo

$\overline{U} \cdot \overline{V} = (2+(-1)+2) = 3 \qquad \overline{U} \cdot \overline{V} > 0 \Rightarrow$ agudo

$|\overline{U}| = \sqrt{4+1+1} \quad = \sqrt{6}$

$|\overline{V}| = \sqrt{1+1+4} \quad = \sqrt{6}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\theta = \text{arc.} \cos \frac{1}{2}$

$\theta = 60°$

Ejercicio: encontrar los ángulos interiores del Δ con vértices:

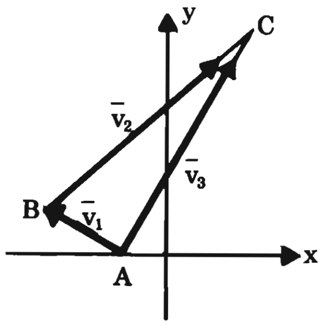
A (−1,0), B (−2,1), C (1,4)

vectores

$\overline{v}_1 = (-2+1, 1-0) = (-1, 1)$

$\overline{v}_2 = (1+2, 4-1) = (3, 3)$

$\overline{v}_3 = (1+1, 4-0) = (2, 4)$

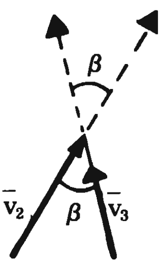


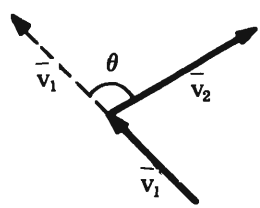
producto punto

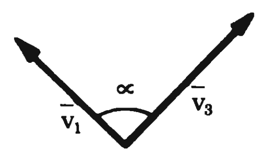
$\bar{v}_1 \circ \bar{v}_2 = -3+3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90°$

$\bar{v}_1 \circ \bar{v}_3 = -2+4 = 2 \quad \Rightarrow \measuredangle$ agudo

$\bar{v}_2 \circ \bar{v}_3 = 6+12 = 18 \Rightarrow \measuredangle$ agudo







módulos

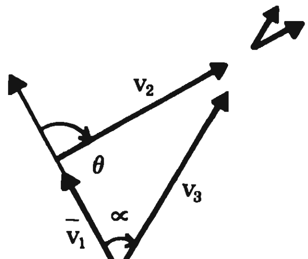
$|\bar{v}_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41$

$|\bar{v}_2| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 4.24$

$|\bar{v}_3| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 4.47$

Perímetro = 1.41 + 4.24 + 4.47 = 10.12 u

Ángulos interiores



$$\text{Cos } \alpha = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3}{|\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_3|} = \frac{2}{\sqrt{2}\,\sqrt{20}}$$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{2}{6.32} = 0.3164$$

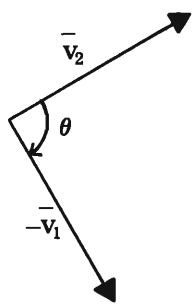
$\propto$ = ang cos 0.3164 = 71° 30'

$$\cos \beta = \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3}{|\bar{v}_2| \cdot |\bar{v}_3|} = \frac{18}{\sqrt{18}\sqrt{20}} = \frac{18}{18.95} = 0.9498$$

$$\beta = \text{ang cos } 0.9498 = 18°30'$$

$$\cos \theta = \frac{\bar{v}_2 \cdot (-\bar{v}_1)}{|\bar{v}_2| \cdot |-\bar{v}_1|} = \frac{3 \quad -3}{\sqrt{18}\,\sqrt{2}} = 0$$

$$\theta = \text{ang cos } 0 = 90°$$



Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Es el conjunto de vectores n–dimensionales que cumplen las operaciones suma y producto. **Base** de un espacio vectorial es el conjunto de vectores con los cuales se puede generar cualquier vector de ese espacio.

Existen diferentes bases pero una base en R^n siempre tiene n vectores.

El conjunto de vectores unitarios constituye una base, pues cualquier vector del espacio se puede generar en función de los vectores unitarios.

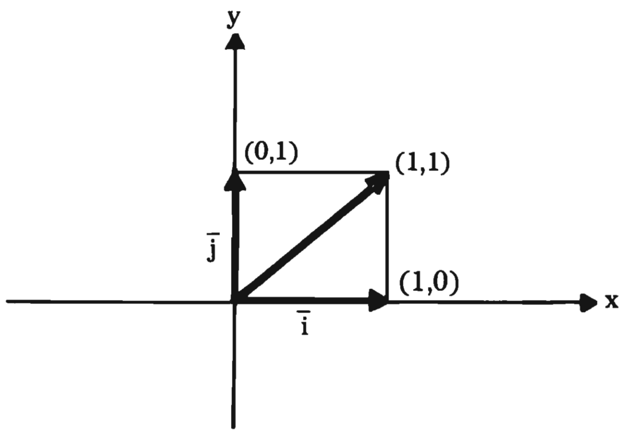
$$\bar{a}_n = (a_1\bar{i}+a_2\,\bar{j} + \dots a_n\bar{x})$$

base en R^2: $\bar{i}$ =(1,0)

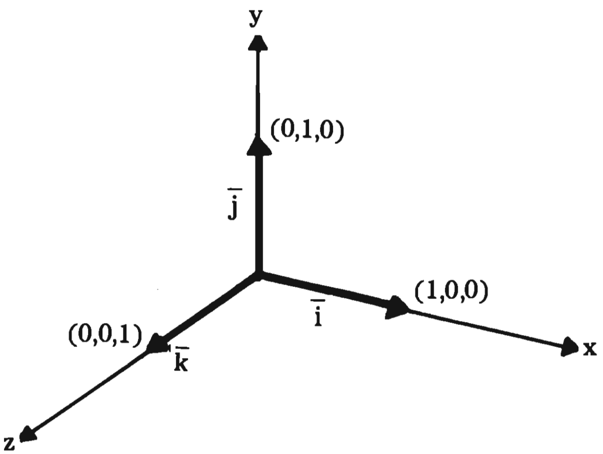
$\bar{j}$ =(0,1)

La base de un espacio n–dimensional está formado por n vectores perpendiculares entre sí.

base en $\mathbb{R}^2$



base en $\mathbb{R}^3$

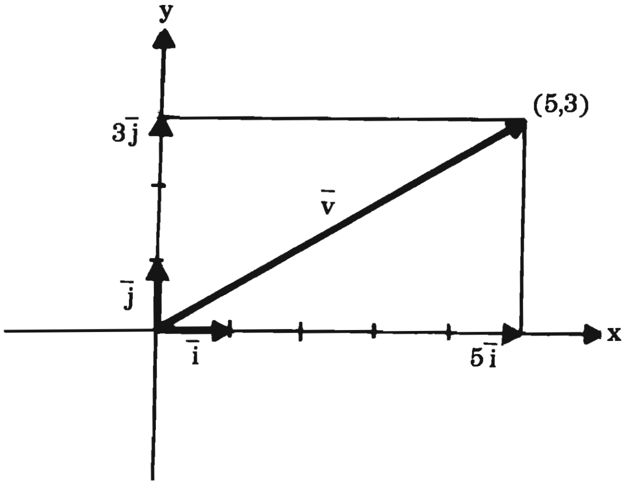


Ejemplo:

El vector $\bar{v} = (5,3)$

se puede expresar como

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 5\bar{i} + 3\bar{j} \\ &= 5\,(1, 0) + 3\,(0, 1) = \\ &= (5, 0) + (0, 3) = \\ &= (5, 3) \end{aligned}$$



Producto cruz o producto vectorial

A diferencia del producto punto, el producto cruz de dos vectores da como resultado otro vector.

Se utiliza para obtener un vector en $\mathbb{R}^3$ perpendicular a dos vectores conocidos.

Definición:

Si $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

si el producto cruz $\bar{u} \times \bar{v}$ es:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Esto se puede obtener de manera más sencilla con un determinante, tomando como primer renglón al vector (1,1,1) y como segundo y tercer renglón respectivamente las componentes de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

desarrollando por cofactores

$$\bar{u} \times \bar{v} = \left| 1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -1 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, 1 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (1\ (u_2v_3-u_3v_2), -1(u_1v_3-u_3v_1), 1\ (u_1v_2-u_2v_1))$$

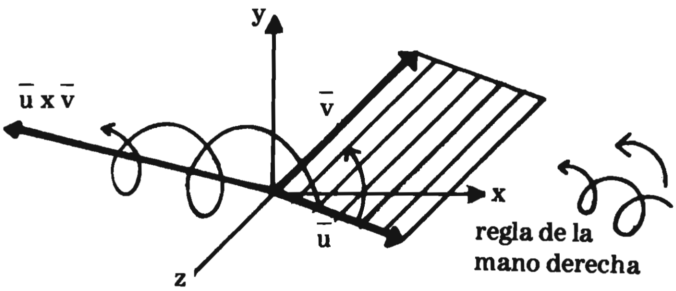
$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)$$

Ejemplo: Sea $\bar{u} = (3,0,1)$ y $\bar{v} = (1,2,-2)$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right|$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (0-2, 6+1, 6) = (-2,7,6)$$



El resultado del producto cruz es un vector ortogonal al plano que forman los dos vectores.

Obtener el producto cruz:

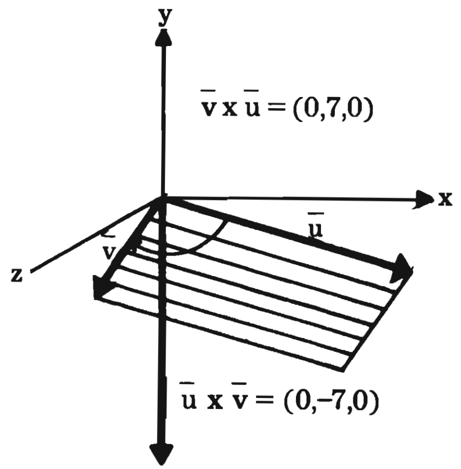
$\bar{u} = (4,0,1) \qquad \bar{v} = (1,0,2)$

$$\bar{u} x \bar{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left| 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, -1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, 1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right|$$

$= 1\ (0), -1(8-1), 1(0)$

$(0, -7, 0) = \bar{u} x \bar{v}$



Propiedades algebráicas del producto cruz

Si $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ y K es un escalar, entonces:

a) $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$

b) $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{v} \times \bar{u}$

c) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$

d) $(\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times \bar{w} + \bar{v} \times \bar{w}$

e) $k\,(\bar{u} \times \bar{v}) = (k\,\bar{u}) \times \bar{v} = \bar{u} \times (k\,\bar{v})$

f) $\bar{u} \times 0 = 0 \times \bar{u} = 0$

g) $\bar{u} \times \bar{u} = 0$

Ejemplo de la propiedad

$\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{v} \times \bar{u}$

$\bar{u} = (3,5,4)$

$\bar{v} = (2,0,6)$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \quad 1\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad -1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right|$$

$$= (30, -18 + 8, -10) = (30,-10,-10)$$

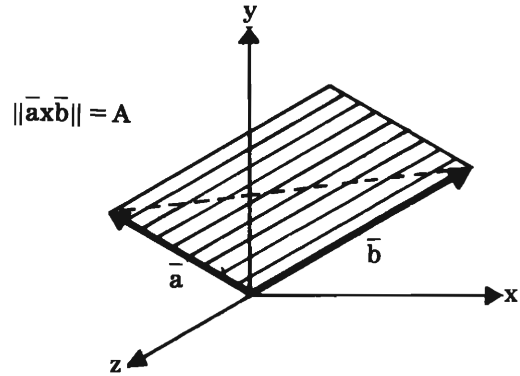
$$\bar{v} \times \bar{u} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \quad 1\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \quad -1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \right|$$

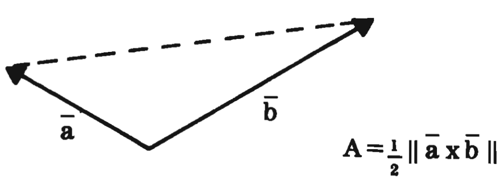
$$= (-30,-8+18,10)$$

$$\bar{v} \times \bar{u} = (-30, 10, 10) = -(\bar{u} \times \bar{v})$$

El área de un paralelogramo de lados $\bar{a}, \bar{b}$, es igual al módulo del producto cruz de ambos vectores.



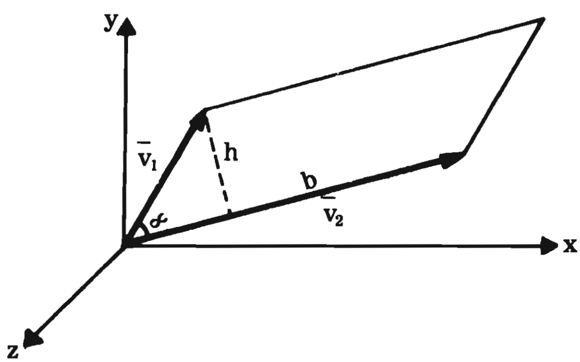
La diagonal de un paralelogramo forma un triángulo, así el área del triángulo de lado $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es:



El producto cruz también se puede expresar:

$|\overline{A} \times \overline{B}| = |\overline{A}| \; |\overline{B}| \operatorname{sen} \propto$

el módulo del producto cruz de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman.



El área de un paralelogramo es el producto bh

En la figura: $b = |\overline{v}_2|$

$h = |\overline{v}_1| \operatorname{sen} \propto$

$\therefore$ área $= bh = |\overline{v}_1| \cdot |\overline{v}_2| \operatorname{sen} \propto \; = \; |\overline{v}_1 \times \overline{v}_2|$

Ejemplo: Obtener el área, el perímetro y los ángulos del triángulo;

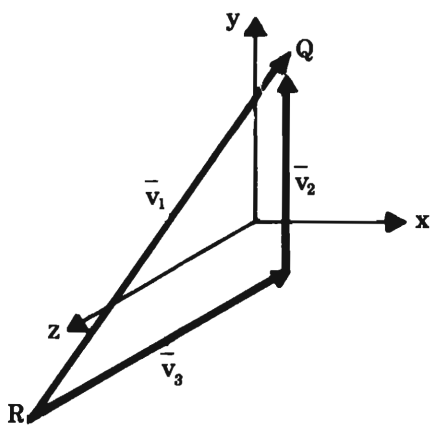
P(1,0,1) Q(1,1,1) R(−1,−1,0)

vectores;

$\overline{V_1} = Q-R = (2,2,1)$

$\overline{V_2} = Q-P = (0,1,0)$

$\overline{V_3} = P-R = (2,1,1)$



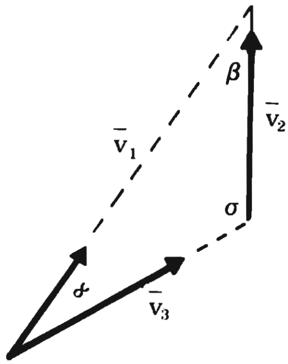
norma o módulo $\longmapsto$ perímetro

$|\bar{v}_1| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} \Longrightarrow 3$

$|\bar{v}_2| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = \sqrt{1} \Longrightarrow 1$

$|\bar{v}_3| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6} \Longrightarrow 2.45$

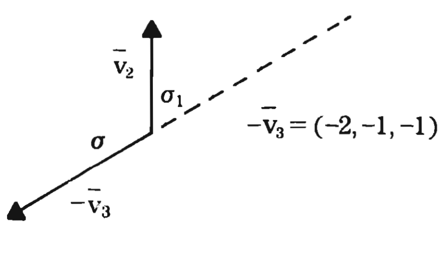
perímetro = 3 + 1 + 2.450 = 6.45 unidades



$$\alpha = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = (2,2,1) \cdot (2,1,1) = 7 \qquad \text{agudo}$$

$$\beta = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = (2,2,1) \cdot (0,1,0) = 2 \qquad \text{agudo}$$

$$\sigma = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = (0,1,0) \cdot (-2,-1,-1) = -1 \qquad \text{obtuso}$$



Ángulos

$$\text{Cos } \theta = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_2|}$$

$$\text{Cos } \propto = \frac{7}{\sqrt{9}\ \sqrt{6}} = \frac{7}{7.3} = 0.959, \propto = 16°40'$$

$$\text{Cos } \beta = \frac{2}{\sqrt{9}\ \sqrt{1}} = \frac{2}{3} = 0.67, \beta = 48°20'$$

$$\text{Cos } \sigma = \frac{-1}{\sqrt{1}\ \sqrt{6}} = \frac{-1}{2.45} = -0.4081, \sigma = 155°$$

Área: $A = \frac{1}{2} | \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 |$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

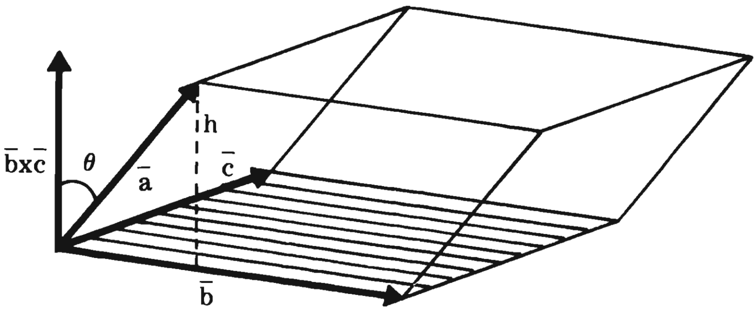
$$A = \frac{1}{2} \left| 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \| (-1,0,2) \| \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{1+4}$$

$$A = 1.118 \text{ u}^2$$

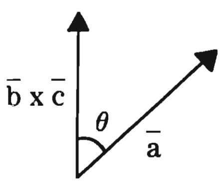
Triple producto escalar

$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$



área de la base = $\| \bar{b} \times \bar{c} \|$

altura = h = $\| \bar{a} \| \cos \theta$



como producto punto

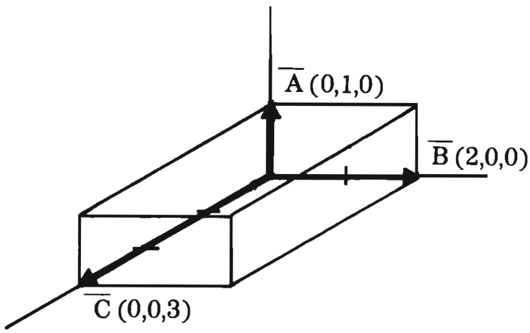
$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) =$

$\| \bar{a} \| \quad \| \bar{b} \times \bar{c} \| \quad \cos \theta$

pero $\| \bar{a} \| \cos \theta$ es h

y $\| \bar{b} \times \bar{c} \|$ es área de la base

Ejemplo:



$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

El volumen de paralelepípedo formado con $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$ se obtiene resolviendo el triple producto escalar.

Capítulo II

Álgebra de matrices

Se define una matriz como un arreglo de elementos en forma de tabla o bien como un conjunto ordenado de vectores.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \cdot\cdot \\ \bar{a}_n \end{bmatrix}$$

m = i = renglón

n = j = columna

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n)$

matriz $B = [b_{ij}]$ ij es la dirección de cada elemento

renglón

columna

Orden de una matriz

$$A_{mxn}$$

donde m es el número de renglones

n es el número de columnas

el elemento a_{ij} tiene $i = 1,2, \dots m$

$$j = 1,2, \dots n$$

si $m = n$ la matriz es cuadrada

$$A_n$$

si $m = n$ la matriz es rectangular

si $m = 1$ ó $n = 1$

se trata de un vector renglón o vector columna.

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si son del mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales.

$$A = B$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall^{ij}$$

Matrices cuadradas

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ & a_{22} & & & & \\ & & a_{33} & & & \\ & & & .. & & \\ & & & & .. & \\ & & & & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Los elementos a_{ij} tal que i=j forman la diagonal principal

Tipos de matrices cuadradas

matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ o & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

matriz escalar

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matriz identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}$

matriz antisimétrica

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = -a_{ji}$

(para toda i, j)

Matriz nula: $\tilde{0}$

Es aquella en la que todos sus elementos son ceros. Puede ser cuadrada o no.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Submatriz

Está formada por algunos renglones y/o columnas de otra matriz.

sea

$$A = \left[\begin{array}{cc:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

submatrices de A

Operaciones con matrices

Suma

$$\underset{(m \times n)}{A} + \underset{(m \times n)}{B} = \underset{(m \times n)}{C}$$

donde $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Suma de los elementos correspondientes de A y B.

Los sumandos son matrices del mismo orden y la suma que se obtiene también lo es.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La suma de matrices de distinto orden no está definida.

Propiedades de la suma de matrices

conmutatividad

$$A + B = B + A$$

asociatividad

$$A + (B+C) = (A+B) + C$$

existencia del idéntico

$$A + \widetilde{0} = A$$

existencia del inverso aditivo

$$A + (-A) = \widetilde{0}$$

Producto de una matriz por un escalar

$\boxed{\text{Sea la matriz } A = [A_{ij}]}$

y el escalar λ

El producto de A por λ dá otra matriz donde cada elemento es el correspondiente de A multiplicado por λ

$$A\lambda = \left[\lambda\ a_{ij}\right]$$

Ejemplo:

sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \lambda = 5$$

$$\lambda\ A = 5 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -25 \\ -5 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar.

asociatividad

$$\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)\ A$$

distributividad

$$\lambda_1\ (A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\ A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$$

elemento idéntico

$$1 \cdot A = A$$

el escalar 0 que produce la matriz nula

$$0 \cdot A = \widetilde{0}$$

el escalar −1 produce la matriz **inversa aditiva**

$$-1 \cdot A = -A$$

tal que $$A + (-A) = \widetilde{0}$$

Ejemplo de asociatividad:

$\lambda_1=3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2=2$

$$3 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 18 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 18 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 24 \\ 36 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Su equivalente: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3x2 = 6$

$$6 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 24 \\ 36 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Trasposición

Es la operación que consiste en intercambiar renglones por columnas o viceversa.

Si A es una matriz de orden mxn y sus elementos: (a_{ij})

La traspuesta de A, que se denota con A^t es una matriz de orden nxm y sus elementos serán (a_{ji})

Sea $\underset{(2x3)}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

la traspuesta $\underset{(3x2)}{A^t} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Producto de dos matrices

$$A_{(mxn)} \cdot B_{(nxs)} = C_{(mxs)}$$

iguales

orden del resultado

El resultado del producto de dos matrices es otra matriz, que tiene tantos renglones como el primer factor y tantas columnas como el segundo.

Requiere de la igualdad en el número de columnas del primer factor (n) con el número de renglones del segundo factor (m).

Los elementos del resultado se obtienen:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad \text{Para } i = 1, 2, ..m \quad j = 1, 2, ..s$$

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & = & C \\ \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} .. a_{1k} .. a_{1n}} \\ .. \; .. \; .. \; .. \\ a_{i1} .. a_{ik} .. a_{in} \\ .. \; .. \; .. \; .. \\ a_{m1} .. a_{mk} .. a_{mn} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} b_{11} .. b_{1j} .. b_{1s} \\ .. \; .. \; .. \; .. \\ b_{k1} .. b_{kj} .. b_{ks} \\ .. \; .. \; .. \; .. \\ b_{n1} .. b_{nj} .. b_{ns} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} C_{11} & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & C_{ij} & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & C_{ms} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & .. & a_{1k} & .. & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ .. \\ b_{k1} \\ .. \\ b_{n1} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} b_{11} + \ldots + a_{1k} b_{k1} + \ldots + a_{1n} b_{n1}$$

(Producto punto de dos vectores)

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 13 & 14 & 5 \\ -7 & -21 & -15 & -11 \end{bmatrix}$$

$$(2x3) \qquad\qquad (3x4) \qquad\qquad (2x4)$$

$C_{11} = 2x1 + 3x2 + (-5)x3 = 2+6 -15 = -7$

$C_{23} = 1x1 + (-4)x4 + 0x0 = 1 -16 = -15$

Propiedades del producto de matrices

No es conmutativo

Es asociativo

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Es distributivo

$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

Matriz identidad

$A_{(mxn)}\ I_{(n)} = A$

Si A es cuadrada, entonces:

$A_{(n)}\ I_{(n)} = I\ A = A_{(n)}$

Matriz nula

$A_{(n)} \quad \widetilde{0}_{(n)} = \widetilde{0}\, A = \widetilde{0}$

Pero sucede que dos matrices no nulas pueden dar por resultado la matriz nula (A diferencia del álgebra).

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinante de una matriz cuadrada

Es un escalar obtenido con los mismos elementos de la matriz:

Si $\qquad |A| = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - (-2)$$

$$\det A = -12 + 2 = -10$$

Determinante de 2º orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

Producto de la diagonal principal menos producto de la otra diagonal.

Determinante de 3^{er} orden o mayor

(Desarrollo por cofactores)

sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

det (A) =

$$+a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Nota: Observar que se toma sólo un renglón (ó una columna)

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & -5 \\ 6 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

det A = −204

Resolver

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det B = +1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\ (3+2) -5\ (8+6) = 5 -70 = -65$$

$$\det \quad B = -65$$

Observar que se tomó la tercera columna que tiene un cero.

Solución por regla de Kramer de un sistema de ecuaciones

$$3x - 2y = z - 6$$

$$z = 2y - x$$

$$x = 2y + 8$$

1º ordenar

$$3x - 2y - z = -6$$

$$x - 2y + z = \ \ 0$$

$$x - 2y \quad = \ \ 8$$

2º obtener el determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 -2+6+2$$

$$\Delta = 4$$

3º trabajar con las variables formando una matriz (numerador) en la que se sustituya la columna de la variable correspondiente por la columna de términos independientes; como denominador el valor del determinante.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{4}$$

$$x = \frac{-2 \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{4}$$

$$x = \frac{-16 -12 -16}{4} = \frac{-44}{4} = -11$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{4}$$

$$y = \frac{-8 - 24 - 6}{4} = \frac{-38}{4} = \frac{-19}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{} = \frac{-1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{4}$$

$$z = \frac{16 + 12 - 48 - 12}{4} = \frac{-32}{4} = -8$$

$$x = -11$$

$$y = \frac{-19}{2}$$

$$z = -8$$

2) Resolver el sistema:

$$x + 2y - z = 6$$

$$2x \quad + 3z = 3$$

$$4x - y + 2z = 27$$

a) Obtener el determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-2\ (4-12) + 1\ (3+2) = 16+5 = 21$$

Para x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 27 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{21} = \frac{-3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 27 & -1 \end{vmatrix}}{21}$$

$$x = \frac{-3\,(4-1) -3\,(-6-54)}{21} = \frac{-9+180}{21} = \frac{171}{21}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 27 & 2 \end{vmatrix}}{21} = \frac{1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 27 & 2 \end{vmatrix} -6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 27 \end{vmatrix}}{21}$$

$$= \frac{6-81-24+72-54+12}{21} = \frac{-69}{21}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 27 \end{vmatrix}}{21} = \frac{-2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 27 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{21}$$

$$z = \frac{-108-12+3+24}{21} = \frac{-93}{21}$$

Comprobación

$$\frac{171}{21} + 2\left(-\frac{69}{21}\right) - \left(\frac{-93}{21}\right) = 6$$

$$\frac{171 - 138 + 93}{21} = 6$$

$$\frac{126}{21} = 6$$

$$6 = 6$$

Definiciones

Matriz regular

Es la matriz cuadrada que su determinante tiene valor $\neq 0$. En caso contrario la matriz es singular.

Matriz de cofactores: A^{co}

Si A es una matriz cuadrada la matriz de cofactores de A, A^{co} será aquella matriz donde cada elemento de A se sustituye por su respectivo cofactor.

Matriz adjunta de A

Es la traspuesta de la matriz de cofactores de A y se denota adj (A)

$a_{dj}\ (A) = (A^{CO})^t = (A^t)^{CO}$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$A^{CO} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A^{CO} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 12 & -3 & 15 \\ -4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

El cofactor de un elemento es el determinante que se obtiene al eliminar la columna y el renglón del elemento, con el signo que le corresponde.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A^t)^{co} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(A^t)^{co} = \begin{bmatrix} -6 & 15 & -1 \\ 11 & -27 & 2 \\ 12 & -29 & 2 \end{bmatrix} = \text{adj}\,(A)$$

Matriz inversa

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A es una matriz cuadrada regular, la matriz inversa de A se obtiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$\text{sea } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$$

$$A^{co} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \ \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

Comprobación $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ -3/11 & 4/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \cdot \quad A^{-1} \quad = \quad I$$

Ejemplo: Obtener la matriz inversa de B

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{ adj } B$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\ (20 - 2) - 2\ (5) = 54 - 10 = 44$$

cofactores:

$$\text{de } 3 : + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \quad ; \text{ de } 2 : - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{de } 0: + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \text{ de } 1: - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{de } 4: + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}; \text{ de } -2: - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

$$B^{CO} = \begin{bmatrix} 18 & -5 & -1 \\ -10 & 15 & 3 \\ -4 & 6 & 10 \end{bmatrix}; \text{ adj}(B) = \begin{bmatrix} 18 & -10 & -4 \\ -5 & 15 & 6 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{44} \begin{bmatrix} 18 & -10 & -4 \\ -5 & 15 & 6 \\ -1 & 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/44 & -10/44 & -4/44 \\ -5/44 & 15/44 & 6/44 \\ -1/44 & 3/44 & 10/44 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz inversa

1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I$

2) es única

3) $(A^{-1})^{-1} = A$

4) $I_n^{-1} = I_n$

5) $(ABC)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones,

$$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = c_1$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = c_2$$

$$a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = c_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \bar{x} = \overline{C}$$

Si $A \cdot A^{-1} x = A^{-1} \overline{C}$

$$I \cdot \bar{x} = A^{-1} \overline{C}$$

$$\boxed{\cdot \bar{x} = A^{-1} \overline{C}}$$

Solución del sistema:

El vector de las variables es igual al producto de la matriz inversa de los coeficientes por el vector de los términos independientes.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & \bar{x} & = & \bar{c} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 4$

$$A^{CO} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2/4 & 2/4 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \quad A^{-1} \quad \cdot \quad \bar{c}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{4} & + & 0 & -8 & = & -11 \\ -\frac{6}{4} & + & 0 & -8 & = & -\frac{19}{2} \\ 0 & + & 0 & -8 & = & -8 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} = \\ = \\ = \end{array} \begin{bmatrix} -11 \\ -\frac{19}{2} \\ -8 \end{bmatrix}$$

Capítulo III

Transformaciones geométricas

Una transformación es una función que va de un espacio en sí mismo.

$$T: E^n \longrightarrow E^n$$

Con matrices

Si A es una matriz cuadrada y $\bar{x}$ un punto en $\mathbb{R}^2$, $\bar{x}'$ es la imagen del punto $\bar{x}$ bajo la transformación caracterizada por la matriz A.

$$\bar{x}' \longrightarrow A\bar{x}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ó

$$(x'_1, x'_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2)$$

Las transformaciones geométricas operan estrictamente sobre los puntos en un espacio dimensional.

A cada punto del plano, le corresponde otro (su imagen) después de la transformación.

En general, las transformaciones conservan las relaciones entre los puntos.

Cuando además se conserva la distancia entre ellos, se trata de **Isometrías** o movimientos rígidos, las que pueden ser de tres tipos:

$$\textbf{Isometrías}\begin{cases}\textbf{Translaciones}\\ \textbf{Reflexiones}\\ \textbf{Rotaciones}\end{cases}$$

Otro tipo de transformaciones que no conservan la distancia:

Escalamiento (reducción o ampliación)

Proyecciones (perspectivas)

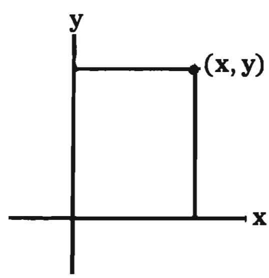
Estas operaciones realizadas con matrices son la base de la graficación por computadora.

Por la brevedad del curso y para ejemplificar algunos casos, solamente haremos referencia a las transformaciones en $\mathbb{R}^2$, aunque son similares en $\mathbb{R}^3$ (con mayor grado de complejidad).

Transformación idéntica

Está realizada por la matriz identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Cualquier punto (x,y) al multiplicar a la matriz identidad, se conserva idéntico.

Translación

Es el cambio que sufre un punto al agregar un escalar (positivo o negativo) a alguna o ambas coordenadas, esto es, la translación puede darse simultáneamente en los ejes de coordenadas o en cada uno de ellos.

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix}$$

c_x es la constante de translación en el eje x

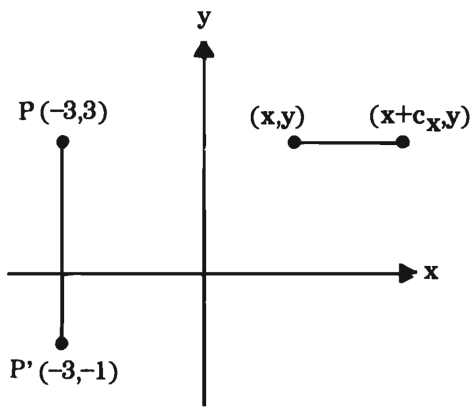
c_y es la constante de translación en el eje y.

Ejemplo: Transladar el punto P, 4 unidades (negativas) sobre eje y

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en este caso $C_x=0$

$C_y=-4$



Reflexiones

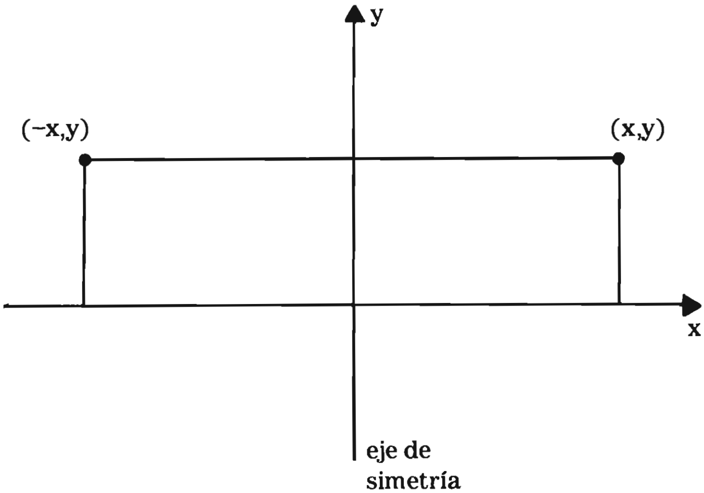
a) Sobre el eje y

sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de:

Reflexión sobre el eje y (simetría en y)

$$\bar{x}' = A\,\bar{x}$$

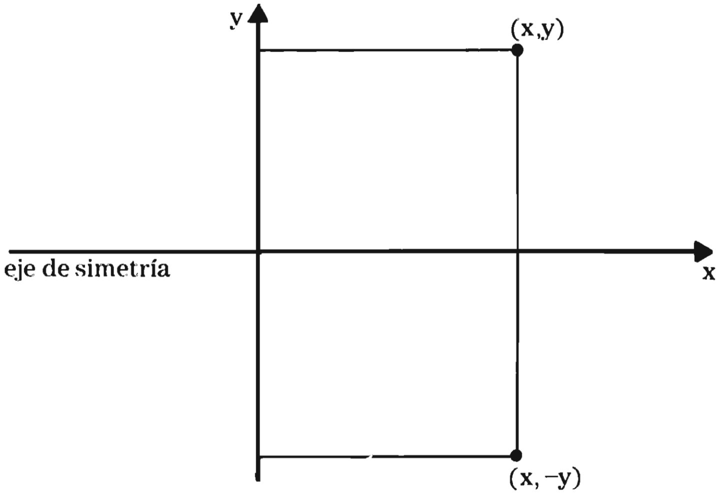
$$\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



b) sobre el eje x

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ la matriz de reflexión sobre el eje x (simetría en x)

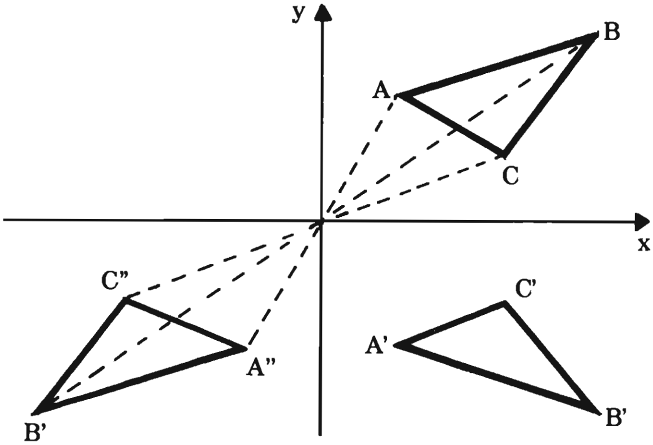
$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



c) Reflexión sobre el origen

(inversión central o reflexión en ambos ejes).

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

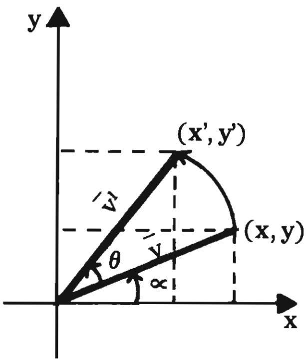


Se pueden aplicar sucesivamente varias transformaciones y hablar del producto.

En este caso, si se aplican nuevamente dos transformaciones, pueden obtener los puntos originales.

Rotación

El vector $\bar{v}'$ resulta de girar un ángulo θ al vector $\bar{v}$



$$\left.\begin{aligned} x &= |\bar{v}| \cos \alpha \\ y &= |\bar{v}| \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}\right\} *$$

$$x' = |\bar{v}'| \cos(\theta + \alpha)$$

$$y' = |\bar{v}'| \operatorname{sen}(\theta + \alpha)$$

con las identidades para funciones trigonométricas de sumas de ángulos y considerando $|\bar{v}| = |\bar{v}'|$

$$x' = |\bar{v}| \cos\theta \cos\propto - |\bar{v}| \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\propto$$

$$y' = |\bar{v}| \operatorname{sen}\theta \cos\propto + |\bar{v}| \cos\theta \operatorname{sen}\propto$$

sustituyendo en * $|\bar{v}| = \dfrac{x}{\cos\propto}, \quad |\bar{v}| = \dfrac{y}{\operatorname{sen}\infty}$

$$x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta$$
$$y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

matriz de rotación

Ejemplo: Sea el triángulo formado por los puntos A (1,1), B (2, 3), C (5, −2)

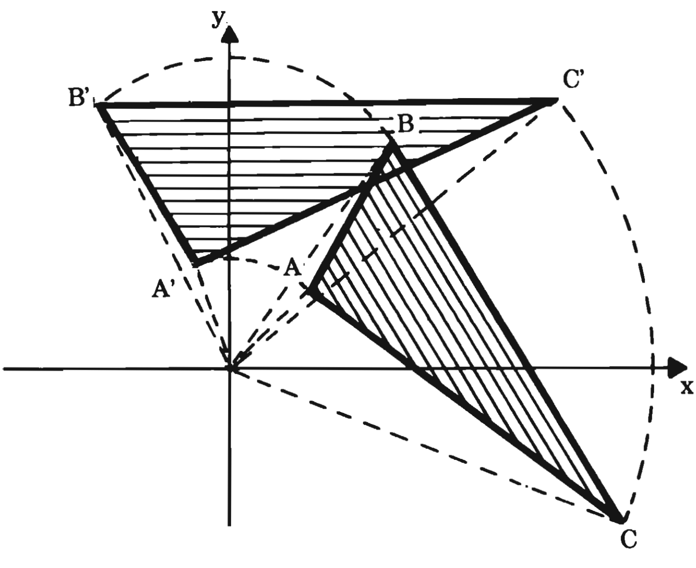
Rotarlo 60°

La matriz de rotación para $\theta = 60°$

$$R = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\operatorname{sen} 60° \\ \operatorname{sen} 60° & \cos 60° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & -.86 \\ .86 & .5 \end{bmatrix}$$

$$A' = R\,\overline{A} = \begin{bmatrix} .5 & -.86 \\ .86 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.36 \\ 1.36 \end{bmatrix}$$

$$B' = R\,\overline{B} = \begin{bmatrix} -1.58 \\ 3.22 \end{bmatrix}, \quad C' = R\,\overline{C} = \begin{bmatrix} 4.22 \\ 3.3 \end{bmatrix}$$



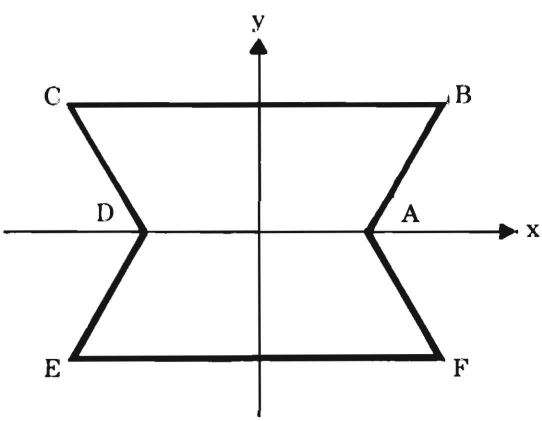
Matriz de rotación de 90°

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\ \text{sen}\ 90° \\ \text{sen}\ 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación de 180°

$$R = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\ 180° \\ \text{sen}\ 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Para el siguiente polígono, hacer rotaciones de 45° y 90°.



A (5,0)

B (8,6)

C (−8,6)

D (−5,0)

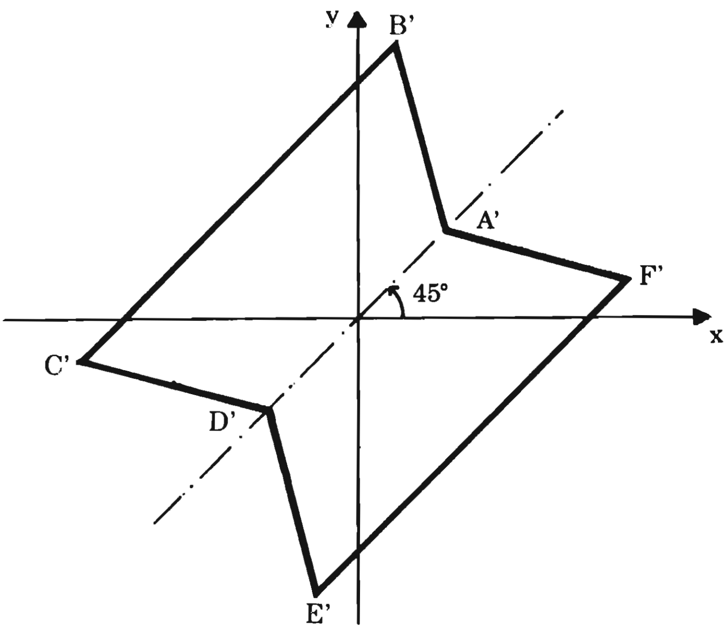
E (−8, −6)

F (8, −6)

Rotación de 45°

$$\begin{bmatrix} .7 & -.7 \\ .7 & .7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & -8 & -5 & -8 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} =$$

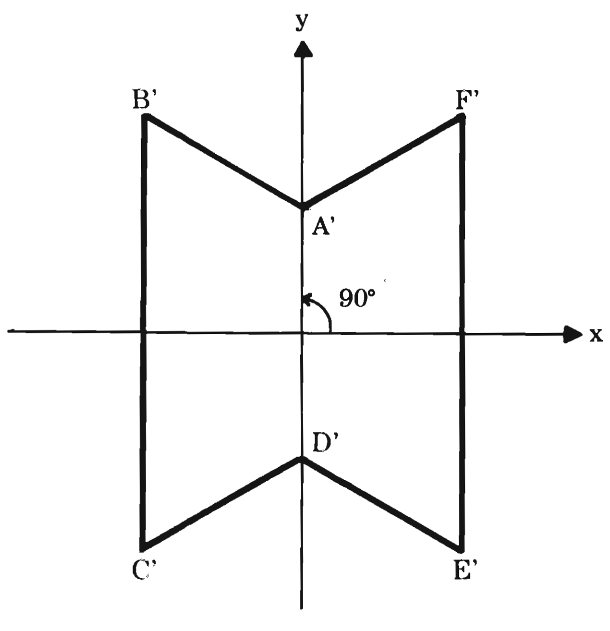
$$= \begin{bmatrix} 3.5 & 1.4 & -9.8 & -3.5 & -1.4 & 9.8 \\ 3.5 & 9.8 & -1.4 & -3.5 & -9.8 & 1.4 \end{bmatrix}$$



Rotación de 90°

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & -8 & -5 & -8 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 & -6 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & -8 & -5 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$



Escalamiento

Es la transformación geométrica realizada sobre los puntos de una figura, que preserva las relaciones entre aquéllos, pero cambia las distancias.

Puede hablarse de ampliación o extensión de una figura sobre cada uno de los ejes o sobre ambos, si el factor correspondiente es mayor que la unidad, o de reducción o acortamiento si el factor es fraccionario.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sx & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}' = A \cdot \bar{x}$$

Para trabajar en uno de los ejes, el otro factor debe ser 1.

Ejemplo: Dado un polígono, hacer las transformaciones siguientes:

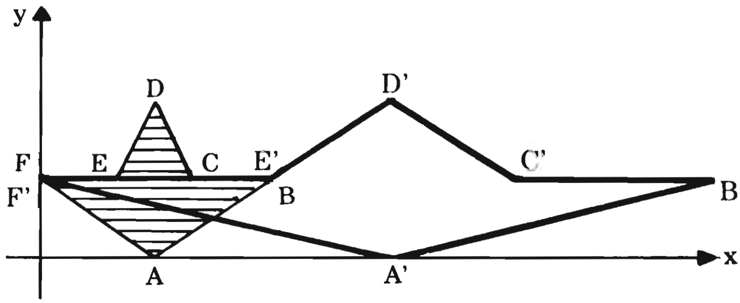
a) $S_x = 3, \quad S_y = 1$

b) $S_x = 1, \quad S_y = 2$

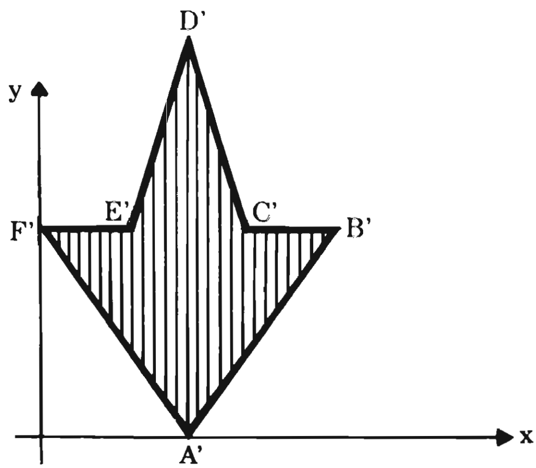
c) $S_x = 3, \quad S_y = 2$

d) $S_x = 1/2, \quad S_y = 1/2$

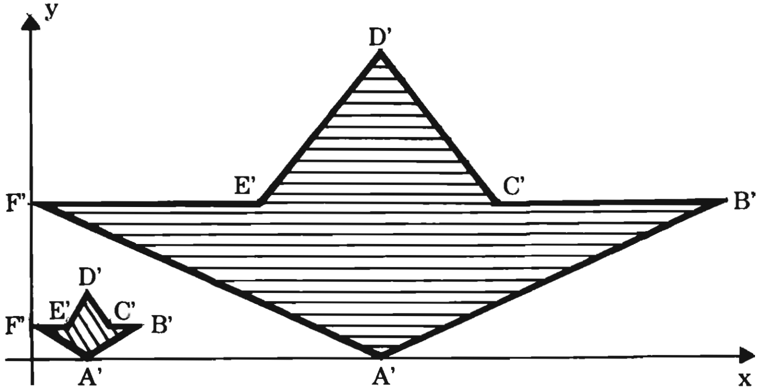
a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 8 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 36 & 24 & 18 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$



b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 8 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 8 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 16 & 8 & 8 \end{bmatrix}$



$$c)\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18 & 36 & 24 & 18 & 12 & 0\\ 0 & 8 & 8 & 16 & 8 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}54 & 108 & 72 & 54 & 36 & 0\\ 0 & 16 & 16 & 32 & 16 & 16\end{bmatrix}$$



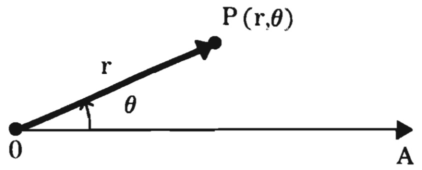
$$d)\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18 & 36 & 24 & 18 & 12 & 0\\ 0 & 8 & 8 & 16 & 8 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 18 & 12 & 9 & 6 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 8 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

Sistemas de coordenadas

Capítulo IV

Coordenadas polares

La posición de un punto P se da respecto a un punto fijo "O" llamado polo y una recta fija $\overline{OA}$ llamada eje polar.

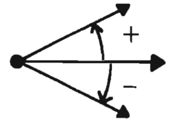


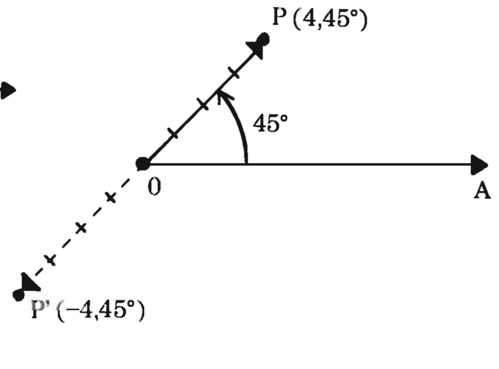
θ: es el ángulo sobre el eje polar.

r: es la longitud medida sobre el lado terminal del ángulo.

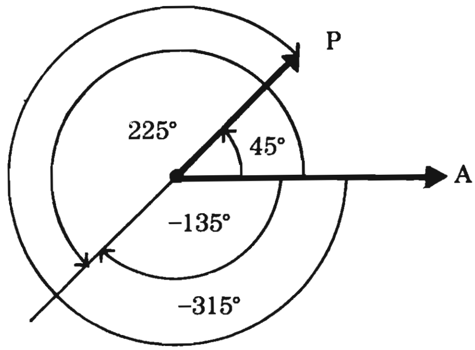
El ángulo se considera negativo si se mide en el sentido de las manecillas del reloj y positivo en caso contrario.

El radio vector se considera positivo si se mide sobre el lado terminal del ángulo y negativo si se mide en su prolongación.





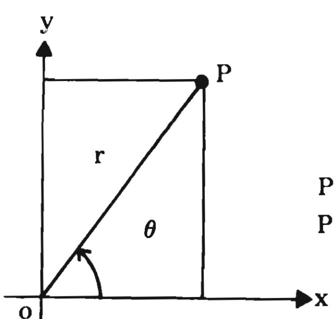
En el sistema de coordenadas cartesianas se establece una correspondencia biunívoca entre cada punto y la expresión de sus coordenadas, más no así con coordenadas polares, donde un punto se puede expresar de varias formas:



P (4, 45°) P (−4, 225°)

P (4, −315°) P (−4, −135°)

Relación de coordenadas polares y cartesianas



P (x,y)
P (r,θ)

$x = r \cos \theta$

$y = r \operatorname{sen} \theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arctan \frac{y}{x}$

Transformación de coordenadas

Hallar las coordenadas cartesianas del punto P (4,60°)

$$x = r \cos 60° \quad \therefore x = 4 \cos 60°$$

$$x = 4\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2$$

$$y = r \operatorname{sen} 60° \quad y = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} = 3.4$$

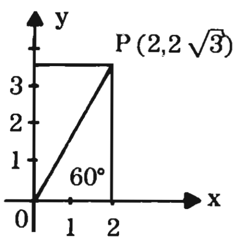
$$P\,(2, 2\sqrt{3})$$

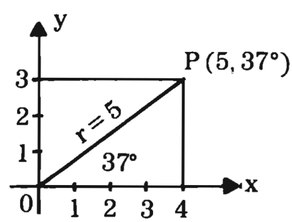
Calcular las coordenadas polares del punto P(4,3)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \therefore r = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{tangente } \theta = \frac{y}{x} \therefore \text{tangente } \theta = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\text{arc tan } 0.75 = 37°$$





Transformación de ecuaciones

Ejemplo: Hallar la ecuación polar de la recta:

$$3x + 4y = 1$$

Considerando las ecuaciones de transformación

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

sustituyendo

$$3 (r \cos \theta) + 4 (r \operatorname{sen} \theta) = 1$$

$$3 r \cos \theta + 4 r \operatorname{sen} \theta = 1$$

$$r (3 \cos \theta + 4 r \operatorname{sen} \theta) = 1$$

$$r = \frac{1}{3 \cos \theta + 4 \operatorname{sen} \theta}$$

Ejemplo 2: Hallar la ecuación polar de la curva:

$$x^2 + y^2 = 25$$

sustituyendo

$$(r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2 = 25$$

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 25$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = 25$$

$$r^2 = \frac{25}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2 \theta}; \quad r^2 = \frac{25}{1}$$

$$r = \sqrt{25} \qquad r = 5$$

Transformar en ecuación cartesiana

$$r = 4 \operatorname{sen} \theta$$

Considerando las igualdades de transformación:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

Gráficas de ecuaciones polares

a) Se dan valores al argumento y se calculan los correspondientes al radio vector.

b) Se estudia la simetría:

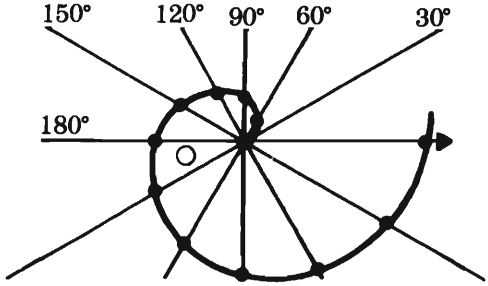
1. Si la ecuación no se altera al cambiar r por $-r$ ó θ por $180°+\theta$, entonces la curva es simétrica al polo.

2. Si la ecuación no se altera al sustituir θ por $-\theta$, entonces la curva es simétrica al eje polar.

3. Si la ecuación no se altera al sustituir (θ) por $(180°-\theta)$, entonces la curva es simétrica respecto a la perpendicular al eje polar que pasa por el polo.

Graficar $r = 4\,\theta$

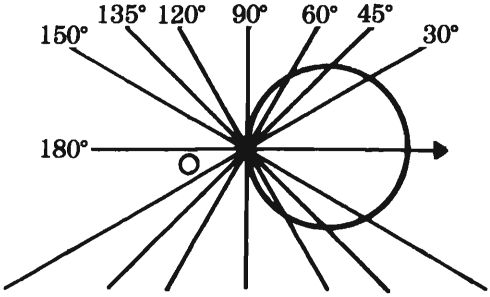
	0°	30°	60°	90°	180°	270°	360°
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	0	2.08	4	6.4	12	18.8	25.2



Espiral de Arquímedes

Gráficar $r = 10 \cos \theta$

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	10	8.7	7.1	5	0	–5	–7.1	–8.7	–10



Graficar $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
r	$\propto$	14.9	4	2	1.3	1.1	1

Operaciones

a) $\cos 0° = 1$

$$r = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = \propto$$

b) $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{0.134} = 14.9$$

c) $\cos 60° = \frac{1}{2}$

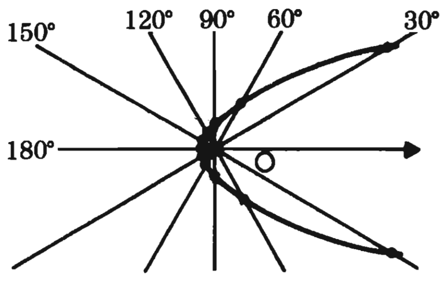
$$\frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{0.5} = 4$$

d) $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$

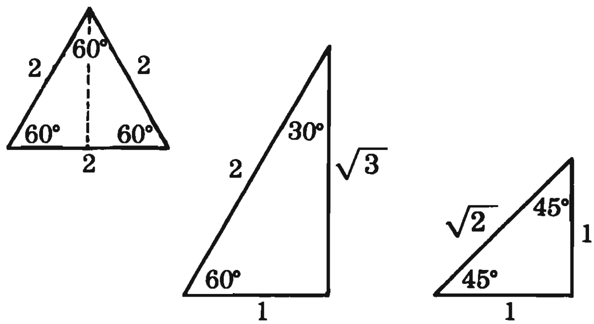
$$r = \frac{2}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{1.5} = 1.3$$

e) $\cos 150° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$r = \frac{2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{1.866} = 1.1$$



Funciones trigonométricas de ángulos importantes



	30°	60°	45°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	$\frac{1}{1}$

Funciones trascendentes

Son las funciones no algebraicas

Ejemplo: **funciones trigonométricas,** logarítmicas y exponenciales.

El seno y el coseno no cambian de valor cuando el ángulo varía un múltiplo entero de 2π radianes; por esto, estas funciones son llamadas **periódicas.**

La función seno satisface la ecuación:

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,(\theta + 2\pi) = \text{sen}\,(\theta + n\,2\pi)$$

donde θ está medido en radianes y n es un entero cualquiera.

Período del seno y coseno: 2π radianes

La función tangente satisface la identidad:

$$\tan(\theta + \pi) = \text{tangente}\,\theta$$

La tangente se repite a intervalos de π rad.

Su período es igual a π rad.

Gráficas de funciones trigonométricas

Con las funciones seno y coseno analizaremos dos ecuaciones:

$$y = a\,\text{sen}\,bx$$

a, b, y c
son constantes

$$y = a\,\text{sen}\,(bx+c)$$

el parámetro a determina la amplitud y los parámetros (bx) y (bx + c) el período.

Dado que sen bx y sen (bx + c) varían de 1, − 1, los valores de la función varían entre a, − a

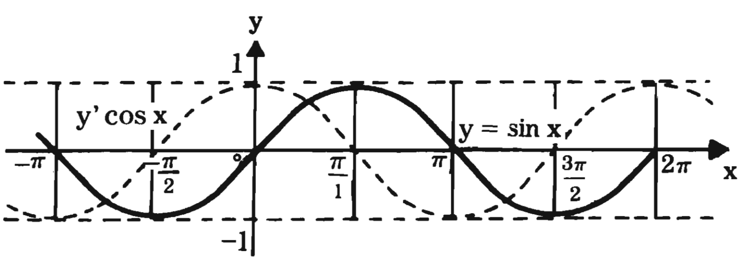
El período de bx es $\frac{2\pi}{b}$

De la misma manera, para el coseno:

y = a cos bx   y   y = a cos (bx + c)

senoide   y = sen x.

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{1\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{7\pi}{6}$	$\pm\frac{4\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm\frac{5\pi}{3}$	$\pm\frac{11\pi}{6}$	$\pm 2\pi$
sen x	0	± .5	± .87	± 1	± .87	± .5	0	± .5	± .87	± 1	± .87	± .5	0

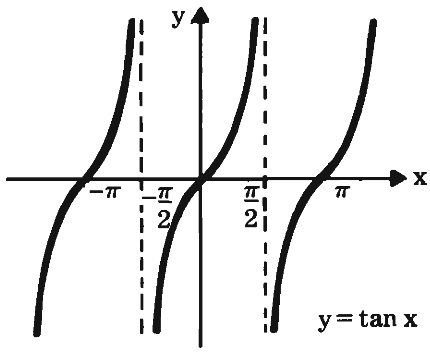


y = cos x cosenoide

x	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{7\pi}{6}$	$\pm\frac{4\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm\frac{5\pi}{3}$	$\pm 2\pi$
cos x	1	.87	.5	0	−.5	−.87	−1	.87	−.5	0	.5	1

Gráfica de la función tangente

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	∞	-1	-.58	0	.58	1	1.73	∞



Nota: la curva corta al eje X en valores múltiplos enteros de π y es discontinua en intervalos de X múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$

Construir la gráfica de ecuación:

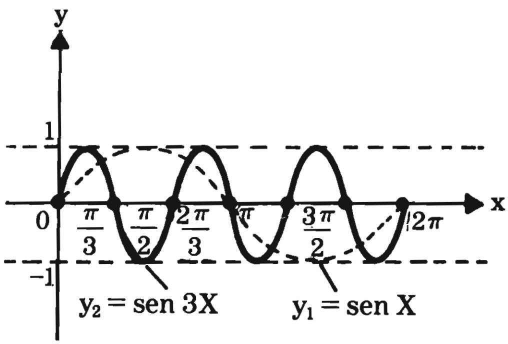
$$y = \text{sen } 3x$$

La función definida por esta ecuación tiene los valores extremos -1 y 1

(puesto que $a = 1$) y

el período es de $\frac{2\pi}{3}$ (por ser $b = 3$)

∴ el período de sen 3x es un tercio del período de sen x, por lo cual la curva pasa por cero a cada 1/3 de π



Trazar la gráfica: $y = 2 \cos 1/2\, x$

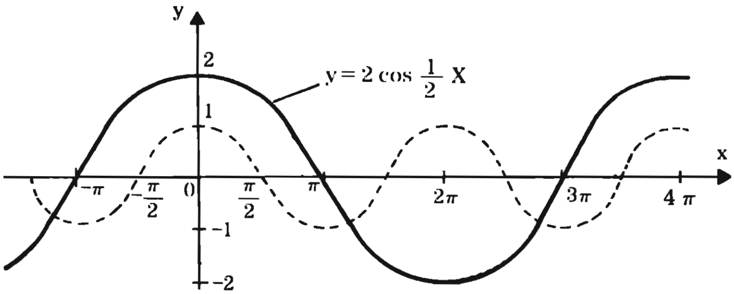
Solución:

$a = 2$

$b = 1/2$

Los valores extremos son: -2 y 2;

El período 2π dividido entre $1/2$: $\left(\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}\right) = 4\pi$



Trazar sobre los mismos ejes coordenados, las gráficas de ecuaciones:

$$y = 1.5 \text{ sen } 2x$$

$$y = 1.5 \text{ sen } (2x + \frac{1}{3} \pi)$$

Solución: Las gráficas son iguales excepto por la posición:

$a = 1.5$

$b = 2$

$c = 1/3\ \pi$

Análisis:

Amplitud $= \pm 1.5$

Período $= \frac{2}{2} \pi = \pi$

Posición:

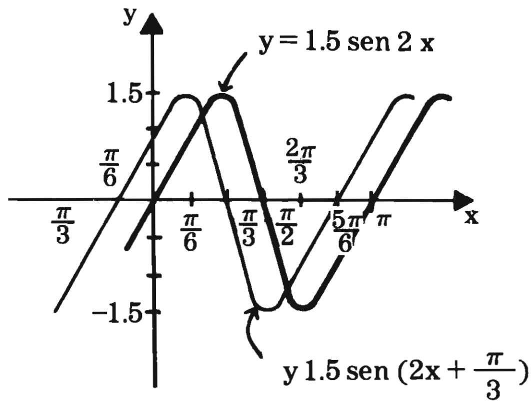
$2x + \frac{\pi}{3} = 0$

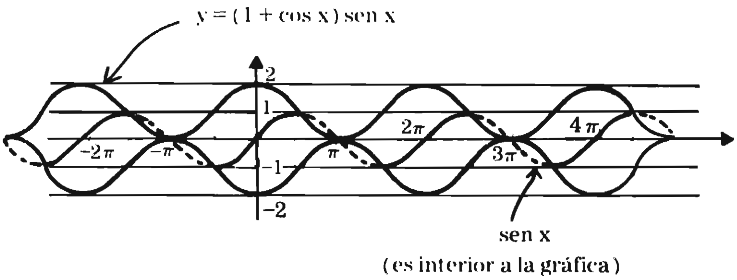
$2x = -\frac{1}{3}\pi$

$x = \frac{-1/3}{2}\pi$

$x = \frac{-1}{6}\pi$

Se desplaza.





Su amplitud es de 1 a −1
y sube una unidad.

Conclusiones:

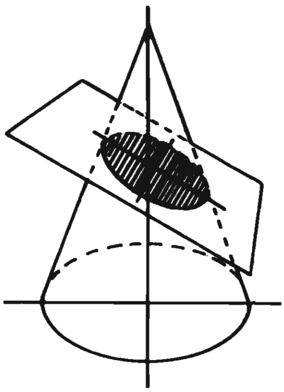
$y = \text{sen} \pm n\,x$	se abre o se cierra
$y = \pm n \text{ sen } x$	su amplitud es $\pm$ n

$y = (\text{sen } x) \pm n$	se desplaza arriba o abajo
$y = \text{sen } (x \pm \frac{\pi}{n})$	se desplaza $\pm \frac{\pi}{n}$
$y = \pm \frac{1}{n} \text{ sen } x$	Su amplitud es fracción
$y = (n + \cos x) \text{ sen } x$	un factor es envolvente el segundo es interior al primero

Geometría analítica

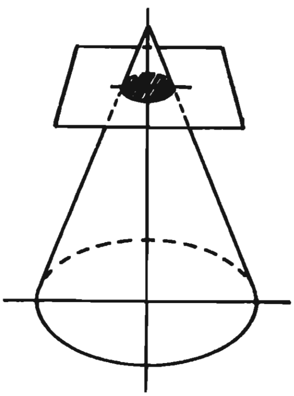
Capítulo V

Secciones cónicas



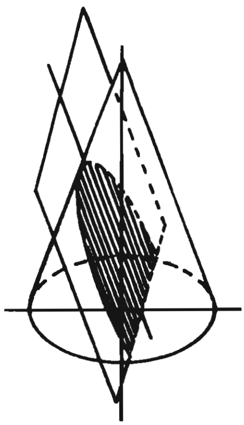
Un plano oblicuo a la base, corta a un cono circular recto.

Elipse como sección cónica



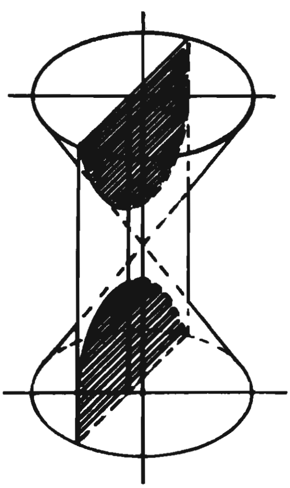
Un plano corta un cono circular recto paralelamente a su base.

Circunferencia como sección cónica



El plano es secante solamente a una generatriz del cono circular recto.

Parábola como sección cónica



Si un plano corta a la parte superior e inferior de un cono circular recto. Cono de doble manto.

Hipérbola como sección cónica

Cónicas

El lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a un punto y a una recta fija es constante:

Ecuación general de 2º grado

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

1) Curva con ejes Paralelos a los Ejes Coordenados	a) Con centro en el origen; b) Con centro o vértice fuera del origen (h,k)
2) Curva con ejes oblicuos	Con centro o vértice en cualquier posición.

Para este caso (2) la ecuación general es la que rige y se detecta por el término B x y.

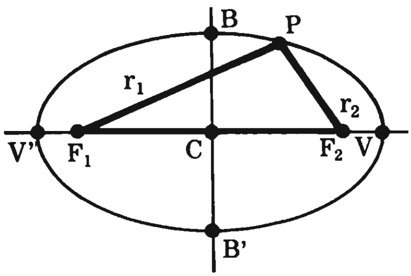
Para el caso (1) $B=0$

$$\therefore Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Ecuaciones de las cónicas	Con centro en (0,0)	Con centro en (h,k)
Circunferencia	$x^2+y^2=r^2$ $x^2+y^2+F=0$	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $Ax^2+Cy^2+F=0$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
Parábola	$x^2=\pm 4py$ $y^2=\pm 4px$ $Ax^2+Ey=0$ $Cy^2+Dx=0$	$(x-h)^2=\pm 4p(y-k)$ $(y-k)^2=\pm 4p(x-h)$ $Ax^2+Dx+Ey+F=0$ $Cy^2+Dx+Ey+F=0$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $Ax^2-Cy^2+F=0$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $Ax^2-Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



$r_1 + r_2 = 2a$ (constante)

$r_1 + r_2 > \overline{F_1 F_2}$

Recta focal: $\overline{F_1 F_2} = 2c$

C, centro de la elipse

es el punto medio de $\overline{F_1 F_2}$

Eje mayor: $\overline{V'V} = 2a$

Eje menor: $\overline{B'B} = 2b$

Para que exista elipse:

$$a > c$$

Excentricidad: razón que existe entre el semieje focal y el semieje mayor.

$$e = \frac{c}{a} \qquad e < 1$$

Lado recto $\frac{2b^2}{a}$

b es el semieje menor: $a = \sqrt{c^2 + b^2}$

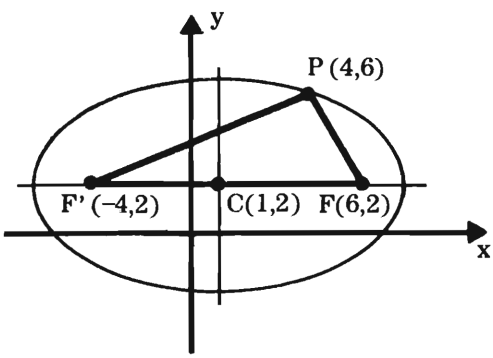
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la elipse de centro (1,2) uno de los focos (6,2) y pasa por el punto P (4,6)

$\therefore$ Eje focal horizontal (misma ordenada)

$$\text{ecuación: } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

datos: C (1,2) F (6,2) P (4,6)



Primera posibilidad de solución:

Como pasa por el punto

(4,6)

$$\frac{(4-1)^2}{a^2} + \frac{(6-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

Tomando distancia entre dos puntos:

$$\overline{PF'} = \sqrt{(4+4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{80} = 8.9$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(6-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{20} = 4.5$$

$$\text{Como } r_1 + r_2 = 2a$$

$$8.9 + 4.5 = 2a = 13.4$$

$$a = 6.7$$

Sustituyendo:

$$\frac{9}{45} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{16}{b^2} = 1 - \frac{1}{5} \quad \therefore \quad \frac{16}{b^2} = \frac{4}{5}$$

$$b^2 = \frac{16}{475} = 20$$

$a = 6.7$ así $b^2 = 20$

$a^2 = 45$ $b = 4.5$

Considerando la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

Ecuación en su forma ordinaria.

Segunda posibilidad de solución:

Considerando $a^2 = c^2 + b^2$ sabiendo que $c = 5$

$$a^2 = 25 + b^2 \quad y \quad b^2 = a^2 - 25$$

Sustituyendo en:

$$\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^2-25} = 1$$

$$9\,(a^2 - 25) + 16a^2 = a^2\,(a^2 - 25)$$

$$9a^2 - 225 + 16\,a^2 - a^4 + 25\,a^2 = 0$$ (Operando y cambiando signos)

$a^4 - 50\,a^2 + 225 = 0$ Haciendo un cambio variable

$$x^2 - 50\,x + 225 = 0$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 4\,(1)\,(225)}}{2} =$$

$$\frac{50 \pm \sqrt{2500 - 900}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{2}$$

$$x = \frac{50 \pm 40}{2} \therefore \frac{90}{2} = 45$$

pero $x = a^2$

Para b

$b^2 = a^2 - 25$

$b^2 = 45 - 25$

$b^2 = 20$

Convertir a la ecuación de forma ordinaria a forma general.

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

$$20\,(x-1)^2 + 45\,(y-2)^2 = 45\,(20)$$

$$20\,(x^2 - 2x+1) + 45\,(y^2 - 4y+4) = 900$$

$$20\,x^2 - 40x + 20 + 45y^2 - 180y + 180 - 900 = 0$$

$$20\,x^2 + 45y^2 - 40x - 180y - 700 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 = 0$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Diferentes coeficientes en los términos de 2º grado pero mimo signo.

Ejercicio: Hallar la ecuación de la elipse

C $(-1, -1)$ y vértice $(5, -1)$ con una

excentricidad $\quad e = \dfrac{2}{3}$

Solución: C $(-1, -1)$ A $(5, -1)$, $a = 6$

$$e = \frac{c}{a} \qquad\qquad e = \frac{2}{3}$$

$$c = e \cdot a \therefore c = \frac{2}{3}(6) \therefore c = 4$$

Para b:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad b = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} \therefore b^2 = 20$$

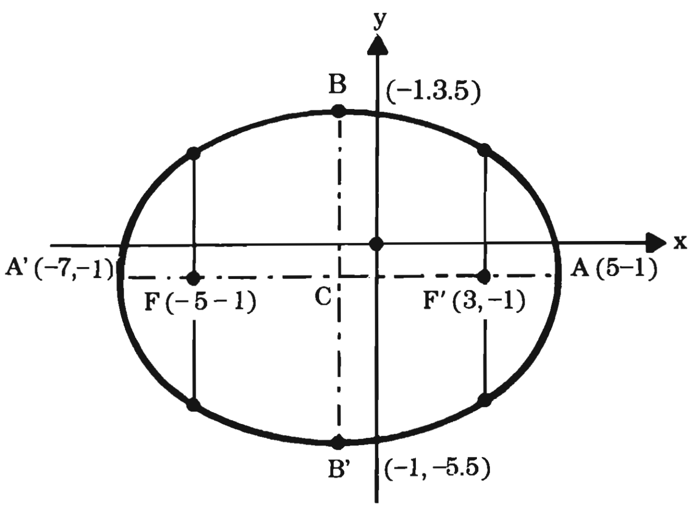
$$b = 4.5$$

Como el eje focal es horizontal

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\,(20)}{6}$$

$$\therefore\ LR = 6.6$$



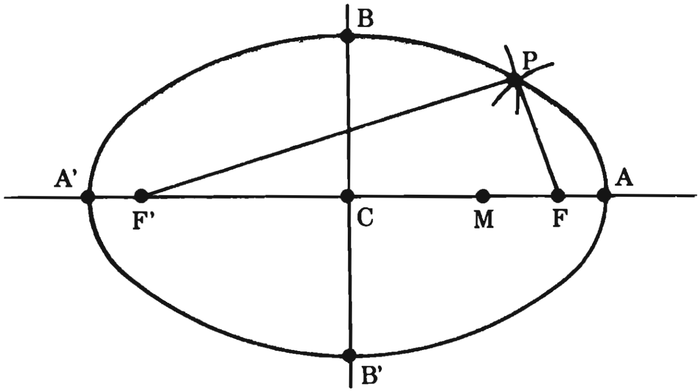
Trazo de la elipse dada la recta A A' y los focos:

1) Se señala C punto medio de F F' y se traza por él, $\overline{BB'} \perp$ a $\overline{AA'}$

2) Con centro en F ó F' y radio = a se señalan B B'.

3) Se toma un punto M cualquiera y con centro en los Focos y radio MA y MA' se trazan 2 arcos.

Para diferentes posiciones de M se obtienen diferentes puntos que unidos producen la curva.

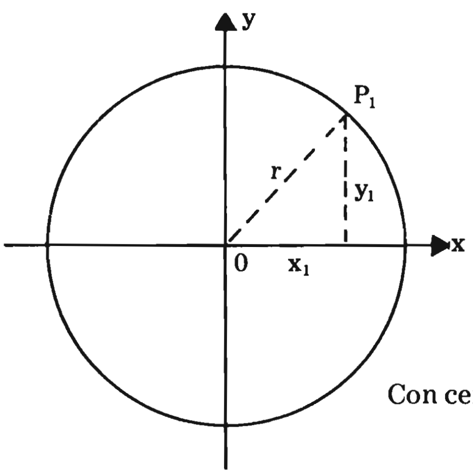


La forma de la elipse está en relación con su excentricidad.

$$\text{Si } c = 0 \longrightarrow e = 0$$

∴ Existe una **circunferencia** que queda totalmente determinada si se conocen su radio y su centro.

Analíticamente es una ecuación de 2º grado con 2 variables.



$$OP_1 = r$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ x^2+y^2 = r^2$$

Con centro fuera del origen:

$$(x-h)^2 + (y=k)^2 = r^2$$

A partir de la ecuación general

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + P = 0$

Coeficientes en x^2, y^2, iguales y del mismo signo.

Ejemplo: Hallar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$4x2 + 4y2 - 4x + 16y - 19 = 0$$

dividiendo $\div$ 4

$$x^2 + y^2 - x + 4y - \frac{19}{4} = 0$$

ordenando y completando cuadrados:

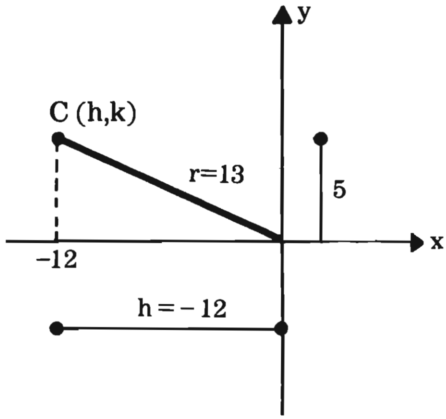
$$(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y^2 + 4y + 4) = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} + 4$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$C = \frac{1}{2}, -2) \qquad r = 3$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (0,0) que tiene de radio 13 unidades y la abscisa de su centro es −12.

∴ Deducción: como la curva pasa por el origen su centro es C (h, k).



$r^2 = h^2 + k^2$

$13^2 = (-12)^2 + k^2$

$169 = 144 + k^2 \therefore k^2 = 169 - 144$

$k = \sqrt{25} =$ C (-12, 5)

$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 169$

$x^2+24x+144+y^2-10y+25-169=0$

$x^2+ y^2+ 24x - 10y = 0$

Hallar la ecuación y los parámetros de la circunferencia que pasa por los puntos.

(2,0) (1,-1) (-1,3)

Solución: A partir de la ecuación general

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$$

$(2^2 + 0^2 = 4)$ $\qquad$ $2D + 0 + F = -4$

$(1^2 + (-1)^2 = 2)$ $\qquad$ $D - E + F = -2$

$(-1^2 + 3^2 = 10)$ $\qquad$ $D + 3E + F = -10$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$D = 0$ $\qquad$ $E = -2$ $\qquad$ $F = -4$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$

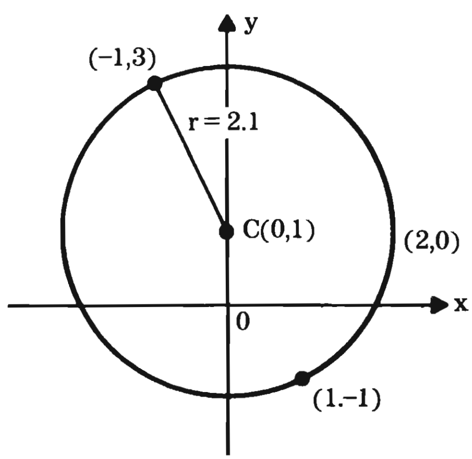
Completando el trinomio:

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 1$

$x^2 + (y - 1)^2 = 5$

$\therefore\ C\ (0,1)$

$r = \sqrt{5}$



Parábola

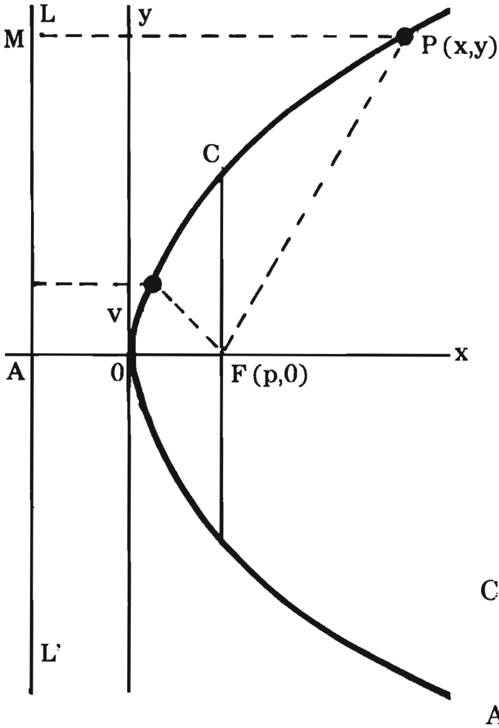
Sean L L′ y F la recta y los puntos fijos. La parábola es la curva en la cual cada punto que la forma equidista de un punto fijo y una recta fija.

L L′: directriz (recta fija)

F: foco (punto fijo)

$\overline{PM} = \overline{PF}$ La recta que pasa por F y es $\perp$ a la directriz se llama eje de la parábola.

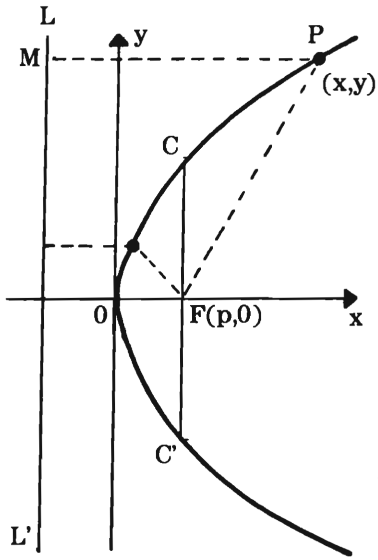
La parábola corta al eje x en un punto "0" que es su vértice equidistante de F y L L′.



CC′: lado recto = 4 p

ó ancho focal

AF: parámetro = 2p



Deducción

$PF = PM \qquad P\,(x,y)$

$F\,(p,O)$

Sustituyendo: y tomando

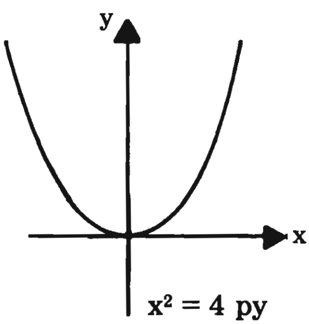
distancia entre 2 puntos:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = x + p$$

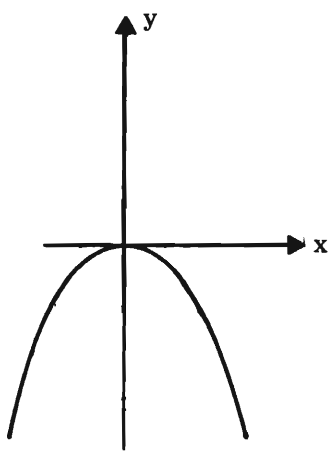
$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2-2xp+p^2+y^2-x^2-2px-p^2 = 0$$

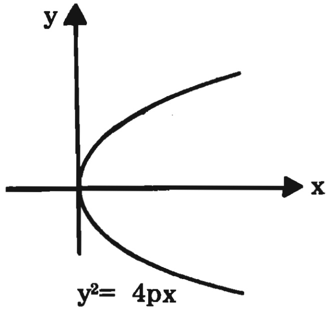
$$y^2 = 4px$$

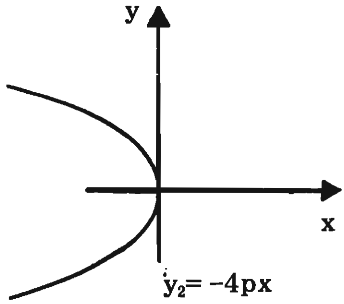


$x^2 = 4\,py$



$x^2 = -4py$





Ejemplo 1: Hallar la ecuación de la parábola de vértice (2, −3), eje el eje x, concavidad hacia la derecha y parámetro = 4

$$(y-k)^2 = 4p \quad (x-h)$$

$$(y+3)^2 = 4p\,(x-2)$$

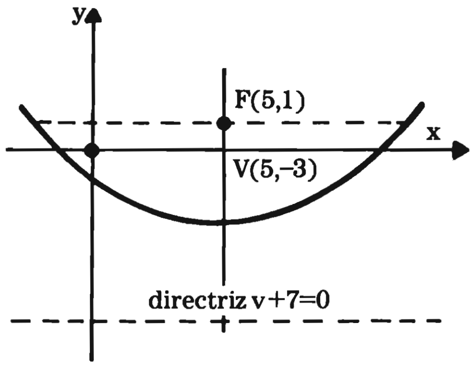
$$y^2 + 6y + 9 = 8\,(x-2)$$

$$\text{Si } 2p = 4 \therefore 4p = 8$$

$$(y+3)^2 = 8\,(x-2)$$

$$y^2 - 8y + 6y + 25 = 0$$

Ejemplo 2: Hallar la ecuación de la parábola con vértice (5, −3) y foco (5, 1)



$$p = VF = 3+1 = 4 \therefore 4p = 16$$

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

$$(x-5)^2 = 16\,(y+3)$$

$$x^2 - 10x + 25 - 16y - 48 = 0$$

$$x^2 - 10x - 16y - 23 = 0$$

$$Ax^2 + Cx + Dy + F = 0$$

Ejemplo 3: encontrar los parámetros de la parábola de ecuación:

$$2y^2 + 4y - 3x + 1 = 0$$

$$2\,(y^2+2y) = 3x - 1$$

$$2\,(y^2+2y+1) = 3x - 1 + 2$$

$$2\,(y+1)^2 = 3x + 1$$

$$(y+1)^2 = \frac{3}{2}\,(x + \frac{1}{3})$$

$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$

$\therefore V(-\frac{1}{3}, -1)$

$4p = \frac{3}{2} \qquad p = \frac{3}{8}$

foco: $-\frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{1}{24}$

$F(\frac{1}{24}, -1)$

directriz $-\frac{1}{3} - \frac{3}{8} = \frac{-17}{24}$

$LR = 4p = \frac{3}{2}$

Hallar la ecuación general de la parábola si su vértice $V(h,3)$ está sobre la recta $4x - 2y - 2 = 0$ y su foco tiene de coordenadas $F(2,5)$

Solución:

Del vértice conocemos la ordenada; si sustituimos en la ecuación de la recta

$4x - 2(3) - 2 = 0$

$4x = 6 + 2 \qquad x = \frac{8}{4}$

$x = 2 \therefore V(2,3)$ si $F(2,5)$

tienen la misma abscisa $\Longrightarrow$ eje paralelo a y

$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

$(x-2)^2 = 8\,(y-3)$

$x^2 - 4x + 4 = 8y - 24$

$x^2 - 4x - 8y + 28 = 0$

$p = 2 \quad \Longrightarrow \quad 4p = 8 = LR$

Analizando la recta:

$4x - 2y - 2 = 0$

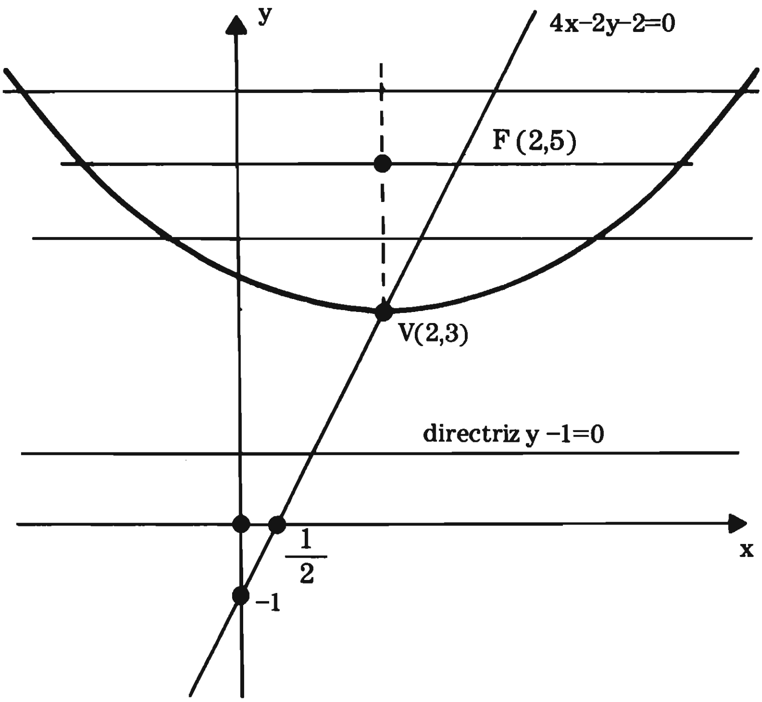
$m = -\dfrac{A}{B} \qquad b = -\dfrac{C}{B}$

$m = \dfrac{-4}{-2} = 2$

$b = -\dfrac{(-2)}{-2} = -1$

Si $y = 0$

$4x = 2 \therefore x = \dfrac{1}{2}$



Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el centro de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

si el foco tiene coordenadas F (3, y) y se ubica sobre la recta: $2x - 3y = 0$

Análisis del círculo

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -4 + 9 + 4$

$(x-3)^2+(y+2)^2=9$

$C\,(3,-2)$ $\qquad r=\pm 3$

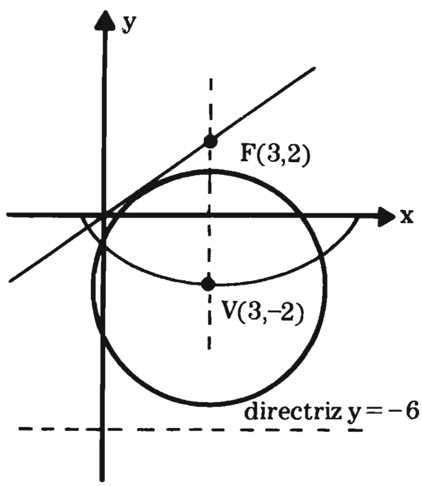
como $C=V$ $\qquad V\,(3,-2)$

Análisis de la recta y el foco

$F\,(3,y)$ $\qquad 2x-3y=0$

$2\,(3)-3y=0$

$y=2$



$F\,(3,2)$ misma abscisa

$(x-h)^2=4p\,(y-k)$

$(x-3)^2=16\,(y+2)$

$x^2-6-16y-23=0$

Hallar la ecuación general de la parábola cuyo vértice es el centro de la elipse de ecuación $9x^2+25y^2-50y-200=0$ y su foco es el centro de la circunferencia $x^2+y^2+8x-2y+1=0$.

Analizando la elipse

$9x^2+25y^2-50y-200=0$

$9x^2+25(y^2-2y+1)=200+25$

$9x^2+25(y-1)^2=225$

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25(y-1)^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

$C(0,1)$ vértice de la parábola

$a^2=25$ $a=5$

$b^2=9$ $b=3$

eje mayor // a "x"

Analizando la circunferencia

$x^2+y^2+8x-2y+1=0$

$x^2+8x+16+y^2-2y+1=-1+16+1$

$(x+4)^2+(y-1)^2=16$

$C(-4,1)$ es el foco de la parábola

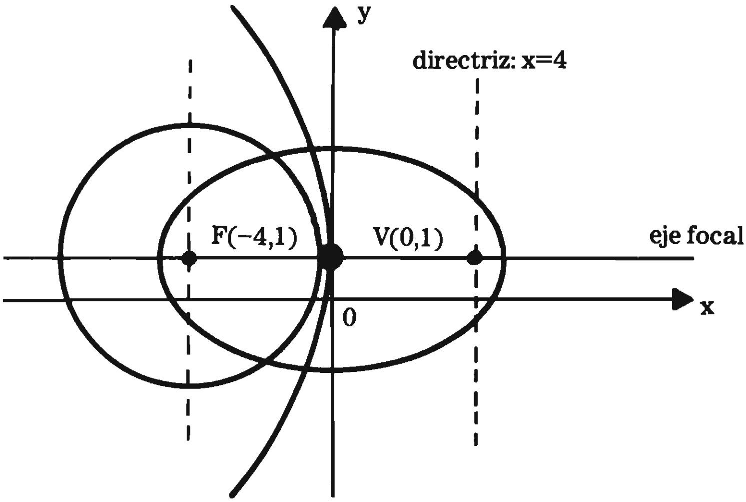
si $V(0,1)$ $\Longrightarrow$ iguales ordenadas eje // a 'x'

$p=4$ ecuación: $(y-k)^2=-4p(x-h)$

$(y-1)^2=-16(x-0)$

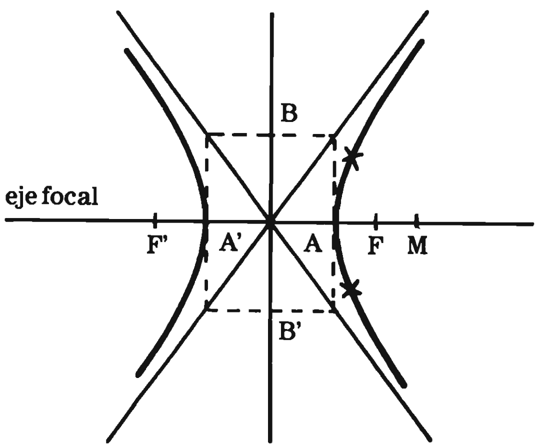
$y^2-2y+1=16x$

$y^2-2y+16x+1=0$

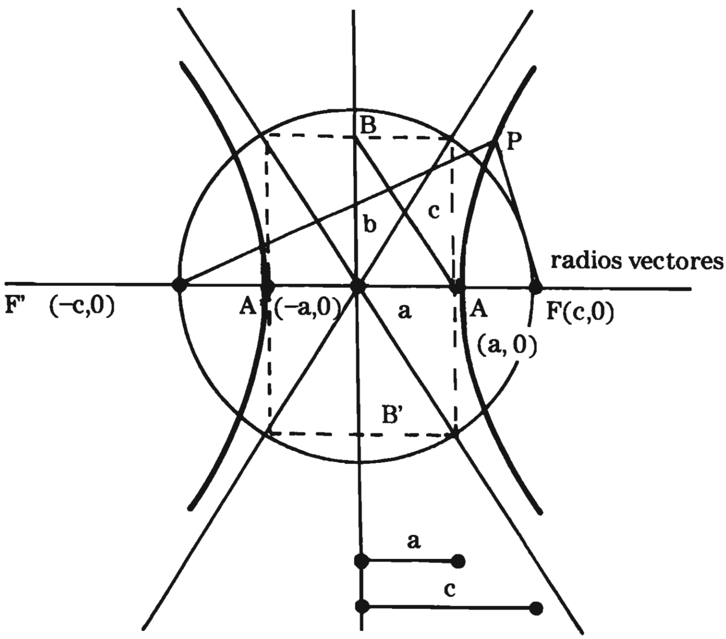


Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F′ es una cantidad constante y que se representa por **2 a construcción:**



1º Hallar el centro (punto medio de FF′)
2º Señalar los vértices AA′ que distan "a" del centro
3º Se construyen los puntos B y B′ situados sobre el eje imaginario radio c con centro en A.
Se construye el rectángulo de dimensiones 2a y 2b y se trazan las asíntotas (diagonales del rectángulo)
4º Se toma un punto M exterior a los focos y radio MA y MA′, haciendo centro en F se trazan puntos que al unirse producen la curva.



$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$

La curva es abierta y consta de dos ramas

F y F′ son Focos $\overline{FF'}$ es la distancia focal $= 2c$

$2c > 2a \therefore c > a$

Excentricidad $e = \frac{c}{a} \therefore e > 1$

Lado recto: Longitud de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al Eje focal.

$$AF = A'F' = c - a$$

Lado recto $\quad LR = \frac{2b^2}{a}$

Los vértices son A y A', equidistan de los focos.

Asíntotas: La curva está contenida dentro del ángulo formado por las diagonales del rectángulo (2a y 2b)

$c^2 = a^2 + b^2$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ así $2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$

Eje imaginario

2b puede ser igual, mayor o menor que 2a

El círculo circunscrito al rectángulo corta al eje real en los focos por ser su radio igual a c.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ecuación con centro en el origen y eje focal en "x"

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Ecuación con centro fuera del origen y eje focal paralelo a "x".

Ecuación de las asíntotas.

Sus pendientes son: $\pm \frac{b}{a}$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$bx + ay = 0 \qquad bx - ay = 0$$

Ecuaciones con eje focal sobre "y" o paralelos a "y".

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Asíntotas:

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

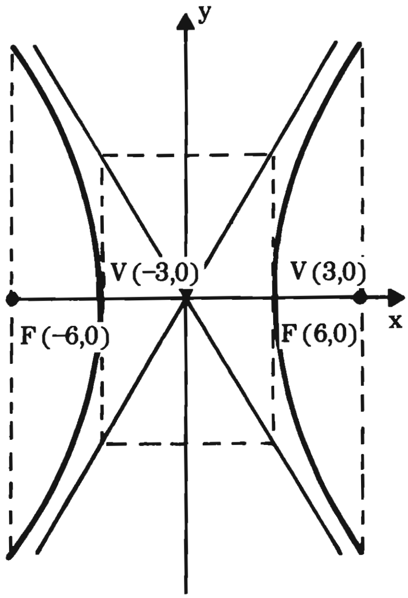
lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$

excentricidad

$$e = \frac{c}{a} \qquad c > a$$

$$e > 1$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la hipérbola de ejes paralelos a los de coordenadas y centro en el origen, sabiendo que su lado recto vale 18 y la distancia entre sus focos es 12.



$LR = \frac{2b^2}{a} = 18$

$\therefore b^2 = \frac{18}{2} a$

$b^2 = 9a$

$2c = 12$

$c = \frac{12}{2} = 6$

$c^2 = a^2 + b^2 \quad a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = 36 - 9a$

$a^2 + 9a - 36 = 0$

$(a + 12) \quad (a - 3) \quad = 0$

$a_1 = -12 \cdot a_2 = 3 \quad a^2 = 9$

sustituyendo en $b^2 = 9a$

$b^2 = 9\,(3) \qquad b^2 = 27$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1 \Longrightarrow 27x^2 - 9y^2 = 243$

$27x^2 - 9y^2 - 243 = 0$

$Ax^2 - Cy^2 + F = 0$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

$27y^2 - 9x^2 = 243$

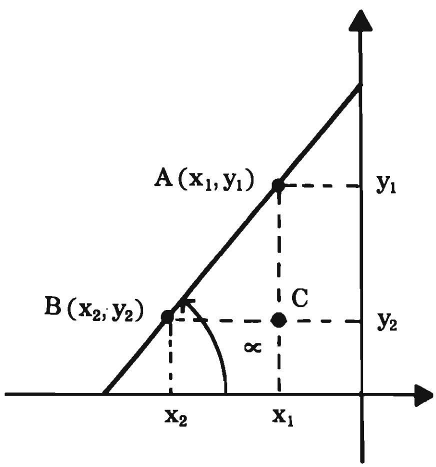
$-9x^2 + 27y^2 - 243 = 0$

Recta

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación lineal $\Longrightarrow$ ecuación 1er. grado.
Pendiente (m) de una recta, es la tangente del ángulo de inclinación de ésta medido sobre el eje x en sentido positivo.

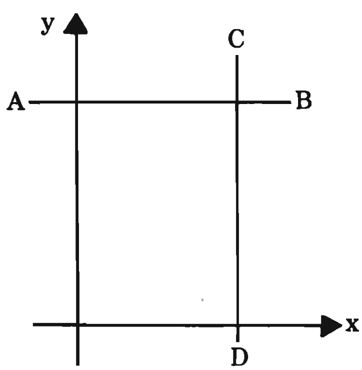
$m = \tan \alpha$



$$\tan \alpha = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Si la recta es paralela a "x" su pendiente es cero.

Si la recta es paralela a "y" su pendiente es ∞.

$$\overline{AB} \parallel x \Longrightarrow m = 0$$

$$\overline{CD} \parallel y \Longrightarrow m = \infty$$

Si dos rectas tienen la misma pendiente $\Longrightarrow$

son paralelas (//).

$$m_1 = m_2$$

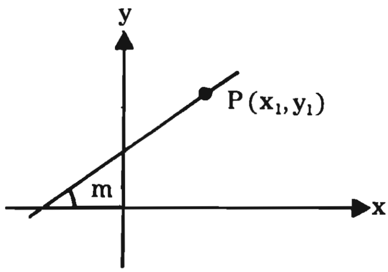
Si su pendiente es recíproca y de signo contrario son perpendiculares. ($\perp$)

$$m_1 = -\frac{1}{m^2} \qquad m_1 m_2 = -1$$

Ecuaciones:

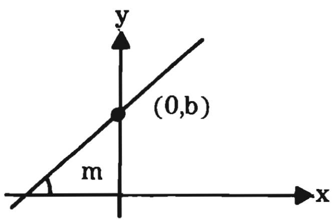
1) Ecuación de una recta que pasa por el punto $P(x_1,y_1)$ y con pendiente conocida (m)

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$



2) Conocida la pendiente y la ordenada al origen (b)

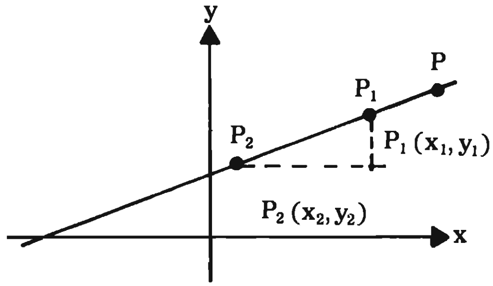
$$y = mx + b$$



3) Ecuación que pasa por dos puntos

$P_1 (x_1, y_1)$ $P_2 (x_2, y_2)$

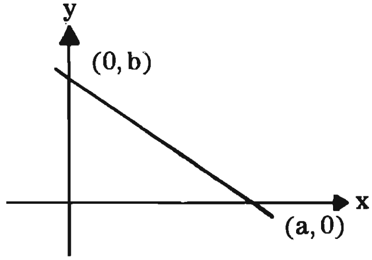
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



4) De abscisa y ordenada conocida, corta a los ejes en (0,b) y (a,0)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(forma simétrica)



De la ecuación general

$Ax + By + C = 0$

$By = -Ax - C$

$$y = \frac{-A}{B}\,x - \frac{C}{B}$$

Si $y = mx + b$

$$m = -\frac{A}{B}$$

$$b = -\frac{C}{B}$$

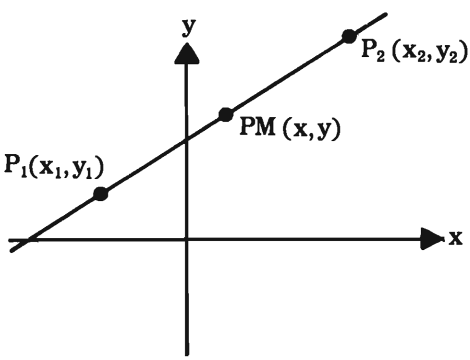
Distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

punto medio (x,y)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Ejemplo: Obtener la ecuación de la recta L que es // a L_1 que pasa por los puntos A (5,6) B (7,8); la recta L pasa por la intersección de otras 2 rectas: L_2 con m = 2 que pasa por C (–4, –6) y L_3 con m = 3 y D (2,2)

Solución:

Considerando A (5,6)

B (7,8)

$$m_1 = \frac{8-6}{7-5} = 1$$

si $m_1 = 1 \Longrightarrow \measuredangle = 45°$

2º Condición:

$m_2 = 2 \quad C(-4,-6)$

$y + 6 = 2(x+4)$

$y + 6 = 2x + 8$

$2x - y + 2 = 0 \quad \ldots L_2$

$$b = \frac{-2}{-1} = 2$$

$m_3 = 3 \qquad D(2,2)$

$y - 2 = 3(x-2)$

$y - 2 = 3x - 6$

$3x - y - 4 = 0 \qquad \ldots L_3$

Considerando la intersección

de L_2 y L_3

$2x - y = -2 \ldots (1)$

$3x - y = 4 \ldots (2)$

$-x = -6$

$x = 6$

Sustituyendo

$2(6) - y = -2$

$12 - y = -2$

$-y = -2 - 12$

$y = 14$

así I (6, 14)

Si $m_1 = 1$

$y - 14 = 1(x-6)$

$x - 14 = x - 6$

$x - y + 8 = 0 \ldots\ldots\ldots L$

Considerando a L

$x - y + 8 = 0$

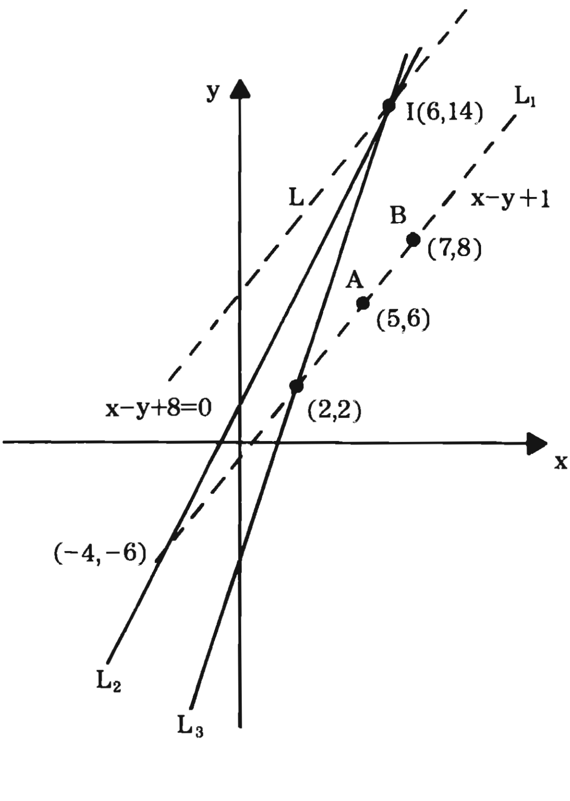
$$m = -\frac{A}{B} = \frac{-1}{-1} \qquad m = 1$$

de L_1

$$x - y + 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$m = m_1 \Longrightarrow \text{son paralelas}$$



Bibliografía

— ANTON, HOWARD. *Introducción al álgebra lineal.* México. Editorial Limusa, 1980.

— DORF, RICHARD C. *Introducción al álgebra de matrices.* Texto Programado. México. Editorial Limusa, 1973.

— LEHMANN, CHARLES H. *Geometría Analítica.* México. UTEHA, 1962.

— CARMAN, ROBERT A. *Introducción a los vectores.* Texto Programado. México. Editorial Limusa, 1970.

— KINDLE, JOSEPH H. *Geometría Analítica.* Schaum's Oulihe Series, 1950.

Métodos matemáticos para el diseño,
se terminó de imprimir en diciembre
de 1989 y su tiraje consta de 3000
ejemplares.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

COSEI
COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. ______________________

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

Dirigido a alumnos que inician las carreras de diseño, este libro tiene como objetivo principal dar al futuro profesional ese apoyo que le permita utilizar algunos conceptos matemáticos como herramienta de ordenamiento mental y como un lenguaje para planear, analizar y enfocar adecuadamente los problemas cuando involucren forma, orden o tamaño. Al hacerlo se partió del convencimiento de que un estudiante debe tener agilidad mental, capacidad de análisis, de deducción y de razonamiento que le permitan concebir ideas y desarrollar proyectos de manera racional, con un enfoque formal y funcional.

Rosa Elena Álvarez Martínez nació en la Ciudad de México, realizó sus estudios de licenciatura en Arquitectura en la Universidad Nacional Autónoma de México y cursos de actualización en la Dirección General de Capacitación y Mejoramiento Profesional de la S.E.P. en temas de matemáticas y su didáctica: Lógica y Teoría de Conjuntos, Geometría, Trigonometría, Probabilidad y Estadística. Ha realizado diversos proyectos arquitectónicos y supervisión de obra. Ha desempeñado su actividad docente, a partir de 1968, en diversas instituciones de nivel medio superior y de licenciatura. Es actualmente profesora e investigadora de tiempo completo en la División de Ciencias y Artes para el Diseño de la U.A.M. Azcapotzalco.

María Dolores González Martínez nació en la Ciudad de México, donde hizo sus estudios de licenciatura en arquitectura en la Universidad Nacional Autónoma de México y de maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N. Es profesora en la Universidad Autónoma Metropolitana desde su fundación, donde ha realizado otros estudios tales como la teoría de gráficas y la teoría de sistemas y computación. Actualmente es profesora e investigadora de tiempo completo en el Departamento de Procesos y Técnicas de Realización de la División de Ciencias y Artes para el Diseño en la Unidad Azcapotzalco.