O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO ATRAVÉS DE PADRÕES PICTÓRICOS DE CRESCIMENTO

Sílvia Isabel Clemente Nunes

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

2016

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO ATRAVÉS DE PADRÕES PICTÓRICOS DE CRESCIMENTO

Sílvia Isabel Clemente Nunes

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Margarida Rodrigues

2016

RESUMO

Neste estudo pretende-se compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano de escolaridade, em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências pictóricas. De forma a orientar e guiar este estudo, foram tidas em consideração as seguintes questões orientadoras: i) Quais as estratégias utilizadas pelos alunos?; ii) Como evoluem as estratégias utilizadas pelos alunos e o seu raciocínio?; e iii) Que fatores influenciam essa evolução?

Este estudo foi desenvolvido à luz de uma metodologia de investigação qualitativa, sob o paradigma interpretativo, onde o interesse está mais no processo do que no produto. Optou-se pelo *design* de estudo de caso múltiplo (três díades) e a recolha de dados foi feita através de técnicas como: observação participante e análise documental (registos áudio e vídeos; transcrições dos registos áudio e vídeo; trabalhos realizados pelos alunos; e notas de campo). A professora desempenhou o duplo papel de professora/investigadora.

Os resultados deste estudo permitiram concluir que o trabalho desenvolvido através de tarefas com padrões de crescimento pictóricos levou os alunos a conjeturar, generalizar e justificar relações matemáticas entre quantidades. Os alunos usaram diferentes estratégias: (i) representação e contagem; (ii) aditiva; e (iii) decomposição dos termos. Todos os alunos evoluíram de um raciocínio recursivo, associado à estratégia aditiva, para um raciocínio funcional, associado à estratégia de decomposição dos termos, desenvolvendo assim o seu pensamento algébrico. Para essa evolução, contribuíram (i) o questionamento presente no enunciado das tarefas, (ii) o questionamento da professora, (iii) a observação das figuras e sua decomposição, e (iv) a disponibilização de um número limitado de materiais manipuláveis para modelar as sequências de figuras.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, raciocínio recursivo, raciocínio funcional; estratégias; material manipulável

ABSTRACT

This study intends to understand the development of algebraic thinking in students of the 4th year of schooling, in the context of exploration of growth patterns in pictorial sequences. In order to adjust and guide this study, the following guiding questions were considered: i) What strategies and reasoning do students use?; ii) How do the strategies used by students and their reasoning evolve? and iii) What factors influence that evolution? This study was developed considering a qualitative research methodology, under the interpretative paradigm, where the process is more important than the product. It was chosen the *design* of a multiple case study (three dyads) and the data collecting was done through techniques such as participant observation and documentary analysis (audio and video recordings, transcriptions of audio and video records, work done by the students, and field notes). The teacher played the dual role of teacher / researcher. The results of this study allowed us to conclude that the work developed through tasks with pictorial growth patterns, led the students to conjecture, generalize and justify mathematical relations between quantities. The students used different strategies: (i) representation and counting; (ii) additive; and (iii) decomposition of the terms. All students evolved from a recursive reasoning, associated with the additive strategy, to a functional reasoning, associated to the decomposition strategy of the terms, thus developing their algebraic thinking. For this evolution contributed, (i) the questioning present in the task statement, (ii) the questioning of the teacher, (iii) the observation of the figures and their decomposition, and (iv) the availability of a limited number of manipulable materials to model the sequences of figures.

Keywords: Algebraic thinking, recursive reasoning, functional reasoning; strategies; manipulative material.

AGRADECIMENTOS

Para a realização deste estudo quero agradecer a um conjunto de pessoas que direta ou indiretamente o tornou possível, cada qual à sua maneira:

À Professora Doutora Margarida Rodrigues pelo seu trabalho de orientação, disponibilidade, confiança e muita paciência porque sem o seu impulso e dedicação teria desmotivado ao longo do processo. A sua ajuda foi de extrema importância para conseguir terminar esta investigação.

A toda a minha família: Ricardo (marido), Ana Maria (mãe), Guilherme e Daniela (sobrinhos), Ricardo (irmão), Mara (cunhada) e Paula pela paciência pelo tempo que não passei convosco e pela forma como me apoiaram incondicionalmente e fizeram tudo para que conseguisse chegar a bom porto.

À minha grande e querida amiga Patrícia que iniciou esta viagem comigo mas que por um bom motivo chamado Sara, “ainda” não a conseguiu terminar. À Elsa que também gostaria de vê-la terminar este caminho porque foi um grande apoio nas aulas deste mestrado. As minhas colegas e amigas, Anabela, Sónia e Irina, que também estavam a terminar as suas teses noutras áreas, pelo incentivo e companhia.

Aos meus alunos por todo o entusiasmo que mostraram para a realização das tarefas e aos colegas Susana, Andreia, João e Elisabete, pela força, apoio e bons conselhos.

A todos os meus amigos mais próximos, aqueles amigos “Fantásticos” (Ana, Tó, Bruna, Tiago, Paula, Rui, Hugo, Susana, Cátia e Tiago) que estarão sempre lá e que, apesar da minha ausência, fizeram com que a palavra amizade se tornasse ainda mais importante.

Aos bombeiros que me concederam algumas pausas no meu voluntariado.

E ainda à Fofinha, pelo tempo que passou sozinha.

A todos o meu muito obrigado!

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

CSH- Ciência Sociais e Humanas

DEB- Departamento do Ensino Básico

MEC- Ministério da Educação e Ciência

ME- Ministério da Educação

NCTM- National Council of Teachers of Mathematics

PMEB- Programa de Matemática do Ensino Básico

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Nas salas onde lecionei, o trabalho com sequências no âmbito dos padrões foi uma constante. Contudo, nesta fase, tenho a consciência de que este trabalho nem sempre foi bem desenvolvido tendo em consideração os princípios subjacentes ao desenvolvimento destas tarefas. Estas tarefas normalmente eram sempre bem recebidas pelos alunos, pelo seu elemento desafiador e pelo elemento visual sempre cativante, principalmente quando as tarefas se baseavam em padrões de repetição, muito usuais no 1.º Ciclo. Estas tarefas com padrões têm como principal objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O pensamento algébrico é um processo complexo que envolve a atividade de generalizar ideias matemáticas, usando representações simbólicas literais e representando relações funcionais (Blanton & Kaput, 2005; Smith, 2003). Para o seu desenvolvimento gradual é necessária a aplicação de tarefas com padrões que deverão ser pensadas e ponderadas pelos professores de forma coerente. Vários são os autores (Barbosa Vale & Palhares, 2008; Blanton & Kaput, 2005; Carvalho et al.; NCTM, 2008; Steen, 1990; Warren & Cooper, 2008) que defendem a aplicação destas tarefas logo nos primeiros anos da escolaridade. Estas têm a função de conduzir as crianças a reconhecer e desenvolver estruturas e relações matemáticas usando-as como objeto para o raciocínio matemático (*Early Algebra*).

Para o desenvolvimento do pensamento algébrico, o contexto visual poderá ter alguma relevância porque os alunos conseguem estabelecer mais rapidamente a correspondência entre o termo (figura) e o número de ordem do termo (Barbosa et al., 2008; Blanton & Kaput, 2005; Canavarro, 2007; Vale, Pimentel, Alvarenga & Fão, 2011; Warren & Cooper, 2008; Wilkie 2014). Aliada a esta visualização, poderá estar ainda a utilização de materiais estruturados e não estruturados onde os alunos poderão fazer a ancoragem dos seus raciocínios (Damas, Oliveira, Nunes & Silva, 2010; Warren & Cooper, 2008).

1.1. Problema e objeto de estudo

O objeto de estudo desta dissertação de mestrado foi o pensamento algébrico, nomeadamente a compreensão de como se processa o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos perante a exploração de padrões pictóricos de crescimento. Para essa compreensão foram tidos em conta vários eixos de análise como: as estratégias utilizadas por estes na previsão, replicação, ampliação e generalização de padrões, de forma a desenvolver o pensamento algébrico; a utilização ou não utilização de materiais manipuláveis estruturados e não estruturados para a replicação e compreensão dos padrões; e os tipos de raciocínios mobilizados pelos alunos, que são indicadores das formas de pensamento mobilizadas por estes.

Desta forma, o objetivo do presente estudo é compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano de escolaridade, em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências pictóricas.

1.2. Questões de investigação

De acordo com o objetivo apresentado, foram definidas algumas questões de investigação que tinham o propósito de orientar a investigação a ser desenvolvida.

Foram então definidas as seguintes questões:

i) Quais as estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos?
ii) Como evoluem as estratégias utilizadas pelos alunos e o seu raciocínio?
iii) Que fatores influenciam essa evolução?

Estas questões orientadoras foram constantemente reequacionadas e ajustadas ao longo de todo o processo de investigação, assumindo um papel dinâmico por estas serem um indicador evidente de compreensão do objetivo de análise.

1.3. Pertinência do estudo

O NCTM (2008) refere que tarefas com padrões que visem desenvolver o pensamento algébrico devem começar a ser aplicadas logo nos anos iniciais da escolaridade, como forma de suporte para a competência algébrica que se revela ser de grande importância na vida adulta, quer na preparação para o ensino superior, quer no trabalho.

Desta feita, a problemática do desenvolvimento do pensamento algébrico é bastante pertinente pois permite-nos compreender como os alunos conseguem observar a forma como os padrões são constituídos, como os replicam, ampliam e como fazem a generalização. Associada à compreensão de como se processa o desenvolvimento do pensamento algébrico, gostaria também de perceber a influência dos materiais manipuláveis não estruturados na compreensão dos padrões e no desenvolvimento do pensamento algébrico. Tendo como base de trabalho a compreensão destes fatores, os professores poderão alterar as suas práticas e os seus materiais de forma a propor aos seus alunos tarefas que propiciem este desenvolvimento.

A escolha deste tema também teve a ver com os meus interesses pessoais acerca desta temática, porque depois de realizar um trabalho académico que me permitiu aprofundar alguns conhecimentos acerca do pensamento algébrico, houve algumas questões que ficaram em aberto e para as quais gostaria de encontrar respostas. Para além disso, assisti à apresentação dos resultados de uma dissertação de mestrado que me aliciou bastante a aprofundar este tema no 1.º Ciclo, uma vez que os resultados apresentados obtidos numa turma de jardim-de-infância foram bastante significativos. Na apresentação de resultados dessa dissertação ficou patente que crianças do pré-escolar foram capazes de desenvolver significativamente o pensamento algébrico.

A inclusão da incidência na utilização dos materiais manipuláveis não estruturados surgiu porque aquando do desenvolvimento de algumas atividades com padrões de crescimento na minha turma, no ano letivo anterior ao da recolha de dados, o material manipulável teve uma influência diversificada: alguns alunos não conseguiram perceber qual a utilidade do material disponibilizado, acabando até por fazer construções de figuras aleatórias com esse mesmo material; outros usaram-no para replicar o padrão dado e para fazer a sua ampliação; e outros nem sequer recorreram ao uso do material pois conseguiram organizar o seu raciocínio de modo abstrato, apresentando a ampliação do padrão através da imagem da figura solicitada, conseguindo assim chegar à sua generalização. Esta vivência pessoal fez com que quisesse investigar, de modo rigoroso, o papel dos materiais no desenvolvimento do pensamento algébrico em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências pictóricas.

1.4. Estrutura da tese

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos: Introdução, Enquadramento Teórico, Metodologia de Investigação, Análise dos Dados e Conclusões.

No primeiro capítulo, faz-se uma breve introdução relacionada com o tema a ser abordado, referindo-se também o problema e objeto de estudo, as questões de investigação que orientaram o estudo, a pertinência do estudo e a apresentação da estrutura da tese.

No capítulo seguinte, realiza-se um enquadramento teórico da problemática levantada sobre o pensamento algébrico. Assim sendo, são abordados os seguintes temas: a definição de pensamento algébrico; a definição de padrões; o pensamento algébrico no ensino da Matemática. Dentro deste último são abordados dois subtemas: padrões de crescimento e alguns estudos empíricos.

No terceiro capítulo, apresentam-se as opções metodológicas tomadas e os participantes e critérios de seleção. Neste capítulo, é também abordado o modo de implementação das tarefas e a apresentação da sequência de tarefas. Por fim, apresentam-se as técnicas de recolha de dados e como foi efetuada a análise destes.

O quarto capítulo é dedicado à apresentação e discussão dos resultados, onde é feita uma análise de conteúdo de todo o material recolhido durante a investigação. Este capítulo está dividido em três secções, sendo que cada uma das secções corresponde ao trabalho desenvolvido por cada uma das díades.

No quinto capítulo, apresentam-se as principais conclusões deste estudo relativamente ao trabalho desenvolvido através de tarefas com padrões de crescimento pictóricos nomeadamente no que concerne às estratégias utilizadas pelos alunos, aos raciocínios mobilizados e à evolução destas estratégias e raciocínios.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

PENSAMENTO ALGÉBRICO

2.1. Definição de pensamento algébrico

Segundo a definição do Dicionário da Língua Portuguesa (2004), a palavra álgebra significa a parte da Matemática que generaliza as questões numéricas representando as grandezas por letras. Taylor-Cox (2003) define a álgebra como uma generalização das ideias da aritmética onde os valores e variáveis desconhecidas podem ser encontrados para resolver problemas. Atualmente, a álgebra é encarada de um modo lato como uma atividade generalizante (Mason, 2007) cujos objetos centrais são as relações matemáticas abstratas, ou seja, como uma ferramenta para expressar generalizações (Alvarenga & Vale, 2007; Threlfall, 1999). Dentro da mesma perspetiva, Kaput (2008) considera a álgebra como um corpo de conhecimento em evolução enquanto o pensamento algébrico sublinha a álgebra como uma atividade humana.

Por seu lado, o NCTM (2008) refere que, historicamente, a álgebra aparece relacionada com o estudo dos métodos de resolução de equações. Wilkie (2014) refere que um aspeto fundamental da aprendizagem da álgebra é o entendimento conceitual do que as variáveis realmente são e como elas são representadas simbolicamente nas equações e esse entendimento ajuda os alunos quando estes estão a trabalhar com equações algébricas e funções lineares em anos posteriores. Kaput (2008), assumindo uma perspetiva mais ampla, sintetiza três vertentes da álgebra:

1. Álgebra como estudo das estruturas e sistemas abstraídos a partir do resultado de operações e estabelecimento de relações, incluindo os que surgem na Aritmética (Álgebra como Aritmética generalizada) ou no raciocínio quantitativo.
2. Álgebra como o estudo das funções, relações e (co)variação.

> 3. Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto no domínio da Matemática, como no seu exterior. (Kaput, 2008, p.11)

Também Smith (2003) nota que a investigação tem fornecido uma visão mais ampla da álgebra, colocando ênfase no *pensamento algébrico*, um conceito que se concentra em maneiras de generalizar. Barbosa et al. (2008) abordam a natureza do pensamento algébrico como forma de conhecer regularidades utilizando duas formas: (a) espacialmente/visualmente, ou seja, raciocinando visualmente e (b) analiticamente, ou seja, através das relações numéricas. O pensamento algébrico pode ser descrito como sendo composto de várias formas:

> (a) o uso da aritmética como domínio para expressar e formalizar generalizações, (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais, (c) modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações e (d) generalizar sobre sistemas matemáticos abstraídos de cálculos e relações. (Blanton & Kaput, 2005, p. 2)

Kaput (2008) refere, ainda, que existem dois aspetos fundamentais no pensamento algébrico: (a) a generalização e a expressão de generalizações num sistema de símbolos, de forma cada vez mais sistemática e convencional e (b) a ação sobre símbolos dentro do sistema organizado de símbolos. Assim, o pensamento algébrico pode ser definido como uma atividade de generalizar ideias matemáticas, usando representações simbólicas literais e representando relações funcionais (Blanton & Kaput, 2005; Smith, 2003).

2.2. Padrões

Muitos são os autores que referem a Matemática como a ciência dos padrões (Alvarenga & Vale, 2007; Devlin, 2002; Romberg, 1992, Steen, 1990; Vale, Pimentel, Barbosa et al., 2011). Esta associação está também presente quando Warren e Cooper (2008) referem que a Matemática é o domínio do raciocínio sobre objetos e suas relações, logo o poder da Matemática reside nas relações e nas transformações que dão origem a padrões e generalizações, assumindo-se assim como a ciência dos padrões.

Palhares e Mamede (2002) referem que os padrões aumentaram o seu espaço de relevância em algumas recomendações para o ensino da Matemática, nos graus de ensino mais elementares do Ensino Básico, em várias publicações educacionais de referência, tanto a nível nacional como internacional, sendo consideradas as publicações do NCTM de 1991 e de 2000 e DEB de 1997 e 1998. Contudo, estes autores alertam para o facto de nenhuma destas publicações ter uma definição precisa da palavra padrão, o que pode levar a um empobrecimento e esvaziamento do conceito.

Orton (1999) refere a dificuldade da palavra padrão ter vários significados e que quando se fala em padrões, em Matemática, pensa-se frequentemente em repetições e numa procura de ordem. Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007) referem que quando se fala em padrão surge imediatamente a associação aos padrões visuais que se encontram em objetos ou materiais do dia-a-dia. Associado ao conceito de padrão aparecem termos como regularidades, ordem, estrutura, relações, sucessões, repetição, sequência, motivo e regras.

Dada a abrangência tão lata da definição de padrão, importa apresentar a definição que guiará este trabalho. Desta feita, foi considerada a definição de padrão defendida por Vale et al. (2009) em que a palavra padrão é usada quando se refere a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores, sons, onde se detetam regularidades.

A construção de padrões, por ser uma atividade subjetiva e construtiva, leva a que os alunos necessitem de saber coordenar as suas inferências percetivas e simbólicas da relação, de forma eficaz, para conseguir interpretar a estrutura do padrão (Rivera, 2010). Segundo Blanton e Kaput (2005), as crianças devem ter experiências de "*Early Algebra*" de forma a poderem reconhecer e desenvolver estruturas e relações matemáticas usando-as como objeto para o raciocínio matemático, ou seja, compreender a forma estrutural e a generalidade da Matemática. Só assim podem aprender a reconhecer, a articular estruturas e relações matemáticas e a usar "essas ideias de raciocínio matemático como objetos matemáticos".

No que concerne aos tipos de padrões, encarados como sequências discretas com um início mas sem fim, associados a termos cuja ordenação corresponde à sequência dos números naturais, encontramos:

i) Padrão de repetição - é um todo que deve ser visto relacionando-o com a unidade de repetição. A unidade de repetição é um componente que se identifica e que faz parte de um padrão em consequência da sua repetição, chamando a atenção para a importância de, num contexto de padrão de repetição, se ver a unidade de repetição de forma intencional, de maneira a permitir a manipulação do padrão. A forma como a unidade de repetição é vista e identificada por parte das crianças é referido como essencial para se pensar no padrão como uma sucessão de termos que se repetem, de modo a conduzir à generalização (Vale, Pimentel, Barbosa et al., 2011). Estes padrões são utilizados primordialmente nos primeiros anos de escolaridade;

ii) Padrão de crescimento - onde se consegue observar a relação entre o termo do padrão e o número de ordem do termo e por isso pode-se observar uma covariação, ou seja, uma relação funcional entre os dados e a partir daí criar e explorar a noção de variável. Os padrões de crescimento podem ser descritos pela forma como são apreendidos, ou seja, se o foco se encontra na variação que ocorre dentro do próprio padrão (o padrão dado) está a ser utilizado o pensamento variacional único (raciocínio recursivo); contudo, se o foco se encontra na relação entre o termo e o número de ordem do termo, então está a ser utilizado o pensamento funcional. Este tipo de padrão potencia a passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico.

2.3. O pensamento algébrico no ensino da Matemática

Para Suh (2007), a palavra álgebra surge associada à manipulação simbólica trabalhada em níveis de ensino elevados. Contudo, esta ideia aparece refutada por Steen (1990) e pelo NCTM (2008) que evocam que a álgebra[1] (encarada, nos primeiros anos, como conceitos algébricos e elementos do pensamento algébrico) deve ser trabalhada logo a partir dos primeiros anos de escolaridade, através das muitas experiências que os alunos possam ter com os números, através da abordagem de uma aritmética generalizada. Desta forma, pode ser construída uma base sólida para a compreensão da álgebra mais

[1] Alguns autores referem-se à álgebra nos anos escolares elementares como "*Early Algebra*".

aprofundada nos anos posteriores. NCTM (2008) considera a álgebra como um fio condutor curricular desde os anos escolares mais precoces até aos anos posteriores. Esta importância revela-se ainda maior quando afirma que a competência algébrica é fundamental tanto nos anos posteriores da escolaridade como na vida adulta, apresentando-se como fundamental no trabalho matemático em muitas das áreas da Matemática.

Segundo Warren e Cooper (2008), deve-se procurar desenvolver o pensamento algébrico de um modo que inclua a compreensão de estruturas matemáticas representadas pela linguagem e pelos gestos, utilizando diferentes representações e recorrendo a materiais concretos. Blanton e Kaput (2005) referem que quando o ensino proporciona oportunidades adequadas sobre as relações funcionais, os alunos passam da linguagem natural e icónica para sistemas de notação simbólica, tal como também foi referido por Warren e Cooper (2008).

Diversos autores (Barbosa et al., 2008; Carvalho et al.; NCTM, 2008; Steen, 1990; Warren & Cooper, 2008) são unânimes na afirmação de que as tarefas com padrões, principalmente nos anos iniciais da escolaridade formal, são fulcrais para o desenvolvimento do raciocínio funcional e do pensamento algébrico, essenciais para a abstração sobre os objetos matemáticos nos anos posteriores de ensino. O desenvolvimento do pensamento algébrico é um processo complexo que passa por etapas de evolução. A aplicação de tarefas com padrões permite compreender como os alunos conseguem observar a forma como os padrões são constituídos, como os replicam, ampliam e como fazem a generalização. Ao observar como os alunos realizam estas tarefas, compreende-se o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. Assim, o professor fica com a ideia do tipo de padrão a apresentar em seguida e da forma como pode guiar o pensamento dos seus alunos através de questões pertinentes. A estas tarefas, podem estar associados materiais manipuláveis estruturados e não estruturados que se podem assumir como suporte das estratégias utilizadas pelos alunos e como forma de desenvolver igualmente o pensamento algébrico (Warren & Cooper, 2008).

Pimentel, Vale, Freire, Alvarenga e Fão (2010) consideram que o desenvolvimento do pensamento algébrico necessita de estímulos ao nível do pensamento, tais como analisar relações entre quantidades e generalizar e desta forma, cabe ao professor ser capaz de proporcionar situações que permitam explorar padrões utilizando diversos suportes. Palhares e Mamede (2002) consideram importante explorar os padrões da mesma forma como se resolvem as situações problemáticas, visto que essa metodologia é o veículo essencial para a aprendizagem da Matemática. Assim, a criança é confrontada com o desafio de descobrir como continuar, implicando para isso descobrir como o padrão está estruturado. Desta feita, Warren e Cooper (2008) defendem a mudança no ensino da Matemática, pois prevalece, nas escolas, a concentração nos produtos matemáticos em vez de se dar a importância devida aos processos matemáticos. A equipa da Escola Superior de Educação de Lisboa do Programa de Formação Contínua da Matemática (s.d.) refere que se os alunos forem incentivados a preocuparem-se com a observação do seu raciocínio e não tanto com a procura imediata de uma solução poderão alcançar um nível superior de pensamento matemático.

Canavarro (2007) defende a aposta no raciocínio dos alunos e acredita na possibilidade destes construírem conhecimento matemático. Vários autores referem que o conhecimento matemático deve ser ancorado nas tentativas de resolução dos alunos e que os recursos dos professores têm de ser remodelados para poderem apresentar tarefas com padrões de uma forma mais sistemática e assim conseguir apoiar de forma mais eficaz os alunos (Blanton & Kaput, 2005; Canavarro, 2007; Wilkie, 2014). Blanton e Kaput (2005) e Canavarro (2007) reforçam ainda a ideia de transformação dos materiais e das formas de dirigir o ensino, mudando a cultura de sala de aula, de forma a levar os alunos a conjeturar, generalizar e justificar relações matemáticas entre quantidades, ajudando-os nas generalizações matemáticas.

Canavarro (2007) denota também a importância da diversidade de representações para potenciar o pensamento algébrico, pois a possibilidade de representar de muitas formas amplia as hipóteses dos alunos mais novos conseguirem organizar o seu pensamento. Esta autora refere ainda que os alunos devem ser estimulados a usarem as suas representações, mas que o professor tem o dever de lhes apresentar representações mais convencionais e assim ajudar os alunos a enriquecer e a aprofundar os seus raciocínios algébricos. Barbosa et al. (2008) e Canavarro (2007) reforçam o potencial das representações visuais para se estabelecer relações entre o contexto visual e numérico, pois desta forma compreender-se-á mais facilmente o significado das variáveis. Esta valência também foi referida por Vale, Pimentel, Barbosa et al. (2011) quando referem que "a observação de padrões, a sua descrição e generalização tem sido uma abordagem relevante na transição da aritmética para a álgebra" (p. 15).

Vários autores como Hebert e Brown; Lannin, Barker e Townsend; Pegg e Redden e Usiskin (citados em Alvarenga & Vale, 2007) sustentam que quando se trabalha a generalização através de padrões, está lançado o caminho para se passar do pensamento numérico para o pensamento algébrico permitindo perceber em que consiste a generalização. Os alunos ao descobrirem relações, encontram conexões, fazem conjeturas, previsões e generalizações.

Devido à notoriedade que o tema do pensamento algébrico nos primeiros anos foi ganhando, a temática do pensamento algébrico foi introduzida no Programa de Matemática do Ensino Básico [PMEB] (ME, 2007) logo no 1.º Ciclo, associando-o ao trabalho realizado em Números e Operações. Vale e Pimentel (2013), baseando-se num estudo que ocorreu aquando da implementação do PMEB e da Formação Contínua de Professores de Matemática, corroboram a ideia de que é possível desenvolver o pensamento algébrico nos primeiros anos, através de sequências didáticas e com padrões, que levem os alunos "à construção de ideias poderosas em Matemática, como é o caso da generalização" (p.121). Contudo, o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (MEC, 2013) deixaram de mencionar o pensamento algébrico e apenas introduziram conteúdos de álgebra no 2.º Ciclo, sendo que no 1.º Ciclo se faz apenas uma pequena alusão a sequências num único ano de escolaridade, no 2.º ano. Este tópico só volta surgir no 6.º ano de escolaridade, criando uma descontinuidade pouco desejável, atendendo a que um trabalho eficaz ao nível do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos requer um trabalho sistemático e continuado.

2.3.1. Padrões de crescimento

Vale, Pimentel, Barbosa et al. (2011) referem que os padrões de crescimento podem ser lineares, ou não lineares, sendo que neste caso cada termo muda de forma cíclica em relação ao anterior. Billings, Tied e Slater (2008) definem ainda o padrão pictórico de crescimento como sendo um padrão feito com uma sequência de figuras que mudam de um termo para outro termo de forma previsível. Um padrão de crescimento pictórico envolve duas variáveis: um aspeto quantificável de uma figura (a variável dependente) que é coordenado com uma indexação ou sistema de contagem (a variável independente), que identifica o número de ordem da figura no padrão.

Smith (2003) distingue dois tipos de raciocínio na análise dos padrões e de relações, que foram enunciados de forma evolutiva:

i) Raciocínio recursivo - incidente na variação dentro de uma sequência de valores. Nesta análise, os alunos precisam de visionar toda a estrutura, pois atendem à variação dos termos do padrão, olhando apenas para uma única variável, a variável dependente;
ii) Raciocínio funcional - incidente na variação de duas quantidades correspondentes às duas variáveis. Nesta análise, os alunos conseguem estabelecer a relação entre o termo e o seu número de ordem.

Segundo Stacey (1989), a generalização do padrão, decorrente da sua observação, pode ocorrer de dois modos: generalização próxima e generalização distante. Vale, Pimentel, Alvarenga et al. (2011) associam a utilização do raciocínio recursivo à generalização próxima, mas não à generalização distante. A generalização distante, por ser considerada por Vale, Pimentel, Alvarenga et al. (2011) como uma lei geral para um termo qualquer, pressupõe já a utilização do raciocínio funcional onde os alunos conseguem abstrair-se do padrão e concentrar-se no objeto matemático, conseguindo utilizar a função de forma abstrata. Estes padrões são utilizados usualmente nos anos posteriores da escolaridade formal.

De acordo com Blanton e Kaput (2005), o raciocínio funcional é um meio para atingir a generalidade. Os autores referem ainda que as estratégias utilizadas pelos alunos e a evolução dessas mesmas estratégias, a postura e o conhecimento dos professores e a dinâmica de sala de aula devem ser tidos em conta quando esses mesmos professores pretendem desenvolver o raciocínio funcional dos seus alunos e, de forma mais lata, levá-los a construir o pensamento algébrico.

Billings et al. (2008) referem alguns processos utilizados por alunos para descrever, analisar, ampliar e generalizar relações em padrões pictóricos de crescimento:

i) Processos que utilizam a análise de variação única:

Processo 1- Analisar a mudança entre figuras consecutivas;

Processo 2- Usar a figura anterior para construir uma nova figura;

Processo 3- Identificar o que permanece igual e o que muda no padrão.

ii) Processos que utilizam a análise de correspondência:

Processo 4- Relacionar os números das figuras com a mudança de aspeto das figuras correspondentes à variável dependente;

Processo 5- Ampliar a figura a um grande número, *n*.

No que respeita à exploração de padrões pictóricos de crescimento, Ponte, Branco e Matos (2009) enunciam algumas estratégias de alunos:

Estratégia de representação e contagem. "O aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente." (p. 44).

Estratégia aditiva. "O aluno compara termos consecutivos e identifica a alteração que ocorre de um termo para o seguinte" (p. 45).

Estratégia do objeto inteiro. "O aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse determinar o termo de uma ordem que é múltipla desta" (p. 45).

Estratégia da decomposição dos termos. "A decomposição de um termo de uma sequência pictórica permite, muitas vezes, identificar o seu processo de construção, possibilitando a determinação de termos de ordem distante. Nesta estratégia, o aluno estabelece uma relação entre um termo e a sua ordem" (p. 46-47).

Esta sequência de estratégias demonstra como se desenvolve o pensamento algébrico de forma evolutiva. Barbosa et al. (2008), Blanton e Kaput (2005) e Warren e Cooper (2008) consideram importante o contexto visual e outras ferramentas, como materiais manipuláveis, que podem facilitar a compreensão do significado das variáveis com o objetivo de levar os alunos à generalização distante e a uma aprendizagem significativa da Matemática, nomeadamente no trabalho feito com padrões de crescimento em sequências pictóricas. Segundo Damas et al. (2010), a utilização de materiais manipuláveis envolve as crianças numa linguagem cada vez mais ligada à Matemática, sendo que estes materiais proporcionam uma construção sólida e gradual de bases matemáticas tornando o trabalho matemático mais simples e significativo.

O contexto visual permite ver mais facilmente a estrutura de significado sobre as relações e dessa forma fazer a ligação com os sistemas de notação simbólica de forma mais significativa. Também Vale, Pimentel, Alvarenga et al. (2011) referem que a visualização fornece um meio poderoso para se fazer a generalização de um padrão de crescimento expressando-a pelo termo geral.

O contexto visual é, pois, referido como essencial pois os alunos conseguem, com mais facilidade, estabelecer a relação entre o termo do padrão e a sua posição (Warren & Cooper, 2008) e assim, estabelecer a relação entre ícone e índice e construir o símbolo. De acordo com Warren e Cooper (2008), a perspetiva semiótica pressupõe a produção de signos e o seu uso na apropriação pessoal de significado presente na relação entre signos. Neste sentido são apresentados três tipos de signos: ícones, índices e símbolos. Os ícones apresentam-se como tendo uma semelhança física ou uma certa analogia com o objeto. Os índices estão associados ao objeto, sendo que podem existir sem o objeto pois é a relação que têm com o objeto que lhes dá significado. Os símbolos são a representação do objeto porque foram criados para representar o objeto. Os ícones e índices baseiam-se na interpretação do intérprete e os símbolos são considerados a descrição da linguagem e sistemas de notação simbólica. A notação simbólica é construída no pensamento das crianças em contextos significativos, pois ao aprenderem de forma significativa ficarão mais bem preparadas para as abstrações do pensamento matemático. No estudo conduzido por Warren e Cooper (2008) focado no pensamento algébrico, descrito mais adiante, os ícones são vistos como os termos do padrão em si, os índices representam o números de ordem dos termos do padrão e o símbolo a representação simbólica do padrão.

Relativamente às tarefas a propor, é também importante que estas contenham questões explícitas de solicitação da ordem, dado o termo, obrigando a reverter o pensamento (Warren & Cooper, 2008). Além da importância que o tópico da inversão assume na Matemática pelas suas características relacionais (Greer, 2012), no contexto dos padrões de crescimento, a mobilização do raciocínio inversivo encontra-se associada ao raciocínio funcional pois a resposta àquelas questões fica facilitada se os alunos se focarem na relação entre o termo e a sua ordem (Warren & Cooper, 2008).

Wilkie (2014) refere que a investigação, nos últimos anos, destaca como benefício para a compreensão conceitual da álgebra os alunos aprenderem a relacionar quantidades variáveis num padrão de crescimento pictórico, em vez de olharem para sequências numéricas unidimensionais. Para sustentar a sua fundamentação recorreu a exemplos, que são apresentados de seguida.

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \quad 14 \quad 17 \ldots$$

Figura 1- Sequência numérica (Wilkie, 2014, p. 24).

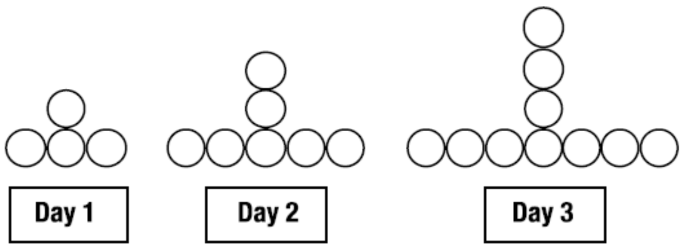


Figura 2- Padrão de crescimento *Planta T ao contrário* (Wilkie, 2014, p. 25).

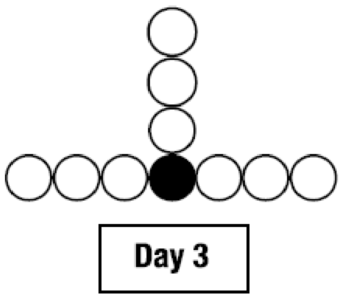


Figura 3- Uma maneira útil de visualizar a estrutura da *Planta T ao contrário* para a generalização explícita (Wilkie, 2014, p. 26).

A figura 1, apresentada por Wilkie (2014), representa um exemplo de tarefa em que a maioria dos alunos recorre à generalização próxima e em que apresentam dificuldades na generalização distante. Por sua vez, as figuras 2 e 3 são o exemplo ilustrativo de que a visualização pode levar mais facilmente à generalização distante, pois ajuda os alunos a prestar atenção à correspondência entre duas variáveis.

Segundo vários autores (Barbosa et al., 2008; Blanton & Kaput, 2005; Warren & Cooper, 2008), os alunos demonstram ir desde o raciocínio recursivo ao raciocínio funcional.

Blanton e Kaput (2005) referem que o uso de tabelas, gráficos, imagens e símbolos, de forma cada vez mais sofisticada, ajudam os alunos a compreenderem e interpretarem as relações funcionais. Relativamente ao uso das tabelas, alguns autores (Barbosa et al., 2008; Warren & Cooper, 2008) refutam o uso das mesmas revelando que a utilização do contexto numérico se torna ineficaz. A estrutura numérica, que continua muito presente no ensino da Matemática, revela-se em determinados momentos um elemento condicionador da evolução do pensamento dos alunos.

Algumas dificuldades enumeradas pelos autores (Barbosa et al., 2008; Blanton & Kaput, 2005; Warren & Cooper, 2008) centram-se na linguagem utilizada pelos alunos aquando da enunciação da generalização, que a nível oral se revela muito mais facilitadora por ser acompanhada de gestos e insinuações, ao contrário da linguagem escrita que se revela muito mais problemática.

2.3.2. Estudos empíricos

Blanton e Kaput (2005) relataram os resultados da aplicação de um programa, em algumas escolas dos Estados Unidos da América, envolvendo uma dupla dimensão (professores e alunos). Este programa tinha como objetivo desenvolver nos professores a capacidade de focarem o seu ensino na generalidade matemática. Esta abordagem teria de ser desenvolvida com base nas tentativas de resolução dos alunos, bem como na utilização dos recursos dos professores, que teriam de ser remodelados para poderem apresentar tarefas com padrões de uma forma mais sistemática e assim conseguirem apoiar de forma mais eficaz os alunos. Este estudo debruçava-se, numa primeira análise, no trabalho feito pelos alunos com padrões de crescimento pictóricos, de forma a percecionar o desenvolvimento do seu raciocínio no decorrer das tarefas apresentadas. Numa segunda análise, o foco incidiu nas estratégias utilizadas pelos alunos, na evolução dessas mesmas estratégias, na postura e conhecimento dos professores e na dinâmica de sala de aula. Os autores enunciaram ações que os professores poderiam adotar para desenvolver o raciocínio funcional dos seus alunos e, de forma mais lata, levá-los a construir o pensamento algébrico. Algumas das sugestões feitas pelos autores passou pela transformação das bases de recursos dos professores, alterando as tarefas de forma a introduzir o pensamento algébrico; a utilização do raciocínio das crianças, do que estes vão escrevendo e falando, para suportar a sua aprendizagem; e a cultura e práticas de sala de aula para apoiar o pensamento algébrico levando os alunos a conjeturar, argumentar e generalizar.

Warren e Cooper (2008) discutiram os resultados de uma experiência de ensino feita em duas salas de aula dos Estados Unidos da América com alunos do 3.º ano, onde foram lecionadas duas aulas com tarefas de padrões de crescimento pictóricos. Nestas aulas, havia o propósito de investigar ações que pudessem ajudar os professores a apoiar os alunos na visualização e descrição dos padrões em termos das suas relações posicionais. Foram ainda descritos os resultados dos pré-testes e dos pós-testes feitos aos alunos. Com base nas experiências desenvolvidas e na comparação entre os testes, os investigadores conseguiram identificar um conjunto de ações que podem ser facilitadoras ou dificultadoras do desenvolvimento da aprendizagem dos alunos no âmbito do pensamento algébrico. Como ações facilitadoras, os investigadores salientam (i) a importância do uso dos materiais concretos na modelação das figuras não apresentadas na sequência, (ii) o trabalho com padrões em que a relação entre o termo e o número de ordem do termo é explícita, (iii) a colocação de questões explícitas para vincular a relação entre o termo e o número de ordem do termo, (iv) a generalização do padrão começando em pequenos números de posição para um grande número de posição, (v) utilização de cores para representar os diferentes componentes de um padrão de crescimento, e (vi) utilização de padrões pictóricos diversos. Como ações dificultadoras, os investigadores salientam (i) a linguagem usada para descrever a generalização, (ii) a escrita da generalização em comparação com o que é dito de forma oral, (iii) a utilização da linguagem para a generalização havendo dificuldades na distinção entre linguagem ordinal e cardinal, (iv) a continuação de padrões utilizando a variação única havendo a tendência para pensar em crescimento como adição, e (v) a inversão do pensamento. Estes autores também anotam algumas lacunas nas estratégias utilizadas pelos alunos aquando da visualização e descrição do padrão de crescimento, focando-se apenas nos termos do padrão e desvalorizando ou esquecendo o número de ordem desses termos, o que se encontra associado ao uso pelos alunos de tabelas, já que neste uso, os mesmos olham apenas para uma única variação, a variação numérica dos termos. Este estudo teve como enquadramento teórico a perspetiva semiótica. O estudo evidencia que alguns alunos, nas tarefas com padrões feitas em conjunto, conseguiram realizar as tarefas com sucesso, enquanto que na realização das mesmas tarefas individualmente não foram bem sucedidos, já que o domínio cognitivo e as interações sociais coexistem e apoiam a construção evolutiva do significado.

Barbosa et al. (2008) apresentaram os resultados de uma experiência de ensino feita com três turmas do 6.º ano, onde foram apresentadas tarefas de resolução de problemas envolvendo a exploração de padrões de crescimento pictóricos. As autoras salientaram que foram identificadas estratégias de contagem (nas questões de generalização próxima) e o modelo linear (nas questões de generalização distante). No final deste estudo foram referidas as dificuldades/erros dos alunos que se prenderam com a escolha do contexto numérico levando ao uso de estratégias desadequadas (aplicação da proporcionalidade direta e utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, sem efetuar qualquer ajuste no final; troca das variáveis envolvidas no problema). Por fim, denotam:

> "a utilidade da visualização em diferentes situações como a representação pictórica de termos da sequência e consequente contagem dos seus elementos, nas questões de generalização próxima, e "ver" a estrutura do padrão de forma a descobrir um modelo linear para resolver questões de generalização distante." (Barbosa et al., 2008), p. 9)

Billings et al. (2008), no seu estudo com alunos do 2.º ano, concluíram que o pensamento algébrico é mais facilmente desenvolvido se for trabalhado através de padrões de crescimento pictóricos, por estes serem uma ferramenta poderosa para a generalização. Estes mesmos autores concluíram que as crianças têm mais facilidade em analisar e ampliar padrões com figuras reconhecíveis e que só depois do trabalho com figuras reconhecíveis, se deve avançar para os padrões com figuras mais abstratas. Por fim, chegaram igualmente à conclusão de que também as questões são fulcrais no desenvolvimento desse trabalho, definindo que a primeira questão a ser colocada deverá ser "O que é que tu vês?", pois dessa forma o professor conseguirá perceber como o aluno está a pensar. Só depois deverá ser solicitado que o aluno construa a figura seguinte ou descreva a sua estrutura e analise as próximas figuras consecutivas. Por fim, deverão ser colocadas questões sobre figuras localizadas mais longe no padrão e que sejam difíceis de construir de forma recursiva. Mesmo assim, se as dificuldades persistirem, deverão ser feitas perguntas que estimulem a análise do padrão do ponto de vista da correspondência, para relacionar o número da figura com o aspeto de mudança das figuras. Desta feita, a colocação de questões explícitas, por parte do professor, para além de poderem guiar o pensamento dos alunos também são descritas como fundamentais para vincular a relação entre o termo e o número de ordem do termo e para a generalização do padrão, começando pelos primeiros termos até aos termos mais distantes (Billings et al. , 2008; Warren & Cooper, 2008).

CAPÍTULO III

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

3.1. Opções metodológicas

Tendo em conta o objetivo do estudo -- compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano de escolaridade, em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências pictóricas -- e as questões orientadoras definidas -- i) Quais as estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos?; ii) Como evoluem as estratégias utilizadas pelos alunos e o seu raciocínio?; e iii) Que fatores influenciam essa evolução? -- a metodologia seguida foi de natureza qualitativa, no âmbito do paradigma interpretativo.

A metodologia qualitativa identifica-se com a perspetiva fenomenológica de Edmund Husserl e Alfred Schutz que defendem a compreensão do significado que os acontecimentos e interações têm para as pessoas em situações concretas; com o interacionismo simbólico de Herbert Mead que defende que os significados são construídos através das interações que o sujeito realiza ao longo da sua vida pelas suas interpretações; e com a etnometodologia de Harold Garfinkel que defende a análise de atividades da vida quotidiana de forma a tentar compreender como as pessoas percebem, explicam e descrevem o mundo que as rodeia (Coutinho, 2011).

A metodologia qualitativa/paradigma interpretativo, segundo Coutinho (2011), pretende utilizar conceitos como compreensão, significado e ação.

> As experiências educacionais de pessoas de todas as idades (bem como todo o tipo de matérias que contribuem para aumentar o nosso conhecimento relativo a essas experiências), tanto em contexto escolar como exteriores à escola, podem constituir objeto de estudo. A investigação qualitativa em educação assume muitas formas e é conduzida em múltiplos contextos. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 16)

Tendo em conta que pretendo compreender a forma como cada aluno observa, replica, amplia e generaliza os padrões utilizando ou não materiais manipuláveis, essa riqueza individual vai ao encontro de uma metodologia qualitativa, desenho qualitativo de estudo de caso:

> O interesse está mais no conteúdo do que no procedimento, razão pela qual a metodologia é determinada pela problemática em estudo, que a generalização é substituída pela particularização, a relação causal e linear pela relação contextual e complexa, os resultados inquestionáveis pelos resultados questionáveis, a observação sistemática pela observação experiente ou participante. A questionabilidade dos resultados impõe-se porque mais do que um estudo de grandes amostras interessa o estudo de casos, de sujeitos que agem em situações, pois os significados que compartilham são significados-em-ação. (Pacheco, 1993, p. 28)

Optou-se pelo estudo de caso porque, segundo Yin (2001), é uma das muitas maneiras de se fazer investigação em Ciências Sociais e Humanas (CSH) e segundo este autor, este método é utilizado quando o investigador tem pouco controlo sobre os fenómenos por estes serem observados em contextos da vida real. O estudo de caso tem como finalidade o estudo intensivo do caso, neste estudo em particular, um pequeno número de casos, no seu ambiente natural. Este estudo intensivo requer uma grande diversidade de fontes e de métodos de recolha de dados.

Esta abordagem metodológica, segundo Coutinho (2011) apresenta cinco características bem definidas como:

1. O caso é um “sistema limitado”, “em termos de tempo eventos ou processos”, segundo Creswell (citado em Coutinho, 2011);
2. O caso é sobre algo que terá de ser bem definido para focar e direcionar a investigação;
3. O estudo do caso deve ser holístico;
4. A investigação ocorre no ambiente natural;
5. O investigador recorre a múltiplas fontes de dados e a métodos de recolha muito variados.

Segundo Guba & Lincoln (citados em Coutinho, 2011), num estudo de caso, o investigador pode: registar ou narrar os factos como eles ocorrem; descrever as situações ou factos; facultar conhecimento sobre o fenómeno estudado; e confirmar ou contradizer correspondências no caso.

O estudo de caso, segundo Stake (citado em Coutinho, 2011), pode distinguir-se em três tipos:

1. O estudo de caso intrínseco - melhor compreensão de um caso em particular;
2. O instrumental - serve para fornecer informação do interior do caso;
3. O coletivo - quando o caso instrumental abarca vários casos para uma compreensão mais profunda de um fenómeno/população.

Yin (2001) nomeia o estudo de caso múltiplo quando o mesmo estudo contém mais do que um caso único, sendo então um estudo de caso múltiplo. Esta foi a definição tida em consideração para este estudo, dado o objetivo e as questões orientadoras. Neste estudo, os casos são três pares de alunos, inseridos na turma onde foram realizadas as tarefas.

3.2. Participantes e critérios de seleção

Esta investigação foi realizada numa turma do 4.º ano de escolaridade, numa escola do 1.º Ciclo, na periferia de Lisboa. A turma era constituída por 22 alunos (10 raparigas e 12 rapazes), com idades compreendidas entre os 9 e os 11 anos. A professora desempenhou o duplo papel de professora/investigadora.

Foram desenvolvidas 6 tarefas com toda a turma, entre 14 de janeiro e 15 de março de 2016, mas foram objeto de uma análise mais pormenorizada, as atividades desenvolvidas por seis alunos de três díades.

O critério de seleção dos pares prendeu-se com o seu desempenho na área disciplinar da Matemática, tendo sido selecionados alunos com diferentes desempenhos nesta área. Para a seleção, também esteve patente a facilidade de comunicação oral por parte dos alunos, pois esta destreza na comunicação é fulcral para a explicação dos processos de entendimento e generalização dos padrões facilitando, assim, a interpretação pelo investigador dos processos de raciocínio dos alunos.

O primeiro grupo era constituído pela Clara e pelo José. A Clara era uma aluna com dislexia, integrada como aluna NEE, e um baixo desempenho na área da Matemática, mas sempre muito motivada por tarefas que envolviam material. O José era um aluno muito hábil na área da Matemática e apresentava um bom cálculo mental.

O segundo grupo era constituído pela Susana e pelo Emanuel. A Susana era uma aluna que apresentava um bom cálculo mental e bons desempenhos na área da Matemática. O Emanuel era um aluno que revelava potencial na área da Matemática quando era apoiado mas, por ser um aluno com alguma baixa autoestima, frequentemente duvidava de si e das suas capacidades.

O terceiro grupo era constituído pela Patrícia e pelo Ricardo. A Patrícia era uma aluna também com um baixo desempenho na área da Matemática mas que gostava muito de tarefas matemáticas envolvendo materiais e nessas alturas o seu desempenho melhorava. O Ricardo era um aluno muito hábil na área da Matemática que apresentava um bom cálculo mental e bons raciocínios. A Matemática era a sua área forte. Era um aluno que também tinha integrado a turma nesse ano letivo, tendo vindo de outra escola.

3.3. Modo de implementação das tarefas

Uma vez que eu trabalhava com a turma nesse ano, pela primeira vez, os alunos tiveram contacto com padrões no final do 1.º período letivo, através de uma sequência didática de três tarefas com padrões de repetição. Durante o 2.º período letivo, foi então iniciada a sequência didática de seis tarefas com padrões de crescimento pictóricos que foram selecionadas em jeito de sequência didática, de forma a que este conteúdo pudesse ser explorado com um grau de dificuldade gradativo.

As tarefas foram trabalhadas como se se tratasse de uma rotina de trabalho da turma. Inicialmente, foram planificadas de forma a terem uma periocidade semanal. Contudo, de acordo com alguns constrangimentos de funcionamento da escola, a sua periocidade foi alterada.

Toda a turma estava organizada em díades e era distribuído, por cada díade, um envelope com o material manipulável de apoio à exploração da tarefa. O material disponibilizado apenas permitia aos alunos construírem as três primeiras figuras da sequência apresentada, sem desfazer nenhuma das figuras anteriores; ou desfazendo as figuras anteriores, construírem as figuras posteriores até à 6.ª figura (tarefa 1, tarefa 3, tarefa 4, tarefa 5) ou até à 7.ª figura (tarefa 2). A única exceção foi no material disponível para a tarefa 6 que não permitia a construção de mais nenhuma figura a não ser as da sequência apresentada. Esta opção de limitação da quantidade de material a disponibilizar aos alunos visava incentivá-los a avançar no seu raciocínio, focando-os numa generalização distante.

Todas as aulas relativas à implementação das tarefas tiveram a mesma metodologia de trabalho dividida em dois momentos distintos. Num primeiro momento, os alunos trabalhavam em díade, onde eu efetuava algumas intervenções pontuais para colocar questões de forma a clarificar ou orientar os seus raciocínios, ou sempre que surgiam dúvidas. Sempre que os alunos terminaram as tarefas em díade, eu reforcei que os alunos deveriam rever as resoluções de todas as questões de forma a poder encontrar erros de resolução ou para melhoramento das suas resoluções. O melhoramento poderia estar patente porque poderiam haver evoluções no pensamento dos alunos, desde o momento das questões iniciais até às questões finais, que os levassem à aplicação de novos raciocínios e novas resoluções. Num segundo momento, os alunos apresentavam as suas estratégias e resultados a toda a turma e propiciava-se um momento de discussão.

3.4. Sequência das tarefas

As tarefas iniciais apresentavam uma relação direta entre o termo e o seu número de ordem, com algumas partes do termo assinaladas com uma cor diferente, e que foram aumentando de dificuldade passando de padrões lineares a padrões não lineares. Também as questões colocadas no enunciado das tarefas foram aumentando de dificuldade. As questões iniciais interrogavam acerca da quantidade de elementos de diferentes figuras, começando pela figura seguinte, a 4.ª figura, e incidindo depois em figuras um pouco mais distantes, a 10.ª e a 15.ª figuras. Entre as questões da 10.ª e da 15.ª figuras, estava a questão que interrogava acerca da relação entre o termo e o seu número de ordem. As últimas questões preconizavam a utilização do raciocínio inversivo. Estas questões apelando ao raciocínio inversivo foram introduzidas a partir da tarefa 2. Na última tarefa foi colocada uma questão que interrogava acerca de elementos do termo de um número de ordem distante, como a 100.ª figura.

Tabela 1

Calendarização da exploração das tarefas

Calendarização	**Origem**	**Material disponibilizado**	**Descrição**
14 de janeiro de 2016	Adaptado de Warren e Cooper (2008, p. 175).	6 quadrados brancos e 6 quadrados pretos	O termo era constituído por dois elementos constantes (dois quadrados brancos) e por elementos que variavam de acordo com o número de ordem da figura (quadrados brancos).
22 de janeiro de 2016	Adaptado de Warren e Cooper (2008, p. 175).	15 quadrados	O termo era constituído por duas colunas: quadrados do lado esquerdo que variavam de acordo com o número de ordem da figura e os quadrados do lado direito que variavam de acordo com o número de ordem da figura mas com mais um quadrado.
17 de fevereiro de 2016	Adaptado de Wilkie, K. (2014, p. 25).	21 círculos	O termo era constituído por um elemento constante (o círculo do meio) e por elementos que variavam de acordo com o número de ordem da figura (círculos que evoluíam em três direções diferentes de acordo com o número de ordem da figura).
19 de fevereiro de 2016	Adaptado de Vale, Pimentel, Barbosa et al. (2011, p. 27).	21 palitos	O termo era constituído por um elemento constante (o palito vertical inicial ou final) e por elementos que variavam de acordo com o número de ordem da figura (três palitos que evoluíam de acordo com o número de ordem da figura).
26 de fevereiro de	Adaptado de	6 quadrados pretos	Padrão com estrutura retangular

2016	Carvalho et al. (s.d., p. 48)	e 30 quadrados brancos	sendo os quadrados pretos os elementos que variavam de acordo com o número de ordem da figura e os quadrados brancos revestindo os quadrados pretos.
15 de março de 2016	Adaptado de Vale, Pimentel, Barbosa et al. (2011, p. 27).	14 quadrados e 10 triângulos	Padrão formado por duas partes: uma com estrutura retangular formado por quadrados que variavam de acordo com o número de ordem da figura (tijolos) e outra com estrutura triangular que variavam de acordo com o número de ordem da figura (telhas).

3.5. Recolha de dados

Face ao tema e ao objetivo proposto e de acordo com a opção metodológica tomada, a recolha de dados foi feita através de técnicas como: observação participante e análise documental (Bogdan & Biklen,1994; Coutinho, 2011).

Para a recolha de dados nesta investigação, a observação foi naturalista, pois pretendi recolher dados no ambiente natural, e ainda participante tendo em conta que existiu a participação ativa do investigador (Coutinho, 2011). Também Bogdan & Biklen (1994) partilham as mesmas ideias, referindo que na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal. O investigador também se preocupa com o contexto e por isso mesmo faz a recolha dos seus dados no local onde estão inseridos.

A recolha de dados foi feita através de sistemas de recolha de dados considerado aberto pois o investigador não está, à partida, cingido a uma categorização pré-definida (Lessard-Hébert, Goyette, & Boutin, 2005). De entre os sistemas de recolha de dados abertos foram utilizados as notas de campo e os registos áudio e de vídeo. Durante a realização das tarefas, eu fui tomando breves notas do trabalho desenvolvido pelos alunos, do seu envolvimento e das suas estratégias da resolução. Após a realização das tarefas, já com mais disponibilidade, pude rever essas notas de campo e completá-las com informações mais pormenorizadas, pois tal como referido por Lessard-Hébert et al. (2005), as notas de campo são como uma descrição narrativa do que é observado. Houve ainda lugar para registos áudio e de vídeo. Este sistema de observação tecnológico de registo permitiu recolher dados sem a interferência do investigador, uma vez que a partir do momento em que estes se encontram ligados captam todas as imagens e sons dos locais e dos intervenientes (Lessard-Hébert et al., 2005).

Para a análise documental, foram analisados os trabalhos realizados pelos alunos, as notas de campo e ainda as transcrições dos registos áudio e vídeo pois todos os registos dos dados recolhidos numa investigação qualitativa são considerados documentos (Bogdan & Biklen, 1994). Estes serviram para fazer pequenos ajustes no enunciado das tarefas propostas ao longo da investigação mas também para garantir a credibilidade do estudo através da triangulação dos dados provenientes de diferentes fontes (Flick, 1998, citado por Coutinho, 2011).

Assim, a triangulação é conseguida através da utilização das duas técnicas de recolha de dados: observação participante e análise documental. Trata-se de uma triangulação metodológica (Flick, citado por Coutinho, 2011), em que o investigador utiliza combinações metodológicas. A triangulação foi deveras importante pois permitiu fazer uma análise mais profunda e mais rica do objeto do estudo.

3.6. Análise de dados

A análise dos dados foi baseada numa análise qualitativa tendo em conta a opção metodológica.

> A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo simulados, com o objectivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205)

Para conduzir a análise dos dados, tive sempre muito presente o meu objetivo e as minhas questões orientadoras. Para além disso, foi feito um trabalho preliminar de revisão da literatura que me forneceu um quadro teórico sólido onde apoiei a minha análise. No momento da recolha de dados, foi feita logo uma primeira análise (Bogdan & Biklen, 1994), nomeadamente na escrita de ideias ou insights nas notas de campo. Para a análise dos dados, revi todos os documentos recolhidos (notas de campo, trabalhos realizados pelos alunos e transcrições dos registos áudio e vídeo). A par desta revisão, efetuei o cruzamento dos dados com o quadro teórico, de acordo com a revisão da literatura efetuada e que se encontrava de acordo com o meu objetivo de estudo.

Posteriormente desenvolvi um sistema de codificação dos dados (Bogdan & Biklen, 1994), que me permitiu chegar às conclusões que foram explanadas depois da análise dos dados.

Para a categorização dos dados foi tido em consideração o quadro teórico definido por Blanton e Kaput (2005), Ponte et al. (2009), Stacey (1989), Smith (2003), Vale, Pimentel, Alvarenga et al. (2011) e Warren e Cooper (2008). Assim, passo a apresentar um quadro com as categorias analíticas usadas no presente estudo e provenientes dos autores atrás indicados.

Tabela 2

Categorias analíticas

Categorias	**Subcategorias**
Estratégia	Estratégia aditiva
	Estratégia de representação e contagem
	Estratégia do objeto inteiro
	Estratégia da decomposição dos termos
Raciocínio	Raciocínio recursivo
	Raciocínio funcional

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo procederei à análise de dados decorrente da aplicação de 6 tarefas com sequências pictóricas de crescimento.

Este capítulo está organizado em três secções, cada uma correspondendo a cada uma das díades observadas. Em cada uma das secções será feita a análise das 6 tarefas desenvolvidas pelos alunos correspondentes. Foi escolhida esta forma de organização pois desta forma será mais fácil analisar a evolução de cada uma das díades, ao longo do trabalho desenvolvido neste trabalho de investigação.

4.1. Grupo da Clara e do José

Tarefa 1

Depois de entregue o material (6 quadrados brancos e 6 quadrados pretos) ao grupo e a folha de registo, os alunos começaram logo a olhar para o padrão desenhado na folha e a retirar conclusões de forma a poderem responder às questões. O José depressa percebeu qual seria a relação entre o termo e o seu número de ordem descrevendo à Clara como seria a parte preta do 4.º termo do padrão, que era o que estava a ser solicitado na 1.ª questão.

> José- Tem que ser 4 porque esta (*apontando para a 1.ª figura*) tem só um, a 1.ª, a 2.ª tem 2 e a 3.ª tem 3. (*pausa*) Então será 4.

O José conseguiu chegar a essa conclusão mesmo sem manusear o material disponibilizado. Este material só começou a ser utilizado porque a Clara lhe disse que o material serviria para os ajudar quando precisassem e aí o José começou a construir a figura para confirmar a conclusão a que tinha chegado. Para explicarem como tinham chegado à sua resposta escreveram a forma como o José verbalizou a sua explicação: "A 4.ª figura tem 4 quadrados pretos, porque a 1.ª tem 1, a 2.ª tem 2 e a 3.ª tem 3.".

Na 2.ª questão, onde era exigida a explicitação para uma figura mais distante, a 10.ª figura, o José respondeu imediatamente que seriam 10 quadrados pretos. A Clara ficou hesitante, mesmo com a explicação do José, e tentou chegar a uma conclusão com o material, mas sem sucesso pois o material disponibilizado apenas permitia a construção das três figuras iniciais do padrão ou então até à 6.ª figura do padrão, pois só tinham acesso a seis quadrados pretos. Então o José tentou explicar-lhe de outra forma:

José- Vamos fazer a mesma coisa. É só mudarmos o 4 pelo 10. Né [sic]?

Clara- Acho que sim. Acho eu.

Os elementos da díade escreveram novamente, sob a forma de narrativa, a sua explicação, com o José a liderar o que iriam escrever: "A 10.ª figura tem 10 quadrados, porque a 1.ª tem 1, a 2.ª tem 2 e a 3.ª tem 3.".

A Clara expressou alguma hesitação talvez por ainda não compreender que ao dar a resposta sob a forma de narrativa já estava a fazer a explicação/justificação da sua resposta.

A 3.ª questão levantou muitas dúvidas pois era a primeira vez que teriam de escrever uma frase onde relacionariam o termo com o número de ordem do termo. Para o grupo, esta questão não estava explícita pois até então tinham estado a escrever frases baseadas na interpretação do padrão tendo por base um dado número de ordem do termo, algo que não era solicitado na questão. Só depois de um breve diálogo comigo, em que foi reforçada a relação entre o termo e o número de ordem do termo, é que os elementos da díade perceberam o que era pretendido com a explicação da relação.

Clara- Aqui, a número 2 tem 2 quadrados pretos, é a relação deles.

Professora- E a 3.ª figura?

José e Clara- Tem 3 quadrados pretos.

Professora- E a 1.ª?

José e Clara- Tem 1.

Professora- Então há alguma relação entre o número da figura e o número dos quadrados pretos?

José e Clara- Sim.

Professora- Qual é?

José- Que é sempre o mesmo.

Clara- O número de quadrados pretos.

Professora- O que é? O que é sempre o mesmo?

Clara- O número de quadrados.

José- O número de quadrados e o número da figura.

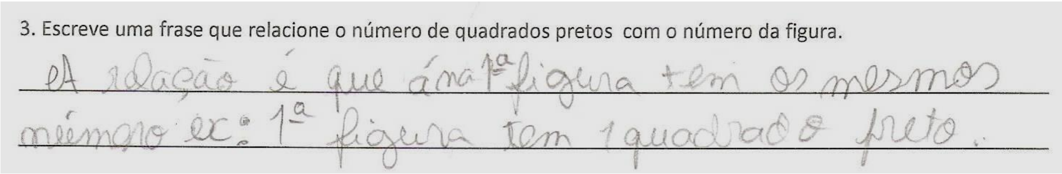
Professora- O número dos quadrados todos?

Clara- Pretos, os quadrados pretos.

José- Dos pretos.

Professora- Há essa relação? (*tanto a Clara como o José acenam que sim com a cabeça*)

No entanto, apesar de perceberem a relação existente, aquando da sua explicação, tiveram a necessidade de se referirem a uma das figuras, nomeadamente à 1.ª figura.


3. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados pretos com o número da figura.

A relação é que ána 1ª figura tem os mesmos número ex: 1ª figura tem 1quadrado preto.

Figura 4- Escrita da relação entre a parte do termo dos quadrados pretos e o número de ordem do termo, feita pela Clara, para a 3.ª questão da tarefa 1

A 4.ª questão estava relacionada com todo o termo, incluindo os quadrados brancos e os quadrados pretos. Inicialmente, os alunos tenderam a relatar que a questão era igual à 1.ª questão, mas depressa perceberam que a questão não se referia apenas a uma parte do termo. Para chegarem à resposta a esta questão, utilizaram o material construindo a 4.ª figura, o José fazendo a decomposição dos termos e a Clara fazendo apenas a contagem de todos os elementos. Mais uma vez, o José evidenciou um raciocínio mais estruturado do que a Clara, conseguindo compreender a decomposição do termo.

José- Então vamos lá ver (*mexendo no material*).

Clara- Espera aí (*a Clara está a organizar o material para começar a construir uma figura, a 4.ª figura*).

José- Ah! É sempre 4 mais 2 por causa destes (*apontando para os quadrados brancos*). Que dá 6.

(*Clara confirma contando de um em um*)

Clara- 1, 2, 3, 4, 5, 6, dá 6. Já sei.

(*ambos arrumam o material*)

Clara- Podemos fazer o desenho com os quadrados pretos e 6 quadrados ao todo, podemos, não podemos?

José- Sim. Fazemos assim. (*e começa a desenhar a 4.ª figura*)

Para a justificação da sua resposta, o grupo optou por fazer a representação pictórica da 4.ª figura, tal como representou com o material manipulável, nomeando cada um dos quadrados da figura com um número.

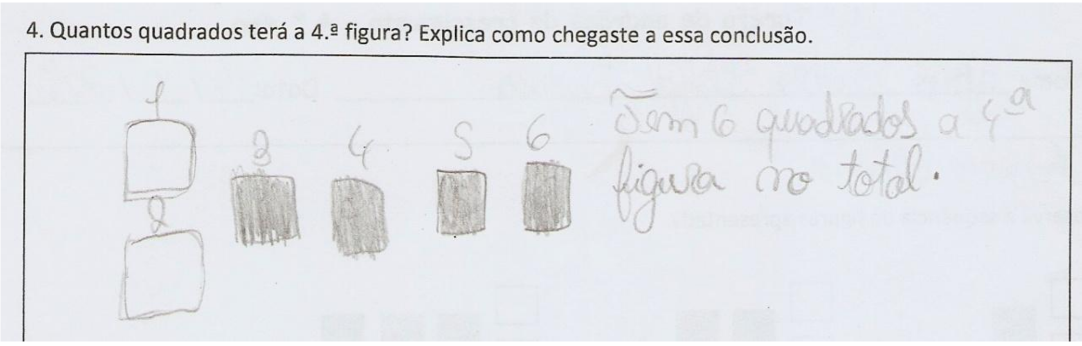


Figura 5- Representação pictórica da 4.ª figura feita pelo José, para a 4.ª questão da tarefa 1

Na 5.ª questão, tal como na 2.ª questão, era solicitado o número de quadrados de uma figura mais distante, a 10.ª figura, mas desta vez solicitando o total de todos os quadrados (brancos e pretos). O José sugeriu que fizessem novamente a representação pictórica, continuando o trabalho que tinham feito na questão anterior.

José- Vamos continuar. 5,6,7,8,9,10 (*vai nomeando os quadrados que acrescenta à 4.ª figura enquanto os vai desenhando*) (*pausa*) É preciso contarmos (*e começa a colocar os números por cima dos quadrados à medida que os conta*). 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. *(o José vai soletrando a resposta enquanto a Clara ainda pinta os quadrados pretos*) Tem doze quadrados a 10.ª figura no total.

(*depois de pintar os quadrados pretos, a Clara copia a resposta do José, enquanto este começa já a ler a 6.ª questão sem esperar por ela*)

O José, apesar de se ancorar na figura anterior e que por tal facto poderia evidenciar um raciocínio recursivo, ele apresentou já um raciocínio funcional pela decomposição do termo, terminando a sua resposta muito rapidamente.

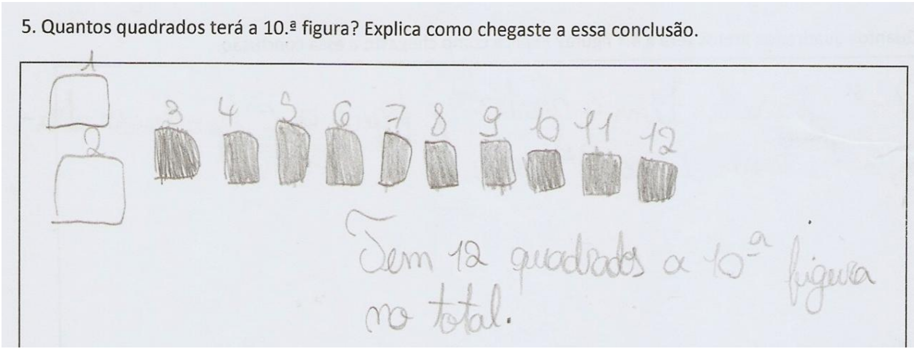


Figura 6- Representação pictórica da 10.ª figura feita pelo José, para a 5.ª questão da tarefa 1

Mais uma vez, a 6.ª questão envolveu alguma dificuldade por solicitar novamente a frase que explicaria a relação entre o termo e o número de ordem do termo.

> José- Eu acho que sei. Como a professora nos ajudou há bocado, podemos fazer assim: a 4.ª figura tem 4 quadrados pretos mais 2 brancos, no princípio, igual a 6 quadrados. (*a Clara faz uma expressão de indecisão*) Está bem?
>
> Clara- Podemos dar a exemplo deste (*apontando para a 10.ª figura*).

O José resolveu o problema mobilizando a explicação que eu dei. Contudo, acabaram por utilizar um dos exemplos para explicar a relação e não escreveram a expressão generalizante.

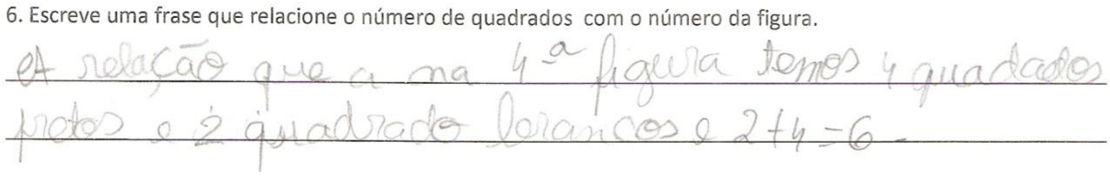


Figura 7- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pela Clara, para a 6.ª questão da tarefa 1

Tarefa 2

Depois de distribuído o material para a tarefa (15 quadrados) e as folhas de trabalho, ambos observaram a sequência apresentada. O José começou por ler a 1.ª questão e, quase de imediato, foi relatando o que observava, como visualizava as figuras e terminou descrevendo como seria a 4.ª figura.

> José- Observa a sequência de figuras apresentada. Quantos quadrados terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*). (*pausa*) Então se a 1.ª tem aqui um (*apontando para o lado esquerdo da figura*) e aqui

dois (*apontando para o lado direito da figura*), a 2.ª tem aqui dois (*apontando para o lado esquerdo da figura*) e aqui três (*apontando para o lado direito da figura*), a 3.ª tem aqui três (*apontando para o lado esquerdo da figura*) e aqui quatro (*apontando para o lado direito da figura*), a 4.ª vai ter aqui quatro (*apontando para o lado esquerdo da figura*) e aqui cinco (*apontando para o lado direito da figura*).

O José, para responder à 1.ª questão, teve a necessidade de percorrer todas as figuras da sequência, recorrendo sempre à decomposição do termo, até chegar ao 4.º termo. Apesar da sua narrativa, a Clara não conseguiu compreender o seu raciocínio, então ele tentou explicar-lhe primeiro na sua folha de trabalho e depois através da construção das figuras, recorrendo à utilização do material.

Clara- Ah!?

José- É sempre mais um. Acrescentamos um quadrado aqui (*rodeando na sua folha de trabalho, na 3.ª figura da sequência, o quadrado em cima do lado direito*).

Clara- Não sei. Mas espera… (*e vai buscar o material começando a construir o lado esquerdo da 4.ª figura*)

José- Então vamos ver. (*e ajuda-a a construir a figura colocando logo um quadrado ao lado do último quadrado da coluna da esquerda e colocando por cima aquele quadrado que acrescentar e só depois completa a coluna da direita para baixo*) Depois fazemos o desenho?

O José visualizou a figura de uma forma correta, fazendo sempre a decomposição do termo. Ao rodear apenas o quadrado de cima da coluna do lado direito, revelou a consciência de que a coluna do lado direito tinha sempre mais um quadrado do que a coluna do lado esquerdo ("É sempre mais um. Acrescentamos um quadrado aqui."). Depois da narrativa e da construção das figuras, nas suas respostas optaram por escrever a forma como visualizaram a figura, fazendo a decomposição do termo, não referindo o total de quadrados da figura e fazendo ainda a representação pictórica da 4.ª figura.

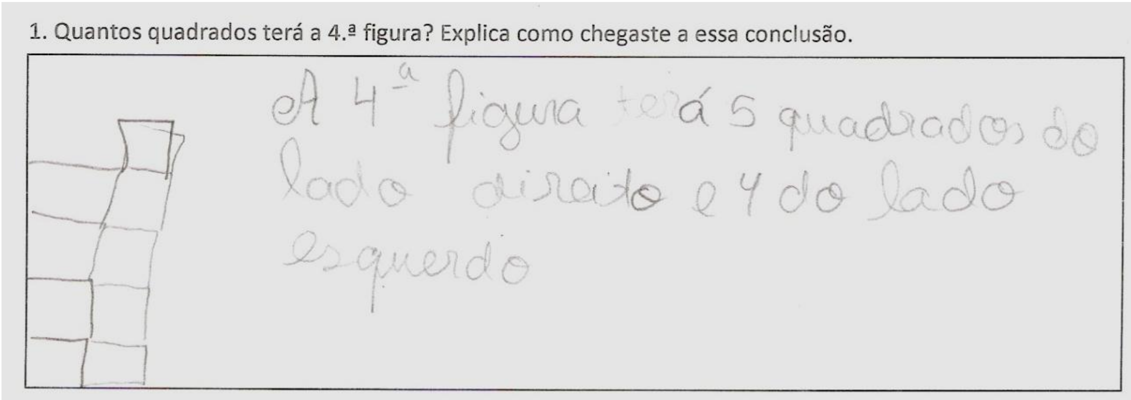


Figura 8- Representação pictórica da 4.ª figura e explicação feita pela Clara, para a 1.ª questão da tarefa 2

Avançaram depois para a 2.ª questão. Logo no início, o José comentou que não tinham material suficiente. Este seu comentário revelou que, mesmo sem ter ainda partilhado com a Clara como seria a 10.ª figura, ele já tinha em mente qual seria a resposta à questão. A sua habilidade de raciocínio é tal que no decorrer da construção da figura com o material que foi disponibilizado, ele encontra uma estratégia para ancorar a representação da figura e a contagem dos quadrados.

> José- Passa aí mais cinco (*e vai construindo o lado esquerdo da 10.ª figura com 10 quadrados*). Temos que desenhar isto, mais um (*referindo-se ao lado direito da figura em falta pois não tinham material suficiente para o construir)*. Podemos fazer assim *(e coloca apenas o último quadrado de cima, do lado direito*) para não nos perdermos.
>
> Clara- E depois imaginamos que temos o resto (*a Clara tenta terminar o lado direito colocando o material que lhe sobrou*).

Para demonstrarem a forma como chegaram à conclusão, o José sugeriu que copiassem a resposta anterior, sendo que teriam apenas de substituir os números da resposta anterior. Também aqui fizeram a representação pictórica da figura.

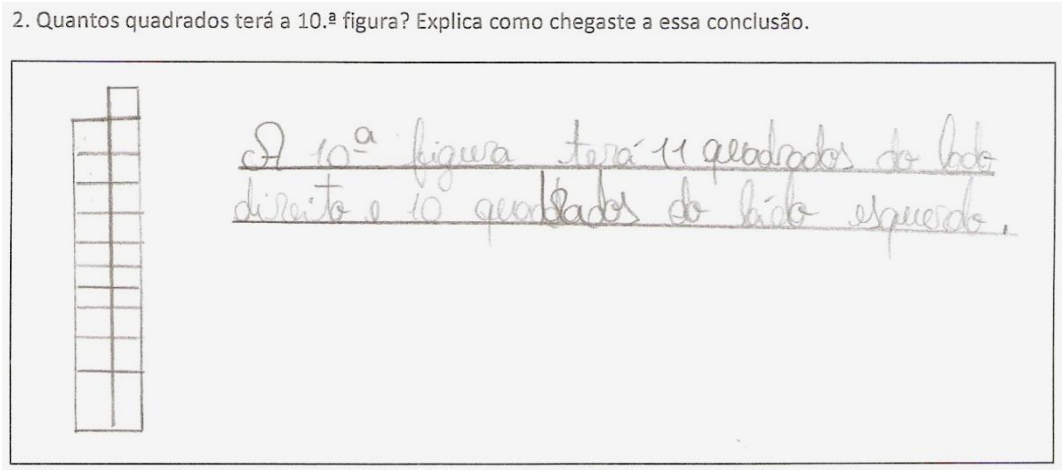


Figura 9- Representação pictórica da 10.ª figura e explicação feita pelo José, para a 2.ª questão da tarefa 2

Na 3.ª questão, os alunos da díade discutiram acerca da relação que visualizaram entre o termo e o seu número de ordem.

Clara- Então… todas as figuras têm o mesmo número de quadrados do lado direito… (*a Clara refere lado direito mas está a apontar para o lado esquerdo*)

José- Então, podemos dizer assim… que a 1.ª figura…

Clara- Não, não podemos dar exemplos. Temos de falar de todas.

José- Mas estamos a relacionar com o número da figura. Podemos explicar pela 1.ª.

Clara- Mas tem de dar para todas as figuras.

José- Sim, para todas as formas. Na 1.ª, há duas aqui no chão, retas, e depois há mais uma do lado direito.

Clara- Já viste… aqui do lado esquerdo, tem o mesmo número da figura… (*a Clara continua a insistir que o José olhe para o lado esquerdo das figuras)* O número da figura, o número de quadrados… Todas as figuras terão… Todas as figuras tinham…

José- Um quadrado a mais do lado direito…

Clara- Não… (…) Não! Aqui em baixo tem o mesmo número de quadrados (*tentando explicar ao José que ela está a relacionar o número da figura com a coluna da esquerda*).

José- Ah!

Clara- Percebeste? (*o José acena que sim com a cabeça*) O número da figura… Vais ter sempre o mesmo número de quadrados deste lado da figura, é isso que estou-te a explicar. Já percebeste?

José- Sim.

Neste diálogo, foi percetível que a Clara visualizou a figura concentrando-se no lado esquerdo do termo ("… aqui do lado esquerdo, tem o mesmo número da figura…") e que por sua vez, o José visualizou a figura, concentrando-se no lado direito do termo e comparando-o com o lado esquerdo ("Um quadrado a mais do lado direito…"). Ambos demonstraram ter razão pois cada um focou-se numa parte do termo e chegaram a conclusões relevantes. Para a escrita da relação, a Clara referiu que não podiam dar exemplos, tendo a noção de que a frase teria de conter a generalização que poderia ser aplicada a todas as figuras do padrão. Apesar disso, no momento de escrita da relação, a Clara escreveu "Do lado esquerdo da figura serão o número da figura.", e por sua vez, o José escreveu "O número de quadrados do lado esquerdo é sempre igual ao da figura.". O facto de não terem escrito exatamente da mesma forma incomodou um pouco a Clara que referiu: "Mas se é um trabalho de grupo, temos de escrever a mesma coisa.".

Na 4.ª questão, o José narrou como seria a 15.ª figura, de acordo com a forma como visualizava o termo, ou seja, focou-se apenas no lado direito do padrão dizendo que teria quinze mais um ("Então fazemos os quinze quadrados e depois metemos mais um no fim."). A Clara revelou-se mais cautelosa e tentou construir a figura, mas sem sucesso pois não tinha o material necessário para o fazer. Enquanto a Clara manuseava o material, o José avançou rapidamente para a 5.ª questão, dando a resposta de imediato, e depois avançou para a 6.ª questão. De repente, voltou atrás e terminou a sua resposta em conjunto com a Clara. Mais uma vez, escolheram fazer a representação pictórica da figura e a sua descrição como sendo constituída pelos lados direito e esquerdo, não fazendo referência ao número total de quadrados da figura.

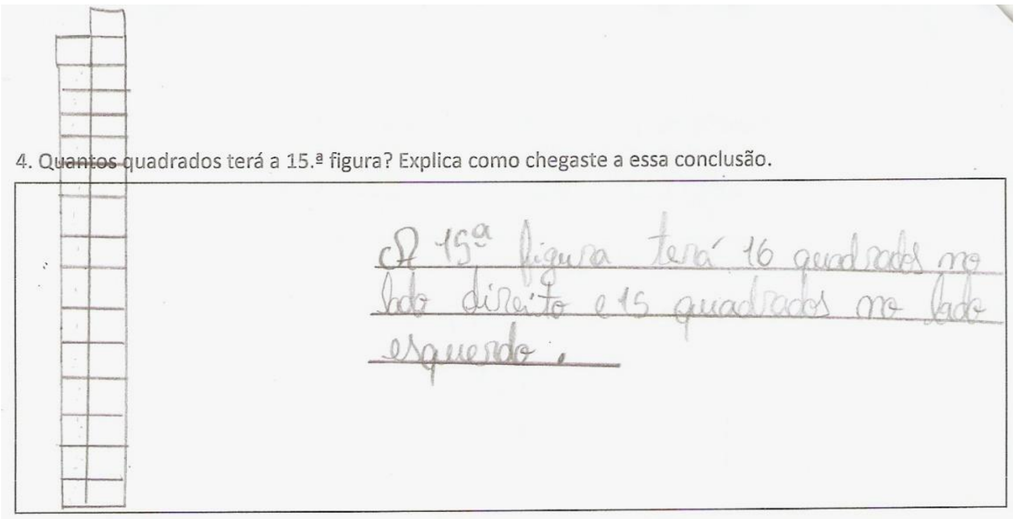


Figura 10- Representação pictórica da 15.ª figura e explicação feita pelo José, para a 4.ª questão da tarefa 2

Tal como referido anteriormente, quando passaram para a 5.ª questão, já o José tinha encontrado a resposta. Mesmo assim, o José tentou explicar à Clara a forma como tinha chegado à resposta de que seria a 20.ª figura a ter 41 quadrados.

José- Qual o número da figura que tem 41 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*). Será o número vinte? (*por falta de resposta da Clara, o José dá-lhe uma cotovelada para chamar a sua atenção*) Será o número vinte?

(*a professora aproxima-se*)

Professora- Onde?

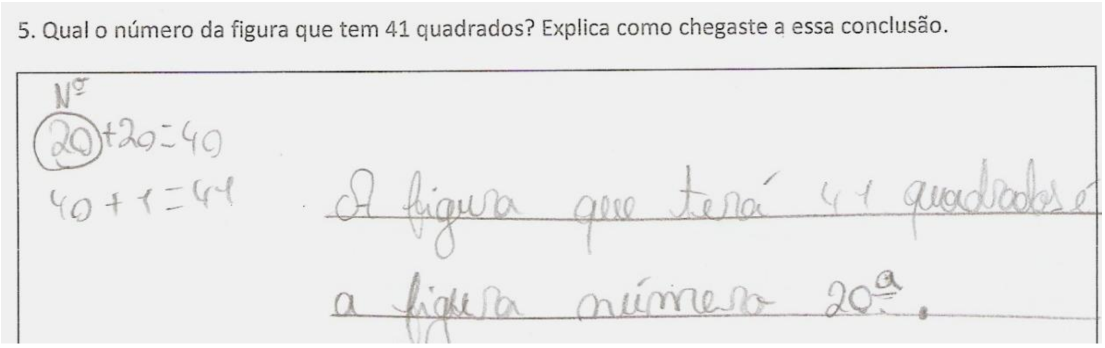
José- Nesta. (*apontando para a 5.ª questão*) Porque vinte mais vinte dá quarenta e do lado direito há mais um, quarenta e um.

Clara- Pois…

José- Não é?

Clara- Agora como é que vamos fazer? Com esses quadrados não temos espaço. (*mas começa a desenhar*)

José- Não é preciso desenhares! Aqui pergunta qual é o número da figura. Podemos fazer uma conta. Assim… Vinte mais vinte igual a quarenta. Quarenta mais um, igual quarenta e um. (*e começa a escrever 20+20=40 e 40+1=41, enquanto a Clara vai copiando da folha do José*)


5. Qual o número da figura que tem 41 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão.

Nº
20+20=40
40+1=41

A figura que terá 41 quadrados é a figura número 20ª.

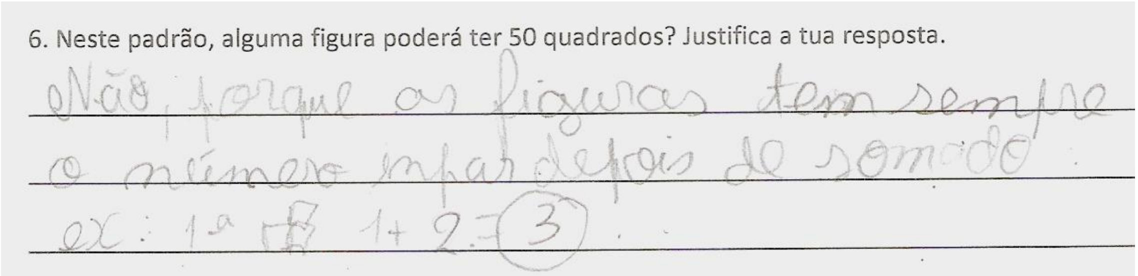
Figura 11- Apresentação de resultados feita pelo José, para a 5.ª questão da tarefa 2

O raciocínio inversivo, inerente a esta questão, foi explicitado por José seguindo uma abordagem construtiva, ao partir do número de ordem da figura. Assim, pelo modo rápido como resolveu a questão, ele demonstrou ter atingido o raciocínio funcional neste padrão, conseguindo aplicar a relação encontrada a um termo mais distante e descobrir o número da figura de acordo com a sua constituição. Contudo, no momento de discussão com toda a turma, o José narrou "Nós tínhamos 41, tiramos 1 e depois fizemos a metade de 40.", revelando o raciocínio inversivo.

Na 6.ª questão, o José foi mais uma vez muito perspicaz e muito rápido na resposta.

> José- É fácil. 50 menos 1, dá 49. O 49 não dá para fazer a metade.
>
> Clara- Ah!?
>
> José- Eu explico… Temos que ter sempre o número da figura duas vezes, do lado esquerdo e do lado direito, que é duas vezes e depois mais um.
>
> Clara- Ainda não percebi.
>
> José- Se tirarmos este de cima, os que sobram… temos sempre que dividir pelas duas colunas para ficarem com os mesmos quadrados. E por isso é que temos que ter sempre um número ímpar para tirar esse um. (*a Clara acena que não com a cabeça*) Olha aqui. A 1.ª figura tem 1 de cada lado e depois com este de cima, faz 3. A 2.ª figura tem 2 de cada lado e depois este de cima, faz 5. A 3.ª figura tem 3 de cada lado e depois este de cima, faz 7. A 4.ª figura tem 4 de cada lado e depois este de cima, faz 9. A 10.ª figura tem 10 de cada lado e depois este de cima, faz 21. A 15.ª figura tem 15 de cada lado e depois este de cima, faz 31.

O José afirmou que para qualquer figura tinha de colocar o número da figura duas vezes e com o quadrado de cima vai sempre obter um número ímpar. Para consolidar a sua conclusão, verificou se todas as figuras tinham um total de quadrados em número ímpar. À medida que foi verificando, foi explicando à Clara a distribuição dos quadrados pelas duas colunas e que depois da junção do quadrado de cima ia fazer com que o total de quadrados fosse sempre um número ímpar.


6. Neste padrão, alguma figura poderá ter 50 quadrados? Justifica a tua resposta.

Não, porque as figuras tem sempre o número impar depois de somado.
ex: 1ª 1+2=3

Figura 12- Explicação feita pela Clara, para a 6.ª questão da tarefa 2

A resposta escrita deste par apresenta uma justificação para o facto de os termos serem sempre números ímpares recorrendo ao exemplo da 1.ª figura através quer do contexto visual quer do numérico.

Revisão da tarefa 2

No momento da revisão, o José referiu que a relação que haviam escrito na 3.ª questão estava errada e decidiram apagar. Foi então que decidiram chamar-me porque estavam com dúvidas acerca do que tinham de responder.

> Professora- Qual é a relação entre o número da figura e o número dos quadrados? (*pausa*) Há alguma relação entre o número da figura e o número de quadrados que essa figura tem? Precisam de observar primeiro a sequência para descobrirem essa relação que se aplique a todas as figuras.
>
> (*pausa*)
>
> José- Eu já olhei todas as figuras… e não me parece que tenham algo em comum, só o lado esquerdo…
>
> Clara- Em todas as figuras estamos a acrescentar um quadrado no total…
>
> José- Todas as figuras têm sempre mais um quadrado do que no outro?
>
> Clara- Sim.
>
> José- Não, tem mais dois. Olha aqui três (*apontando para a 1.ª figura*) e aqui (*apontando para a 2.ª figura*) seis, quatro (*abanando que não com a cabeça*),

cinco… (*pausa*) É sempre mais dois, aqui estão cinco, aqui devem estar sete (*apontando para três primeiras figuras da sequência*) Estão sete… Estão sete.

Professora- Mas a pergunta que eu estou a fazer aí é sobre a evolução das figuras? (*o José acena que não com a cabeça*) Não é!?

Nesta parte inicial do diálogo, o José mostrou um raciocínio recursivo porque afirmou que entre cada figura ia aumentando sempre mais dois quadrados. Contudo, com a continuação do diálogo, o José revelou outro tipo de raciocínio.

Professora- Vocês para fazerem a 10.ª figura… como é que a fizeram?

José- Fizemos… Metemos dez quadrados de lado (*colocando os dez quadrados da coluna da esquerda em cima da mesa com o material*) e depois imaginámos que tínhamos aqui mais um (*colocando o último quadrado de cima da coluna da direita e os quatro quadrados que lhe sobravam por baixo ficando a coluna do lado direito apenas com cinco quadrados*).

Professora- Só tinhas do outro lado apenas mais um?

José- Sim.

(*a professora retira os quatro quadrados de baixo e deixa apenas o de cima*)

Professora- Só tens mais um?

José- Mais um do que este lado. (*apontando para o lado esquerdo*)

Professora- Apenas mais um? É isto a única coisa que tu tens? (*perguntando se o lado direito só vai ter o quadrado que lá está*)

José- Não.

Professora- Então?

José- Também tenho mais deste lado. (*apontando para o lado direito onde faltam os quadrados*)

Professora- Quantos?

José- Dez.

Com a descrição de como construiu a 10.ª figura, o José revelou ter atingido um raciocínio funcional, através da decomposição do termo em duas colunas.

Professora- Então o que é que tu tens na 10.ª figura?

José- Dez do lado esquerdo e onze do lado direito.

Professora- Mas tu há pouco estavas-me a falar em mais um, certo?

José- Sim.

Professora- Porquê? Porque daqui tinhas… (*apontando para o lado esquerdo da figura*)

José- Dez.

Professora- E desse lado? (*apontando para o lado direito da figura*)

José- Dez.

Professora- Só dez?

José- Não.

Professora- Quantos é que tu tens desse lado? (*apontando para o lado direito da figura*)

(…)

José- Dez.

Professora- E ainda…

José- Mais um.

Professora- Então, há alguma relação? (*pausa*) O que é que tu tens então na 10.ª figura?

(*pausa*)

José- Vinte e um quadrados.

Professora- Porquê?

José- Porque dez mais dez é vinte e mais um dá vinte e um.

(…)

Professora- Então, eu quero que tu te centres numa figura e que percebas a relação para depois explicares para todas. É isso que te estou a tentar fazer perceber. Na 10.ª figura tu disseste-me dez mais um. Quanto é que é dez mais um?

José- Onze.

Professora- E quantos quadrados é que tu disseste que tinha a 10.ª figura?

José- Vinte e um.

Professora- É o mesmo resultado?

José- Não.

Professora- Não. Então, tu estás-te a esquecer de dizer alguma coisa. (*pausa*) O que é que te falta a este dez de um lado, mais um?

(*pausa*)

José- Tenho dez dos dois lados, mais um.

Este extrato denota a dificuldade dos alunos em escrever e até mesmo narrar a forma como visualizavam a figura porque ao falarem do número de quadrados de um dos lados, assumiam o mesmo número de quadrados do outro lado mais um, mas não voltavam a referir o número de quadrados da figura novamente, antes de acrescentar aquele a que se referiam mais um. Esta foi uma das lacunas debatidas nesta conversa e, só com muita persistência da minha parte, os alunos conseguiram descrever a figura com a decomposição do termo, embora esta decomposição tenha sido feita de forma gradativa. Neste diálogo também confrontei os alunos com a forma como estavam a relatar a relação ("Na 10.ª figura tu disseste-me dez mais um. Quanto é que é dez mais um? (…) E quantos quadrados é que tu disseste que tinha a 10.ª figura?") de forma a que percebessem que não estavam a descrever todo o processo de construção da figura. Solicitei ainda que se focassem nessa descrição para encontrarem a relação entre o termo e o seu número de ordem, para que essa relação pudesse ser aplicada a todas as figuras: "Então, eu quero que tu te centres numa figura e que percebas a relação para depois explicares para todas.".

Os alunos acabaram por conseguir a generalização devido à forma como o José descreveu a 10.ª figura ("Porque dez mais dez é vinte e mais um dá vinte e um.") e redigiram a relação do seguinte modo: "As figuras têm sempre o número da figura de cada lado mas há sempre mais um quadrado do lado direito.".

Tarefa 3

O grupo da Clara e do José resolveu a 1.ª questão com facilidade, recorrendo à utilização dos círculos para construir a 4.ª figura. Ambos os alunos pegaram nos círculos, mas só o José é que acabou por concretizar as figuras, com a Clara a seguir os seus gestos. O José começou por construir a 1.ª figura na mesa com os círculos e a seguir, foi acrescentando sempre mais três círculos, um em cada extremidade, construindo, de forma sucessiva, a segunda, a terceira e a quarta figuras.

José- A um, a dois, a três e a quatro. (*construindo as figuras sucessivas e acrescentando os sorrisos em cada uma das três extremidades; é a Clara que coloca o último círculo na parte de cima da 4.ª figura*) Pronto, a quatro vai ser assim.

Clara- Vamos fazer o desenho, aqui?

José- Então vamos fazer o desenho, não é na mesa.

Clara- Eu pus aqui. (*apontando para a folha de trabalho*)

Assim, José começou por reproduzir a sequência das primeiras três figuras, tal como apresentada no enunciado da tarefa, embora sem dispor as figuras lado a lado, já que os círculos modelaram sempre uma única figura. A sua ação de acrescentar, de forma iterativa, um círculo em cada uma das três pontas da figura, revelou um raciocínio recursivo e a compreensão de que cada nova figura tinha sempre mais três sorrisos do que a anterior. Logo, para a construção da 4.ª figura, José manteve a regularidade de acrescentar três círculos à terceira figura acabada de obter na mesa. Apresenta-se, em seguida, o extrato alusivo à contagem que os alunos fazem enquanto desenham a 4.ª figura na ficha.

Clara- 1, 2, 3, 4… Aqui tem 4…

José- 1, 2, 3, 4… 1, 2, 3, 4… (*contando os sorrisos enquanto os desenha*)

Clara- 5, 6, 7, 8, 9. (*pausa*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (*contando os sorrisos na folha*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (*contando os sorrisos da parte horizontal no material*)

José- 10, 11, 12, 13… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13… (*contando todos os sorrisos no material*)

Clara- 1, 2, 3, 4, 5…. Cinco? (*contando os círculos de cima*) Temos uma a mais.

José- Não, não temos. Olha bem… Olha bem… Isto tem que ser a figura número 3 (*retirando um círculo*). 1, 2, 3 (*a contar a fila de cima na folha da Clara*). 1, 2, 3 (*a contar a fila de cima do material*).

Clara- Ahhhhh!...

José- Percebeste?

Clara- Sim. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13…

José- Mete igual a 13. Mete igual a 13.

Na conversação entre os dois elementos do par, percebe-se que a Clara via a figura no seu todo contando os sorrisos de forma unitária mas que o José visualizava a figura através da sua decomposição em três partes, já que iniciava a contagem dos sorrisos sempre que desenha uma nova parte. Provavelmente, a forma como o José foi colocando os círculos em cada extremidade levou-o a compreender a decomposição da figura em três partes. Apesar dessa compreensão, José concluiu a contagem dos círculos iniciada pela Clara e fez depois também uma contagem unitária do total de sorrisos da 4.ª figura desenhada na mesa. A emergência da ideia de que cada parte teria o mesmo número da ordem da figura fez com que Clara tivesse questionado os 5 círculos na parte de cima, incluindo nessa contagem o total de círculos da coluna, isto é, incluindo o círculo do meio quando se decompõe a figura em 3 partes. A argumentação do José para explicar que tinham feito a figura corretamente apoiou-se na manipulação do material, retirando um dos círculos e mostrando à Clara que correspondia à parte de cima da 3.ª figura apresentada na ficha, não incluindo na contagem o sorriso do meio. Também aqui José evidenciou a compreensão da decomposição da figura. No final, Clara voltou a contar de forma unitária todos os sorrisos desenhados na folha.

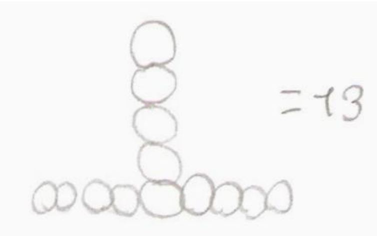


Figura 13- Representação pictórica da 4.ª figura feita pelo José, para a 1.ª questão da tarefa 3

Na 2.ª questão, José aproveitou a 4.ª figura reproduzida na mesa com os círculos e começou a colocar seis círculos na vertical para perfazer 10.

José- Espera, espera… 6, 7, 8, 9, 10… Mete uma em cada lado (*pedindo à Clara que coloque os dois círculos que sobram, um em cada lado, depois de ter completado a parte de cima*). Então terá 10 de cada lado. Aqui terá 10 (*apontando para a parte de cima*), aqui terá 10 (*apontando para a esquerda*) e aqui terá 10 (*apontando para a direita*). Então é 31, 31 (*mistura o material todo desfazendo a figura*).

Quando José percebeu que não tinha círculos suficientes, desmanchou a figura, sem que a Clara percebesse o que ele estava a fazer. A forma como verbalizou indica que o José já tinha compreendido a relação entre o termo e o seu número de ordem. Foi essa compreensão que o levou a reproduzir, inicialmente, a figura com os círculos, sem necessitar de se ancorar nas figuras anteriores, acrescentando, na parte vertical, de modo imediato, aos 4 círculos da 4.ª figura, mais 6 círculos. Enquanto antes, José obtinha uma nova figura acrescentando mais 3 à figura anterior, para a 10.ª figura, José abandonou o raciocínio recursivo, focando-se num raciocínio funcional. O facto de não ter um número suficiente de círculos não lhe provocou qualquer dificuldade. Apesar das partes de baixo da figura modelada com o material só apresentarem 5 círculos cada uma, José visualizou que teriam 10 se o material fosse em número suficiente: "Então terá 10 de cada lado. Aqui terá 10, aqui terá 10 e aqui terá 10.". Enquanto que na 4.ª figura, José precisou de contar de forma unitária o total de círculos, para a 10.ª, e uma vez que os círculos não se encontravam disponíveis na mesa, na sua totalidade, ele determinou mentalmente o total de sorrisos, ao juntar os 10 sorrisos de cada uma das três partes com o do meio: "Então é 31.". O facto de José ter desmanchado a figura mostrou que, nesse momento, deixou de necessitar do material para visualizar a 10.ª figura. Porém, a Clara precisou do material para ancorar o seu raciocínio e voltou a construir a figura mas desmanchou-a por não conseguir ainda compreender o raciocínio que o José teve.

Como não havia círculos suficientes e a Clara ainda não tinha compreendido esta relação, o José ajudou a Clara a fazer o desenho correto da figura através das indicações que lhe deu, tal como se pode verificar no seguinte extrato:

> Clara- Espera, ainda não acabei. Deixa-me acabar (*mexe nos círculos*)! Eu estou-te a pedir para fazeres a figura!
>
> José- Para quê que eu vou fazer a figura?
>
> Clara- Porque eu estou-me a baralhar! Eu estou baralhada José!
>
> José- Faz 10!
>
> Clara- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (*começa a desenhar os sorrisos na parte de cima*).
>
> José- Mete um em baixo (*referindo-se ao sorriso do meio*). Dez para este lado (*apontando no sentido da direita do desenho da Clara*). Aqui deste

lado também dez (*apontando na esquerda do desenho da Clara*). Hum, agora mete aqui igual… a 31.

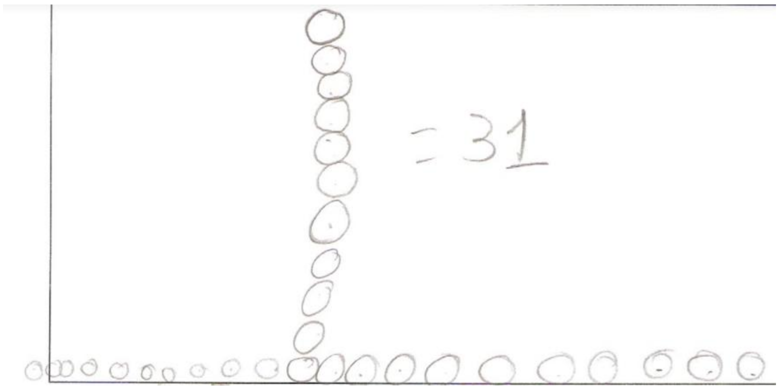


Figura 14- Representação pictórica da 10.ª figura feita pela Clara, para a 2.ª questão da tarefa 3

Enquanto José conseguiu determinar o 10.º termo da sequência sem ter disponíveis os 31 círculos para reproduzir a figura, Clara evidenciou ainda necessitar do material para construir a sequência, parecendo não conseguir raciocinar com o salto da 4.ª para a 10.ª figura. Ao assumir um papel mais passivo na díade, Clara não participou na construção das figuras ("Eu estou-te a pedir para fazeres a figura"), acabando por concretizar o trabalho na folha com as indicações dadas por José. Pode-se observar na figura anterior os pontinhos dentro dos círculos desenhados que indicam a contagem unitária que Clara fez, provavelmente para conferir depois se desenhou o número correto.

Para a escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo, solicitada na 3.ª questão, os alunos apresentaram algumas dificuldades, o que os levou a chamar-me:

Clara- 1, 2, 3, 4, 4, aqui em 4. (*referindo-se ao total de sorrisos da 1.ª figura*)

José- Professora! Professora! (*e a professora aproxima-se*)

Clara- Qual é a relação…

José- Professora, aqui podemos fazer um desenho?

Professora- Não, aí é para escrever a frase.

(...)

José- Então, vou escrever a figura número 1…

Professora- Mas eu não estou a pedir para cada uma. Tu tens que arranjar a frase de forma a conseguires explicar todas elas.

Ambos sentiram a necessidade de se referirem a uma figura em particular, começando por se focar na 1.ª figura. Com a minha insistência em exprimirem o que se passava com todas as figuras, José começou a verbalizar a relação pedida, apontando para a 1.ª figura representada na folha:

> José- Então, estes 3 números (*referindo-se aos três lados da 1.ª figura*) simbolizam o número da figura, porque aqui está um, aqui está um e aqui está um (*apontando para os três lados da figura*) e aqui também está (*referindo-se ao do meio*). Mas depois aqui fica na mesma (*apontando para o sorriso do meio da 2.ª figura*) e acrescenta-se sempre mais um em cada lado.

José começou por descrever uma relação funcional entre os termos e as respetivas ordens, embora ancorando-se na figura concreta inicial da sequência. Depois, verbalizou a relação iterativa do que é que se acrescenta de uma figura para a outra, e do que é que se mantinha constante, o sorriso do meio. O diálogo comigo continuou com a exclusiva participação de José.

> Professora- Sim. Então e agora, olhando para a figura que acabaste de construir e olhando para a figura, tu consegues ver o número da figura aí na figura?
>
> José- Sim!
>
> Professora- Como?
>
> José- Consigo ver três vezes. (*apontando para os três lados da figura*)
>
> Professora- O quê?
>
> José- O número da figura na figura.
>
> Professora- Só?
>
> (...)
>
> Professora- E construo a figura assim?
>
> José- E metemos mais um no meio.
>
> (...)
>
> José- Tenho o número da figura nos três lados, apareceu o número da figura.
>
> Professora- Sim. E não estás a esquecer-te de nada?
>
> José- E que o sorriso que está no meio fica sempre no mesmo sítio.

Com esta conversa comigo, José conseguiu abstrair-se de uma figura em particular e generalizar para qualquer figura. Aqui as minhas questões foram essenciais para conseguir explicitar a generalização. Após este diálogo, José começou a ditar a resposta da 3.ª questão, e ambos os alunos escreveram-na ao mesmo tempo, cada um na sua folha de trabalho.

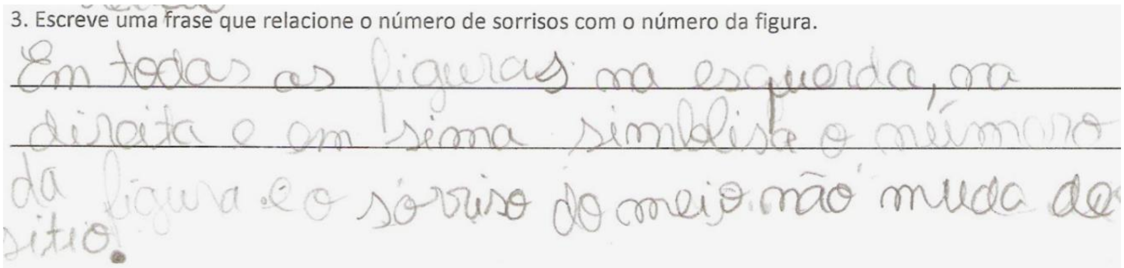


Figura 15- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo do termo feita pela Clara, para a 3.ª questão da tarefa 3

Para a 4.ª questão, que solicitava o número de círculos da 15.ª figura, o José verbalizou muito rapidamente a maneira como visualizava a figura e depois ambos utilizaram essa verbalização para a construção da figura através do desenho na folha.

> José- Metes 15 em cima, 15 deste lado (*apontando para o lado esquerdo*), 15 deste lado (*apontando para o lado direito*) e 1 no meio.

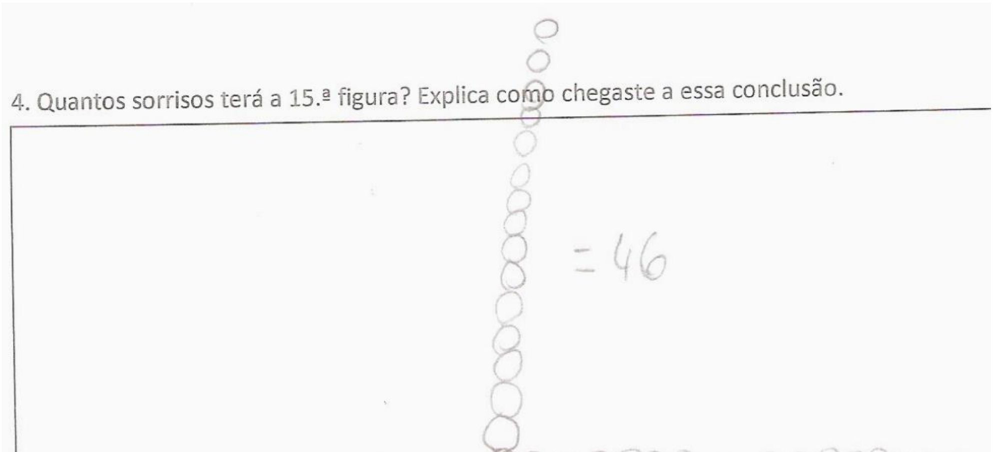


Figura 16- Representação pictórica da 15.ª figura feita pelo José, para a 4.ª questão da tarefa 3

Após estas quatro questões onde se pretendia a aplicação da relação entre o termo e o número de ordem do termo, a 5.ª questão evocava um raciocínio inversivo questionando qual a figura que teria 22 círculos.

José- Metemos aqui um. (*fazendo o sorriso do meio*)

Clara- Hum?

José- Agora só temos 21. Temos que os distribuir…

Clara- Distribuir?

(*José aponta para a sua folha.*)

José- 22 menos 1?

Clara- Sim, sim, sim…

José- Vou fazer aqui uma conta… rápida… 21 a dividir por 3. Na tabuada do três, onde é que está o 21? Sim senhora, sim senhora…

(*a Clara começa a distribuir os círculos na mesa.*)

José- Espera, deixa-me pensar! (*apontando a mão à Clara para parar; e começando a contar pelos dedos)* 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,… 21… 7. Pronto, agora metemos 7 em cada lado… A figura 7…

Mais uma vez, o José revelou ser muito hábil no seu raciocínio, não dando espaço para que a Clara o compreendesse ou até seguisse a sua linha de raciocínio. Nesta fase, José dispensou o uso do material manipulável, contrariamente à Clara que necessitou do recurso dos círculos para concretizar a distribuição dos 21 círculos em 3 partes. José interrompeu a manipulação feita pela Clara para se concentrar na divisão mental de 21 por 3 que concretizou através da contagem nos dedos dos múltiplos de 3 até chegar ao 21. Apesar do raciocínio verbalizado e dos cálculos apresentados, os alunos optaram também por fazer o desenho da 7.ª figura como forma de ilustração.

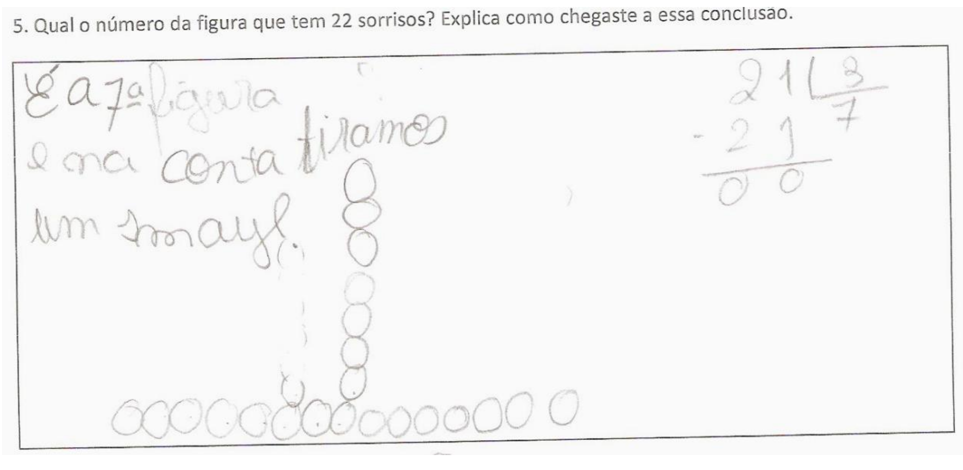


Figura 17- Apresentação dos resultados feita pela Clara, para a 5.ª questão da tarefa 3

A 6.ª questão enquadrava-se também no âmbito do raciocínio inversivo questionando sobre qual o número da figura que teria 61 círculos.

> José- Qual o número da figura que tem 61 sorrisos? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) Metemos um no meio, ficamos com 60, 60 a dividir por 3. (…) (*escreve na sua folha o algoritmo e a Clara copia*) Metemos aqui 20! Porque 3 vezes 10 dá 30. Vezes 20 dá 60. E 20, mais 20, mais 20… 20, 40, 60 (*ao mesmo tempo contando com os dedos*). (…) O número 20.
>
> Clara- É a 20.ª figura.

Mais uma vez, o José revelou-se extremamente célere e depressa fez os seus cálculos e descobriu o número de ordem da figura. Tal como na questão anterior, desenharam a figura apenas para ilustrar.

Tarefa 4

Depois de entregue o material (21 palitos) ao grupo e a folha de registo, o José disse à Clara que nesta tarefa não iam fazer tudo por desenhos, que iriam fazer também outras coisas, referindo-se à utilização de outras estratégias sem ser apenas a representação pictórica das figuras.

Para a resolução da 1.ª questão, inicialmente, o José privou a Clara da utilização do material não a deixando manipular o material de forma a poder auxiliá-la na resolução da questão. Só depois de muita insistência por parte da Clara é que este lhe deu o material. Enquanto ela construiu a 3.ª figura com o material e depois acrescentou os restantes palitos para representar a 4.ª figura, o José começou de imediato a fazer a representação pictórica da 4.ª figura na sua folha de trabalho, sem recorrer à utilização do material, sendo muito célere na conclusão da figura e na escrita da resposta. Por sua vez, a Clara demorou mais tempo, porque esteve primeiramente a construir a figura com o material e só depois avançou para a representação pictórica da 4.ª figura na sua folha. Apesar de ter construído a figura corretamente com o material, quando procedeu à representação pictórica da figura, ela enganou-se a desenhar e colocou dois palitos entre cada um dos quadrados, quando deveria ter apenas um palito em comum a dois quadrados. No entanto, no momento da resposta, ela escreveu corretamente que a 4.ª figura teria 13 palitos, quando na verdade ela desenhou 16 palitos, mas que não os contou porque copiou a resposta pelo José.

Na 2.ª questão, o José avançou para a sua resolução sem esperar pela Clara, que continuava a fazer a representação da figura na questão anterior. O José representou, mais uma vez, a 10.ª figura de forma pictórica e fez a contagem dos palitos de forma unitária, terminando com uma contagem de trinta e um palitos.

Por seu turno, a Clara, depois de terminar a resposta à 1.ª questão, avançou para a resolução da 2.ª questão mas também sem recorrer ao material, começando de imediato com a representação pictórica da 10.ª figura. Talvez porque o José estivesse a desenhar a figura corretamente sem material, a Clara tenha optado também por não utilizar o material. Contudo, sem a utilização do material, a Clara revelou dificuldades pois foi desenhando os quadrados, cada um com quatro palitos, revelando que não percebeu como o padrão estava a ser construído, repetindo o erro que havia cometido na representação da 4.ª figura. Apesar de ter utilizado corretamente o material na construção da 4.ª figura, o facto de ter representado na folha dois traços entre os quadrados revelou que não tomou consciência da forma como estavam unidos os quadrados. Assim, na 10.ª figura, Clara desenhou dez quadrados ("1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.") revelando compreender que a ordem do termo correspondia ao número de quadrados mas encarou-os de forma isolada, sem atender aos lados comuns do interior da figura.

Quando o José terminou a sua resposta, olhou para o trabalho da Clara, alertou-a para o facto da representação pictórica da 10.ª figura estar errada e avançou para a 3.ª questão, mais uma vez sozinho, sem esperar que a Clara terminasse. Apesar do reparo que o José lhe fez acerca da sua representação estar errada, a Clara continuou sem fazer a sua correção.

O José avançou para a 3.ª questão sem esperar pela Clara, que ainda completava a 2.ª questão. Aqui, o José escreveu a relação e quando a Clara ia começar a copiar a sua resposta, ele virou a sua folha.

> Clara- José, estás a fazer tudo sozinho outra vez… José, eu não estou a perceber… José…
>
> José- Então, eu disse-te no princípio.

Clara- Mas eu não percebi…

José- Este e este palito (*referindo-se aos palitos de cima e de baixo*) são… representam o dobro do número da figura.

(…)

Clara- Ò José, José não é só esses (*referindo-se aos palitos de cima e de baixo*), também são estes dois (*referindo-se aos palitos exteriores que estão na vertical, da direita e da esquerda, que não foram contemplados na relação*).

José- Não.

Clara- Sim, sim…

José – Não, porque ao longo vai mudando só um… Só vamos acrescentar mais um, por isso não contam (*o José tenta explicar à Clara que os palitos da vertical não devem ser contemplados na relação*).

(*a Clara acena com a cabeça que sim e o José acena com a cabeça que não*)

José- Dois é o dobro de um (*referindo-se aos palitos na vertical da 1.ª figura que são dois, em relação ao número da figura que é a 1.ª figura*), três é mais um (*referindo-se aos palitos na vertical da 2.ª figura que são três, em relação ao número da figura que é a 2.ª figura*), quatro é mais um (*referindo-se aos palitos na vertical da 3.ª figura que são quatro, em relação ao número da figura que é a 3.ª figura*). Este é o único diferente, por isso não dá (*tentando explicar que não consegue encontrar a generalização para os palitos que estão na vertical*).

Para a escrita da relação, o José começou por afirmar que já teria partilhado com a Clara, no princípio da tarefa, como é que estava a visualizar o padrão. No entanto, ele nunca partilhou com ela a forma como visualizava o padrão ou qual a relação entre o número da figura e a figura. Depois da Clara afirmar que não tinha percebido, ele resolveu explicar-lhe a relação que estava a visualizar: “Este e este palito são… representam o dobro do número da figura.”. A partir do momento em que ele partilhou esta informação com a Clara, ela revelou-se muito perspicaz e respondeu-lhe logo que não poderia ser essa a relação, ou seja, a generalização entre o termo e a ordem do termo porque ele não estava a contemplar todos os palitos na relação que tinha encontrado: “… não é só esses, também são estes dois.”. Clara parece olhar apenas os palitos exteriores na vertical, esquecendo os interiores, chamando assim a atenção de

José para a necessidade de incluir na relação também esses dois exteriores na vertical. Apesar da explicação da Clara, o José tentou convencê-la e apresentou-lhe os seus argumentos para não considerar os palitos que estavam na vertical, pois ele não conseguia encontrar nenhuma relação entre o número de ordem das figuras e os palitos que estavam na vertical. Depois desta explicação, a Clara aceitou os seus argumentos e escreveu a relação dita pelo José: "O palito de baixo e de cima representa o dobro do número da figura juntos.".

O José começou a fazer a representação pictórica da 15.ª figura, quando a Clara ainda estava a fazer a resolução da 2.ª questão, desenhando inicialmente a 14.ª figura, em vez da 15.ª figura. Quando a Clara começou a responder a esta questão e a fazer a representação pictórica da 15.ª figura já o José havia terminado a figura e estava a fazer a contagem dos palitos desenhados, só lhe restando escrever a resposta.

> José- Quarenta e três (*como só desenhou 14 quadrados, escreve o número de palitos da 14.ª figura*). (*pausa*) Estou à tua espera.
>
> Clara- Falta mais um. (*e desenha mais um quadrado, fazendo o 15.º quadrado*) Quanto é que isto dá?
>
> (…)
>
> José- Conta! Só o princípio fizeste bem. (…) O palito entre…os dois… (*apontando para a sua folha de trabalho da Clara*) Tu meteste dois entre os dois. Agora tens tudo errado.

A Clara desenhou corretamente os 15 quadrados, revelando mais uma vez que tinha compreendido que a ordem do termo correspondia ao número de quadrados da figura, porém começou por fazer os quadrados com apenas um palito no meio, para que ficasse em comum aos dois quadrados contíguos, mas depois começou a duplicar o palito que estava ao meio. A determinado momento, o José voltou e apercebeu-se de que ela estava a desenhar a figura com esse erro e, apontando para a sua folha de trabalho, indicou-lhe que fez dois palitos lado a lado na vertical, quando deveria apenas ter feito um palito em comum na vertical. A Clara refutou a sua observação e continuou a contagem terminando com um total de 61 palitos.

Num momento seguinte, o José questionou-a sobre a quantidade de palitos que contou.

> José- Quantos palitos é que contaste?

Clara- Sessenta e um.

José- Então está mal. Clara, está mal. (…) Quarenta e três.

Clara- Então como é que vamos fazer isto? Meteste quantos quadrados? (…) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (*contando os quadrados que o José fez para a resolução da 4.ª questão*). Quantos quadrados?

José- Conta. (*a Clara começa a apagar a sua resolução para a 4.ª questão*) Não é preciso apagares o esquema…

Clara- Pois o meu estava mal, eu pus quinze.

José- Quinze!?

Clara- Quinze quadrados.

José- Então… É para meteres quinze quadrados!

(…)

Clara- Quantos palitos… quantos palitos terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo a 4.ª questão*).

José- Fizemos o desenho. Igual a quarenta e três palitos.

A falta de autoconfiança da Clara revelou-se quando considerou ter errado por ter desenhado 15 e não 14 quadrados como o José: “Pois o meu estava mal, eu pus quinze.”.

A Clara desenhou então a 15.ª figura, com quinze quadrados e quarenta e seis palitos, mas escreveu quarenta e três palitos porque foi o que o José tinha escrito na sua resposta. Enquanto isso, o José continuou a resolver a questão seguinte e não confirmou os seus quadrados, que se mantinham 14, apesar de ter referido “É para meteres quinze quadrados!”, sem se aperceber que tinha desenhado menos um quadrado.

Depois de ler a 5.ª questão, o José agarrou nos palitos e começou a fazer uma construção diferente das figuras do padrão com os 21 palitos disponibilizados, enquanto a Clara continuava a resolução da 4.ª questão. Pouco tempo depois, a Clara encetou a resolução desta questão, procedendo à representação pictórica da figura constituída por 22 palitos, pois o José estava a utilizar todo o material disponibilizado.

O José desenhou, na sua folha de trabalho, uma figura com 22 palitos tendo como base a figura que construiu com os vinte e um palitos. Contudo, na sua representação pictórica ele acrescentou o 22.º palito (assinalado na figura com uma cruz) que não tinha utilizado na figura construída com os palitos pois só tinham sido disponibilizados 21 palitos. Apesar de desenhar os 22 palitos, a figura não estava de acordo com o padrão apresentado e por ter desenhado um total de oito quadrados, o José escreveu que com 22 palitos conseguia construir a 8.ª figura, por relacionar o número de quadrados com o número de ordem da figura, e depois avançou para a resolução da 6.ª questão, enquanto a Clara ainda permanecia na 5.ª questão.

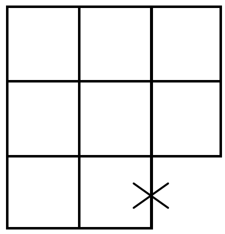


Figura 18- Representação pictórica da figura feita pelo José com 22 palitos, para a 5.ª questão da tarefa 4

Por sua vez, Clara construiu a figura corretamente utilizando os 22 palitos mas não conseguiu perceber qual o número da figura que estava a representar.

> Clara- José, espera! (*e confirma se utilizou os vinte e dois palitos na figura que construiu para a resolução da 5.ª questão*) José, preciso de ajuda. É aqui na quinta. Deixa-me só acabar isto (*referindo-se ao facto de ainda não ter colocado a resposta*).

Para poder acompanhar o José, a Clara copiou a resposta do José para a 5.ª questão respondendo que a figura que tinha representado seria a 8.ª figura. No entanto, a figura que tinha representada na sua folha era a 7.ª figura, com vinte e dois palitos, e apenas escreveu a resposta errada por ter copiado pelo José, apesar de ter feito a figura correta. Mais uma vez, nesta resolução, os elementos da díade não partilharam qualquer ponto de vista ou estratégia.

Para a resolução da 6.ª questão, o José fez a representação pictórica da figura contendo 61 palitos, fazendo a sua contagem unitária até chegar ao 61.º palito.

> Clara- Então como é que vamos fazer isto? Meteste quantos quadrados?
>
> José- Isto tem sessenta e um palitos. (*referindo-se à figura que fez para a resolução da 6.ª questão*)
>
> Clara- Ah!!!

José- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. (*contando os quadrados que fez para a resolução da 6.ª questão*)

(…)

Clara- 49, 50… (*contando os palitos que vai desenhando para a 6.ª questão*)

José- O quê?

Clara- Sessenta e um palitos. Qual é que é a figura?

José- Agora conta.

Clara- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. (*não contando o último quadrado da linha de cima*)

José- E este? (*referindo-se ao último quadrado que a Clara não contou*) Só contas dezanove.

Clara- 20.ª figura.

José- Eu não te avisei.

Clara- Ya. [sic] É a 20.ª figura que tem sessenta e um palitos.

O José contabilizou os palitos no momento da representação da figura na sua folha de trabalho e depois verificou que desenhou vinte quadrados, então seria a 20.ª figura a ter 61 palitos. Aqui, o José fez a contagem unitária dos palitos sem precisar de representar as figuras anteriores percebendo que eram tantos os quadrados quanto o número da figura. Também a Clara seguiu a mesma linha de raciocínio do José e também mobilizou esta associação entre o número de quadrados e o número da figura.

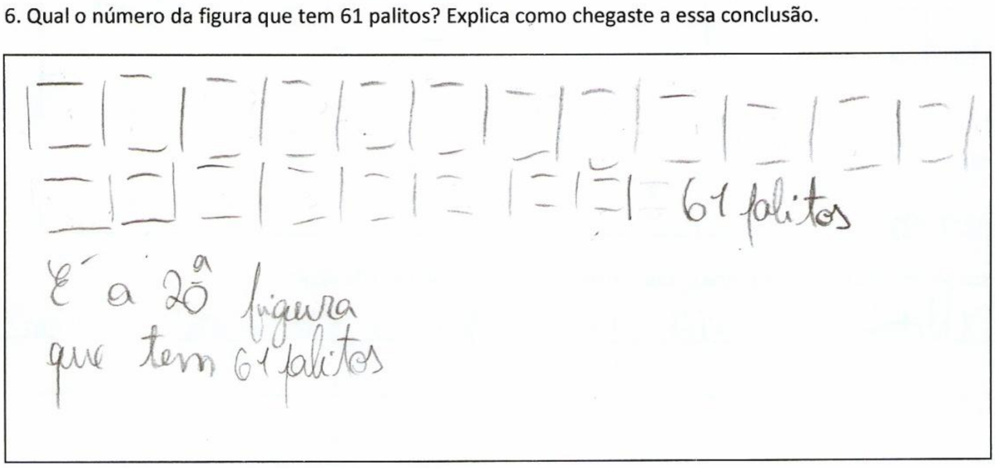


Figura 19- Representação pictórica da figura com 61 palitos feita pelo José, para a 6.ª questão da tarefa 4

Devido à limitação do espaço na folha de trabalho para representar os 20 quadrados numa disposição linear, os alunos representaram uma segunda linha em baixo mas contaram os palitos como se os quadrados estivessem numa única linha, encarando os quadrados de baixo contíguos aos de cima.

Nas 5.ª e 6.ª questões, estava prevista a utilização de um raciocínio inversivo baseado na relação encontrada entre o termo e número de ordem do termo. Contudo, este raciocínio inversivo não foi mobilizado porque os alunos limitaram-se a construir as figuras utilizando o número de palitos dado, tendo usado uma estratégia de representação da figura e a contagem unitária dos palitos. Esta resolução ocorreu por terem compreendido que o número de quadrados correspondia ao número da figura. Então, logo após a utilização dos palitos pretendidos, bastou-lhes fazerem a contagem dos quadrados representados na figura com os palitos desenhados.

Revisão da Tarefa 4

No momento destinado à revisão de trabalhos, a Clara apercebeu-se de que algo estava errado nas suas resoluções.

> Clara- Aqui está mal (*apontando para a sua resolução da 1.ª questão*).
>
> José- Vamos ver.
>
> Clara- E aqui também (*apontando para a sua resolução da 2.ª questão*).
>
> José- O teu?
>
> Clara- Olha aqui, pus dois quadrados (*referindo-se aos dois palitos lado a lado entre os quadrados*). Agora faço um. (*e coloca apenas um palito entre o 1.º e o 2.º quadrados de forma a que o palito fique comum aos dois quadrados*)
>
> José- Mete aqui um. (*referindo-se a colocar apenas um palito entre o 2.º e o 3.º quadrados*)
>
> (…)
>
> Clara- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (*contando os quadrados que desenhou para a 10.ª figura*).

Depois de ter percebido que algo estava errado, a Clara conseguiu identificar sozinha o erro no seu desenho e corrigiu o que estava errado na representação pictórica da 4.ª figura, porque a sua resposta já estava correta.

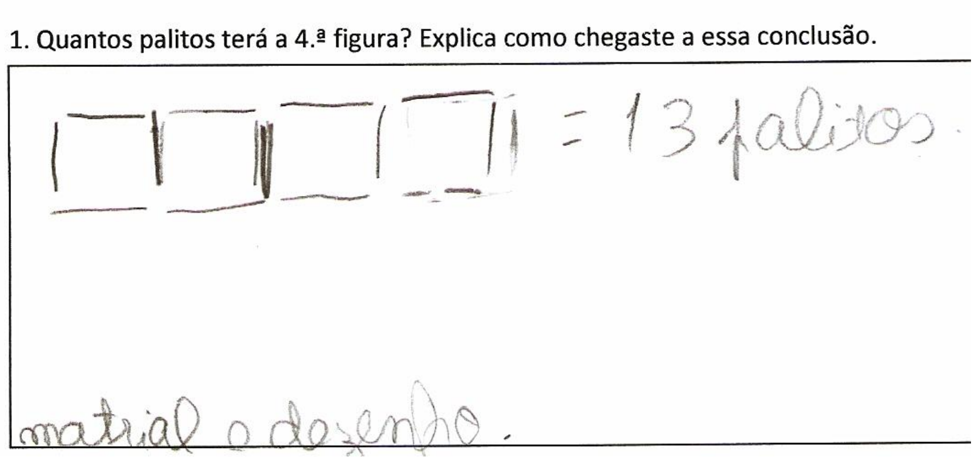


Figura 20- Representação pictórica da 4.ª figura feita pela Clara, para a 1.ª questão da tarefa 4

A representação pictórica da 10.ª figura da Clara também foi alvo de uma correção parcial aquando da correção, como evidenciado no diálogo anterior. Contudo, foi feita apenas uma correção parcial porque a Clara não apagou todos os palitos que tinha duplicado entre cada um dos quadrados, nomeadamente entre o 3.º e o 4.º quadrado.

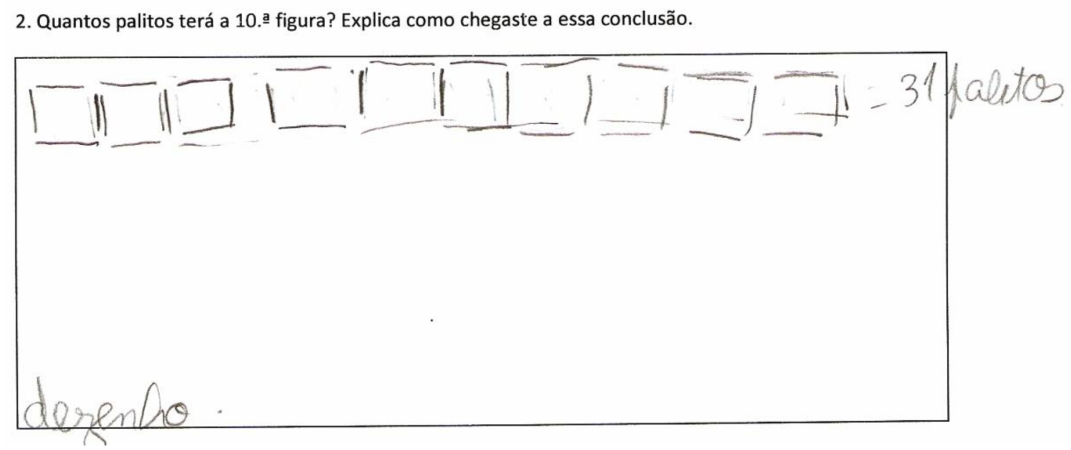


Figura 21- Representação pictórica da 10.ª figura feita pela Clara, para a 2.ª questão da tarefa 4

Após estas correções feitas pela Clara, os elementos do grupo falaram pela primeira vez sobre as resoluções que cada um fez para a 5.ª questão.

> José- Cinco. Qual o número da figura que tem 22 palitos? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Clara- Fizemos o desenho…
>
> José- Igual a vinte e dois.
>
> Clara- E eu…

José- Mas nós contamos com estes palitos, aqui estão vinte e um palitos (*referindo-se ao material dado pela professora*). Eu fiz assim.

Clara- Eu não…E é a 8.ª figura que…

José- É a 8.ª figura que tem…

Clara- Vinte e dois palitos.

Mesmo depois deste diálogo, os dois limitaram-se a comentar que haviam feito as figuras de forma diferente e continuaram a dar primazia ao número de palitos utilizados, não dando relevância à relação entre o termo e o número de ordem do termo.

Num momento mais adiante, eu aproximei-me e mais uma vez coloquei algumas questões acerca das suas resoluções.

Professora- E agora, esta aqui de trás, (*referindo-se à resolução da 5.ª questão em que o José desenhou uma figura diferente das do padrão*) vocês puseram isto assim…

José- Com os palitos…

Professora- Sim… Mas, e diz-me uma coisa… As figuras que tu observaste tinham esta posição?

José- Sim.

Clara- Eu não fiz assim. *(mostrando que desenhou a figura de acordo com as figuras apresentadas na sequência*)

José- Eu fiz com estes palitos aqui na mesa. Eu fiz assim.

Professora- Assim esta posição?

José- Sim.

Professora- Sim?

Clara- Não. Não foi nessa posição. Olha aqui. (*pedindo ao José que olhe para a figura que desenhou*)

José- Mas eu não pus assim.

Professora- Estão a formar…

Clara- Eu fiz bem. Eu, pelo menos, fiz bem.

José- Não, mas é a razão de tu me copiares.

Clara- Mas esta eu não copiei.

José- Copiaste-me quase tudo.

Clara- Sim.

José- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (*desenhando uma figura com oito quadrados e 25 palitos*).

A Clara assumiu aqui um maior protagonismo reconhecendo ter feito bem e de modo diferente do José: “Eu fiz bem. Eu, pelo menos, fiz bem.”. Este, por seu lado, reforçou o seu papel dominante que detinha na díade: “Copiaste-me quase tudo.”.

Logo depois deste diálogo, o José percebeu que errou e tentou corrigir a sua resposta, desenhando uma figura de acordo com o padrão apresentado. Como já tinha escrito que era a 8.ª figura que tinha 22 palitos, ele desenhou a 8.ª figura sem contabilizar os palitos que usou na sua construção (25 palitos).

Depois da revisão feita pelos alunos, eu aproximei-me e voltei a colocar algumas questões relacionadas com o padrão, nomeadamente sobre a relação entre o termo e o número de ordem do termo.

Professora- Mas eu estou só a pedir a relação entre o número… do palito de cima?

José- Não, mas foi a única que encontrámos.

Professora- Foi a única?

José- Porque aqui tem dois, é o dobro do número da figura. Aqui tem mais um. E é mais um do que o número da figura.

Professora- Mas se eu estou a pedir a relação entre o número da figura e o número de palitos é porque existe uma relação.

José- Mas nós só encontrámos estas de cima que é o dobro.

Professora- Então têm que observar melhor.

(*a professora afasta-se*)

(…)

Clara- Vamos ter que observar melhor a figura.

José- Vamos ter que observar isto bem. Muito bem… É assim…1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (*contando os palitos da 2.ª figura*).

Clara- 1, 2, 3, 4 (*contando os palitos da 1.ª figura*).

José- Já descobri.

Clara- Qual? Eu estou a pensar ainda.

José- É o triplo do número da figura mais um. Olha aqui. Um. Três. O triplo do um é o três, mais um, dá quatro.

Clara- Ahhh!

José- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. O triplo é seis, mais um, sete.

Clara- Sim.

José- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Clara- Sim.

José- É o triplo do número da figura mais um. (…) Espera aí… Não… Sim… Três vezes *n* e mais um. Pronto. Três vezes *n* mais um.

Clara- Três vezes *n* mais um.

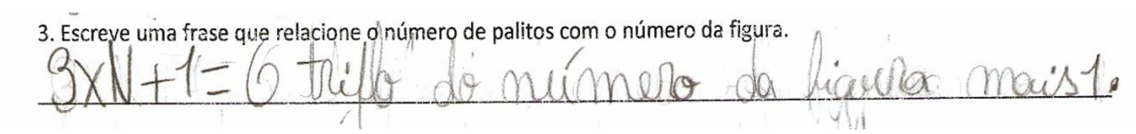

3. Escreve uma frase que relacione o número de palitos com o número da figura.
3xN+1= 6 triplo do número da figura mais 1.

Figura 22- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pelo José, para a 3.ª questão da tarefa 4

A revisão foi crucial para que observassem a sequência numérica presente no número de palitos de cada figura e não as figuras apresentadas e daí adviesse uma outra relação, que tivesse em consideração todos os palitos do termo relacionando-os com o número de ordem do termo. Só depois desta nova observação, o grupo conseguiu estabelecer uma nova relação entre o termo e o número de ordem do termo e desta forma conseguiu escrever uma expressão algébrica que se coadunava com a generalização encontrada. Esta generalização encontrada permitiu rever a 4.ª, 5.ª e 6.ª questão.

Os alunos voltaram então à 4.ª questão para verificar a resolução que haviam feito.

José- Aqui tem quatro, aqui tem três. Quatro mais três, três mais três, três mais três, três mais três, três mais três, três mais três. É isso que eu estou a fazer.

Clara- Agora já percebi.

José- Deu quarenta e três. (*dando a resposta de imediato*)

O José aproveitou este momento para explicar à Clara a forma como estava a visualizar a figura apresentando a contagem dos quatro palitos do quadrado inicial e depois os três palitos sucessivos, usando uma abordagem aditiva ("… três mais três…") mas não aplicou a relação escrita na 3.ª questão (3 x *n* + 1). Mais uma vez, o José continuou sem confirmar o número de quadrados que havia feito pois continuava com a representação pictórica da 14.ª figura e não da 15.ª figura.

Os alunos voltaram também à 5.ª questão para a revisão. A Clara começou a contar os palitos que utilizou na representação pictórica da sua figura.

> Clara- Eu estou a pensar (*contando os palitos da 7.ª figura*).
>
> José- Tu estás a contar. Mas fui eu que fiz.
>
> Clara- Esta fui eu que fiz, escrevi…
>
> José- Fizeste porque estava meio apagado. Sabias o que é que eu tinha escrito. Então… Já descobrimos que aquilo é que estava bem, que a nossa relação estava bem.
>
> Clara- Então, espera… (*pedindo-lhe para esperar*)
>
> José- Vou dizer à professora.
>
> Clara- O quê? Falta isto! (*apontando para a resolução da 5.ª questão*)
>
> José- Mas isso está a perguntar qual o número da figura que tem vinte e dois!
>
> Clara- Ahhh!

Mesmo depois da Clara insistir para reverem a 5.ª questão, acabaram por não confrontar as suas respostas e por isso não entenderam que haviam feito resoluções diferentes. A Clara desenhou corretamente a 7.ª figura, com vinte e dois palitos, mas escreveu 8.ª figura porque copiou pelo José. Por sua vez, numa primeira fase, o José construiu, com os palitos, uma figura diferente das figuras do padrão com 8 quadrados, sem o último quadrado estar completo porque só tinha vinte e um palitos, e como conseguiu contar 8 quadrados nessa figura escreveu 8.ª figura. Depois, aquando de uma das revisões, percebeu que a figura não estava de acordo com as figuras do padrão e desenhou uma figura que se enquadrava no padrão de construção das restantes figuras. Contudo, por ter inicialmente escrito que seria a 8.ª figura a ter 22 palitos, acabou por desenhar a 8.ª figura, sem contabilizar a quantidade de palitos que utilizou e por isso não percebeu que estava a utilizar mais palitos do que eram solicitados. O modo como cada um via e encarava o outro fazia com que mesmo nas situações em que existiam resoluções diferentes, os alunos não as confrontavam nem as discutiam. Clara confiava pouco no seu próprio trabalho, tendendo a copiar as respostas do José. José, por sua vez, confiava no seu próprio trabalho mas não no da colega, tendendo a ignorar as intervenções e resoluções da Clara.

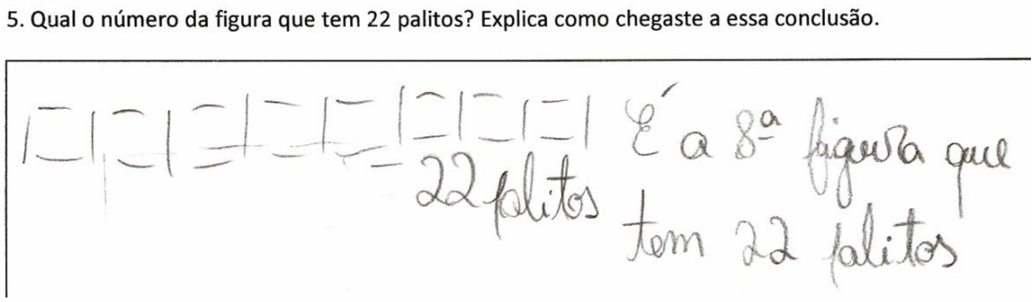


Figura 23- Representação pictórica da figura com 22 palitos feita pelo José, para a 5.ª questão da tarefa 4

No final de toda a tarefa, quando me informaram que já tinham terminado tudo, eu voltei a intervir e a colocar mais algumas questões evidenciando a aplicação da relação escrita pelos alunos.

> Professora- Então… vamos ver aqui a 15.ª figura… Então vocês dizem que tem quarenta e três palitos. Então confirma-se que é o triplo do número da figura e mais um? (*pausa*) Confirma-se? (*o José acena com a cabeça que não*) Então?
>
> José- Dá-nos quarenta e seis.
>
> Professora- Então, mas afinal o que é que está errado? É a relação ou é essa resposta?
>
> José- A relação.
>
> Professora- É preciso olhar, observar novamente o padrão para perceber. (…) Então, mas vocês basearam-se nessa relação em tudo! Vocês já confirmaram com o padrão que têm, se essa relação se confirma?
>
> José- Sim. (…) Nestes três dá (*referindo-se às primeiras três figuras apresentadas na sequência*) mas nos outros não.
>
> Professora- Quais outros?
>
> José- Tipo… o quinze (*referindo-se à 15.ª figura*).
>
> Professora- Então, e se tu encontraste a relação nos outros… todos, achas que esse aí (*referindo-se à relação*) é que está errado? (…) Tu confirmas essa relação aqui (*referindo-se à 1.ª figura*), aqui (*referindo-se à 2.ª figura*), aqui (*referindo-se à 3.ª figura*), aqui (*referindo-se à 4.ª figura*) e aqui (*referindo-se à 10.ª figura*). Porque é que há-de ser este (*referindo-se à resolução da 4.ª questão onde ele tinha*

desenhado 14 quadrados e contabilizado 43 palitos) o certo e todos os outros errados?

José- Não é todos os outros errados. É que nos outros eu vejo o que meti aqui mas neste (*referindo-se à resolução da 4.ª questão*) eu não vejo. Então nenhum está errado, é só isto (*referindo-se à relação que encontrou*) que está errado.

Professora- Então José, o que é que estará errado?

José- Todos.

Professora- Será todos os outros e este o único a estar bem?

(*pausa*)

Clara- Eu acho.

Professora- Vocês partiram desta figura? (*apontando para a 3.ª figura*)

José- Não, partimos do número.

Professora- Então se vocês confirmam essa relação em tudo aquilo que fizeram até esse exercício, o que é que tu achas que terá maior probabilidade de estar errado? (*o José conta o número de quadrados que desenhou na figura*) Era só isso que eu queria que vocês pensassem. Até porque se vocês… inicialmente vocês estavam…

José- Já sei porque é que tá [sic] mal.

Professora- Então?

José- Eu só meti catorze quadrados. E deixei estes dois livres. Preciso meter aqui mais um. (…) Quarenta e seis.

Quando os alunos foram confrontados com algumas questões e se viram obrigados a observar tudo o que tinham feito até então, constataram que nesta questão a relação explicada antes não funcionava. O José viu-se mesmo forçado a olhar para a sua resolução e, depois de alguma insistência da minha parte, conseguiu detetar onde tinha errado e corrigir a sua resolução.

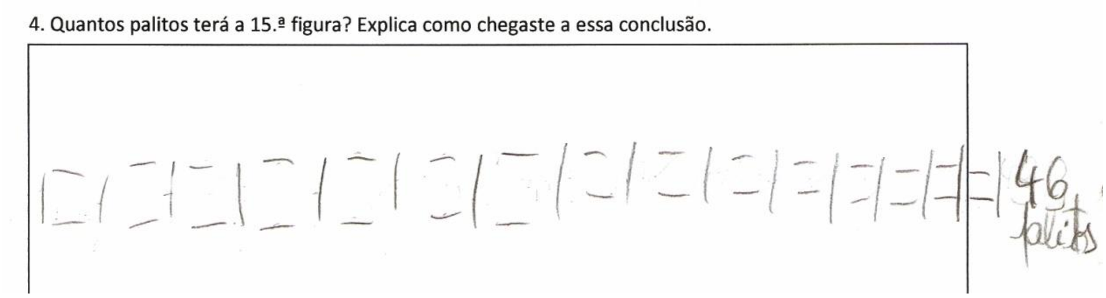


Figura 24- Representação pictórica da 15.ª figura feita pelo José, para a 4.ª questão da tarefa 4

Esta representação feita pelo José não revela a preocupação em unir os palitos como a Clara. A sua natureza esquemática indicia um raciocínio estruturado focado no dobro dos palitos (superiores e inferiores) relativamente ao número da figura e um único palito entre os quadrados.

Tarefa 5

Depois de distribuído o material para a tarefa (6 quadrados pretos e 30 quadrados brancos) e as folhas de trabalho, os alunos começaram com a leitura das tarefas. A Clara começou por ler o enunciado que solicitava a observação da sequência de figuras.

José- Então, a 1.ª figura tem um quadrado preto no meio…

Clara- Sim.

José- A 2.ª figura tem dois…

José e Clara- A 3.ª figura tem três…

José- A relação. E o quadrado preto representa o número da figura.

(…)

Clara- Sim. Quantos quadrados pretos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*). Podemos fazer o desenho aqui. (*apontando para o espaço da resposta*)

José- Vamos primeiro fazer com isto (*retira o material dado para a tarefa e começa a manuseá-lo*) (…) Quatro pretos. Toma. (…) Quatro. Pronto. Agarra-se nisto e vai-se pondo à volta, estes brancos. (…) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. (*contando novamente os quadrados brancos*) Catorze brancos… catorze quadrados brancos e quatro quadrados pretos. Quantos quadrados pretos terá a

> 10.ª figura? Ah! Não! Fizemos mal… a de cima. Tínhamos era de explicar os quadrados pretos. Quadrados pretos é quatro.

O José, logo que iniciou a observação da sequência, associou de imediato os quadrados pretos ao número de ordem da figura: “Então, a 1.ª figura tem um quadrado preto no meio…”. A forma como o foi verbalizando levou a Clara a compreender a relação encontrada por ele respondendo também: “A 3.ª figura tem três…”. José, mesmo antes da questão que solicitava essa relação, verbalizou: “A relação. E o quadrado preto representa o número da figura.”. Este foco adveio da exploração das tarefas anteriores. A descoberta desta relação indicou que os elementos da díade fizeram a decomposição do termo e relacionaram uma das partes da figura (os quadrados pretos) com o número de ordem do termo, revelando um raciocínio funcional. Apesar de ter compreendido esta relação, o José teve a necessidade de construir a figura com o material (“Vamos primeiro fazer com isto.”) antes de procederem à representação pictórica da 4.ª figura.

Aquando da resposta houve um equívoco acerca do que estava a ser solicitado na questão, mas depressa o José detetou o erro e em vez de contar os quadrados brancos e pretos separadamente, o José relatou apenas a quantidade de quadrados pretos na 4.ª figura.

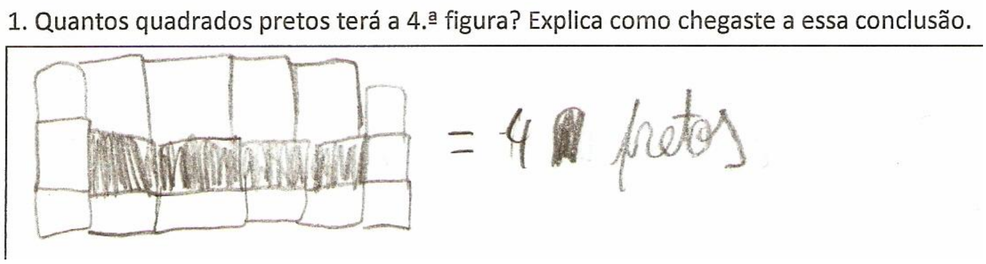


Figura 25- Representação pictórica da 4.ª figura feita pelo José, para a 1.ª questão da tarefa 5

Para a 2.ª questão, o grupo recorreu novamente ao material mas por falta de quadrados pretos, que não foram disponibilizados propositadamente, o grupo encontrou uma forma de contornar essa situação. Para tal, colocaram quadrados brancos em substituição dos quadrados pretos, ou seja, como só tinham seis quadrados pretos acrescentaram quatro quadrados brancos, que colocaram para substituir os quadrados pretos, e depois marcaram estes quadrados com um ponto a lápis de carvão, para que quando fossem desenhar a figura, conseguissem distinguir aqueles quadrados como se fossem quadrados pretos.

Depois da construção da figura, os alunos começaram a fazer a representação pictórica da 10.ª figura. Nesse momento, eu informei toda a turma que se os alunos conseguissem relatar a quantidade de quadrados pretos sem precisarem de fazer o desenho, podiam explicar por palavras a forma como tinham encontrado a resposta. Aí, o José construiu com o material a 6.ª figura e resolveu questionar a Clara para verificar se ela tinha compreendido a relação já encontrada por eles.

> José- Ò Clara, diz-me uma coisa, que figura é esta?
>
> Clara- 6.ª figura.
>
> José- Porque contastes estes (*apontando para os seis quadrados pretos da 6.ª figura e a Clara acena que sim com a cabeça*). Então não precisamos do desenho. (*e desmonta a figura*) Fica aqui se precisarmos… (*e junta o material todo a um canto da mesa*) Pronto.
>
> Clara- Então, acabamos os desenhos? Ou deixamos?
>
> José- Deixamos. Pretos… (*acabando de escrever 10 quadrados pretos que correspondia à resposta da 2.ª questão*)

A forma como a Clara lhe respondeu e como o José relatou quais os quadrados em que ela se estava a focar ("Porque contastes estes.") indicou, mais uma vez, que os alunos estavam a mobilizar um raciocínio funcional, pela decomposição da figura e a relação desta parte da figura com o número de ordem do termo. Apesar dessa compreensão, os alunos mantiveram a representação pictórica da 10.ª figura.

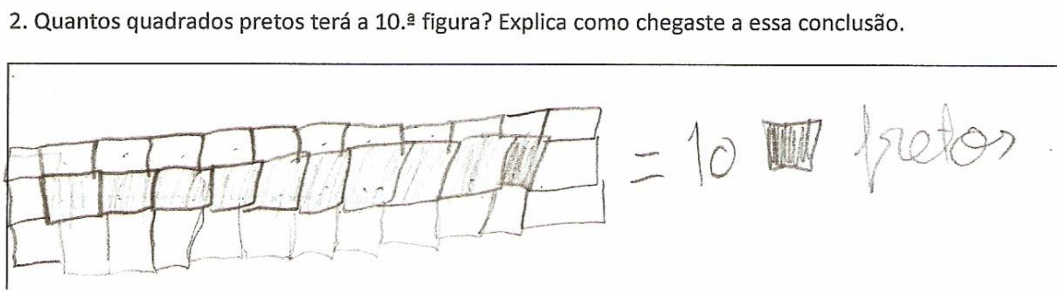


Figura 26- Representação pictórica da 10.ª figura feita pela Clara, para a 2.ª questão da tarefa 5

De seguida, os alunos prosseguiram para a escrita da relação entre o número de quadrados pretos e o número da figura.

José- Olha, vê. O número de quadrados pretos representa o número da figura. (…) Sim, um vezes *n*.

Clara- Sim, foi isso que eu te disse… antes de começarmos… já tinha percebido.

José- Vezes *n*. Igual…

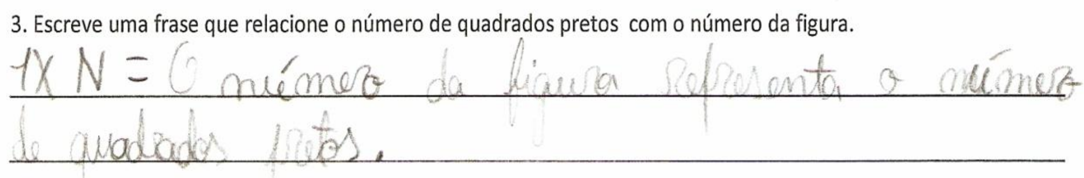
Clara- Um vezes *n*? Vezes *n*? (*a Clara vai falando alto enquanto o José escreve*) Um vezes *n*?

José- Como?

Clara- Mas um vezes *n*!

José- Porque isto é uma vez o número da figura.

A escrita desta relação foi muito célere pois ambos já tinham compreendido a relação que estava a ser pedida. Neste diálogo comprovou-se a utilização de uma linguagem algébrica com o José a utilizar uma letra em representação do número de ordem de uma figura, a variável independente: "…um vezes *n*.". Esta utilização tornou-se ainda mais evidente quando o José explicou à Clara o significado dessa expressão algébrica ("Porque isto é uma vez o número da figura.") porque a Clara não tinha percebido o significado da letra *n*. O facto de o José ter utilizado a linguagem multiplicativa ("…um vezes *n*.") e não simplesmente *n* adveio das relações das tarefas anteriores expressas na forma de produto.


3. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados pretos com o número da figura.

1X N = O número da figura representa o número de quadrados pretos.

Figura 27- Escrita da relação entre a parte do termo dos quadrados pretos e o número de ordem do termo feita pelo José, para a 3.ª questão da tarefa 5

A questão seguinte solicitava o número de quadrados brancos da 4.ª figura.

José- Então, vamos copiar à 4.ª figura daqui. (*referindo-se à representação que fizeram na resposta à 1.ª questão*)

Clara- Ok.

José- Mas eu sei fazer. Não preciso… (*referindo-se ao facto de que não precisa de ir copiar a figura*) Tu também sabes fazer, não precisas…

Clara- Sim.

(…)

José- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. (*contando os quadrados brancos na sua representação*) Catorze brancos. (*enquanto o José fala alto o que vai escrevendo, a Clara também escreve catorze quadrados brancos)* Pronto. Quantos quadrados brancos… Vou fazer.

Para a resposta a esta questão, os alunos limitaram-se a fazer a representação pictórica da 4.ª figura e a fazer a contagem unitária dos quadrados brancos que constituíam a 4.ª figura.

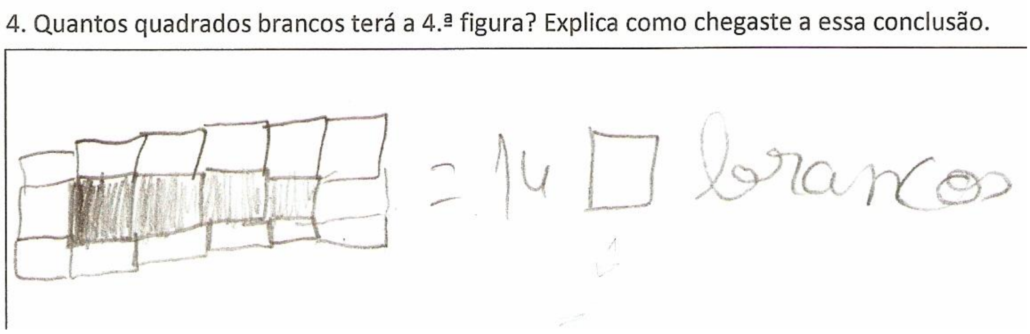


Figura 28- Representação pictórica da 4.ª figura feita pela Clara, para a 4.ª questão da tarefa 5

Para a 5.ª questão, os alunos voltaram a fazer a representação pictórica da 10.ª figura e a fazer a contagem unitária dos quadrados brancos que a constituíam.

Clara- Vamos desenhar outra vez a 10.ª figura.

José- E temos que escrever outra vez só quadrados brancos. Já sei, é o número da figura mais dez. (…) Não estou a perceber a minha 10.ª figura. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (*fazendo a contagem unitária dos quadrados pretos*).

Depois de fazer a contagem dos quadrados pretos no seu desenho, o José começou a rodear os quadrados pretos desenhando os quadrados brancos. A determinada altura, o José fez logo a linha limitando o espaço onde terminaria o espaço dos dez quadrados brancos de cima e dos dez quadrados brancos de baixo e depois os três em cada uma das extremidades e só no final fez a separação unitária de cada um dos quadrados, revelando uma visão de decomposição do termo, como demonstrado na figura.

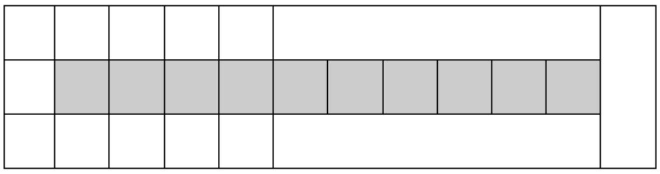


Figura 29- Processo de representação pictórica da 10.ª figura feita pelo José, para a 5.ª questão da tarefa 5

Clara- Vinte quadrados. (*contando os dez quadrados que colocou em cima e os dez quadrados que colocou em baixo e só depois começa a desenhar os três em cada uma das extremidades*)

José- Tu contaste?

Clara- Hum, hum. (*acenando com a cabeça que sim*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26. (*contando os quadrados brancos*)

Depois da representação pictórica da figura, os alunos terminaram a questão com a contagem unitária dos quadrados brancos e a sua escrita.

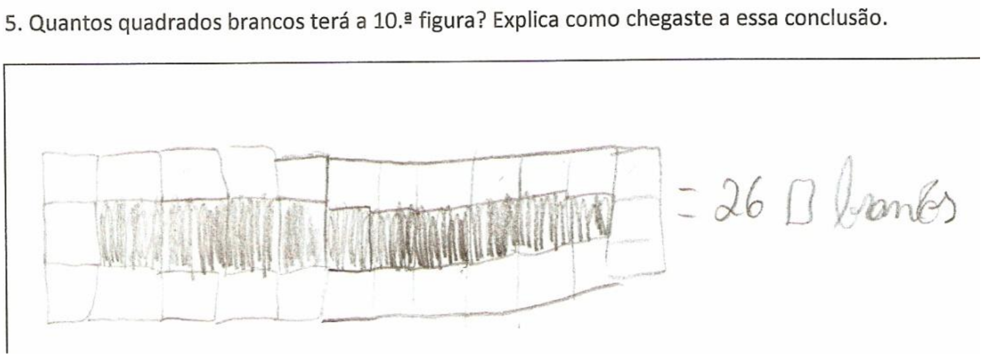


Figura 30- Representação pictórica da 10.ª figura feita pelo José, para a 5.ª questão da tarefa 5

A descoberta da relação entre o número de quadrados brancos e o número de ordem da figura revelou-se mais difícil para ambos, embora o José tenha sido mais perspicaz na descoberta da relação.

José- Seis. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados brancos com o número da figura (*lendo o enunciado*). Não sei.

Clara- O número da figura mais dez. (…) O número da figura mais dez.

José- Vinte. 10.ª figura.

Clara- Não.

José- Vinte seis. (*continuando o seu raciocínio sem dar importância ao que a Clara lhe disse*) E só se relaciona com esta (*apontando para a 4.ª figura*).

Clara- Não estou a ver a relação.

(…)

José- Vamos ter que voltar atrás e ver.

(*ambos viram a folha e observam o padrão inicial*)

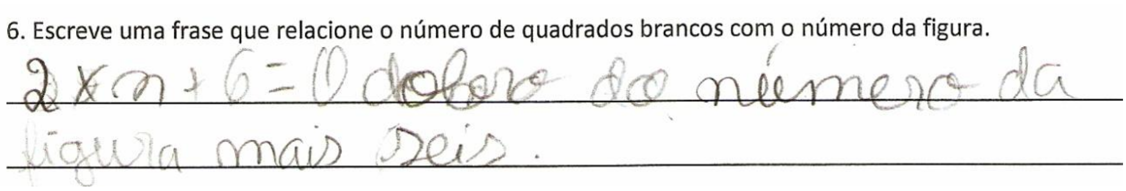
José- (…) Já sei. O dobro do número da figura mais seis.

Clara- Ahh!

José- Olha aqui (*apontando para a 3.ª figura*). 1, 2, 3 (*referindo-se aos quadrados brancos por cima dos quadrados pretos*), 4, 5, 6 (*referindo-se aos quadrados brancos por baixo dos quadrados pretos*). É o dobro do número da figura, não é? Mais 1, 2, 3 (*referindo-se aos quadrados brancos do lado direito da figura*), 4, 5, 6 (*referindo-se aos quadrados brancos do lado esquerdo da figura*).

Clara- Ah! O dobro do número da figura mais seis.

A Clara focou-se na 10.ª figura e verbalizou o dobro de quadrados em cima e em baixo, combinando uma linguagem narrativa com características gerais e concretas: "O número da figura mais dez.". Mais uma vez, o José foi muito hábil na observação do padrão e na descoberta da relação. Talvez a forma como desenhou a 10.ª figura, na questão anterior, possa ter influenciado a forma como visualizou a decomposição do termo e a descoberta da relação. O José conseguiu mobilizar um raciocínio funcional aquando desta descoberta, suportado pela forma como olhou para essa figura concreta.


6. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados brancos com o número da figura.

2 × n + 6 = O dobro do número da figura mais seis.

Figura 31- Escrita da relação entre a parte do termo dos quadrados brancos e o número de ordem do termo feita pela Clara, para a 6.ª questão da tarefa 5

O grupo avançou depois para a 7.ª questão que preconizava a aplicação de uma das relações descobertas anteriormente, nomeadamente a relação entre o número de quadrados pretos e o número de ordem da figura.

José- Qual o número da figura que tem 25 quadrados pretos? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*). É a figura número vinte e cinco. Porque nós já tínhamos visto que o número de quadrados pretos…

Clara- A vigésima quinta (*dizendo o número da figura de forma ordinal*).

José- É a número vinte e cinco.

Clara- Sim.

José- Que o número de quadrados pretos é o número da figura. Então, vamos fazer (*ambos começam a desenhar a 25.ª figura*).

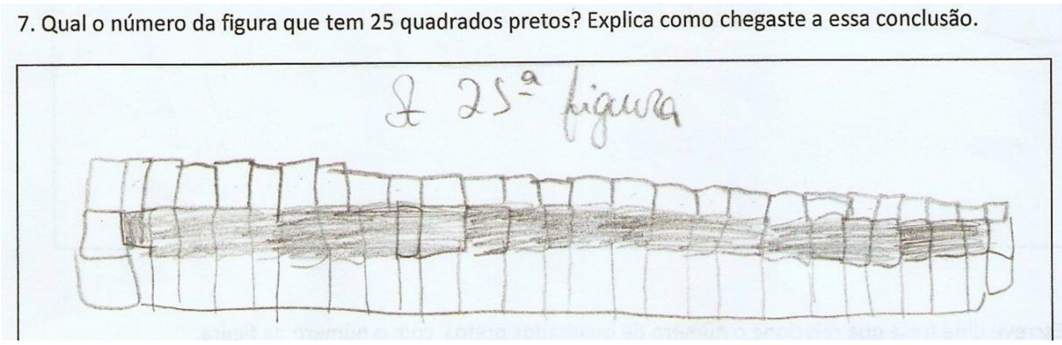


Figura 32- Representação pictórica da figura com 25 quadrados pretos feita pelo José, para a 7.ª questão da tarefa 5

O grupo, apesar de aplicar a relação conhecida, acabou por fazer a representação pictórica da 25.ª figura de forma a proceder à explicação das suas conclusões. Pelo diálogo foi percetível que os alunos recorreram a um raciocínio funcional, chegando à resposta de modo imediato sem necessidade de recorrer às representações com o material ou com o desenho.

Posteriormente, continuaram para a 8.ª questão que indicava a aplicação da outra relação descoberta anteriormente, desta feita a relação entre o número de quadrados brancos e o número da figura. Nesta questão, essa descoberta não era tão objetiva quanto a relação conhecida com os quadrados pretos.

José- Qual o número da figura que tem 20 quadrados brancos? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*). É assim, olha… (*e começa a desenhar quadrados*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 10. Espera aí. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Hum! Mas não devia ser assim.

Clara- Qual é?

José- Esquece.

(*ambos apagam o que tinham desenhado*)

(…)

Clara-Porque é que apagaste os quadrados?

José-Porque não dava. Eram catorze. (…) (*o José vai desenhando quadrados em cima e em baixo alternadamente*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. (*colocando nove quadrados em cima e nove quadrados em baixo alternadamente*) 19, 20. (*colocando nas extremidades os quadrados do meio entre as duas linhas de nove quadrados*) Descobri. Não sei ainda. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. E a 7.ª figura (*depois de contabilizar os quadrados centrais que seriam quadrados pretos*).

Pela dificuldade desta questão, pelo raciocínio inversivo que estava subjacente, o José optou por uma decomposição em duas partes, colocando os quadrados brancos alternadamente em cima e em baixo até chegar ao total de quadrados brancos pretendido através da contagem. Após o José ter encontrado a solução, pela via da representação pictórica da figura, a Clara desenhou os nove quadrados de cima e foi completando a figura com os restantes quadrados brancos pois o José já tinha dito que tinha nove quadrados em cima e foi olhando para a figura que o José desenhou, de forma a desenhar também a sua figura, limitando-se assim a copiar a figura feita pelo colega, mas colocando um quadrado branco a mais em cada uma das extremidades. Enquanto na exploração da relação, os alunos decompuseram o número de quadrados brancos no dobro do número da figura mais seis (três em cada extremidade), nesta questão, a sua decomposição correspondeu algebricamente a $2\ (n + 1) + 2$.

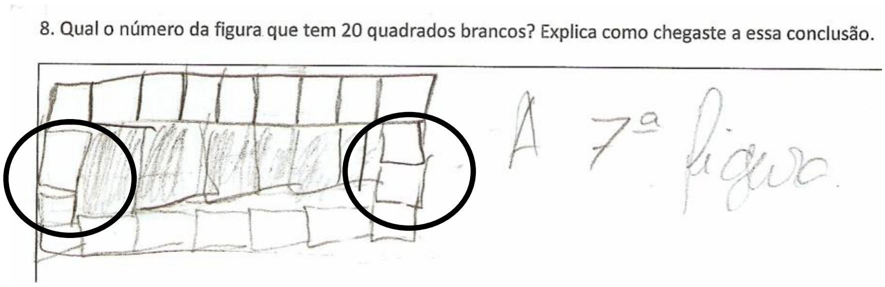


Figura 33- Representação pictórica da figura com 20 quadrados brancos feita pela Clara, para a 8.ª questão da tarefa 5

Para a resolução da 9.ª questão, em que questionava qual o total de quadrados (pretos e brancos) da 40.ª figura, os elementos do grupo começaram por tentar fazer a representação pictórica da figura, iniciando a representação dos 40 quadrados pretos. Rapidamente perceberam que a figura ficaria demasiado extensa e que iriam demorar muito tempo a representar a figura e a proceder à contagem de todos os quadrados.

José- Temos que pensar logo, quarenta mais quarenta… (…) Quarenta mais quarenta, oitenta… (…) Cento e vinte… (…) Cento e vinte e seis.

(…)

(*a professora aproxima-se*)

Professora- Hum! Tanto! Então não conseguiram encontrar ainda nenhuma relação?

José- Conseguimos.

Professora- Então se conseguiram encontrar a relação porque é que precisam de estar a fazer o desenho?

José- Porque aqui é o total de quadrados.

Professora- Sim. Então se vocês conseguiram já estabelecer uma relação para os brancos e a relação…

José- Para os pretos…

Professora- Para os pretos. O que é que depois precisam de fazer?

José- De ver… quantos é que são.

Professora- Quantos é que são os…

José e Clara- Quadrados pretos e os brancos…

Professora- Os brancos. E depois o que é que precisam de fazer?

José- Juntar.

Professora- Juntar! Certo? A ideia disto é que vocês consigam…

José- Estou a fazer uma conta…

Professora- Encontrar a relação para ser mais fácil, para não terem que fazer esse desenho enorme… (…) Que estavam a fazer.

José- Estou a fazer uma conta… Quarenta, mais quarenta, mais quarenta…

Professora- E de onde é que vem esse quarenta?

José- Um dos quarenta (*referindo-se ao primeiro quarenta que mencionou*) era…

José e Clara- Dos quadrados pretos…

José- Os outros (*referindo-se aos outros dois quarenta que mencionou*) é os que estão em cima e os que estão em baixo. E depois ainda temos mais três, destes lados (*referindo-se aos quadrados do lado direito e os três quadrados do lado esquerdo*).

Com esta narrativa foi percetível que, mesmo tendo conseguido compreender a relação entre o termo e o número de ordem do termo, nomeadamente a relação dos quadrados pretos e a relação dos quadrados brancos, os alunos continuavam a dar primazia à representação pictórica da figura. Também a extensão da 40.ª figura fez o José abandonar a ideia de desenhar o total de quadrados focando-se antes no cálculo numérico através da aplicação da relação funcional antes identificada: "Temos que pensar logo, quarenta mais quarenta… (…) Quarenta mais quarenta, oitenta… (…) Cento e vinte… (…) Cento e vinte e seis.". Mesmo antes, a minha intervenção acerca da resolução dos alunos fez com que estes se focassem na relação conhecida e que, aplicando essa relação, não teriam a necessidade de representar a figura. A explicação do José revelou um raciocínio funcional, mostrando como fez a decomposição do termo e como relacionou o termo com o número de ordem do termo: "Quarenta, mais quarenta, mais quarenta…(…) E depois ainda temos mais três, destes lados.".

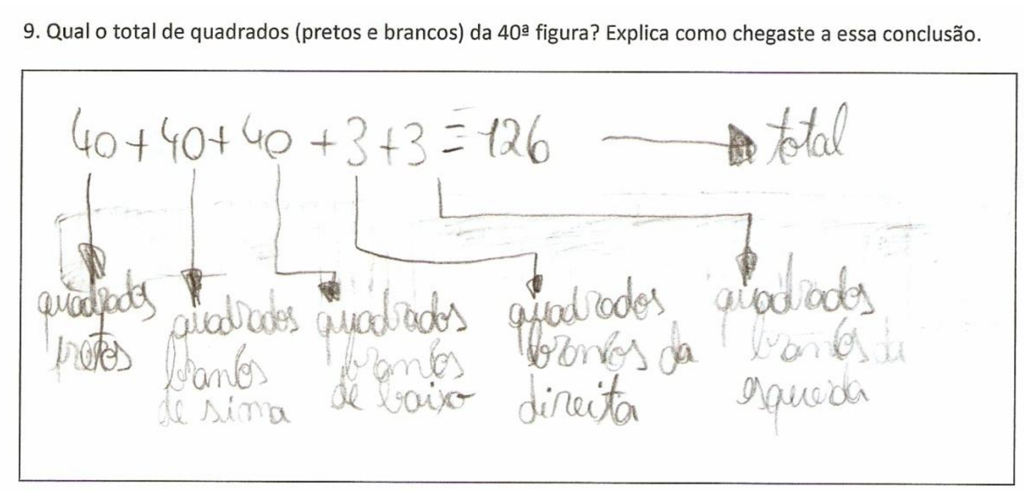


Figura 34- Apresentação dos resultados feita pelo José, para a 9.ª questão da tarefa 5

De seguida avançaram a resolução da 10.ª questão, em que os alunos teriam de aplicar o raciocínio inversivo porque a questão focava-se na descoberta da figura que teria 36 quadrados.

Clara- Qual o número da figura que tem 36 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*). Então, trinta e seis pretos…

José- Não! Trinta e seis quadrados! Não diz quais são. (…) Estes seis são do lado, só pode. (…) Os primeiros seis são três de um lado e do outro. (*e desenha três quadrados do lado direito e três quadrados do lado esquerdo*)

Clara- Estás a fazer… (…) Então, como é que vamos fazer?

José- Agora só temos trinta. Trinta a dividir por três.

Clara- Trinta a dividir por três. Adoras fazer contas, não é?

(*ambos aplicam o algoritmo da divisão*)

Clara- Trinta a dividir por três… Aí…

José- Pronto. Dez para cada lado. A 10.ª figura!

Clara- A décima! (*espantada*)

José- A décima! (*espantado*)

(*ambos viram a folha de trabalho para observarem a 10.ª figura que já haviam desenhado duas vezes*)

Clara- Dez e dez dá vinte…

José- Espera aí!

Clara- Trinta… 30, 31, 32, 33 e 36. Tem trinta e seis. Trinta…

José- Dez mais dez, vinte, mais dez, trinta. Sim.

Inicialmente, a Clara revelou dificuldades na interpretação da questão quando afirmou que seriam 36 quadrados pretos. O José corrigiu-a e mostrou-se muito perspicaz na aplicação do raciocínio inversivo, revelando o seu raciocínio funcional, e explicando à Clara a forma como estava a pensar e a fazer a decomposição da figura: “Os primeiros seis são três de um lado e do outro. (…) Agora só temos trinta. Trinta a dividir por três.”. No final, ficaram um pouco surpreendidos por ser a 10.ª figura porque já a haviam representado duas vezes e ainda não tinham dado conta da quantidade total de quadrados daquela figura. Apesar disso, e depois de aplicado o raciocínio inversivo, o José aplicou uma parte da relação conhecida numa forma de verificação (“Dez mais dez, vinte, mais dez, trinta.") e ainda tiveram a necessidade de fazer novamente a representação pictórica da 10.ª figura.

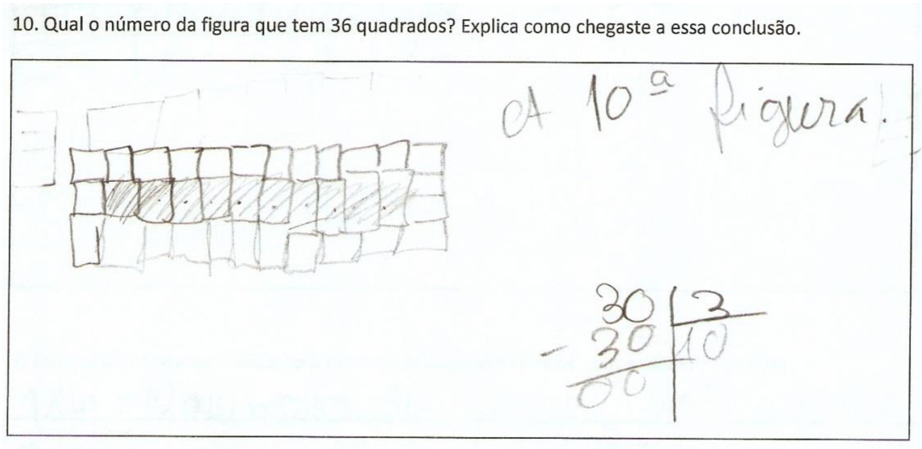


Figura 35- Apresentação dos resultados feita pela Clara, para a 10.ª questão da tarefa 5

Revisão da Tarefa 5

Durante a revisão, o José chegou a ponderar a hipótese de ter errado a escrita da relação entre os quadrados brancos e o número da figura (6.ª questão) onde tinham escrito: "2 x *n* + 6 = o dobro do número da figura mais seis.".

> Clara- Escreve uma relação que relacione o número de quadrados brancos com o número da figura. Dois vezes *n* mais seis, o dobro do número da figura mais seis.
>
> José- Três vezes *n*!
>
> Clara- Três?! Dá três? É dois.
>
> José- Então vamos ter que ver outra vez. Olha lá, é três vezes, um, dois, três. (*contando as linhas da figura*)
>
> Clara- Mas metemos dois. (…) Estava bem, José! José, estava bem. Porque este é dos brancos, dos quadrados brancos. E só aparece duas vezes. Então estava bem.
>
> José- Ok. Pensava que não era dos quadrados brancos, que eram todos.

Neste diálogo foi notório que a Clara conseguiu compreender a relação entre os quadrados brancos e o número da figura, pela forma como conseguiu explicar ao José que a resposta que tinham dado no início estava correta: "Porque este é dos brancos, dos quadrados brancos. E só aparece duas vezes.". Esta sua narrativa indicou a aplicação de um raciocínio funcional por parte da Clara que aqui também pareceu revelar mais confiança em si própria. Também o José revelou um raciocínio funcional apesar de ter verbalizado a relação para o número total de quadrados: "Pensava (…) que eram todos.".

Tarefa 6

Depois de entregue o material (14 quadrados e 10 triângulos) ao grupo e a folha de registo, o José foi muito rápido na observação da figura e na obtenção de conclusões.

José- Primeiro vamos ver. A fila de tijolos é o número da figura. A fila… e o número de filas… de triângulos é igual, também é o número da figura. Então, vamos fazer quatro para cima e quatro laterais (*apontando para os quatro quadrados da linha de baixo da figura e para os quatro quadrados da coluna da direita da figura*). Pronto, assim. Estás a ver?

Clara- É quatro laterais, né [sic]?

José- Sim.

(…)

Clara- Quantos triângulos é que tem, José?

José- Uma tem quatro, uma três, uma dois e uma de um.

Clara- Ok. (…) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. Dezasseis (*contando os quadrados de forma unitária*).

(…)

(*a professora aproxima-se*)

Professora- Usaram material? (*a Clara e o José acenam que não com a cabeça*) Então, ponham aqui só desenho (*dando a indicação que escrevam a palavra desenho como indicação de que não utilizaram o material disponibilizado*).

José- Quantos tijolos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*).

Professora- Como é que vocês perceberam que era este valor? Como é que contaram? (*questionando acerca da obtenção de dezasseis tijolos para a 4.ª figura*)

José- Contámos oito e depois fizemos vezes dois.

Professora- Foi?

José- Sim. Contámos estes (*referindo-se às duas linhas de cima*) e depois fizemos vezes dois porque estes (*referindo-se às duas linhas de baixo*) são iguais.

O José percebeu muito rapidamente a relação existente entre uma parte do termo, nomeadamente o número de quadrados da base dos quadrados e o número de triângulos da base dos triângulos e o número de ordem da figura ("A fila de tijolos é o número da figura. A fila… e o número de filas… de triângulos é igual, também é o número da figura."), revelando um raciocínio funcional. Também visualizou o número de quadrados da linha e da coluna como correspondendo ao número da figura: "Então, vamos fazer quatro para cima e quatro laterais.". Depois de questionado pela Clara, ele também lhe explicou a forma decrescente como o número de triângulos se dispunha nas várias camadas, começando pela camada da base correspondendo ao número da figura: "… e o número de filas… de triângulos é igual, também é o número da figura. (…) Uma tem quatro, uma três, uma dois e uma de um.".

Embora ele se tenha expressado em jeito de raciocínio multiplicativo que poderia sugerir o cálculo de 4x4 por ter referido ("… quatro para cima e quatro laterais.") de acordo com o modelo retangular da multiplicação, na explicação de como contou, ele mencionou que utilizou outro tipo de raciocínio multiplicativo ("Contámos estes e depois fizemos vezes dois porque estes são iguais.") escrevendo posteriormente 8 x 2 = 16. Apesar da forma como ele explicou que teriam efetuado a contagem, a Clara fez uma contagem unitária dos quadrados da figura: "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.".

Mesmo com a questão a interrogar apenas a quantidade de tijolos, o grupo optou por fazer a representação pictórica da figura completa, representando os tijolos e as telhas.

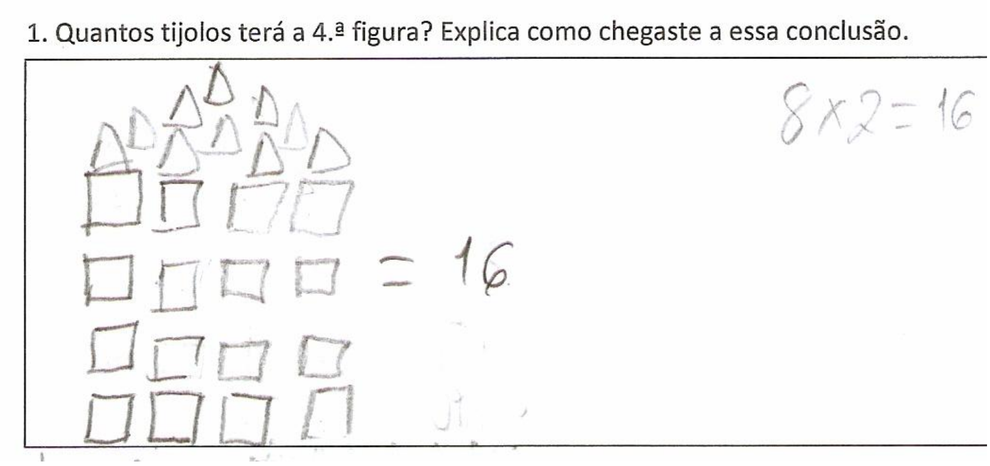


Figura 36- Representação pictórica da 4.ª figura e apresentação de resultados feita pela Clara, para a 1.ª questão da tarefa 6

Para a resolução da 2.ª questão, os elementos da díade começaram por recorrer, desta vez, à utilização do material.

> José- Quantos tijolos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão (*lendo o enunciado*). Vamos fazer com isto (*referindo-se ao material*). Três. Eu vou fazer cinco e tu fazes o resto.
>
> Clara- É a 10.ª, sabes?
>
> José- Cinco. Mete dez. Agora vais meter cinco.
>
> (…)
>
> Clara- Já pus. (*construindo com material a linha de baixo com quadrados*)
>
> José- Agora mete nove para cima.
>
> Clara- Só dá cinco.
>
> José- Vamos meter com telhas. Seis.
>
> Clara- Mas depois vamos confundir.
>
> José- Não. Sete, oito e o último.
>
> (…)
>
> José- Agora temos de fazer dez vezes dez.
>
> (…)
>
> (*a professora aproxima-se*)
>
> Professora- Então, e são quantos tijolos. Já descobriram?
>
> José- São dez vezes dez.

Professora- Como é que tu viste isso?

José- Porque aqui são dez (*referindo-se à linha de baixo*) e aqui para baixo (*referindo-se à coluna da esquerda*) são dez. Então fizemos vezes, que dá cem.

O José apelou à utilização do material para representar a figura. Esta representação apoiou a emergência de um raciocínio multiplicativo associado a um modelo retangular. Perante a falta de quadrados, o José sugeriu a colocação de triângulos apenas para poder completar esta coluna da figura e assim explicar a sua estratégia de contagem. A limitação do material levou o José a representar apenas a estrutura retangular marcada por 10 quadrados em coluna e em linha. Assim, rapidamente viu o número total como o produto de 10 por 10, mesmo sem representar os quadrados interiores. Mais uma vez, o José mostrou-se muito ativo na resolução da questão, narrando-me a forma como visualizava a figura, evidenciando que havia compreendido a relação entre esta parte do termo e o número de ordem do termo, revelando novamente um raciocínio funcional. Mais uma vez, e mesmo tendo encontrado a relação, o grupo optou por recorrer também à representação pictórica da 10.ª figura.

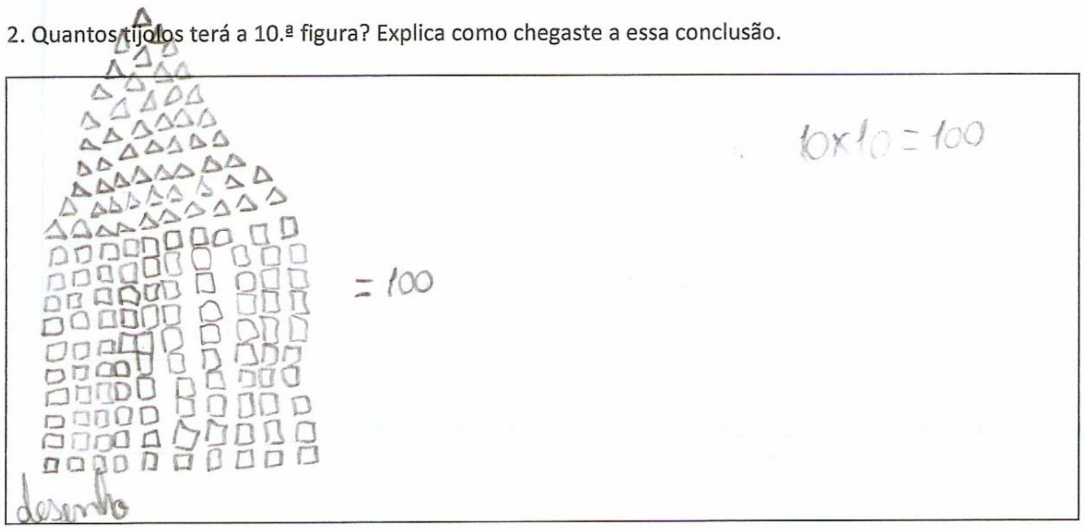


Figura 37- Representação pictórica da 10.ª figura e apresentação dos resultados feita pelo José, para a 2.ª questão da tarefa 6

Perante a compreensão da relação, principalmente por parte do José, como verificado nas questões anteriores, a escrita da relação entre o número de tijolos e o número da figura mostrou-se muito rápida.

José- Três. Escreve uma frase que relacione o número de tijolos com o número da figura (*lendo o enunciado*). O número de tijolos… O número de tijolos, os que tão [sic]… O número da figura…

Clara- Todas as filas têm o número da figura…

José- O número da figura é… vezes… (*pausa*) Não. O número da figura vezes outro número da figura, vez… é igual… ao número…

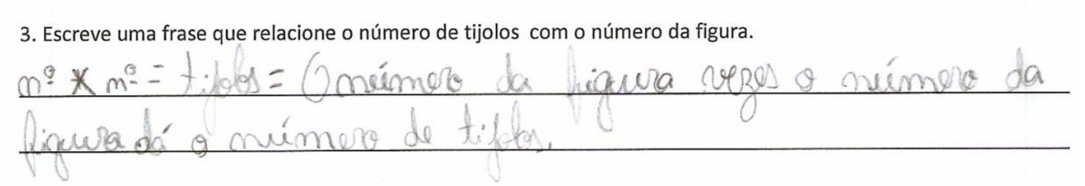
Clara- De tijolos…

José- De tijolos. Tipo… O número vezes o número é igual tijolos. Professora, eu não sei fazer tijolos em expressão numérica.

Professora- Ah!?

José- Professora, eu não sei fazer tijolos em expressão numérica, por isso fiz assim (*indicando que escrevera n.º x n.º = tijolos*).

Depois desta narrativa, tornou-se igualmente óbvio que também a Clara havia compreendido a relação entre o número de tijolos e o número de ordem da figura: "Todas as filas têm o número da figura…". Contudo, o maior contributo para a escrita da relação deveu-se ao José que mais uma vez conseguiu escrever uma expressão algébrica para descrever a relação encontrada: "O número vezes o número é igual tijolos.".


3. Escreve uma frase que relacione o número de tijolos com o número da figura.

nº x nº = tijolos = O número da figura vezes o número da figura dá o número de tijolos.

Figura 38- Escrita da relação entre a parte do termo dos tijolos e o número de ordem do termo feita pelo José, para a 3.ª questão da tarefa 6

Na 4.ª questão impunha-se a aplicação de um raciocínio inversivo de forma a encontrar o número da figura que teria 36 tijolos.

José- Então, vamos fazer trinta e seis… (*pausa*) Não sei. Espera, trinta e seis é múltiplo de seis… então vamos tentar fazer com seis. Podemos fazer trinta e seis a dividir por seis. Por seis… trinta e seis. (*fazendo o algoritmo da divisão*) Acabei.

Clara- Como é que fizeste?

(…)

(*a professora aproxima-se*)

Professora- Estás a fazer o desenho para quê?

José- Porque preciso de contar, para saber se está certo.

Professora- Ah! Para verificar, é isso? (*o José acena que sim com a cabeça*)

Mais uma vez, o José tomou conta da resolução sozinho e, aplicando a noção de múltiplo, alcançou logo na primeira tentativa a resposta à questão: "…trinta e seis é múltiplo de seis… então vamos tentar fazer com seis.". Para verificar se os seus cálculos estavam corretos, fez a representação pictórica da 6.ª figura aplicando a relação conhecida. Mais uma vez, mesmo sem ser solicitado, os elementos do grupo continuaram a representar a figura completa fazendo tanto os tijolos como as telhas.

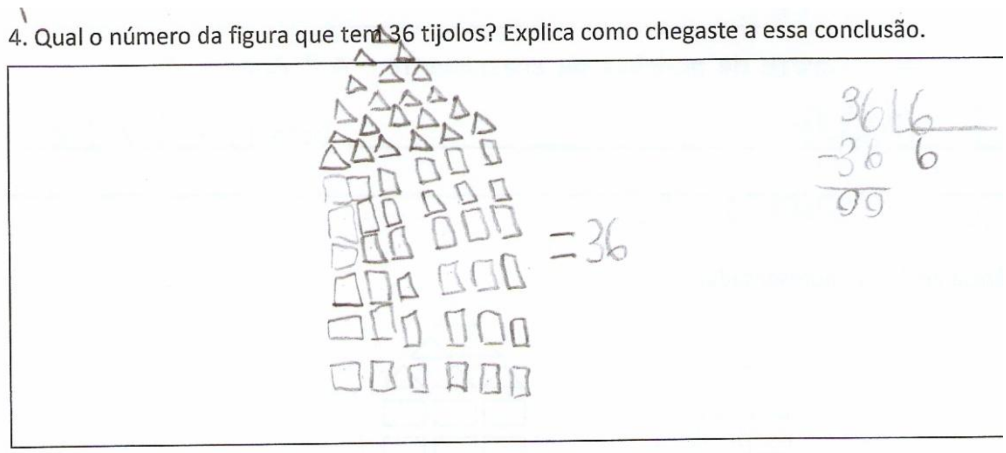


Figura 39- Representação pictórica e apresentação dos resultados feita pelo José, para a 4.ª questão da tarefa 6

Na 5.ª questão, os alunos teriam de indicar quantas telhas teria a 4.ª figura. Como fora uma figura já representada pelo grupo anteriormente, os alunos resolveram fazer a contagem das telhas nessa figura.

José- (…) Vou ver aqui. (*virou a folha e começou a fazer a contagem unitária das telhas na figura que tinha feito na 1.ª questão*) 1, 2, 3, 4 (*contando as telhas da linha de baixo*). 5, 6, 7 (*contando as telhas da linha acima*). 8, 9 (*contando as telhas da linha acima*). 10 (*contando a telha da linha superior*).

Clara- Como é que vamos pôr? Como é que vamos fazer?

José- Faz a mesma conta. É o que eu estou a fazer. Quatro mais seis, o que dá dez.

O José, depois de fazer a contagem das telhas, escreveu um cálculo que tinha como resultado o número dez, que era a quantidade de telhas contadas por ele. O José optou por escrever 4 + 6 = 10 como resposta à questão, apesar de ter feito uma contagem unitária dos triângulos.

Na 6.ª questão, os alunos teriam novamente de indicar a quantidade de telhas, mas desta vez as telhas da 10.ª figura.

> José- Pronto. Já fizemos isso. Agora vamos atrás. Dez, nove, dez… Espera lá… Trinta… Quarenta… Sessenta… Cinquenta… e cinco.
>
> Clara- Cinquenta e quê?
>
> José- Cinquenta e cinco telhas.
>
> (…)
>
> Clara- Não sei como é que dá cinquenta e cinco?
>
> José- Já disse.
>
> Clara- Não ouvi.
>
> José- Por isso, dá dez mais quarenta e cinco.
>
> Clara- Dez…

O José quando fez os cálculos mentais ("Dez, nove, dez… Espera lá… Trinta… Quarenta… Sessenta… Cinquenta… e cinco.") foi juntando uma fila de baixo com uma fila de cima que se completavam perfazendo dez, fazendo as somas da seguinte forma (10; 9+1; 8+2; 7+3; 6+4; 5). No entanto, e apesar de ter feito a contagem desta forma, no momento de dar a sua resposta, ele escreveu como resposta novamente um cálculo que tinha o resultado da sua contagem, neste caso 10 + 45 = 55, e não o cálculo representativo da forma como fez a contagem. Nesta narrativa, também foi possível verificar que a Clara não compreendeu a forma como o José fez a contagem e por isso limitou-se a copiar o cálculo feito pelo José. O aluno denotou uma capacidade de visualização espacial pela forma como emparelhou as filas de triângulos de modo a obter sempre o mesmo número, igual ao da base.

Seguidamente, os alunos avançaram para a resolução da 7.ª questão. Como esta questão solicitava o número de peças da 6.ª figura, os alunos recorreram à representação pictórica da figura feita aquando da verificação dos cálculos na 4.ª questão.

> José- Que figura é que temos aqui? (*apontando para a 4.ª questão*)

Clara- 6.ª.

José- Vamos voltar a fazer tudo de novo.

Clara- Ou então contamos aqui. (*sugerindo que contem através do desenho que fizeram na resposta à 4.ª questão*)

(…)

José- (…) Trinta e seis mais seis (*refere seis apontando para a fila de seis triângulos*), quarenta e dois. Quarenta e dois mais seis (*refere seis juntando a fila de cinco triângulos com a fila de um triângulo*), quarenta e oito. Ou então… (*pausa*) E dois mais sete (*juntado a fila de dois triângulos com sete que era a junção da fila de três triângulos com a fila de quatro triângulos*)… Quarenta e oito mais sete… Espera aí, pensa bem… Cinquenta, sobram cinco, cinquenta e cinco. (*e esquece-se de somar o dois de que falou, somando só o sete*) Estou a brincar.

Clara- Sim.

José- Vou ver a parte dos triângulos. (…) Sim, cinquenta e cinco. (…) Trinta e seis. Seis mais seis, doze, doze mais sete, dezanove. (*e esquece novamente o 2*) Dezanove, são dezanove.

Numa primeira abordagem a esta questão, o José decidiu fazer a contagem valendo-se da representação pictórica da 6.ª figura. O José parece juntar a 2.ª fila da base com o triângulo do topo, tal como tinha feito para a 10.ª figura, mas depois abandonou esta estratégia e fez a contagem referida anteriormente, terminando com o cálculo representativo da contagem que efetuou 36 + 19 = 55.

A última questão que correspondia a um número de ordem distante, a 100.ª figura.

José- Quantos tijolos terá a 100.ª figura? Cem vezes… igual a mil. (*verbalizou a resposta ao produto muito rapidamente*)

A resolução desta última questão não teve qualquer interação entre o José e a Clara, onde o José facilmente recorreu à relação conhecida e apresentou a resposta.

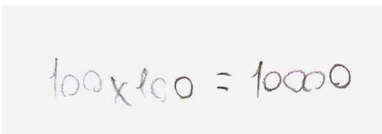


Figura 40- Apresentação dos resultados feita pelo José, para a 8.ª questão da tarefa 6

Nesta resolução ficou patente que, apesar de ter verbalizado que o produto de 100 por 100 seria de 1000, no momento de escrita o José escreveu a resposta correta aplicando a regra de acrescentar dois zeros quando se multiplica por cem.

Revisão da Tarefa 6

Aquando da revisão da 7.ª questão, o José apercebeu-se de que a resolução não estava correta.

> José- Está mal.
>
> Clara- Porquê? Tu contaste duas vezes.
>
> José- Porque não é dezanove. Seis mais seis, doze, mais seis, dezoito, mais três, vinte e um. É trinta e seis mais vinte e um. Hum! Cinquenta e sete.

O José fez novamente cálculos mentais quando afirmou: "Seis mais seis, doze, mais seis, dezoito, mais três, vinte e um.", ao ir juntando uma fila de baixo com uma fila de cima que se completavam dando seis e no final juntando três, fazendo as somas da seguinte forma (6; 5+1; 4+2; 3). Após a correção deste valor, os alunos corrigiram o seu cálculo, escrevendo 36 + 21 = 57.

4.2. Grupo da Susana e do Emanuel

Tarefa 1

Depois de entregue o material (6 quadrados brancos e 6 quadrados pretos) ao grupo e a folha de registo, os alunos começaram por observar o padrão desenhado na folha e a retirar conclusões.

> Susana- Já sei como é que podemos fazer. Esta tem 1 (*apontando para a 1.ª figura*), esta tem 2 (*apontando para a 2.ª figura*)…
>
> Emanuel- Esta tem 3 (*apontando para a 3.ª figura*)…
>
> Susana- Depois tem 4, 5, 6, 7, 8, 9.
>
> Emanuel- Aqui tem 3 (*apontando para a 3.ª figura*), aqui vai ser 4 (*referindo-se à 4.ª figura da 1.ª questão*).
>
> Susana- Quantos quadrados pretos terá a figura? *(lendo o enunciado*) Quatro quadrados pretos. *(agarram no material e constroem as 3 figuras dadas na*

sequência inicial) Agora a 4.ª figura temos de fazer assim *(e coloca dois quadrados pretos na 2.ª figura, construindo a 4.ª figura).*

Emanuel- A 4.ª figura vai ter 4 quadrados pretos.

Ambos observaram o padrão e conseguiram estabelecer a relação existente entre o termo, nomeadamente a quantidade de quadrados pretos, e o número de ordem do termo. Apesar de inicialmente conseguirem estabelecer a relação funcional verbalizada pela Susana ("Quatro quadrados pretos."), os alunos decidiram também manipular o material para construírem as figuras de acordo com as conclusões a que tinham chegado. Para a resposta a esta questão, os alunos não tinham a necessidade de manipular o material porque já haviam descoberto a relação contudo, os elementos da díade manipularam o material e optaram por fazer a representação pictórica de todas as figuras até chegarem à 4.ª figura.

Susana- (…) Por exemplo, se a 3.ª figura são 3 quadrados pretos, por isso a 4.ª figura são 4 quadrados pretos. É sempre assim. (*desmancham as outras figuras e ficam apenas com a 4.ª figura*) Espera, tenho que ver isto. Cheguei a esta conclusão e fazemos este (*referindo-se à representação pictórica da 1.ª figura*), este (*referindo-se à representação pictórica da 2.ª figura*) e este (*referindo-se à representação pictórica da 3.ª figura*) e depois este (*apontando para a construção da 4.ª figura feita com o material*).

A dificuldade em explicar a conclusão, fazendo com que os alunos tivessem sentido a necessidade da fazer a representação pictórica de todas as figuras, poderá ter acontecido por ter sido a primeira vez que tinham contacto com este tipo de tarefas.

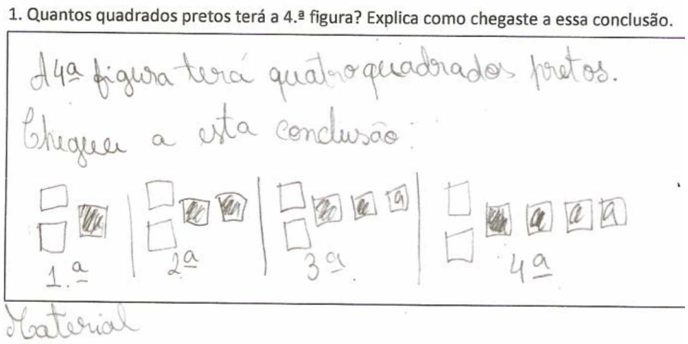


Figura 41- Representação pictórica das quatro figuras iniciais do padrão feita pela Susana, para a 1.ª questão da tarefa 1

Depois da resolução da 1.ª questão, a Susana foi muito rápida na resolução da resposta à 2.ª questão. A Susana começou por tentar recorrer ao material mas depressa concluiu que não tinha, à sua disposição, material suficiente.

> Susana- Agora vou fazer a 10.ª figura. (*e começa a colocar os quadrados pretos e a fazer a sua contagem*) 1, 2, 3, 4, 5, 6 *(ficando com um ar de admirada).* Só temos 6. (…) Ah! Pois! Quantos quadrados pretos terá a 10.ª figura? (*lendo o enunciado*) A 10.ª figura, 10 quadrados pretos. (*pausa enquanto escrevem*) Cheguei e essa conclusão… Podemos fazer assim, em vez de começarmos daqui (*referindo-se ao facto de começarem novamente a explicação a partir da 1.ª figura*) podemos começar daqui (*referindo-se ao facto de começarem a explicação a partir da 4.ª figura da questão anterior*). Temos que arranjar outra forma. (*pausa*) Já sei, já sei. Cheguei a esta conclusão porque se a 1.ª figura tem 1 quadrado preto, a 2.ª figura tem dois quadrados pretos.

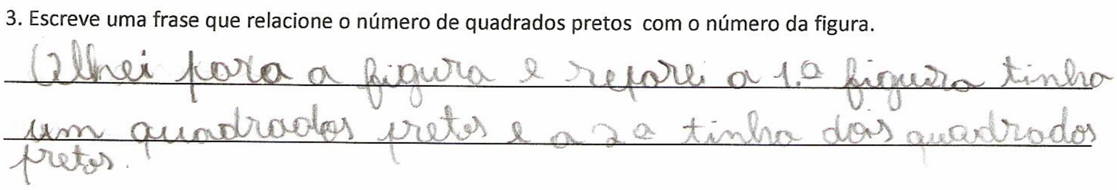
O facto de não ter o material suficiente fez com que a Susana deixasse de ter a necessidade de recorrer à sua utilização e avançar para um outro tipo de raciocínio. Por não ter o material, a Susana mobilizou a relação já encontrada e rapidamente deu a resposta à questão: "A 10.ª figura, 10 quadrados pretos.". Uma vez mais, a dificuldade prendeu-se com a explicação de como tinham chegado às suas conclusões, tendo os alunos a necessidade de se referirem a uma figura em particular, neste caso à 1.ª figura, para a justificação das suas respostas, sem nunca terem verbalizado a relação entre o número de quadrados pretos e o número da figura. De acordo com esta linha de raciocínio, os alunos responderam à questão escrevendo: "A 10.ª figura terá dez quadrados pretos. Cheguei a esta conclusão porque a 1.ª figura tem um quadrado e a 10.ª figura deve ter 10 quadrados pretos.".

Para a 3.ª questão, esta seria a primeira vez que teriam de escrever uma relação entre o termo, ou neste caso, uma parte do termo e o número de ordem do termo. Dado o desconhecimento de como o fazer, os alunos optaram por relatar o que tinham observado.

> Susana- Hum! A 1.ª figura tem 1, a 2.ª figura tem 2, a 3.ª figura tem 3, a 4.ª figura tem 4 e a 10.ª figura tem 10.
>
> Emanuel- Já sei. Se compararmos…

Susana- Não. Temos que dizer aquilo que observámos e escrevemos aqui, como fizemos nas conclusões. (*o Emanuel mostra-se indeciso mas concorda e apaga o que escreveu "Se compararmos"*) Olhei para a figura e reparei que a primeira figura tinha um quadrado preto e a segunda tinha dois quadrados pretos. Não vamos escrever mais porque não tenho espaço.

Para os alunos, a descrição do que haviam observado no padrão e a explicação das conclusões a que tinham chegado, eram suficientes para explicar a relação entre o número dos quadrados pretos e o número da figura. Desta feita, os alunos foram relatando o que tinham observado em apenas duas figuras porque ficaram sem espaço de resposta, sem terem escrito a relação que pudesse ser aplicada a todas as figuras e que os alunos haviam compreendido.


3. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados pretos com o número da figura.

Olhei para a figura e reparei a 1.ª figura tinha um quadrados pretos e a 2.ª tinha dos quadrados pretos.

Figura 42- Escrita da relação entre a parte do termo dos quadrados pretos e o número de ordem do termo feita pelo Emanuel, para a 3.ª questão da tarefa 1

Para a resolução da 4.ª questão, o Emanuel começou por afirmar que as questões 4 e 5 eram iguais às questões 1 e 2, mas rapidamente percebeu que estava errado e que naquela questão interrogava acerca do número total de quadrados.

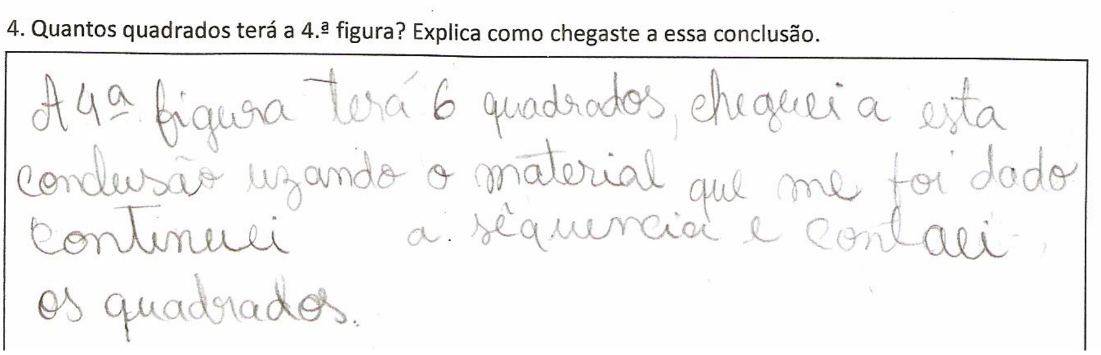
Emanuel- Isto é a mesma coisa (*apontando para a 1.ª questão e para a 4.ª questão*). 1, 2, 3, 4, 5. Terá cinco quadrados… Não, 6 quadrados pretos, 6 quadrados. Olha, esta tem cinco (*referindo-se à 3.ª figura do enunciado*), a outra terá 6. (*o Emanuel constrói com o material a 4.ª figura e faz a contagem unitária dos quadrados*) 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Se nas três primeiras questões desta tarefa, os alunos mobilizaram um raciocínio funcional, nesta questão, o Emanuel demonstrou mais dificuldades e necessitou do material e da representação pictórica da imagem para proceder à contagem unitária dos quadrados da 4.ª figura e só depois de o fazer, conseguiu dar a sua resposta.

Susana- Ok. Espera, eu tive uma ideia para nós fazermos. Em vez de fazermos, tipo 3 ou 4 quadrados, nós podemos fazer uma frase. Então nós podemos dizer:

> Com o material que me foi dado, vimos que tinha 6 quadrados. (*ambos começam a escrever a resposta e a forma como chegaram à conclusão*) A 4.ª figura terá 6 quadrados. (…) Cheguei a esta conclusão com o material… (…) Fizemos a sequência e contámos os quadrados.

Para a resposta a esta questão, a Susana achou que deveriam descrever a forma como tinham feito até chegar à resposta. Apesar de referir que tinham feito a sequência e depois a contagem dos quadrados, os alunos apenas construíram com o material a 4.ª figura.


4. Quantos quadrados terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

A 4ª figura terá 6 quadrados, cheguei a esta conclusão uzando o material que me foi dado continuei a sèquencia e contaei os quadrados.

Figura 43- Explicação de resultados feita pela Susana, para a 4.ª questão da tarefa 1

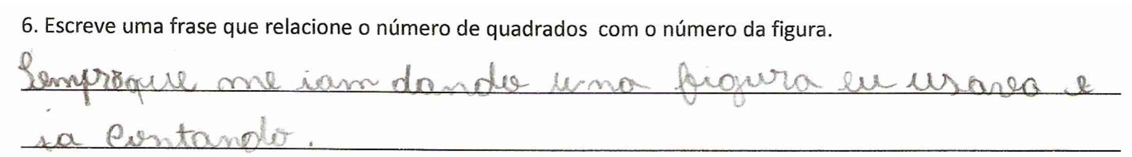
Tal como na 2.ª questão, também aqui os alunos recorreram à resposta anterior e à sua forma de explicação e adequaram-na à 10.ª figura.

> Susana- Quantos quadrados terá a 10ª figura? (*lendo o enunciado*)
>
> *(ambos começam a construir com o material a 10.ª figura, colocando quadrados brancos a substituir os quadrados pretos devido à falta de quadrados pretos)*
>
> Emanuel- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (*contando de forma unitária os quadrados pretos*). 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (*contando de forma unitária todos os quadrados da 10.ª figura*).
>
> Susana- Ok. A 10.ª figura terá 12 quadrados, não é?
>
> Emanuel- Sim.

Aqui voltou a denotar-se a dificuldade dos alunos em preterir o material e encontrar um raciocínio que lhes permitisse descobrir a resposta. Para tal, os alunos encontraram uma estratégia de remediação e decidiram colocar quadrados brancos para tomar o lugar dos quadrados pretos, dada a falta de quadrados pretos, e assim proceder à contagem unitária de todos os quadrados. Depois da contagem dos quadrados, os alunos escreveram as suas respostas: “A 10.ª figura terá doze quadrados, cheguei a esta conclusão utilizando novamente o material que me foi dado e de seguida contei os quadrados todos.”.

Da mesma forma como esclareceram, na 3.ª questão, a relação encontrada entre os quadrados pretos e o número da figura escrevendo o que haviam observado, na 6.ª questão, os alunos descreveram a forma como tinham chegado às respostas nas questões 4 e 5, explicando que haviam recorrido ao material para construir as figuras e para assim fazer a contagem dos quadrados.

> Susana- Hum! Tivemos que contar, tipo, nós pensávamos que era… que eram os quadrados todos pretos, mas depois… Tivemos que contar… os quadrados para saber o que é que, tipo, quantas vezes, tive que contar os quadrados, tipo... (…) Por exemplo, tive que… na 10ª figura, usei o material que me foi dado e depois tive que contar, sempre as figuras que me iam dando, eu ia utilizando o meu material e a contar.


6. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados com o número da figura.

Semproque me iam dando uma figura eu usava e ia contando.

Figura 44- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pelo Emanuel, para a 6.ª questão da tarefa 1.

Os raciocínios aqui apresentados, demonstraram que nas questões envolvendo todos os quadrados, os alunos não conseguiram mobilizar um raciocínio funcional. Esta sua dificuldade poder-se-á ter agudizado pelo facto de nas primeiras questões o número dos quadrados pretos ser igual ao número da figura e nas questões seguintes esta relação não ser tão óbvia, apesar dos quadrados brancos serem um elemento constante, não se alterando de figura para figura.

Tarefa 2

Depois de distribuído o material para a tarefa (15 quadrados) e as folhas de trabalho, ambos observaram a sequência apresentada.

> Emanuel- Observa a sequência de figuras apresentada. (*lendo o enunciado*) É sempre a mesma coisa. O número de quadrados é o número da figura.

O Emanuel, logo que observou pela primeira vez a sequência de figuras, afirmou que o número de quadrados era o número da figura; contudo, não especificou o porquê de ter feito tal afirmação e o seu raciocínio foi interrompido pela Susana que começou a ler a 1.ª questão. Depois de lida a questão, os alunos começaram a manipular o material disponibilizado para a realização da tarefa.

> Susana- Quantos quadrados terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) A 1.ª do lado esquerdo…
>
> Emanuel- Vamos usar. (*e vai buscar o material*) A 1.ª figura, a 1.ª figura tem 3 quadrados (*depois de construir a 1.ª figura com o material*).
>
> Susana- Um do lado esquerdo e outro do lado direito.
>
> Emanuel- A 2.ª figura…
>
> Susana- Tem… Tem… Dois do lado esquerdo e três do lado direito (*depois de construir a 2.ª figura com o material*). A 3.ª figura tem 3 do lado esquerdo e 4 do lado direito (*depois de construir a 3.ª figura com o material*). Gastámos todos (*referindo-se ao facto de ter utilizado todo o material*)
>
> (*O Emanuel começa por tirar dois quadrados da 2.ª figura e acrescenta à 3.ª figura para poder ficar com a 4.ª figura)*
>
> Emanuel- Já está.
>
> Susana- A 4.ª figura terá 4…
>
> Emanuel- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (*contando os quadrados de forma unitária*). Terá 9.

Ancorando-se na utilização do material manipulável, os elementos da díade procederam à contagem dos quadrados de forma diferente. O Emanuel ia construindo as figuras e contando os quadrados, quer referindo-se ao seu total no cado da 1.ª figura ("A 1.ª figura, a 1.ª figura tem 3 quadrados."), quer unitariamente ("1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9."). A Susana, por sua vez, foi fazendo a contagem dos quadrados aportando-se na visualização que tinha da figura, ou seja, pela decomposição do termo: "Dois do lado esquerdo e três do lado direito. A 3.ª figura tem 3 do lado esquerdo e 4 do lado direito.". Apesar de se ter enganado na descrição da 1.ª figura ("Um do lado esquerdo e outro do lado direito."), a Susana descreveu a 2.ª e a 3.ª figura corretamente. Também na visualização da 4.ª figura foi percetível que a Susana estava a tentar fazer a decomposição do termo ("A 4.ª figura terá 4…"), antes de ser interrompida pelo Emanuel e pela sua contagem unitária. A forma como fez a decomposição do termo evocou já um raciocínio funcional.

Após a conclusão de que a 4.ª figura teria um total de 9 quadrados, o grupo dialogou acerca da forma como iriam proceder à explicação das suas conclusões.

> Emanuel- Vamos ver como é que fizemos. O que é que fizemos aqui? (*e volta a construir a 1.ª figura com o material*) Esta tem isto, depois a outra tem blábláblá [sic]. É só copiar isto. (*o Emanuel sugere que escrevam o que foram fazendo em todas as figuras; e depois disto construiu novamente a 3.ª figura*) 1, 2, 3. 1, 2, 3. (*contando os quadrados do lado esquerdo da 3.ª figura na sequência; e confirmando essa contagem na figura construída com o material*) 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4. (*contando os quadrados do lado direito da 3.ª figura na sequência; e confirmando essa contagem na figura construída com o material*)
>
> Susana- Não. Mas essa é a 3.ª.
>
> Emanuel- Não, essa é a 4.ª. (*e a Susana acena que não com a cabeça*)
>
> Susana- É igual a esta, a 3.ª. (*e aponta para a 3.ª figura da sequência do Emanuel no enunciado*)
>
> (*O Emanuel bate na testa em sinal de que se enganou e acrescenta mais dois quadrados à 3.ª figura feita com o material*)
>
> Emanuel- Ah! Pois é. Já está.
>
> Susana- Então, 4 quadrados esquerdos e 5 quadrados direitos. (*pausa enquanto escrevem*)

Neste extrato ficou bem patente que a Susana conseguiu compreender a relação entre o termo e o número de ordem do termo porque, quando o Emanuel estava a fazer a contagem dos quadrados da 3.ª figura, ela corrigiu-o dizendo que afinal a figura que tinha construído era a 3.ª figura e não a 4.ª figura. De seguida, demonstrou que também, para esta figura, estava a visualizar o termo fazendo a sua decomposição: "Então, 4 quadrados esquerdos e 5 quadrados direitos.".

O Emanuel também evidenciou a decomposição do termo, aquando da contagem unitária dos quadrados da 3.ª figura, fazendo primeiramente a contagem dos quadrados do lado esquerdo e depois os quadrados do lado direito.

Emanuel- Explica como chegaste a essa conclusão. (*pausa*) Então, a 1.ª tem 3 (*contando os quadrados da 1.ª figura no enunciado*), a 2.ª tem 7 (*contando os quadrados da 2.ª figura no enunciado*), a 3.ª tem 9 (*contando os quadrados da 3.ª figura no enunciado*). Não. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. (*contando todos os quadrados das 3 figuras iniciais presentes na sequência do enunciado*) (*risos*) (*pausa*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, é sete. (*referindo-se ao número de quadrados da 3.ª figura*)

Susana- É 3, depois é 5, depois é 7. (*referindo-se ao número de quadrados das três figuras iniciais do padrão*)

Emanuel- Cheguei a essa conclusão porque é sempre mais dois.

No momento seguinte, o Emanuel começou novamente a fazer a contagem do total dos quadrados das três primeiras figuras do padrão mas engana-se ao referir que 2.ª terá 7 e que a 3.ª terá 9. Apercebendo-se de que errou nessa contagem iniciou outro raciocínio e começou a fazer a contagem de todos os quadrados das três primeiras figuras do padrão, mas depois voltou a referir o número de quadrados corretos apenas para 3.ª figura, que seriam de 7 quadrados, não voltando a referir a contagem correta para os quadrados da 2.ª figura. A Susana, ao ver que o Emanuel se estava a rir muito e que não estava muito atento ao que estava a fazer, ela decidiu referir corretamente o número de quadrados de cada uma das figuras dizendo: "É 3, depois é 5, depois é 7.". A apresentação desta contagem por parte da Susana, pode tê-lo levado a mobilizar um raciocínio recursivo, ao afirmar: "Cheguei a essa conclusão porque é sempre mais dois.".

Depois da escrita, os elementos do voltaram a ler a 1.ª questão e a verificar o que tinham feito.

Emanuel- Quantos quadrados terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) A 4.ª figura terá 9 quadrados.

Susana- Quatro quadrados esquerdo…

Emanuel- E cinco quadrados direitos. Cheguei a esta conclusão porque reparei que se acrescenta mais dois.

Apesar de verbalizarem e descreverem a decomposição do termo, o grupo manteve a sua explicação de que tinham chegado ao número total de quadrados da 4.ª figura porque foram acrescentando mais dois, tendo escrito: "A 4.ª figura terá 9 quadrados, 4 quadrados esquerdos e 5 quadrados direitos. Cheguei a essa conclusão porque reparei que se acrescenta mais 2.".

Após a resolução da 1.ª questão, avançaram para a resolução da 2.ª questão.

> Susana- Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) Então para ter padrão… (*e começa a tentar construir a 10.ª figura com o material*) Ah! Não! Nós só temos 15 (*referindo-se ao facto de só terem sido disponibilizados 15 quadrados para a tarefa*).

A Susana reparou muito rapidamente que não poderiam recorrer ao material porque só tinham à sua disposição 15 quadrados, o que não seria suficiente para a construção da 10.ª figura. Mesmo assim, com material insuficiente, os dois elementos começaram a tentar terminar a 10.ª figura, estando a Susana a cargo da colocação dos quadrados do lado direito e o Emanuel a cargo da colocação dos quadrados do lado esquerdo.

> Emanuel- Este aqui é sempre menos um (*referindo-se aos quadrados do lado esquerdo*).
>
> Susana- Espera não chega, nove… Dá-me 1. Dez… (*e coloca dez quadrados do lado direito que não corresponde à 10.ª figura, mas sim à 9.ª figura*)
>
> (*a professora aproxima-se*)
>
> Professora- Estão com dúvidas?
>
> Susana- Não.
>
> (…)
>
> Professora- Então?
>
> Susana- Porque nós, para fazer onze, faltavam dois quadrados.
>
> Professora- Para fazer onze, aonde?
>
> Susana- Aqui (*apontando para o lado direito da figura*).
>
> Professora- E aí tem que ter onze?
>
> Susana- Sim.
>
> Professora- Porquê?
>
> Susana- Porque acrescenta-se sempre mais dois quadrados.
>
> Professora- Mais dois quadrados do que o quê?

Susana- Aqui acrescenta-se um e aqui acrescenta-se outro (*indicando que se acrescentava um quadrado em cada lado da figura*).

Professora- Mas acrescentamos mais dois quadrados a quê?

Emanuel- Às figuras anteriores.

A Susana continuou a revelar um raciocínio funcional pela forma como visualizava a figura e pela forma como fazia a decomposição do termo. Esta ideia ficou bem patente porque, apesar de só ter pedido um quadrado ao Emanuel e ter terminado o seu lado com 10 quadrados, a Susana evidenciou ter compreendido que o seu lado, o lado direito da 10.ª figura, teria 11 quadrados: "Porque nós para fazer onze, faltavam dois quadrados.". Contudo, no momento em que a questionei onde faltavam esses dois quadrados, a Susana afirmou que faltava um quadrado em cada um dos lados, raciocínio até aqui patente nas afirmações feitas pelo Emanuel.

Por sua vez, o Emanuel manteve-se fiel ao seu raciocínio recursivo afirmando que se iam acrescentando dois quadrados às figuras anteriores. Apesar desta forma de raciocínio estar mais enraizada no Emanuel, ele começou a demonstrar algumas oscilações conseguindo estabelecer a relação entre as duas colunas do termo ao afirmar: "Este aqui é sempre menos um."; contudo, o Emanuel ainda não demonstrou compreender a relação entre estas duas colunas do termo e o número de ordem do termo.

Depois das afirmações feitas pelos alunos, eu tentei questioná-los de forma a focarem o seu raciocínio no estabelecimento da relação entre o termo e o número de ordem do termo.

Professora- Então e se eu retirasse aí a 1.ª, se só ficassem com a 2.ª e a 3.ª figura, vocês conseguiam descobrir aí alguma relação?

Susana- Sim.

Professora- O que é que acontece?

Susana- Aqui tem dois e aqui tem três (*referindo-se aos lados esquerdo e direito da 2.ª figura*).

Professora- Então isso é o … Há alguma relação entre esses quadrados e o número da figura? (*pausa*) Ou só há relação quando avançam para a figura seguinte?

Susana- Quando nós ainda estamos nesta figura. Quando nós ainda estamos nesta figura.

Professora- Há alguma relação entre o número dessa figura e o número dos quadrados?

Susana- Sim.

Professora- Qual é?

(…)

Susana- Isto é a segunda. E depois aqui também tem dois (*apontando para o lado esquerdo da figura com dois quadrados*).

Neste diálogo, a Susana demonstrou ter compreendido a relação entre o termo e o seu número de ordem mas continuou a apresentar algumas dificuldades na verbalização de como visualizava essa relação. Dado que os alunos ainda não haviam discutido a resolução desta questão, eu sugeri que falassem entre si e afastei-me.

Emanuel- Eu acho que é sempre mais 1 do que dobro. O dobro do 1 é dois, mais 1 dá 3. O dobro do 2 é quatro, mais 1 dá 5. O dobro do 3 é seis, mais 1 dá 7. O dobro do 4 é oito, mais 1 dá 9.

Susana- Mas se for… tipo… Tu achas que a 1.ª era…

Emanuel- Se isto (*apontando para o número da figura*) tinha alguma coisa a ver com isto (*apontando para os quadrados*). (*O Emanuel clarificando o que a professora questionou*)

Susana- Se tirássemos este. (*apontando para a 1.ª figura*)

Emanuel- Se só deixasse este. (*apontando para a 2.ª* figura)

Susana- Sim, poderia ficar…

O Emanuel, por momentos, pareceu demonstrar um raciocínio funcional conseguindo aplicar relações matemáticas, comuns para todas as figuras: “Eu acho que é sempre mais 1 do que dobro.”. Ele parece apoiar-se na sequência numérica e não nas figuras, uma vez que testa a relação com os números correspondentes aos 4 termos inicias da sequência. Ele não conseguiu explicitar este pensamento à Susana que continuava focada na figura. Depois deste diálogo, e perante a ausência de conclusões, os alunos voltaram à resolução da questão recorrendo à utilização do material. Perante a limitação do material, os alunos decidiram-se por uma estratégia de remediação, tentando construir a 10.ª figura utilizando as suas borrachas no lugar dos quadrados em falta.

Emanuel- (…) É sempre menos um (*referindo-se ao lado esquerdo da figura e depois deste comentário desmancha a figura*).

Susana- Quantos quadrados terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) A 10.ª figura terá… (*e voltam a construir uma figura com o material construindo a 5.ª figura*)

A partir da construção da 5.ª figura, foram anotando nas suas folhas o número da figura e a quantidade de quadrados, ancorando-se na relação recursiva de ir acrescentando sempre mais dois quadrados. Os elementos foram escrevendo que a 5.ª figura tinha 11 quadrados, que a 6.ª figura tinha 13 quadrados, que a 7.ª figura tinha 15 quadrados, que a 8.ª figura tinha 17 quadrados, que a 9.ª figura tinha 19 quadrados e que a 10.ª figura tinha 21 quadrados.

Emanuel- Acho que é mais fácil se pusermos isto numa tabela.

Susana- Ok. E depois damos a resposta. (*ambos apagam e começam a organizar os dados numa tabela*) A 10.ª figura terá 21 quadrados.

(…)

(*a professora aproxima-se*)

Professora- Então como é que descobriram o número de quadrados da 10.ª figura?

Susana- Nós sabemos que a 4.ª tinha 9, então sabemos que tínhamos que acrescentar mais dois quadrados, depois…

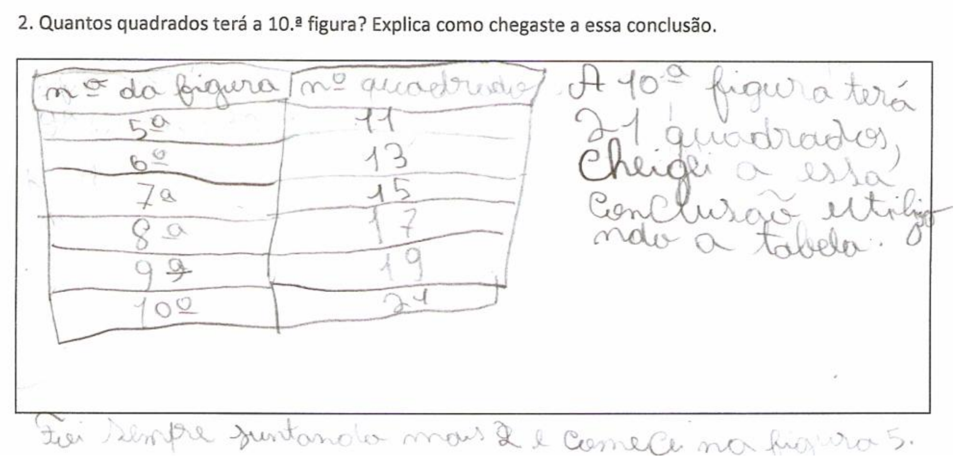
Professora- E dois quadrados para quê?

Susana- Para fazer a 5.ª figura. E juntámos mais dois para fazer a 6.ª, mais dois para fazer a 7.ª, mais dois para a 8.ª, mais dois para a 9.ª e mais dois para a 10.ª.

Professora- Então, vocês entre cada figura estão a juntar sempre…

Susana e Emanuel- Mais dois.

Após a organização dos dados numa tabela, os alunos terminam a realização da 2.ª questão sem conseguir determinar, em conjunto, qual a relação entre o termo e o número de ordem do termo. No final da resolução desta questão, eu aproximei-me e questionei o grupo sobre a forma como tinham chegado ao total de quadrados da 10.ª figura, confirmando a utilização de um raciocínio recursivo.


2. Quantos quadrados terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

nº da figura	nº quadrados
5ª	11
6º	13
7ª	15
8ª	17
9º	19
10º	21

A 10ª figura terá 21 quadrados, Cheigei a essa conclusão utilizando a tabela.

Fui sempre juntando mais 2 e comecei na figura 5.

Figura 45- Tabela feita pelo Emanuel, para a 2.ª questão da tarefa 2

Nesta questão, os alunos não voltaram à expressão verbalizada pelo Emanuel no início (“Eu acho que é sempre mais 1 do que dobro.”) para a comprovar com os resultados obtidos na tabela.

Para a resolução da 3.ª questão, os alunos foram novamente confrontados com a descoberta da relação entre o número de quadrados e o número da figura e eu voltei a colocar mais algumas questões.

> Professora- Então, agora, a minha pergunta é: Será que vocês conseguem encontrar uma relação entre este número (*referindo-se ao número de ordem do termo da 2.ª figura*) e estes quadrados (*referindo-se aos quadrados da 2.ª figura*) sem terem que depender da evolução entre figuras? (*pausa*) Porque imagina que eu não pedia a 10.ª figura, que pedia a 100.ª figura.
>
> Susana- Hum!
>
> Professora- Conseguias-me dizer quantos quadrados tinha?
>
> Susana- Sim.
>
> Professora- Então, quantos é que tinha? Sabes? (*questionando o Emanuel*)
>
> Emanuel- Não.
>
> Susana- Tinha…
>
> Professora- Tinha que ser como?
>
> Susana- Do lado esquerdo tinha que ter 100 e depois do lado direito tinha 101.

Professora- E porque é que dizes isso? É porque chegaste então a outra relação sem ter que ser sempre mais dois. (*a Susana acena que sim com a cabeça*) Que relação foi essa?

Susana- Esta (*e aponta para a 2.ª figura*).

Professora- Podes-me explicar com qualquer figura.

Susana- Porque aqui…

Professora- Porque isso que tu estás a dizer aplica-se a todas?

Susana- Sim.

Professora- Então qual é a relação?

Susana- Que, por exemplo, aqui tem dois e depois aqui…

Professora- A 2.ª figura?

Susana- Sim. E depois aqui já se vai acrescentar mais um.

A forma como questionei a Susana acerca de uma figura distante, fê-la demonstrar como decompunha o termo e a compreender mais explicitamente a relação entre o termo e o número de ordem do termo, afirmando que a relação encontrada se podia aplicar a qualquer das figuras. Ao invés disso, o Emanuel ainda não tinha compreendido a relação porque não conseguiu responder à minha pergunta, contrariamente ao que a Susana fez.

Eu continuei então com as questões, por forma a fazer a Susana compreender que a forma como verbalizava a visualização do termo não estava completa por ter afirmado: "E depois aqui já se vai acrescentar mais um.".

Professora- Então tem dois e tu acrescentas mais um, dá três.

Susana- Aqui tinha, na 1.ª figura…

Professora- Foi isso que tu disseste. Que tinhas dois e que depois acrescentas mais um. (*a Susana acena que não com a cabeça*)

Susana- Aqui é como se fosse a 1.ª e depois acrescenta-se mais dois.

Professora- Mas isso é a relação que tu precisas de figura para figura. Mas tu, para a 100.ª, não precisaste de ter as outras 99 para trás.

Susana- Não.

Professora- Então como é que me consegues explicar?

Susana- Porque aqui tem três e aqui tem dois (*referindo-se às colunas da 2.ª figura*).

Professora- Mas tu estavas a falar na 2.ª figura. Tu disseste-me em dois. E onde é que tu vês esses dois?

Susana- Aqui (*e aponta para o último quadrado do lado esquerdo e para o último quadrado do lado direito*).

Professora- Na 2.ª figura? (*a Susana acena que sim com a cabeça*) Então, da 3.ª figura? (*a Susana aponta para o último quadrado do lado esquerdo e para o último quadrado do lado direito*) Então, tu estás-me a dizer dois. Então a 100.ª figura?

(…)

Susana- Do lado direito tinha 101 e do lado esquerdo tinha 100.

Professora- Então, mas como é que tu chegas à conclusão que um lado tem de ter 101 e o outro tem de ter 100? Não é por mais dois como tu me estás a dizer aqui, pois não? (*a Susana acena que não com a cabeça*) É a mesma coisa? Tu estás a explicar da mesma forma?

Susana- Não.

Apesar da Susana conseguir aplicar um raciocínio funcional ao apresentar a decomposição da 100.ª figura, ela ainda apresentou dificuldades na verbalização e na explicação do seu raciocínio. Com as questões que fui colocando, a minha intenção seria clarificar a forma como a Susana verbalizava a forma como a figura era construída para que ela percebesse que não estava a dar todas as indicações para a construção da figura, nomeadamente a repetição do dois que correspondia ao número da figura novamente. Contudo, a minha tentativa foi infrutífera pois a Susana ficou ainda mais confusa e perante essa confusão, rapidamente apresentou o recurso a um raciocínio recursivo ao afirmar que os dois quadrados a que se referia era o último quadrado do lado esquerdo e o último quadrado do lado direito da 2.ª figura. Possivelmente, o facto de estarmos a observar a 2.ª figura e desta ter no lado esquerdo dois quadrados impossibilitou essa compreensão e fê-la recorrer a um raciocínio recursivo.

Professora- Então é isso que eu quero que tu expliques. Tu aqui (*apontando para a 2.ª figura*) pela forma como tu estás a explicar mais dois, estás a seguir a evolução de cada figura, mas quando eu te fiz a pergunta, tu tinhas as outras? (*a Susana acena que não com a cabeça*) Então é esse o objetivo, é conseguirmos encontrar a relação sem precisar de recorrer às outras. (*pausa*) Se tu me explicasses a 3.ª figura da forma como tu estavas a explicar a 100.ª, o que é que tu dizias?

Susana- Que a 3.ª figura do lado direito tem 4 quadrados e do lado esquerdo tem 3 quadrados.

Professora- Então porque é que o lado direito tem de ter 4 quadrados?

(…)

Susana- Porque na 1.ª, aqui tenho mais 1 número do que o lado esquerdo.

Professora- E agora a minha pergunta é: qual é esse mais um?

Susana- Este (*apontando para o quadrado do lado esquerdo da 1.ª figura*).

Professora- Do lado esquerdo, certo! E não tem mais nada do lado direito?

Susana- Tem este também (*apontando para o quadrado do lado direito que está ao lado do quadrado do lado esquerdo da 1.ª figura*).

Professora- Mas tu não me estás a dizer esse.

Susana- Ah!

Professora- Então o lado esquerdo tem…

Susana- Tem 1.

Professora- O lado direito tem…

Susana- Dois quadrados.

Professora- (…) Então vamos aqui para a 2.ª, pode ser que seja mais fácil. (*pausa*) A 2.ª, tem quantos do lado direito?

Susana- Do lado direito tem três.

Professora- E do lado esquerdo?

Susana- Tem dois.

Professora- Então porque é que o lado direito tem que ter três?

(*pausa*)

Susana- Porque se acrescenta mais um.

Professora- A quê?

Susana- Ao lado direito. (*referindo-se que é do lado direito que se acrescenta mais um*)

Depois de mais algumas questões, a Susana reafirmou a decomposição do termo mas não conseguiu explicar a relação entre o número da figura e a quantidade de quadrados de cada coluna. A determinado momento pensei que iria conseguir fazer essa associação quando voltou a afirmar: "… tenho mais 1 número do que o lado esquerdo.", mas depois continuou apenas a fazer a decomposição do termo, não conseguindo referir a forma como conseguiria o lado direito (ou novamente o mesmo número da figura e mais um ou o número seguinte ao número da figura).

Enquanto fui questionando a Susana, o Emanuel foi ouvindo as questões e a determinado momento chamei-o à discussão.

Professora- Como é que é essa figura Susana e Emanuel (*questionando acerca da 2.ª figura*)? (…) O que é que o lado direito tem que ter? E que vocês já repararam nisso.

Emanuel- Tem sempre mais um do que o lado esquerdo.

Professora- Só mais um? Só juntaram um do lado direito? Do lado direito só têm um quadrado?

Emanuel- Três.

Professora- Então porque é que é três? Vocês só me estão a dizer que é mais um? Então como é que com mais um, fico com três?

Emanuel- Dois mais um, dá três.

Professora- E de onde é que vem esses dois?

Emanuel- Do número da figura.

Professora- Então como é que é a figura? Explica-me como é que eu ia construir uma figura. Do lado direito tenho que pôr o quê? Do lado esquerdo tenho que pôr o quê?

(…)

Emanuel- Do lado esquerdo temos que pôr a mesma quantidade que o número da figura.

Professora- Do lado esquerdo temos que pôr a mesma quantidade que o número da figura. E do lado direito?

Emanuel- É sempre mais um.

Professora- E volto a pôr a figura, o número da figura? Ou não?

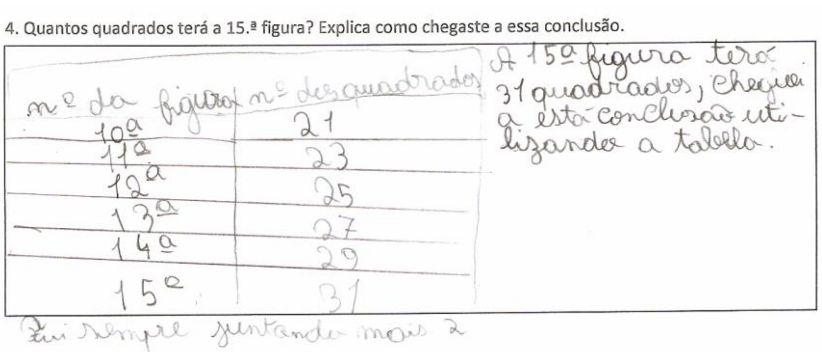
Emanuel- Não. Quer dizer, sim. É outra vez o número da figura, mas acrescentamos mais um.

Neste extrato, os alunos revelaram ter apreendido a relação entre o termo e o número de ordem do termo, através da decomposição do termo. Após este momento de diálogo, os elementos da díade começaram a escrever a relação: “A relação entre o número de quadrados e o número da figura é que o lado esquerdo tem a mesma quantidade do número da figura.”.

De seguida, os alunos avançaram para a 4.ª questão. Depois de lerem a questão, a Susana sugeriu recorrerem a uma tabela para a resolução da questão.

Susana- Quantos quadrados terá a 15.ª figura. Então… Fazemos tabela? (*o Emanuel acena que sim com a cabeça*) Começamos no 10 (*referindo-se a começarem pela 10.ª figura com que terminaram a tabela anterior*). Ok. (*ambos começam a desenhar e a preencher a tabela*) 23, 24, 25. A 13.ª, 25, 26, 27. A 14.ª, 27, 28, 29. A 15.ª, 29, 30, 31. (…) A 15.ª figura terá 31 quadrados. (*pausa*) Cheguei a esta conclusão utilizando a tabela.

Apesar da Susana ter demonstrado um raciocínio funcional e de ter aplicado a relação quando a questionei acerca do termo de um número de ordem de um termo distante (a 100.ª figura), para a resolução da 4.ª questão, que interrogava acerca do número de quadrados da 15.ª figura, a Susana ancorou-se num raciocínio recursivo fazendo a contagem de dois em dois a partir da 10.ª figura, como fizera na 2.ª questão, utilizando uma tabela.


4. Quantos quadrados terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

nº da figura	nº de quadrados
10ª	21
11ª	23
12ª	25
13ª	27
14ª	29
15ª	31

A 15ª figura terá 31 quadrados, Cheguei a esta conclusão utilizando a tabela.

Fui sempre juntando mais 2

Figura 46- Tabela feita pelo Emanuel, para a 4.ª questão da tarefa 2

Para a 5.ª questão, os alunos encetaram um diálogo por forma a encontrar uma resposta à questão.

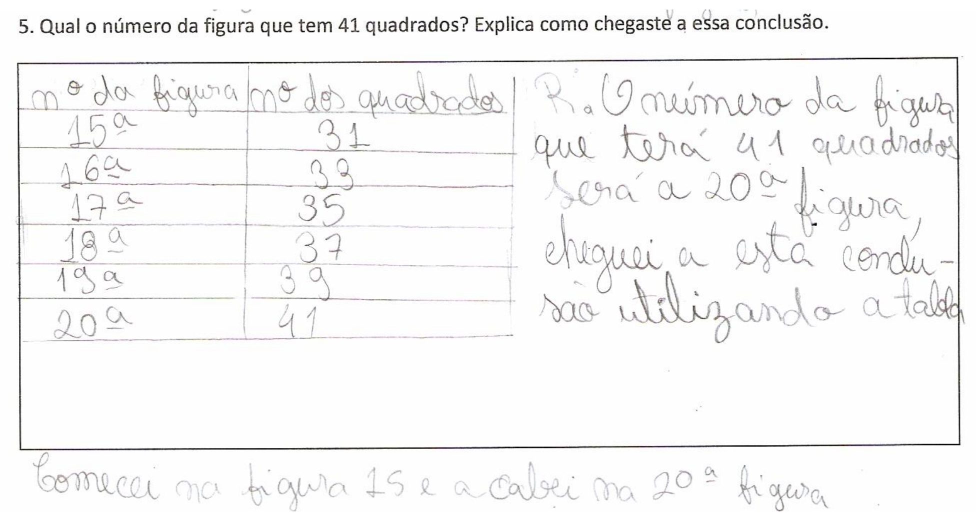
> Susana- Qual o número da figura que tem 41 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) Já sei…
>
> Emanuel- A vigésima.
>
> Susana- Eu acho que sei… A 16.ª, 33. A 17.ª, 35. A 18.ª, 37. A 19.ª, 39. A 20.ª, 41. (*enquanto foi verbalizando a sequência numérica foi escrevendo a quantidade dos quadrados em linha reta: 33-35-37-39-41*) Vamos fazer uma tabela. (…) Décima quinta! Ah! Sim, sim. Então, a 15.ª figura tem 31 quadrados. A 16.ª figura tem 33 quadrados. A 17.ª figura tem 35 quadrados. A 18.ª figura tem 37 quadrados. A 19.ª figura tem 39 quadrados. A 20.ª figura tem 41 quadrados.
>
> Emanuel- A 16.ª terá 33 quadrados. A 17.ª terá 35 quadrados. A 18.ª terá 37 quadrados. A 19.ª terá 39 quadrados. A 20.ª terá 41 quadrados.
>
> (…)
>
> Emanuel- Cheguei a esta conclusão utilizando a tabela.

O Emanuel foi muito célere na sua resposta o que leva a supor que terá utilizado um raciocínio funcional inversivo, tirando 1 a 41, e vendo 20 como metade de 40.

33-35-37-39-41

Figura 47- Registo da quantidade de quadrados feito pela Susana, para a 5.ª questão da tarefa 2

Por seu lado, a Susana fez primeiramente o registo do seu raciocínio na folha de trabalho, em linha reta (como demonstrado na figura anterior), e depois mais uma vez primou pela utilização da tabela para o registo dos seus dados evidenciando o recurso a um raciocínio recursivo.


5. Qual o número da figura que tem 41 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão.

nº da figura	nº dos quadrados
15ª	31
16ª	33
17ª	35
18ª	37
19ª	39
20ª	41

R. O número da figura que terá 41 quadrados será a 20ª figura, cheguei a esta conclusão utilizando a tabla

Comecei na figura 15 e acabei na 20ª figura

Figura 48- Tabela feita pela Susana, para a 5.ª questão da tarefa 2

Para a 6.ª questão, que preconizava a justificação da relação matemática dos números pares e ímpares, os alunos demonstraram raciocínios díspares.

> Emanuel- Neste padrão, alguma figura poderá ter 50 quadrados? Justifica a tua resposta. (*lendo o enunciado*)
>
> Susana- Não. (*a Susana deu esta resposta de imediato*) Senão ia calhar 51. Depois ia ser 43, 45, 47, 49 e 51 (*continuando a tabela anterior*).
>
> Emanuel- Não, porque não pode calhar múltiplos de 10.

Com este diálogo, a Susana evidenciou ancorar-se num raciocínio recursivo por continuar a sequência de figuras: "Senão ia calhar 51. Depois ia ser 43, 45, 47, 49 e 51.". Por seu lado, o Emanuel, evidenciou outro raciocínio, tendo estabelecido uma relação matemática entre o número de quadrados e o número da figura, através de um raciocínio multiplicativo, focando-se num aspeto muito restritivo da situação (não ser múltiplo de 10) ao olhar para as características dos números (neste caso, o 50 como múltiplo de 10) e sem estabelecer a relação com a figura.

Revisão da tarefa 2

Aquando da revisão da 3.ª questão, eu estava perto do grupo e, ouvindo a frase que haviam escrito, decidi intervir.

> Professora- Mas eu estou só a pedir do lado esquerdo?
>
> Emanuel- Não.

Professora- Mas vocês só me estão a falar do lado esquerdo. Estou errada?

Emanuel- Não.

Professora- É importante falar do lado direito.

Susana e Emanuel- Sim.

Professora- Faz parte da figura?

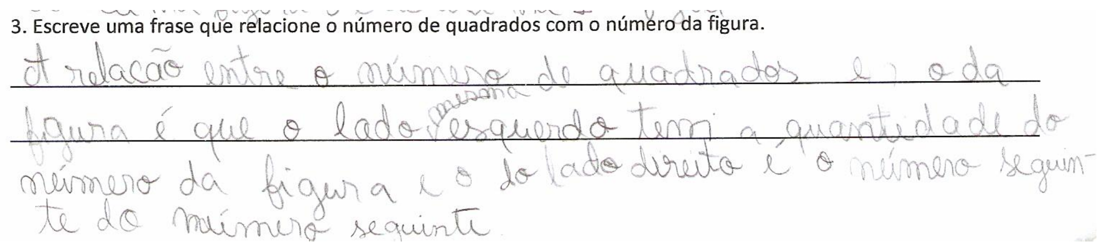
Susana e Emanuel- Sim.

Professora- Então se faz parte da figura, também temos que falar nele. Eu não estou a falar só dos quadrados do lado esquerdo.

Susana- E do lado direito… (*pausa*) Do lado esquerdo é o número da figura e do lado direito… Os do lado direito representa…

Emanuel- O número seguinte da figura.

Mais uma vez reforcei a necessidade de referirem toda a figura e de demonstrarem como a tinham conseguido construir. A participação do Emanuel, neste diálogo, foi novamente fundamental para sintetizar a forma como visualizava o lado direito da figura.


3. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados com o número da figura.

A relação entre o número de quadrados e o da figura é que o lado mesma esquerdo tem a quantidade do número da figura e o do lado direito é o número seguinte do número seguinte

Figura 49- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pela Susana, para a 3.ª questão da tarefa 2

Também na revisão da 6.ª questão, eu intervim no momento em procediam à revisão da questão.

Professora- (…) Vocês dizem que não pode ter 50 porque…

Emanuel- Não é múltiplo de 10.

Professora- Não pode calhar…

Emanuel- Múltiplos de 10.

Professora- Então e é só nos múltiplos de 10?

Emanuel- Nos múltiplos de 6.

Professora- Então e se eu falasse no número 32? Poderia ser?

Emanuel- Não.

Professora- Porquê?

Emanuel- Porque salta-se logo para o 33.

Professora- Então, e se eu falar no número 140? Pode ser?

Emanuel- Não.

Professora- Porquê?

Emanuel- Porque é múltiplo de dez.

Professora- Então e se eu falar em 142?

Emanuel- Também não.

Professora- Porquê?

Emanuel- Porque é sempre mais dois e se calhar no 1 depois só pode calhar no 3.

Professora- Então, 187, desculpa 188?

Emanuel- Também não, porque vai logo para o 189.

Professora- Então mas porque é que tem de ir para o 189?

Emanuel- Porque tem mais dois.

Nesta conversação participou apenas o Emanuel por ter sido ele a dar a justificação. Perante a justificação de não poderem ser múltiplos de 10, eu fui questionando acerca de outras quantidades de quadrados, ao que o Emanuel foi respondendo sempre seguindo a mesma linha de raciocínio. Eu tentei sempre apresentar-lhe números pares e as suas justificações, apesar de nunca ter feito referência aos números ímpares de forma direta, foram indo ao encontro da compreensão dos números ímpares: "Porque salta-se logo para o 33. (…) Porque é sempre mais dois e se calhar no 1 depois só pode calhar no 3.". Apesar disso, não questionou o facto de eu apresentar números que não eram múltiplos de 10 e que também não podiam ser termos da sequência.

Após este diálogo com o Emanuel, eu insisti nas questões tentando que a Susana participasse na discussão.

Professora- Como é que vocês chegam a esses múltiplos de 10? Daquilo tudo que vocês fizeram só sobram os múltiplos de 10?

Emanuel- Também os múltiplos de 5.

Professora- Sobram múltiplos de 5? Mas tu tens aqui uma com 25, é múltiplo de 5.

Susana- Múltiplos de 2.

Professora- Múltiplos de 2? Têm que expli… Têm que ter a vossa fundamentação muito bem explicada. Certo! (*a Susana acena que sim com a cabeça*) Então verifiquem lá. (*pausa*) Só excluímos os múltiplos de 10?

Emanuel- Não.

Professora- É viável colocar aí como justificação os múltiplos de 10?

Emanuel- Não. (*e apagam as suas respostas*)

Susana- 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 (*relembrando múltiplos de 4*).

Emanuel- De 2, de 4, de 8… (*mas de repente apaga o 8 porque ao enganar-se num dos cálculos do 8 e termina com 21*). De 8 não pode. De 6.

Susana- 7, 14, 21 (*relembrando múltiplos de 7*).

Emanuel- De 10. Múltiplos de 10, de 4.

A forma como o Emanuel apresentou as suas justificações e como utilizou a nomenclatura de múltiplos, fez com que a Susana também começasse a mobilizar este raciocínio e tentasse eliminar alguns múltiplos de forma a completar a resposta iniciada pelo Emanuel. Após a eliminação de alguns múltiplos como ilustrado no extrato, os alunos escreveram a sua resposta: “Não, porque não pode calhar múltiplos de 2, 4, 6, 10.”.

O facto de se terem focado nos múltiplos levou-os a listar vários exemplos de números cujos múltiplos não poderiam ser termos da sequência, não reparando que todos os múltiplos de 4, 6 e 10 também são múltiplos de 2, numa perspetiva inclusiva. Daí que a paridade dos números nunca tivesse sido explicitada pelos alunos.

Tarefa 3

O grupo da Susana e do Emanuel começou por observar a sequência das três primeiras figuras e rapidamente percebeu que a evolução de figura a figura seria de 3 em 3 círculos, evidenciando assim a utilização de um raciocínio recursivo.

Emanuel- A 1.ª figura tem 4, a 2.ª …

Susana- Tem 7. (*pausa*) E a 3.ª tem…

Emanuel- Acho que tem 10.

Susana- Então a 1.ª tem 4.

Susana e Emanuel- A 2.ª tem 7. (*pausa*) E a 3.ª tem 10.

Susana- A sequência é de… de 3… de 3 em 3. 3 mais 3.

Após esta análise, avançaram para a resolução da 1.ª questão concluindo que a 4.ª figura teria um total de 13 círculos. Contudo, apesar deste raciocínio, os alunos tiveram a necessidade de manipular os círculos, construindo primeiramente a 3.ª figura e depois acrescentando um círculo em cada uma das extremidades da figura, construindo assim a 4.ª figura. Depois dessa construção, utilizaram a ilustração da 4.ª figura como explicação do seu raciocínio.

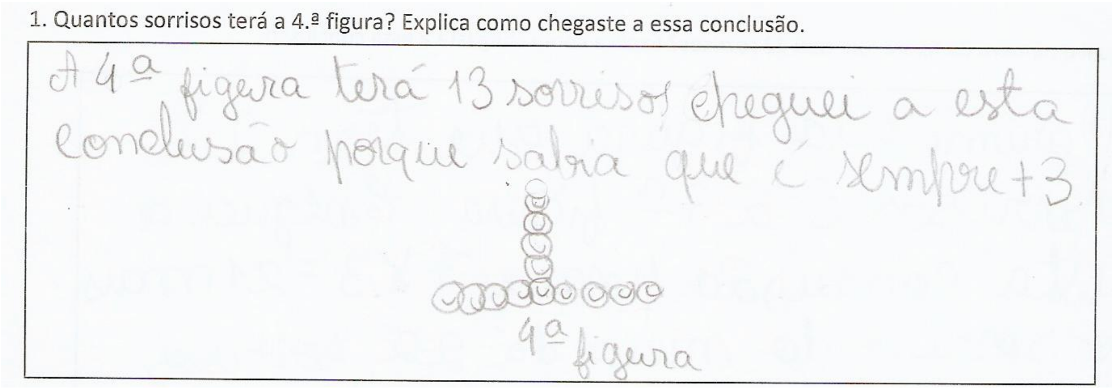


Figura 50- Representação pictórica da 4.ª figura e explicação de resultados feita pela Susana, para a 1.ª questão da tarefa 3

Para a resolução da 2.ª questão, a Susana respondeu imediatamente:

Susana- Então… 3 vezes 10… Se isto é sempre mais 3… 3 vezes 10 é igual a 30. Então…

Emanuel- Vou confirmar!

A Susana por referir que era sempre mais três poderia evidenciar um raciocínio recursivo, no entanto, ao conseguir transformar este raciocínio num raciocínio multiplicativo poderá evidenciar um raciocínio funcional, na medida em que na resposta à 1.ª questão, a Susana acrescentou três círculos à 3.ª figura, um em cada uma das extremidades para a construção da 4.ª figura. Esta colocação dos círculos podê-la-á ter levado a mobilizar a estrutura da multiplicação e a aplicar um raciocínio multiplicativo. Contudo, e apesar da rapidez na resposta da Susana, o Emanuel diz-lhe que vai confirmar pois não a sentia muito segura do que estava a dizer e foi nesse momento que recorreram aos círculos para a construção da figura. Depressa perceberam que não tinham a quantidade suficiente de círculos e começaram a pensar recorrer à ilustração. Nesse momento, eu intervim e comecei a colocar algumas questões acerca da forma como visualizavam a figura.

Susana- A de cima né [sic]… a de cima vai… é sempre mais um do que o número da figura. Eu acho que nós devíamos fazer um desenho.

Emanuel- Aqui em cima terá…

Susana- Eu acho que aqui deverá estar 9… (*referindo-se aos círculos em falta porque foram disponibilizados 21 círculos e a Susana achava que a 10.ª figura teria 30 círculos*)

Emanuel- Já fizemos uma coisa… (*referindo-se aos 10 círculos que tinha colocado na parte de cima, num total de 11 círculos*)

Susana- E se fizéssemos da 4.ª figura até à 10.ª? (*pausa*) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. (*pausa*) Eu acho que é melhor fazermos o desenho por causa da parte de baixo. (*pausa*) Não ocupes muito espaço. (*pausa*) Porque é sempre mais 1 sorriso do que a figura.

(*a professora aproxima-se*)

Professora- É sempre mais 1?

Susana- Sim, aqui.

Professora- Aí como? Estás-me a dizer que é mais 1? Mas é mais 1 aonde?

Susana- Aqui em cima (*referindo-se ao último círculo na parte vertical da figura*). Do que da figura.

Professora- É?

Susana- É.

Professora- Onde é que tu consegues ver? E se esse 1 que tu dizes… está sempre na fi… nesse lado da figura? Onde é que estará esse 1 que tu dizes? (*a Susana vai olhando para as figuras*) Olha para o número da figura.

Susana- 3 e aqui tem 4. É sempre 1 que se acrescenta.

Professora- Então mas e tu dizes 3. Olhando aí para a figura, onde é que tu vês claramente os 3?

Susana- Aqui (*referindo-se aos três primeiros círculos a contar da linha horizontal*).

Professora- Assim.

Susana- Sim.

Professora- É aí que tu vês mais rapidamente o número 3?

Susana- Aqui. (*apontado para o número de ordem da 3.ª figura*)

Professora- Sim. Mas na figura, onde é que tu vês desse lado mais rapidamente o número 3? (*pausa*) Concentrando-te aqui nesta parte, que eu já percebi que é aí no meio, onde é que tu vês rapidamente o número 3?

Susana- Aqui (*apontando para os três primeiros círculos da vertical sem contar o de cima*).

Professora- E na 2.ª? Onde é que tu vês rapidamente o número 2?

Susana- Aqui (*apontando para os dois primeiros círculos da vertical sem contar o de cima*).

Professora- E o número 1?

Susana- Aqui (*apontando para o círculo do meio sem contar o de cima*).

Professora- Então qual é aquele 1… Onde é que estará aquele 1 que tu dizes?

Susana- Aqui. (*apontando para o círculo de cima da figura*)

Professora- Onde é que é mais rápida a visualização? (*apontando para uma das figuras, na parte vertical, onde encontrava esse número na figura*) Do número da figura, certo? (*a Susana acena que sim com a cabeça*) E onde está esse 1 que tu falaste depois? (*a Susana vai olhando para as figuras*) Ele altera-se conforme o número da figura?

Susana- Sim.

Professora- Esse 1 que tu dizes altera-se?

Emanuel- Não.

A Susana respondeu-me que via o número da figura e mais um, que era o círculo mais acima, na parte vertical da figura: “3 e aqui tem 4. É sempre 1 que se acrescenta.”. Depois da sua resposta, insisti para que me dissesse onde visualizava mais rapidamente o número da figura, ao que a Susana respondeu novamente que era na parte vertical e ainda mais um, que era o círculo de cima. A Susana percebeu claramente a relação entre o termo e o número de ordem do termo, apesar de visualizar o elemento contante numa outra posição, que não a posição central da figura. Depois da sua repetição, o Emanuel resolveu ajudá-la e mostrou como visualizava a figura.

Emanuel- Não, porque os números que se alteram é aqui ao lado e aqui em cima.

Professora- São os números que se alteram, são os lados e em cima?

Emanuel- Sim.

Professora- Então, e há algum que não se altera?

Emanuel- Este?

Professora- Qual esse?

Emanuel- O do meio.

(…)

Professora- Então, e agora pedindo a 10.ª figura, precisam de ir fazê-las todas?

Susana- Não.

Professora- Então como é que será construída?

Emanuel- Em cada lado terá…

Professora- Em cada lado vai ter…

Emanuel- 10 e em cima também terá 10.

Professora- E a figura é só construída assim?

Emanuel- Não.

Professora- Então falta alguma coisa?

Emanuel- Aqui do meio.

Depois do diálogo com ambos os elementos da díade foi notória a verificação de que ambos visualizavam o elemento constante na figura no entanto, estes visualizavam-no de forma diferente. O Emanuel referia visualizar o elemento constante no meio ("Aqui do meio.") o que lhe permitia uma visualização mais rápida da decomposição do termo em três partes distintas ("…os números que se alteram é aqui ao lado e aqui em cima."). Por sua vez, a Susana visualizava o elemento contante na parte de cima da linha vertical ("Aqui em cima."), o que lhe conferiu alguma dificuldade em perceber que aquele elemento não se alterava pois, quando questionada por mim, ela referiu que este se alterava. Esta sua visualização acabou por constranger a visualização do termo e a sua consequente decomposição, nomeadamente na parte horizontal, tal como referido pela Susana: "Eu acho que é melhor fazermos o desenho por causa da parte de baixo.".

Depois de narrarem a forma como visualizavam a figura, questionei acerca de um número de ordem mais distante, a 20.ª figura, para depreender se teriam percebido a relação entre o termo e o número de ordem do termo.

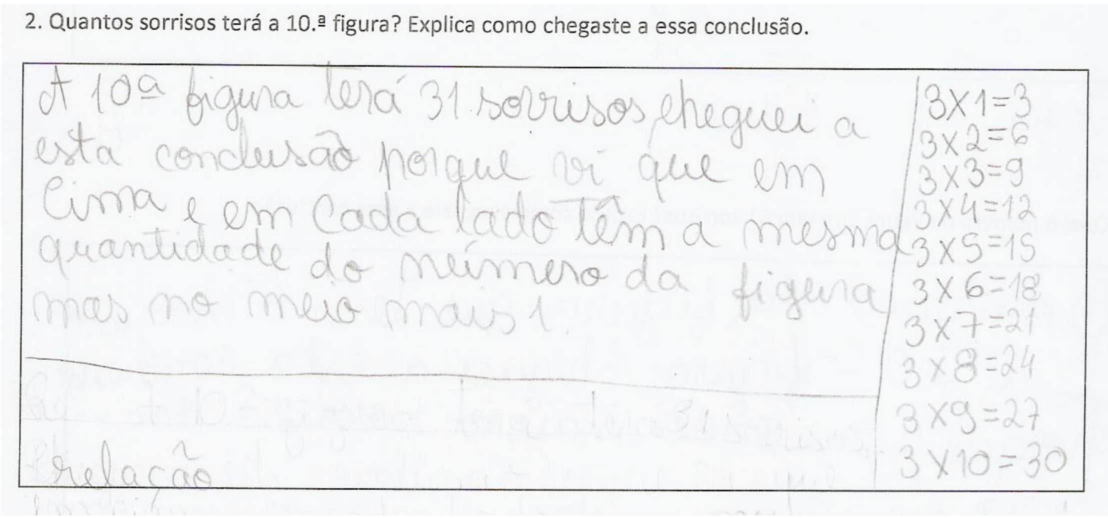
Professora- A figura número 20, vai ter quantos sorrisos?

Emanuel- 61.

Professora- Então e agora, figura número 20. Explica lá como é que chegaste ao número 61? Explica lá à Susana.

Emanuel- Em cima teria 20... em cima teria 20. No lado esquerdo teria 20 e no lado direito também teria 20. E depois faltava… e depois dava 60. E depois mais 1 do meio dava 61.

No diálogo, os alunos evidenciaram a compreensão da relação entre o termo e o número de ordem do termo. Na sua folha de trabalho fizeram o registo da relação em termos gerais e acabaram também por colocar a tabuada, como apresentado na figura seguinte.


2. Quantos sorrisos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

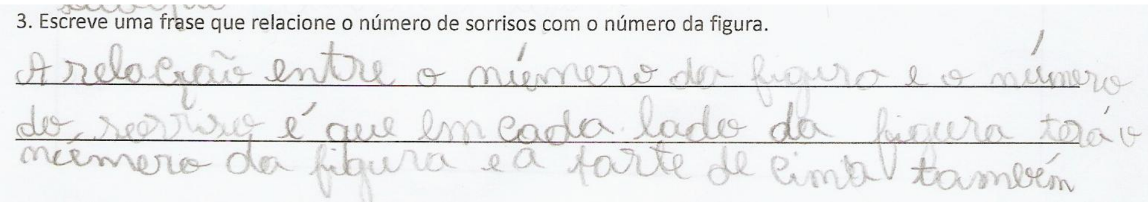
A 10ª figura terá 31 sorrisos cheguei a esta conclusão porque vi que em cima e em cada lado têm a mesma quantidade do número da figura mas no meio mais 1

relação

3x1=3
3x2=6
3x3=9
3x4=12
3x5=15
3x6=18
3x7=21
3x8=24
3x9=27
3x10=30

Figura 51- Apresentação de resultados e explicação feita pela Susana, para a 2.ª questão da tarefa 3

Após a resolução da 2.ª questão, avançaram para a escrita da frase em que descreveriam a relação encontrada no padrão. Aqui, foram bastante céleres na sua escrita pois já a tinham compreendido como verificado no diálogo apresentado anteriormente, bem como na resposta à questão anterior. Talvez por terem sido tão rápidos, se tenham esquecido de referir o círculo do meio ou então não acharam relevante fazer referência a ele pois, sendo o elemento constante da figura, não teriam necessidade de se referirem a ele.


3. Escreve uma frase que relacione o número de sorrisos com o número da figura.

A relação entre o número da figura e o número do sorriso é que em cada lado da figura terá o número da figura e a parte de cima também

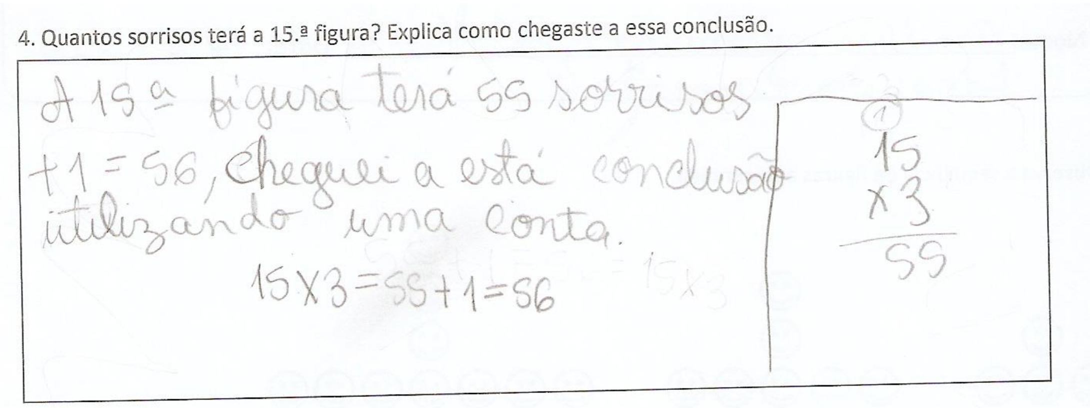
Figura 52- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pelo Emanuel, para a 3.ª questão da tarefa 3

Na 4.ª questão, verbalizaram a generalização correta aplicando a relação encontrada contudo, no momento dos cálculos, cometeram erros de cálculo tendo respondido que a 15.ª figura teria um total de 56 círculos.

Emanuel- Quanto sorrisos terá a 15.ª figura.

Susana- Então… 3 vezes o número 15…

Emanuel- E mais 1.


4. Quantos sorrisos terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

A 15ª figura terá 55 sorrisos +1 = 56, Cheguei a está conclusão utilizando uma conta.

15X3=55+1=56

15 x3 55

Figura 53- Apresentação de resultados e explicação feita pela Susana, para a 4.ª questão da tarefa 3

Para a resolução da 5.ª questão, os alunos foram aplicando várias tentativas baseadas na relação encontrada, até chegarem ao total de 22 círculos, não utilizando assim o raciocínio inversivo, tal como era pretendido. Conhecendo o total de círculos da 10.ª figura, o Emanuel começou por fazer tentativas de figura a figura.

Emanuel- A 9.ª figura… 9 mais 9, mais 9. 9 mais 9, 18… 27…

Susana- 4, 5, 6, 7, 8, 9… 7… 21 menos 7… 21 mais 7… 7 mais 7, 14. Agora vais ver como é que eu vou fazer… 14 vezes 3… 12 e vai 1, vai dar 42… (*a Susana faz alguns cálculos e depois de uma pausa decide apagá-los*) 3 vezes 3, 9... (*tentando a 3.ª figura*) Não, não vai dar…

Emanuel- Agora vou fazer o 8… 8 vezes 3, 8 vezes 2, 16. 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24... (*contando de forma unitária para obter o produto de 8 por 3*)

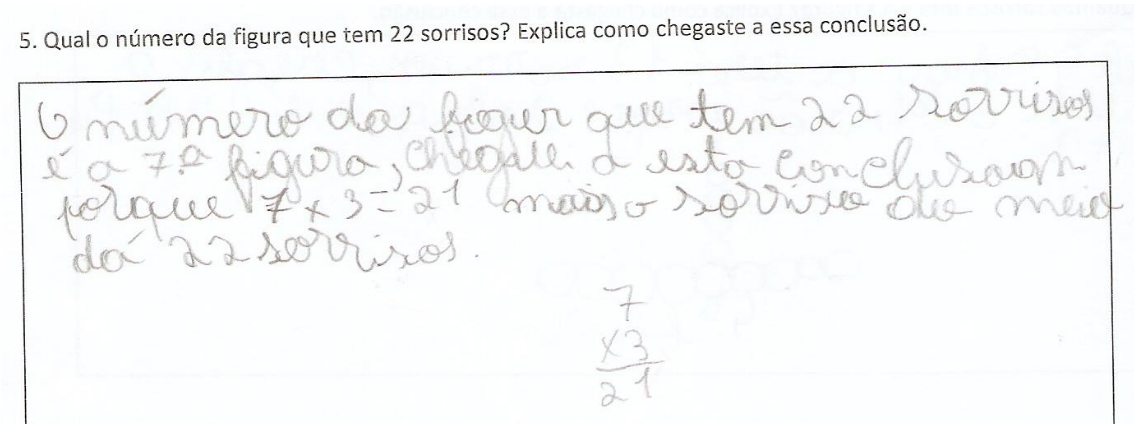
Susana- 3 vezes 4… (*tentando a 4.ª figura*)

Emanuel- Não pode dar porque dá 24.

Susana- E vai 1…(depois *do produto do 3 por 4, que deu 12 e este 1 é o algarismo das dezenas*)

Emanuel – 7 vezes 3… 14. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21… (*contando de forma unitária para obter o produto de 7 por 3*) É a 7, é a 7.ª figura.

A Susana foi aplicando alguns raciocínios, alguns até de forma indiscriminada, e chegou até a mobilizar a relação do triplo, mas todos sem sucesso. Por sua vez, o Emanuel foi aplicando a relação encontrada à medida que diminuía o número da figura e verificava se o total de círculos era o apresentado na questão. Depois de verificar a 9.ª e a 8.ª figura, concluiu que a figura que teria 22 círculos seria a 7.ª figura.


5. Qual o número da figura que tem 22 sorrisos? Explica como chegaste a essa conclusão.

O número da figuer que tem 22 sorrisos é a 7.ª figura, cheguei a esta conclusaon porque 7×3=21 mais o sorriso do meio dá 22 sorrisos.

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 3 \\ \hline 21 \end{array}$$

Figura 54- Apresentação de resultados e explicação feita pelo Emanuel, para a 5.ª questão da tarefa 3

A resolução da 6.ª questão acabou por ficar um pouco facilitada pelas questões que coloquei aquando da resolução da 2.ª questão, pelo que rapidamente mobilizaram o conteúdo do diálogo tido comigo e apresentaram a resposta.

Emanuel- Qual o número da figura que tem 61 sorrisos?

Susana- Meu Deus!

Emanuel- Tu sabes!

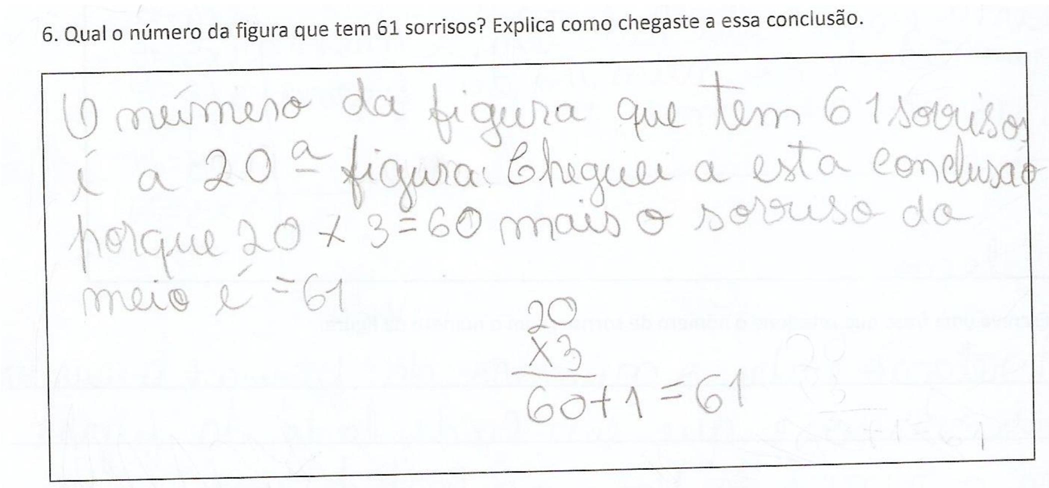
Susana- Pois é!

Emanuel- Acho que… acho que eu disse que era a 20.ª.

Susana- A 20.ª, sim.

Emanuel- 20 vezes 3 é 60…

Susana- Olha, eu fiz assim, para confirmarmos, fiz assim… 60 mais 1 igual a 61…



6. Qual o número da figura que tem 61 sorrisos? Explica como chegaste a essa conclusão.

O número da figura que tem 61 sorrisos é a 20.ª figura. Cheguei a esta conclusao porque 20 x 3=60 mais o sorriso da meio é =61

20
x3
60+1 = 61

Figura 55- Apresentação de resultados e explicação feita pela Susana, para a 6.ª questão da tarefa 3

O diálogo e as questões colocadas por mim, relativamente a figuras mais distantes, fizeram com que, por lapso, questionasse acerca de uma figura que depois se pretendia a aplicação do raciocínio inversivo. Daí terem sido tão rápidos na resposta à questão e na justificação apresentada.

Tarefa 4

Depois de entregue o material (21 palitos) ao grupo e a folha de registo, os elementos da díade começaram a observar a sequência de figuras e a verbalizar o que iam observando. Inicialmente fizeram a contagem de todos os palitos de cada uma das figuras.

Emanuel- Observa a sequência de figuras apresentada. A 1.ª figura, quatro palitos. A 2.ª figura…

Susana- Sete palitos.

Emanuel- Sete palitos.

Susana- A 3.ª figura… dez palitos.

Emanuel- Quantos palitos terá a 4.ª figura?

Susana e Emanuel- Explica como chegaste a essa conclusão.

(*ouvem um dos outros grupos a falar dizendo que a 4.ª figura terá treze palitos e sorriem um para o outro*)

Susana- Vamos fazer com os palitos ou…? (*pausa*) É sempre mais três.

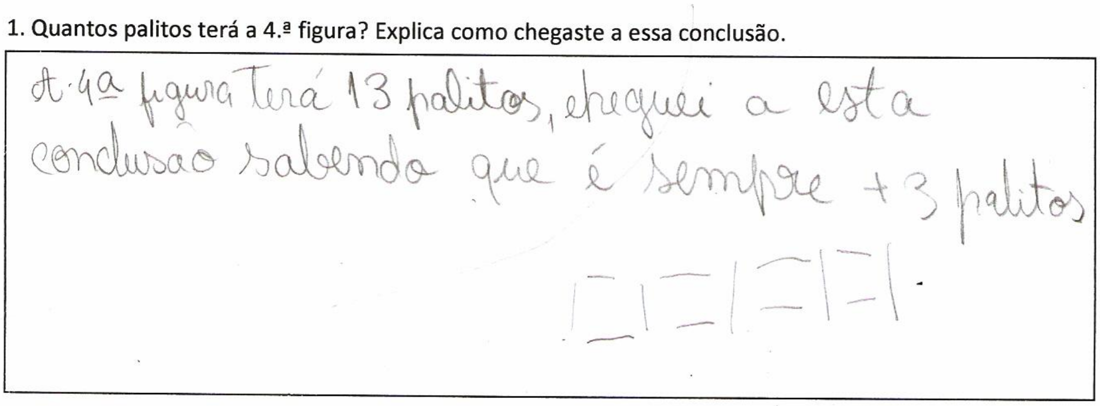
Emanuel- A 4.ª figura terá treze palitos.

(…)

Susana- Cheguei a esta conclusão… Cheguei a esta conclusão… Como é que nós podemos fazer? Então…

Emanuel- Porque é sempre mais três.

Após a observação da sequência, a Susana rapidamente mobilizou um raciocínio recursivo apercebendo-se que de figura a figura se acrescentavam sempre mais três palitos ("É sempre mais três.") por terem a feito a contagem dos palitos de cada uma das figuras. Apesar deste raciocínio, a resposta a esta questão foi verbalizada de forma muito célere porque o grupo ouviu um outro grupo responder que a 4.ª figura teria 13 palitos. Por terem tido esta abordagem à questão, os alunos apresentaram dificuldades em apresentarem a sua justificação e foi aí que o Emanuel recorreu ao que a Susana tinha dito ("Porque é sempre mais três.") para fazerem a sua justificação. No momento da resposta, para além da escrita, a Susana decidiu acrescentar a representação pictórica da 4.ª figura apenas na sua folha de trabalho, sem que o Emanuel seguisse o seu exemplo.


1. Quantos palitos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

A 4ª figura Terá 13 palitos, cheguei a esta conclusão sabendo que é sempre +3 palitos

Figura 56- Representação pictórica da 4.ª questão e explicação feita pela Susana, para 1.ª questão da tarefa 4

Para a resolução da 2.ª questão, a Susana apercebeu-se da indisponibilidade de material suficiente para a construção da 10.ª figura e portanto o Emanuel sugeriu a construção de uma tabela.

Susana- Eu acho que isto não vai dar… Não sei se vai dar para fazer a 10.ª figura. (*referindo-se ao material disponibilizado para a realização da tarefa*)

Emanuel- Vou fazer uma tabela.

(…)

Susana- A 4.ª tem treze. (*e começa a fazer contagens de três em três*) Dezasseis. Dezanove. Vinte e dois. Vinte e cinco. Vinte e oito.

Emanuel- A 10.ª… (*e olha para o trabalho da Susana*)

Susana- A 10.ª…

Emanuel- Como é que tu sabes? Tu não acabaste.

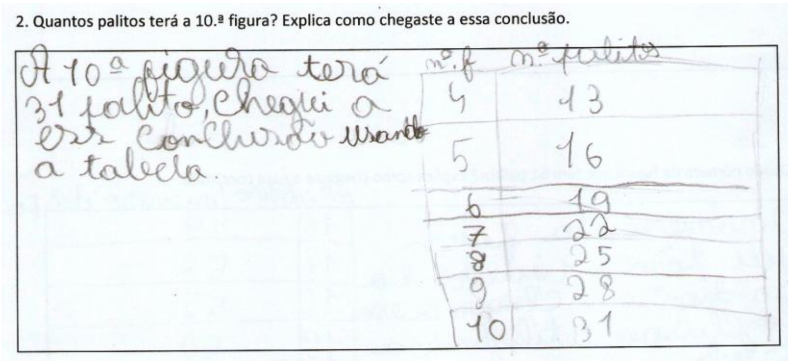
Susana- Acabei, sim! Olha aqui…

Emanuel- Falta-te a 10.ª.

Susana- Ah! Pois! (*e termina a sua tabela com a 10.ª figura com trinta e um palitos*)

Emanuel- A 10.ª figura… A 10.ª figura… que terá… (…) Terá trinta e um. (…) A 10.ª figura terá trinta e um palitos.

O Emanuel, ao sugerir a realização de uma tabela, poderá tê-lo feito graças à resolução da resposta anterior porque a Susana havia dito que seriam sempre mais três palitos. Com a utilização desta estratégia ficou patente um raciocínio recursivo por parte dos dois elementos do grupo pela rápida contagem de 3 em 3: “Dezasseis. Dezanove. Vinte e dois. Vinte e cinco. Vinte e oito.”.


2. Quantos palitos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

A 10ª figura terá 31 palito, cheguei a essa conclusão usando a tabela.

nº f	nº palitos
4	13
5	16
6	19
7	22
8	25
9	28
10	31

Figura 57- Tabela feita pelo Emanuel, para a 2.ª questão da tarefa 4

Numa primeira abordagem à relação entre o número de palitos e o número de ordem da figura, os alunos fizeram uma associação não com a quantidade de palitos mas com o número de quadrados formados com os palitos e o número de ordem da figura.

> Emanuel- Escreve uma frase que relacione o número de palitos com o número da figura.
>
> Susana- Então, cheguei a essa conclusão… usando…
>
> Emanuel- De cada palito, acho que se forma um quadrado. Na 1.ª figura, um quadrado, este quadrado, estes palitos forma um quadrado.
>
> Susana- Sim.
>
> Emanuel- Dois quadrados é a mesma quantidade que o número da figura. Três quadrados é a mesma quantidade que o número da figura. Todos os quadrados é o número da figura.

Apesar deste raciocínio encetado pelo Emanuel, numa visão global da figura não tendo em consideração a quantidade de palitos, a Susana concordou com o seu raciocínio e depressa avançou na sua resposta.

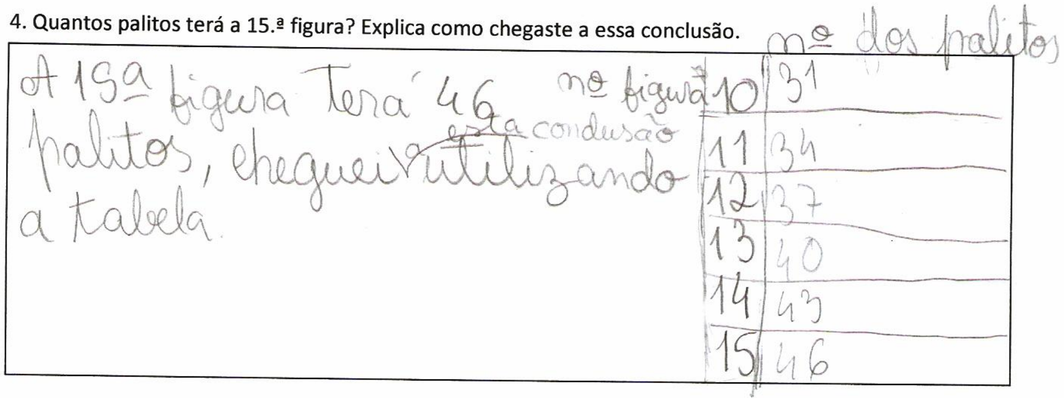
> Susana- Hum [sic], sim. (*pausa*) Então… Escreve uma frase que relacione o número de palitos com o número da figura. (*pausa*) A… A… Que… tipo… é sempre mais três. É sempre mais três. (*pausa*) É sempre mais três. (*pausa*) Então, aqui tem quatro, mais esta, eu acho que esta... Então, aqui tem quatro mas depois tu vais acrescentar mais três (*referindo-se aos três palitos que acrescenta da 1.ª figura para a 2.ª figura*), vais acrescentar mais três, vais acrescentar mais três, vais acrescentar mais três, vais acrescentar mais três. Que se vai sempre acrescentando mais três.
>
> Emanuel- E agora vou pôr que é sempre mais três. (…) A relação… A relação entre…
>
> (…)
>
> Susana- O número da figura e… o número da figura e o número de palitos… (*pausa*) É que… É que…
>
> Emanuel- Vai-se acrescentando mais três.

A Susana continuou a reiterar a relação recursiva que havia encontrado de figura a figura e voltou a escrever esta sua explicação como forma de relação, tal como fizera para a 4.ª questão: "A relação entre o número de palitos com o número da figura é que se vai acrescentando mais três.".

Para a resolução da 4.ª questão, os alunos voltaram a eleger a tabela como estratégia de resolução desta questão.

> Susana- Podemos fazer uma tabela, a partir do dez, como nós tínhamos feito.
>
> (…)
>
> Emanuel- Figura 10, 11, 12, 13, 14, 15. (*colocando os números que correspondem às figuras*)
>
> (*pausa*)
>
> Emanuel- Vou começar a fazer. (…) Trinta e um…
>
> Susana- A 10.ª, trinta e um. Trinta e quatro. Trinta e sete. Quarenta. Quarenta e três. Quarenta e seis.
>
> Emanuel- A 15.ª figura… figura…
>
> Susana- A 15.ª figura…
>
> Emanuel- Terá… A 15.ª figura terá…
>
> Susana- Terá quarenta e seis palitos.

Com esta resolução, os elementos do grupo voltaram a demonstrar a utilização de um raciocínio recursivo, recorrendo sempre à contagem de figura a figura acrescentando sempre três palitos à figura anterior: "A 10.ª, trinta e um. Trinta e quatro. Trinta e sete. Quarenta. Quarenta e três. Quarenta e seis.".



4. Quantos palitos terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

A 15ª figura terá 46 palitos, cheguei a esta conclusão utilizando a tabela.

nº figura	nº dos palitos
10	31
11	34
12	37
13	40
14	43
15	46

Figura 58- Tabela feita pela Susana, para a 4.ª questão da tarefa 4

Os alunos avançaram para a resolução da 5.ª questão, questão essa, que pretendia a utilização de um raciocínio inversivo. A Susana foi muito rápida a apresentar uma resposta, depois de ler a questão e de virar a sua folha de trabalho verificando a tabela realizada na 2.ª questão (tabela construída desde a 4.ª figura até à 10.ª figura).

Emanuel- Qual o número da figura que tem 22 palitos?

Susana- Sete. (*depois de virar a sua folha e verificar o número da figura na tabela que construiu para responder à 2.ª questão*)

Emanuel- É o número sete. O número da figura… que terá… (…) O número da figura que terá vinte e dois palitos…vinte e dois… é o sete.

Com deste extrato, ficou evidente que o objetivo desta questão não foi atingido pois os alunos limitaram-se a encontrar uma resposta baseando-se numa estratégia de resolução de tabela, feita pelo facto de demonstrarem um raciocínio recursivo, aquando da resolução da 2.ª questão. Após o relato de que figura seria, os alunos escreveram a sua resposta: "O número da figura que terá 22 palitos é a 7.ª figura, cheguei a essa conclusão vendo na tabela que eu fiz para a 10.ª figura.".

Uma vez mais, a resolução da 6.ª questão também preconizava a utilização de raciocínio inversivo. Vejamos como o par abordou a questão:

Emanuel- Qual o número da figura que tem 61 palitos? (…) Quarenta e seis.

Susana- Fazemos uma tabela, né? [sic]

(*ambos desenham a tabela*)

Emanuel- A minha deu até ao vinte e dois (*dizendo que a sua tabela vai até à 22.ª figura*).

Susana- 16, 17, 18, 19, 20, 21 (*referindo-se ao número das figuras que vai colocando na tabela*).

(…)

Emanuel- Quarenta e nove.

Susana- Aqui dá quarenta e nove. Cinquenta e dois. Cinquenta e cinco. Cinquenta e oito. Sessenta e um. Sessenta e quatro. Sessenta e seis. Sessenta e nove. Já descobri.

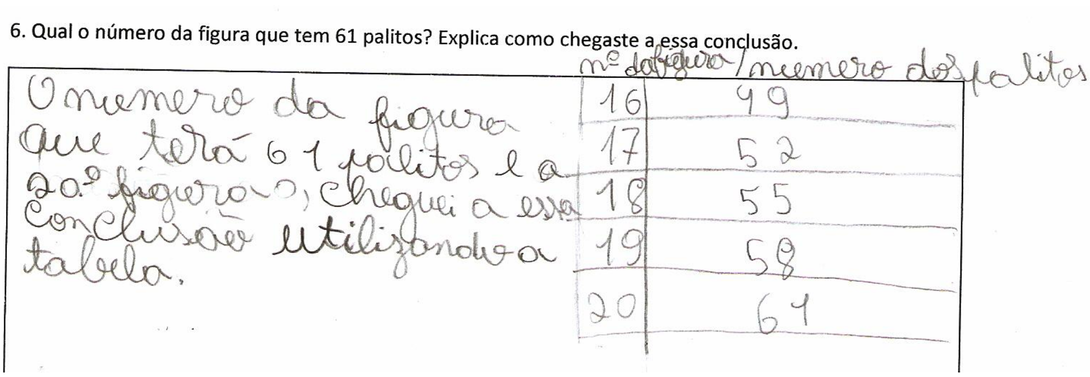
Emanuel- Sessenta e um, já passa.

Susana- Cinquenta e cinco. Quarenta e nove. (*confrontando o seu trabalho com o do Emanuel, verifica que errou a partir do sessenta e seis e corrige*) Antes tinha feito…

Emanuel- O número… O número da… da figura… que terá… (*pausa*) sessenta e um palitos é… sessenta e um palitos é o número vinte.

O Emanuel, ao referir a quantidade de 46 palitos presentes na 15.ª figura, podia estar a verificar a aproximação dos 61 palitos e foi nesse momento que a Susana sugeriu novamente a utilização de uma tabela.

Mais uma vez, e ainda que utilizando uma tabela, os alunos continuaram a evidenciar um raciocínio recursivo porque verbalizam apenas a contagem de três em três, sem nunca fazer qualquer referência à relação entre o número de ordem da figura e a quantidade de palitos. Por este processo, não precisaram de inverter o raciocínio.


6. Qual o número da figura que tem 61 palitos? Explica como chegaste a essa conclusão.

O numero da figura que terá 61 palitos é a 20.ª figura, cheguei a essa conclusão utilizando a tabela.

nº da figura	numero dos palitos
16	49
17	52
18	55
19	58
20	61

Figura 59- Tabela feita pelo Emanuel, para a 6.ª questão da tarefa 4

Depois de toda a tarefa terminada, eu aproximei-me do grupo e, deparando-me com as suas respostas para a 3.ª questão que solicitava a escrita da relação entre o número de palitos e o número de ordem da figura, iniciei um momento de diálogo com os elementos do grupo colocando algumas questões.

Professora- Que vai-se acrescentando mais três. Foi aquilo que vocês perceberam que ia sempre acontecendo. (*e a Susana acena que sim com a cabeça*) E agora… Só que eu agora estou a… Quando vocês me dizem mais três, vocês estão-me a explicar a relação que existe entre o número da figura e a figura?

Emanuel- Não.

Professora- Então essa relação é mais três?

Emanuel- Não.

Professora- Então vamos perceber. Tenho a 1.ª figura, mais três?

Susana- Fica a 2.ª.

Professora- Estou a seguir a vossa relação. Vocês dizem mais três. A 1.ª figura, então tenho o número? (*questionando qual o número associado ao número de ordem da 1.ª figura*)

Susana- Quatro. (*mas a Susana responde o número de palitos da figura*)

Professora- Sim, mas a 1.ª figura… na 1.ª figura ao utilizar este número ordinal, eu já tenho o número? (…) Quando eu digo 1.ª, estou-me a referir ao número quatro?

Susana- Um.

Professora- Ao número um. Mais três?

Susana- Quatro.

Professora- Quatro. Tem quatro palitos? (*a Susana acena que sim com a cabeça*) A 2.ª figura? Qual é o número?

Susana- Segundo.

Professora- Então é o número?

Susana- Dois.

Professora- Mais três?

Susana- Cinco.

Professora- A 2.ª figura tem cinco palitos?

Susana- Não.

(…)

Professora- Portanto, a relação é mais três? (*ambos acenam com a cabeça que não*) Vocês sabem que quando passam de uma figura para outra, vão juntando mais três. Só que agora nós não estamos a passar de figura em figura. Por isso é uma frase que explique que… dizendo essa relação eu consigo fazer qualquer figura. Com essa do mais três, eu consigo fazer qualquer figura?

Susana e Emanuel- Não.

Nestas questões iniciais, tentei que os alunos aplicassem a sua relação de mais três ao número de ordem da figura, para que estes denotassem que esta sua explicação não poderia ser aplicada a qualquer das figuras do padrão, logo, não seria a relação entre o número de palitos e o número da figura.

> Professora- (…) Com essa do mais três, que vocês me estão a dizer, significa que eu tenho de fazer as figuras todas até àquela que é pedida, certo? (*ambos acenam com a cabeça que sim*) E não é isso que eu aí estou a pedir. Ok!
>
> (*apagam a relação que tinham escrito*)
>
> Emanuel- Já está, tá [sic] uma coisa parecida. Neste quadrado (*e aponta para a 1.ª figura*)
>
> Susana- Sim.
>
> Emanuel- Um quadrado é o número da figura (*referindo-se ao quadrado formado pelos palitos na 1.ª figura*), dois quadrados é o número da figura (*referindo-se aos dois quadrados formados pelos palitos na 2.ª figura*), três quadrados é o número da figura (*referindo-se aos três quadrados formados pelos palitos na 3.ª figura*).
>
> Susana- Sim.
>
> (…)
>
> Emanuel- Cada palito forma um quadrado… Não.
>
> Susana- Hum… Espera. Cada número da figura…
>
> (*pausa*)
>
> Emanuel- O número de quadrados… é o número da figura.

Depois da confirmação de que não poderiam aplicar a relação de mais 3 para qualquer figura, reforcei que não poderia ser uma relação que se ancorasse na figura anterior e afastei-me para que os alunos debatessem entre si e chegassem a uma resposta.

Após o meu alerta, o Emanuel voltou a focar a sua observação entre o número da figura e a quantidade de quadrados, denotando entre eles uma relação: "Um quadrado é o número da figura, dois quadrados é o número da figura, três quadrados é o número da figura.". A sua observação acabou por não ser pertinente porque essa não era a relação pretendida mas mesmo assim acabaram por escrevê-la: "O número de quadrados é o número da figura.".

Depois desta escrita, os alunos aguardavam a minha chegada para me informarem de que tinham terminado a tarefa. Enquanto esperavam por mim, a Susana foi passando com o lápis por cima das figuras e chegou a uma conclusão diferente que ainda não tinham visualizado.

> Susana- Olha (*apontando para as figuras*), é três mais um, três mais um (*passando com o lápis por cima dos palitos da 2.ª figura mas repetindo o palito do meio*), três mais um (*passando por cima dos palitos da 1.ª figura*), três mais um, três mais um, três mais um (*passando por cima dos palitos da 3.ª figura mas repetindo o palito do meio*).
>
> Emanuel- Tu já disseste este.
>
> Susana- Então o triplo é... Não…
>
> Emanuel- Então como chegaste a essa conclusão.
>
> Susana- Não, porque se fosse o triplo tinha que ser três vezes. Portanto três mais um é igual a quatro.
>
> Emanuel- Três vezes dois, seis. Seis mais um, sete. Aqui tem três (*referindo-se ao número de ordem da 3.ª figura*)… Três vezes três, nove. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Mais um, dez. Trinta mais um (*referindo-se à 10.ª figura*), certo.
>
> Susana- Então… mais três… (*pausa*) Quatro… Aqui quatro mais… Aqui quatro para sete, 5, 6, 7. Aqui tão [sic] três. Depois, aqui tem sete, 1, 2, 3, 10. 7, 8, 9, 10. Eu achava que era sempre mais três.

O facto da Susana ir passando com o lápis por cima de todas as figuras, fê-la fazer a decomposição do termo, pois a Susana passou por cima do primeiro palito e depois foi acrescentando sempre os outros restantes três palitos de forma contínua, enganando-se ao repetir o palito que se encontrava no meio, olhando desta forma para a figura mas de forma desadequada. Apesar da sua linguagem gestual ao passar por cima dos palitos indicar 1 + 3, ao dialogar com o Emanuel ela ia referindo: "… é três mais um, três mais um…". A forma como ela o verbalizou ao Emanuel e foi repetindo os seus gestos, fê-lo perceber que ela estava a referir palitos em duplicado ("Tu já disseste este.") mas também fez com que ele relacionasse a sua forma de visualização com o número da figura, aplicando o triplo e ainda mais um ("Três vezes dois, seis. Seis mais um, sete. (…) Três vezes três, nove. (…) Mais um, dez."), olhando para a relação com os números.

A Susana, mesmo tendo sido a alavanca da descoberta da relação para o Emanuel, não conseguiu compreender a relação com a mesma eficácia com que o Emanuel o fez, porque se enganou na contagem, repetindo o palito do meio. Esta sua contagem fê-la voltar novamente ao raciocínio recursivo, acrescentando sempre mais três palitos: "Eu achava que era sempre mais três.".

Depois deste diálogo, eu voltei a aproximar-me do grupo e continuei as minhas questões.

> Professora- Vocês dizem, vocês chegaram a uma conclusão daquilo que iam passando de figura para figura, certo?
>
> Susana- Sim.
>
> Professora- Que havia aqui uma coisa em comum. Que era o quê?
>
> (…)
>
> Susana- Mais três.
>
> Professora- Mais três, certo! Então se vocês encontraram essa regularidade, a relação há de ter a ver alguma coisa, com o quê? Com o…
>
> Emanuel- Três.
>
> Professora- Então agora, vocês quando passam da 1.ª figura para a 2.ª, o que é que acontece?
>
> Emanuel- Mais três.
>
> Susana- Mais três.
>
> Professora- E onde é que veem esses três? Expliquem-me lá.
>
> (*a Susana aponta para todo o quadrado que fica no final da 2.ª figura*)
>
> Professora- Mas vocês ficam com mais um quadrado, certo? (*o Emanuel acena que sim com a cabeça*) Mas não precisaram de quatro palitos para fazer esse quadrado, pois não?
>
> Emanuel- Não.
>
> Professora- Precisaram de quantos?
>
> Susana- Três.
>
> Professora- Porquê?
>
> Susana- Porque já tava [sic] aqui este (*referindo-se ao palito do meio da 2.ª figura*).

Professora- Então e na 3.ª figura?

Susana- Três, porque já tava [sic] aqui este (*referindo-se ao palito do meio que ficou entre o 2.ª e o 3.ª quadrado na 3.ª figura*).

Neste novo momento de diálogo, tentei que a Susana verbalizasse a forma como visualizava a figura para que ela percebesse que estava a acrescentar três palitos, mas que esses três palitos formariam um novo quadrado porque um dos lados do quadrado já estava colocado depois de feita a figura anterior. O objetivo destas questões foi cumprido quando a Susana afirmou : "Três, porque já tava [sic] aqui este.".

Após a concretização deste objetivo, persisti nas minhas questões, desta vez para os direcionar no estabelecimento da relação correta.

Professora- Então e agora olham para o padrão, para o número da figura… E em cada figura vocês conseguem ver o três? Na 1.ª figura onde é que conseguem ver o três? (…) Esses três são… são os… estão na mesma posição daqueles que vocês vão acrescentando?

Emanuel- Sim.

Professora- Na 2.ª figura, o que é que acrescentaram?

Susana- Estes. (*apontando para os três últimos palitos da 2.ª figura*)

Professora- E aqui? (*apontando para a 3.ª figura*)

Susana- Estes. (*apontando para os três últimos palitos da 3.ª figura*)

Professora- Sim. Então na 1.ª figura vocês veem esses três, certo! (*o Emanuel acena que sim com a cabeça*) E na 2.ª figura veem esses três?

Emanuel- Sim.

Professora- Onde?

Emanuel- Aqui. (*apontando para os três últimos palitos da 2.ª figura*)

Professora- Só aí?

Emanuel- E aqui. (*apontando para os três palitos que ficaram da 1.ª figura, sem contar com o palito vertical inicial*)

Professora- E na 3.ª figura, veem esses três.

Emanuel- Sim.

Professora- Onde Emanuel?

Emanuel- Aqui (*apontando para os três palitos que ficaram da 1.ª figura, sem contar com o palito vertical inicial),* aqui (*apontando para os três palitos que ficaram da 2.ª figura)* e aqui (*apontando para os três palitos que ficaram da 3.ª figura).*

Professora- E na 4.ª, conseguiam ver esses três?

Emanuel- Sim.

Nesta conversação com os elementos do grupo e para os direcionar no sentido da descoberta da relação, comecei por reforçar o seu raciocínio recursivo recorrendo à explicação da localização dos três palitos que acrescentavam de figura a figura.

Depois desta explicação, tentei que visualizassem a quantidade de conjuntos de três palitos em cada uma das figuras. A forma como o Emanuel respondeu a essa questão tendo em consideração a 3.ª figura ("Aqui, aqui e aqui."), fê-lo fazer a decomposição do termo de acordo com a quantidade de três que poderia posteriormente levá-lo à associação com o triplo.

Professora- Então e agora que vocês conseguem ver esses três, conseguem estabelecer a relação entre o número da figura e os palitos com este três a ajudar? Porque vocês conseguem ver sempre em cada figura esses três. (*ambos acenam que sim com a cabeça*) Certo! E só veem esses três?

Emanuel- Não.

Professora- Veem mais alguma coisa?

(…)

Susana- Mais este aqui. (*referindo-se ao palito inicial na vertical da 3.ª figura*)

Professora- E tem sempre esse?

Susana- Ah! Não, também tem…

Professora- Então vamos olhar para a 1.ª. Vocês veem o três, a onde?

Susana- Aqui. (*apontando para os três palitos que ficaram da 1.ª figura, sem contar com o palito vertical inicial*)

Professora- E ainda?

Susana- Mais um. (*referindo-se ao palito inicial na vertical*)

Professora- Mais esse, certo! E na 2.ª figura?

Susana- Estes (*apontando para os três palitos que ficaram da 1.ª figura, sem contar com o palito vertical inicial*), estes (*apontando para os três palitos que ficaram da 2.ª figura*), mais estes dois (*referindo-se ao 1.º e ao 2.º palitos na vertical*).

Professora- Então, mas espera, este daqui (*referindo-se ao 2.º palito na vertical*)…

Susana- Ah!

Professora- Não está incluído nos três? *(questionando se aquele palito estaria incluído na contagem dos três palitos que ficaram da 1.ª figura que a Susana já tinha apontado*)

Susana- Está.

As questões sobre se viam mais alguma coisa para além dos três palitos, fez a Susana perceber o elemento constante que era o palito vertical inicial de cada uma das figuras. Contudo, e apesar dessa perceção, por breves instantes a Susana confundiu-se por repetir o palito comum entre as figuras, mas a continuação das minhas questões fê-la perceber que estava a repetir esses palitos.

Após a visualização da relação através da observação das figuras, eu continuei com as questões para que os alunos pudessem verificar e confirmar que a relação que tinham encontrado se poderia aplicar nas figuras da sequência, na 4.ª figura da primeira questão e na 10.ª figura da segunda questão.

Professora- Então já conseguiram descobrir a relação?

Emanuel- Três vezes mais um.

(…)

Professora- Quantas vezes é que vocês veem o três aqui (*apontando para a 1.ª figura*)?

Susana- Uma.

Professora- Mais um. Quantas vezes veem o três aqui (*apontando para a 2.ª figura*)?

Susana- Uma.

Professora- Só uma vez o três?

Susana- São duas. Mais um.

Professora- E aqui (*apontando para a 3.ª figura*)?

Emanuel- Três.

Professora- Mais um?

Emanuel- Sim.

Susana- Mais um.

Professora- Então e agora será que se aplica aqui na 4.ª?

(…)

Emanuel- Sim.

Professora- Sim, porquê, Emanuel? Como é que pensaste? Diz-me! Nós estamos a tentar estabelecer a relação entre o número da figura e o número dos palitos, certo! Nós estamos a falar de que figura?

Emanuel- Da 4.ª.

Professora- Da 4.ª. E estamos a dizer que é o triplo mais um, certo! Então como é que pensamos?

Emanuel- Porque quatro vezes três é doze, mais um, é treze.

Professora- Então e para a 10.ª, isso acontece?

Emanuel- Sim.

Professora- Porquê?

Emanuel- Porque dez vezes três é trinta, mais um, trinta e um.

Susana- Trinta e um.

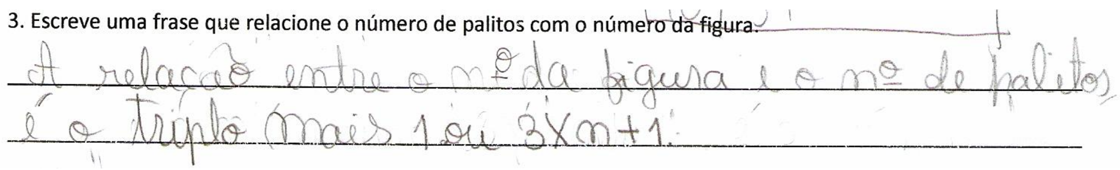
Após a verificação da aplicabilidade da relação encontrada, eu perguntei se, depois de todos estes esclarecimentos, os alunos já conseguiriam escrever a frase que explicava a relação existente.

Emanuel- A relação…

Susana- O triplo mais um.

Emanuel- Triplo mais um. (*pausa*) Três palitos como eu disse… Três vezes n mais um.

Depois do estabelecimento da relação, os alunos conseguiram traduzir essa relação numa expressão algébrica.


3. Escreve uma frase que relacione o número de palitos com o número da figura.

A relação entre o nº da figura e o nº de palitos é o triplo mais 1 ou 3Xn+1.

Figura 60- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pela Susana, para a 3.ª questão da tarefa 4

Esta tradução funcional da relação decorreu sobretudo da interação comigo que conduzi os alunos a visualizar as figuras através da sua decomposição iterando *n* vezes os quadrados e adicionando mais 1 no final, correspondendo ao primeiro palito na vertical. Trata-se de uma decomposição pouco evidente nas figuras, sendo natural que os alunos relacionem o que é mais evidente, ou seja, o número de quadrados e não o número de palitos.

Tarefa 5

Depois de distribuído o material para a tarefa (6 quadrados pretos e 30 quadrados brancos) e as folhas de trabalho, os alunos começaram com a leitura da 1.ª questão, com a observação da sequência de figuras e com a verificação da quantidade de quadrados pretos em cada uma das figuras.

> Emanuel- A 1.ª figura tem um quadrado preto, a 2.ª tem dois quadrados pretos, a 3.ª tem três quadrados pretos. Quantos quadrados pretos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. A…

Perante a iminência de resolução da 1.ª questão, os alunos ainda hesitaram quanto à utilização do material mas acabaram por recorrer à sua utilização.

> Susana- Fazemos? Fazemos? (*questionando sobre a utilização do material e o Emanuel acena que sim com a cabeça*) Ups [sic]! Tem bué [sic] quadrados. (…) (*começam a tentar construir uma figura*) Encontrei um. Este também é. (*referindo-se a quadrados brancos*) Acho que é melhor separarmos primeiro. Olha! Os quadrados pretos têm o número da figura.
>
> Emanuel- Os quadrados pretos têm o mesmo número que o número da figura.

Enquanto organizavam o material, para começarem com a realização da tarefa, a Susana descobriu a relação entre o número de quadrados pretos e o número da figura verbalizando: “Os quadrados pretos têm o número da figura.”. Após esta afirmação, o Emanuel fez uma reformulação e acrescentou algumas informações dizendo: “Os quadrados pretos têm o mesmo número que o número da figura.”.

Mesmo tendo descoberto a relação entre o número de quadrados pretos e o número da figura, o grupo continuou com a construção da 4.ª figura com o material.

> Susana- Ya [sic]! Sim. Agora, este… (*e começam a construir com o material a 4.ª figura*) Põe aí já três. (*referindo-se aos três quadrados brancos da lateral esquerda*)
>
> Emanuel- (…) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Não, catorze. (*contando os quadrados brancos da 4.ª figura que construíram*)
>
> (…)
>
> Susana- Então, sem contar com os quadrados pretos, aqui dá, 1…
>
> Emanuel- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Aqui tem doze. (*depois de contar os quadrados brancos da 3.ª figura*) (…) Dezoito. (*referindo-se ao total de quadrados da 4.ª figura*) Catorze, catorze. (*referindo-se aos quadrados brancos da 4.ª figura*) 15, 16, 17, 18. (*juntando agora os quadrados pretos da 4.ª figura*)
>
> Susana- E estes que nós acrescentámos? (*referindo-se aos quadrados que acrescentaram da 3.ª para a 4.ª figura*)
>
> (…)
>
> Emanuel- A…
>
> Susana- 4.ª figura…
>
> Emanuel- Figura…
>
> Susana- Terá… dezassete quadrados.
>
> Emanuel- Terá quatro quadrados.
>
> Susana- Quatro quadrados? Como assim?
>
> Emanuel- Quatro quadrados… pretos.
>
> Susana- Ah! Sim. Terá… quatro…

Ao construírem a figura com o material, os alunos começaram já a ter uma perceção da decomposição da figura, pelo menos pela forma com que iriam formar o lado esquerdo da figura (“Põe aí já três.”), assinalando os 3 quadrados brancos constantes à esquerda de cada figura. A construção da figura levou a que os alunos se dispersassem um pouco do objetivo da questão alternando entre a contagem da quantidade total dos quadrados da 4.ª figura e a contagem da quantidade de quadrados brancos também da 4.ª figura. Mas durante a escrita da resposta, o Emanuel demonstrou ter compreendido a relação conseguindo corrigir a Susana quando esta se enganou a dizer a resposta da quantidade de quadrados pretos. Para a resposta à questão, os alunos escreveram: "A 4.ª figura terá 4 quadrados pretos, cheguei a esta conclusão utilizando o material.".

Apesar das suas respostas, numa primeira abordagem à questão, os alunos não chegaram à sua conclusão da resposta pela utilização do material mas sim mobilizando um raciocínio funcional, encontrando a relação entre os quadrados pretos e o número de ordem da figura.

Para a resposta à 2.ª questão, os alunos seguiram a mesma linha de raciocínio utilizada na 1.ª questão.

> Emanuel- Quantos quadrados pretos terá a 10.ª figura? (*lendo o enunciado*)
>
> Susana e Emanuel- Explica como chegaste a essa conclusão.
>
> Emanuel- A figura… que terá…dez… quadrados…
>
> Susana- Pretos.
>
> Emanuel- Cheguei…
>
> Susana- A esta conclusão…
>
> Emanuel- A esta conclusão… porque… (…) Eu sei. Explicamos por palavras.
>
> Susana- Porque…
>
> Emanuel- Porque… o número… porque o número…
>
> (…)
>
> Emanuel- O número da figura… é o mesmo… é o mesmo…
>
> Susana- É o número de quadrados… (*pausa*) A 10.ª figura terá dez quadrados pretos. Cheguei a esta conclusão porque o número da figura é o mesmo de quadrados pretos. Quadrados pretos.

Nesta questão, os alunos recorreram também a um raciocínio funcional e por esse motivo rapidamente chegaram à resposta da questão escrevendo: "A 10.ª figura terá 10 quadrados pretos, cheguei a esta conclusão porque o número da figura é o mesmo número de quadrados pretos.".

Esta resposta pode ter surgido pelo facto de não terem construído a figura pela insuficiência de material disponibilizado pois a narrativa que utilizaram para a justificação já havia sido referida no diálogo da 1.ª questão.

Após a compreensão da relação entre o número de quadrados pretos e o número da figura, a escrita da relação foi muito célere levando os alunos a escrever: "A relação entre o número da figura e o número de quadrados pretos é que o número da figura é o mesmo que o número de quadrados pretos.".

Os alunos avançaram depois para a resolução da 4.ª questão, que desta vez questionava a quantidade de quadrados brancos da 4.ª figura. Uma vez mais, os alunos recorreram ao material para fazer a construção da 4.ª figura.

> Emanuel- Quantos quadrados brancos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) A 4.ª figura… Temos de fazer a 4.ª figura outra vez.
>
> Susana- Pois é. Espera. A 4.ª figura, quatro (*referindo-se à quantidade de quadrados pretos da 4.ª figura*).
>
> Emanuel- Acho que tem catorze.
>
> Susana- Dezassete! (*contando todos os quadrados da 4.ª figura, na 1.ª questão*)
>
> Emanuel- Não, é catorze.
>
> Susana- Não é dezassete menos quatro? Treze. Eu acho que era treze.
>
> Emanuel- Eu acho que é catorze.
>
> Susana- Ok, vamos ver quem é que tem…
>
> Emanuel- Qual é dos dois… Temos de ter a mesma opinião.
>
> Susana- Depois temos que ver.
>
> (*pausa enquanto vão construindo novamente a 4.ª figura com o material*)
>
> Emanuel e Susana- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. (*contando os quadrados brancos da 4.ª figura que construíram*)
>
> Susana- Acertaste.
>
> Emanuel- Então, a 4.ª figura… a 4.ª figura… figura… terá… terá… catorze…
>
> Susana- Catorze quadrados brancos.

Para esta resolução, os alunos apresentaram as contagens que fizeram aquando da realização da construção da 4.ª figura para a resolução da 1.ª questão. Dado o desacordo em relação à resposta porque a Susana enganou-se na contagem dos quadrados, os alunos optaram por reconstruir novamente a 4.ª figura e fizeram a contagem unitária dos quadrados brancos da 4.ª figura, escrevendo a sua resposta: "A 4.ª figura terá 14 quadrados brancos, cheguei a essa conclusão utilizando o material.".

Após a escrita da resposta à 4.ª questão, eu aproximei-me do grupo e perante a verificação de que o grupo estava a recorrer ao material, tentei fazê-los sentir a necessidade de encontraram a relação entre o número de quadrados brancos e o número da figura, para que fossem mais ágeis na resolução das suas respostas.

> Professora- Mas nós já percebemos que temos de tentar, sempre, encontrar a relação entre o número da figura…
>
> Emanuel- E o número dos quadrados.
>
> Professora- E o número dos quadrados, para depois ser mais fácil chegarmos a um número maior. Certo?
>
> Emanuel- Sim.
>
> (…)
>
> Professora- (…) Porque agora para a próxima, temos a 10.ª figura. Vocês têm material para construir a 10.ª figura?
>
> Susana- Não.
>
> Professora- Não têm. Portanto, vai ser mais difícil. Certo!

Depois de os fazer crer que era importante a descoberta da relação, afastei-me para que os alunos pudessem conversar entre si.

> Emanuel- A relação… Na 1.ª figura… (*pausa*) Na 1.ª figura há oito quadrados brancos.
>
> Susana- Na 2.ª há… (*pausa*) Há dez quadrados. Então…
>
> Emanuel- E na 3.ª… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Há doze quadrados brancos.
>
> Susana- Agora, na 4.ª…
>
> (*pausa*)
>
> Emanuel- Na 1.ª… é vezes oito. (*referindo um produto para a quantidade de quadrados brancos da 1.ª figura*)
>
> Susana- Sim.

Emanuel- Depois é vezes cinco. (*referindo um produto para a quantidade de quadrados brancos da 2.ª figura*)

Susana- Sim.

Emanuel- E na 3.ª acho que é vezes…

Susana- Quatro. Acho eu. (*pausa*) Não sei, eu acho que é.

Numa primeira tentativa de descoberta da relação, o Emanuel encetou um raciocínio multiplicativo. Depois de fazer a contagem dos quadrados brancos, o Emanuel tentou encontrar uma multiplicação utilizando como um dos fatores o número da figura, terminando com o produto que seria a quantidade do número de quadrados brancos, isto é, para 1.ª figura refere que são oito, indicando 1 x 8 que dará os 8 quadrados brancos; para 2.ª figura refere que são cinco, indicando 2 x 5 que dará os 10 quadrados brancos. Depois para a 3.ª figura, também a Susana participa no diálogo, referindo que são quatro, indicando 4 x 3 que dará os 12 quadrados brancos.

Apesar destas tentativas, os alunos não conseguiram encontrar um número comum a todas as figuras que pudesse ser multiplicado pelo número da figura e ser representativo dos quadrados brancos.

Como não chegaram a uma conclusão viável, o Emanuel continuou a tentar os seus raciocínios multiplicativos com base nos números já encontrados, enquanto a Susana, ao relembrar a estratégia da representação pictórica, verbalizou como iria construir a 10.ª figura.

Susana- Eu já sei como é que nós podíamos fazer a 10.ª figura. Mas eu acho que era com desenho. Porque como aqui tem sempre o número da figura, quadrados pretos, fazias os dez quadrados pretos, fazias outros em cima, dez em baixo, três em cima e três em baixo.

Ao narrar a forma como construiria a 10.ª figura, foi notório que a Susana compreendeu como a figura era decomposta apesar da dificuldade em expressar por palavras corretas a orientação dos lados, nomeadamente a direita e a esquerda, quando se referiu aos três quadrados em cima e em baixo. Logo a seguir a esta intervenção da Susana, eu voltei a aproximar-me e a colocar algumas questões ao grupo.

Professora- Pronto! E agora, em relação aos quadrados brancos, o que é que vocês conseguem ver? (*pausa*) Em relação ao número da figura e dos quadrados brancos? (*pausa*) Conseguimos perceber onde é que temos quadrados brancos?

Susana- Sim.

Professora- Onde?

Susana- Aqui.

Emanuel- À volta.

Professora- Os quadrados brancos estão?

Emanuel- À volta.

Professora- À volta de quê?

Susana- Dos…

Emanuel- Quadrados pretos.

Susana- Dos quadrados pretos.

Professora- Dos quadrados pretos. Então, vamos lá. Como vocês já perceberam que eles estão à volta, vamos tentar arranjar uma maneira de fazer a sua contagem, sem termos que desenhar a figura. Certo! Será que aquela relação que vocês já encontraram (*referindo-se à relação dos quadrados pretos*) consegue-vos ajudar a descobrir os quadrados brancos? (…) Para a 10.ª figura, a relação que vocês já conhecem, qual é?

Susana- Que o número de quadrados pretos é o número a figura.

Professora- Então, vamos ter quantos quadrados pretos?

Susana- Dez.

As minhas intervenções foram no sentido de reforçar a relação encontrada entre o número de quadrados pretos e o número da figura e de incitar os alunos para que se ancorassem nesta relação encontrada, e a partir daqui encontrassem a relação para os quadrados brancos, passando pela decomposição da figura como descrito no extrato abaixo.

Professora- E então e agora em relação aos quadrados brancos? Quantos é que eles vão ser? (…) Uma maneira de nós os contarmos? (*pausa*) Se eu vos pedisse para contarem os quadrados brancos da 3.ª figura? Sem os contarem um a um, como é que vocês iam contá-los?

Susana- Cinco, dez, doze (*contando cinco quadrados em cima, cinco quadrados em baixo e os quadrados centrais de cada um dos lados*).

Professora- Então separaste os quadrados, certo? (*a Susana acena que sim com a cabeça*) Então, e tu consegues fazer isso para a 10.ª figura? Tu separaste os quadrados brancos de baixo, os quadrados brancos de cima e depois um de cada lado. Certo? (*a Susana acena que sim com a cabeça*) Então, agora para a 10.ª figura, consegues fazer exatamente a mesma coisa? (…) Quantos quadrados terás em baixo? (*pausa*) Na 10.ª figura?

Susana- Doze.

Professora- Porquê?

Susana- Porque aqui acrescentava-se mais… estes… que aqui tava [sic] o número da figura, aqui, depois acrescentava-se mais estes dois…

Professora- Das… pontas.

Susana- Sim.

Professora- Certo! Então, consegues estabelecer essa relação, ou seja, o número da figura mais um de cada lado. Certo! E em cima?

Susana- Também…

Emanuel- Também é doze.

Susana- Também é o número da figura mais um de cada lado.

Professora- Certo! (*ambos acenam com a cabeça que sim*) Então é a mesma relação que o de baixo.

Susana- Sim.

No momento em que coloquei as questões, desconhecia que a Susana já tinha feito anteriormente uma decomposição da figura, tendo dito: "Porque como aqui tem sempre o número da figura, quadrados pretos, fazias os dez quadrados pretos, fazias outros em cima, dez em baixo, três em cima e três em baixo.". Apesar dessa decomposição narrada pela Susana, no momento em que a questionei, ela revelou estar a fazer uma decomposição diferente, visualizando toda a parte de baixo e toda a parte de cima. Decorrendo desta decomposição feita, eu voltei a questioná-los para que me conseguissem expressar a relação encontrada até àquele momento, baseada na decomposição apresentada pela Susana.

Professora- Então o que é que podemos dizer já desta relação que descobrimos?

(…)

Susana- O número da figura mais dois da ponta.

Professora- Sim. Mas isso é só para a relação de baixo! Então, e se quisermos juntar as duas, a parte de baixo e a parte de cima. O que é que dizemos?

Susana- Que… de baixo e de cima, cada uma tem doze…

Professora- O de baixo tem doze e de cima também tem doze. Mas qual é a relação entre o número da figura e esse número de quadrados? (*pausa*) Aqui em baixo, é o número da figura mais dois, certo! E em cima também é o número da figura…

Susana- Mais dois.

Professora- Mais dois. Então qual é a relação? (*pausa*) Se juntarmos isto, o que é que temos?

Emanuel- Vinte e quatro.

Com base na decomposição pelos alunos feita pelos alunos, eu tentei colocar questões para que eles juntassem essas decomposições e conseguissem, ancorando-se na visualização, aplicar o termo dobro e não a quantidade total como vieram a referir. Assim, voltei a colocar mais algumas questões.

Professora- Sim. Mas a relação? (*pausa*) Se eu quiser juntar o número da figura mais dois e outra vez o número da figura mais dois, o que é que nós temos aqui? (*pausa*) Em vez de eu di… em vez de eu ter que dizer o número da figura mais dois e o número da figura mais dois, se eu quiser juntar isto tudo, como é que eu digo?

(…)

Susana- Hum… Que a parte de cima e a parte de baixo é o número da figura mais dois quadrados.

Professora- E eu só preciso fazer isso? Ponho o número da figura mais um de cada lado e está feito dos dois lados.

Susana- Depois tem que se fazer aqui os quadrados pretos.

Professora- Sim. Fiz o número da figura mais um de cada lado. Tenho estes dois lados feitos? (*apontando para o lado de cima e o lado de baixo*)

Emanuel- Sim.

Professora- Tenho? Colocando o número da figura mais um de cada lado, fico com os dois lados feitos?

Susana- Não, só com um.

Professora- Só com um, certo! Então o que eu… o que é que dizes que eu tenho de fazer?

Susana- Duas vezes o número da figura mais dois.

Professora- Duas vezes o número da figura mais dois?

(…)

Susana- Mais quatro.

Eu coloquei estas questões para levar os alunos a perceber que a forma como se estavam a expressar não levava à construção total da figura porque apesar de para os dois alunos ser algo óbvio, a descrição estava incompleta por faltar uma das partes da figura. Neste momento também ficou percetível que os alunos tinham alguma dificuldade na interpretação do vocabulário matemático, nomeadamente quando falava em relação matemática, significado que já havíamos debatido nas aulas anteriores dando alguns exemplos como: dobro/metade, triplo/terça parte, entre outros. Contudo, os alunos conseguiram compreender a informação em falta e a Susana acabou por verbalizar a representação correta ("Duas vezes o número da figura mais dois. (…) Mais quatro."), mesmo sem que tenha apresentado a terminologia dobro. Mas descrição da figura ainda não estava completa pois estavam em falta os quadrados brancos do lado direito e do lado esquerdo da linha de quadrados pretos.

Professora- Falta alguma coisa?

Susana- Estes. (*apontado para um quadrado branco do lado esquerdo e um quadrado branco do lado direito da linha dos quadrados pretos*)

Professora- E esses dois. Então, como é que eu digo? Vou ter que acrescentar isso à relação, certo? Então, como é que vai ser?

Susana- Duas vezes o número da figura mais seis. (*referindo a primeira visualização que tinha feito da decomposição do termo no início da questão*)

A Susana conseguiu decompor totalmente a figura e encontrar a relação entre o número da figura e o número de quadrados brancos. Mesmo tendo feito uma decomposição diferente da figura aquando das minhas questões, ela acabou por visualizar uma nova decomposição da figura e encontrar a relação. Após esta descoberta, solicitei que verificássemos se a relação encontrada poderia ser aplicada a todas as figuras.

Professora- Será? Então vamos ver! Vamos ver duas vezes o número da figura mais seis, certo! Vamos ver aqui para a 1.ª, 1.ª figura. (*a Susana aponta para a 1.ª figura*) Sim. A 1.ª figura é simbolizada por que número?

Susana- Pelo um.

Professora- Pelo um. Então, duas vezes o número da figura? Dá?

Emanuel- Dois.

Professora- Mais seis?

Emanuel- Oito.

Professora- Oito. Então vamos ver se tem oito quadrados brancos.

Susana- Sim. (*depois de contar os quadrados brancos da 1.ª figura*)

Professora- Confirma-se?

Emanuel- Sim.

Professora- Segunda figura.

Susana- Dois.

Professora- Então é o número dois. Então, duas vezes o número da figura mais seis? Como é que estás a pensar?

Susana- Dois vezes dois, quatro, mais seis.

(*pausa*)

Professora- Então?

Susana- Dez.

Professora- Verifica se tem dez.

(*o Emanuel acena que sim com a cabeça*)

Susana- Sim.

Professora- E agora a 3.ª?

Susana- Três vezes dois, seis. Seis mais seis, doze. (*e ambos contam os quadrados brancos da 3.ª figura*)

Susana- Sim.

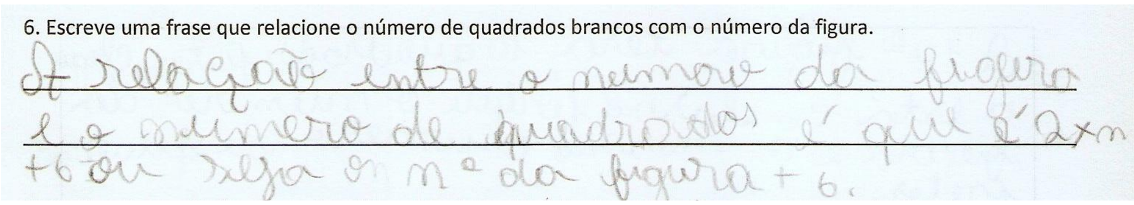
(…)

Emanuel- Assim, dá vinte e seis. (*referindo-se ao número de quadrados brancos da 10.ª figura*) Duas vezes o número da figura dá vinte, mais seis dá vinte e seis.

Os alunos da díade conseguiram verificar que a relação encontrada se poderia aplicar a todas as figuras, logo conseguiriam responder à 5.ª questão aplicando a relação ("Duas vezes o número da figura dá vinte, mais seis dá vinte e seis.") e demonstrando um raciocínio funcional ao escrever: "A 10.ª figura terá 26 quadrados brancos, cheguei a esta conclusão utilizando a relação entre o número de quadrados brancos e o número da figura.".

Dada a compreensão e a aplicação da relação encontrada entre o número de quadrados brancos e o número da figura incentivada por mim, a realização da resposta à 6.ª questão, que solicitava a escrita da frase que correspondia à relação, foi muito rápida. Nesta resposta, os alunos conseguiram escrever a relação tendo utilizando uma expressão algébrica.

No momento de revisão, o Emanuel sentiu a necessidade de clarificar a expressão algébrica tendo acrescentado à sua resposta "… ou seja, o número da figura mais seis.", tendo-se esquecido de redigir o dobro do número da figura, já que a sua preocupação tinha a ver com a explicitação do significado de *n*.


6. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados brancos com o número da figura.

A relação entre o numero da figura e o número de quadrados é que é 2xn +6 ou seja o nº da figura + 6.

Figura 61- Escrita da relação entre a parte do termo dos quadrados brancos e o número de ordem do termo feita pelo Emanuel, para a 6.ª questão da tarefa 5

Para a resolução da 7.ª questão, o Emanuel mobilizou rapidamente a relação encontrada entre o número da figura e os quadrados pretos e respondeu à questão, estando ainda a escrever a resposta à 6.ª questão, apresentando assim um raciocínio funcional.

Emanuel- O número… Entre o número da figura… Qual o número da figura que tem vinte e cinco quadrados pretos? É a vinte e cinco. (…) É a 25.ª figura. (*e a Susana faz uma cara de surpreendida como se o que o Emanuel está a dizer fosse* *errado*) É quadrados pretos! Quadrados pretos. Cheguei a esta conclusão… Cheguei… (…) Quadrados pretos. Lembras-te? (*virando a folha para e apontando para a primeira página onde se encontram os exercícios com a relação entre o número da figura e os quadrados pretos*) São figura e os quadrados pretos. São os quadrados do meio.

Para a resposta à questão, os alunos escreveram: "O número que tem 25 quadrados pretos é a 25.ª figura, cheguei a essa conclusão porque utilizei a relação.".

A 8.ª questão pressupunha a utilização de um raciocínio inversivo acerca da relação encontrada entre o número de quadrados brancos e o número da figura, dado que solicitava o número da figura que teria 20 quadrados brancos.

Emanuel- Qual o número da figura que tem 20 quadrados brancos? (*pausa*) A figura que tem vinte quadrados brancos…

Susana- Vinte menos seis? Catorze. Então… (*pausa*) Dá catorze… (*pausa*) Duas vezes catorze?

Emanuel- Duas vezes catorze, vinte e oito.

Susana- Ya [sic]. Ia ser vinte e oito.

(*pausa*)

Emanuel- Espera! Vamos experimentar fazer a cinco.

Susana- Eu acho que é melhor. Cinco vezes dois?

Emanuel- Não, cinco não vai dar.

Susana- Não, não dá

Emanuel- Então… (*pausa*) Que tal a número sete.

Susana- Espera… Não, não vai dar…

Emanuel- Sete mais sete, catorze, catorze.

Susana- Catorze… Eu acho que deves parar. Catorze… 15, 16, 17…

Emanuel- 15, 16, 17, 18, 19, 20. Vinte!

Susana- Ya [sic]!

Emanuel- Yes [sic], catorze. É o sete.

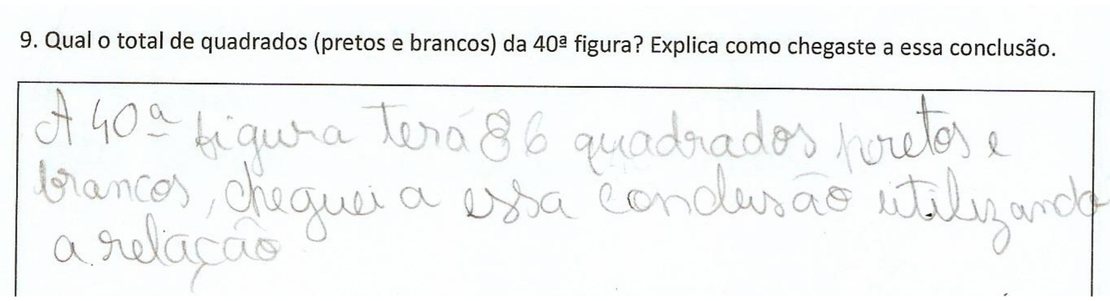
No extrato ficou percetível que os elementos da díade tentaram encetar um raciocínio inversivo ao fazer a subtração dos seis quadrados. No entanto, apresentaram alguns constrangimentos em relação à multiplicação não tendo conseguido fazer a sua inversão e aplicar a divisão. Por este motivo, os alunos optaram por uma estratégia de tentativa e erro, até perfazer um total de 20 quadrados brancos recorrendo à aplicação da relação $2 \times n + 6$. Apesar desta estratégia de tentativa e erro, aquando da resposta, os alunos justificaram as suas conclusões dizendo que tinham recorrido à evolução de figura a figura, o que não correspondia à realidade pois não aplicaram a relação para todas as figuras de forma gradativa.

Para a resposta, os alunos redigiram: "O número da figura que tem 20 quadrados brancos é a 7.ª figura, cheguei a essa conclusão de figura a figura.".

Os alunos avançaram para a resolução da 9.ª questão, que previa a aplicação das duas relações trabalhadas ao longo da tarefa, pois os alunos teriam de explicar quantos quadrados (pretos e brancos) teria a 40.ª figura, embora a Susana já tivesse feito a leitura da questão e encetado um raciocínio enquanto esperava que o Emanuel concluísse a resposta à 8.ª questão.

> Susana- Olha, já sei… Esta é muito fácil. (*pausa*) Mais quarenta, mais seis, então… (*pausa*) Pronto, era só para ter certeza. Mas a seguir vê-se.
>
> (…)
>
> Emanuel- De quadrados brancos… quadrados pretos e brancos da… quadragésima figura?
>
> Susana- Oitenta e seis quadrados. Terá… A quarenta… (*a Susana demonstra alguma dificuldade no numeral ordinal correspondente ao quarenta*) A quarentésima… Como é que era? Quadragési… Não. Qua…
>
> Emanuel- Quadragésima.
>
> (…)
>
> Emanuel- (…) A 40.ª figura terá oitenta e seis quadrados pretos e brancos, vírgula, cheguei… cheguei… a essa conclusão… conclusão… utilizando… utilizando a relação… a relação… a relação.

A resposta por parte da Susana foi de tal maneira rápida, que o Emanuel nem sequer tentou compreender a resposta desta e confiou totalmente na Susana sem verificar se a resposta estaria correta ou incorreta. Por ter procedido apenas à contagem dos quadrados brancos quando a questão era sobre o total de quadrado pretos e brancos, a resposta da Susana foi incorreta.


9. Qual o total de quadrados (pretos e brancos) da 40ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

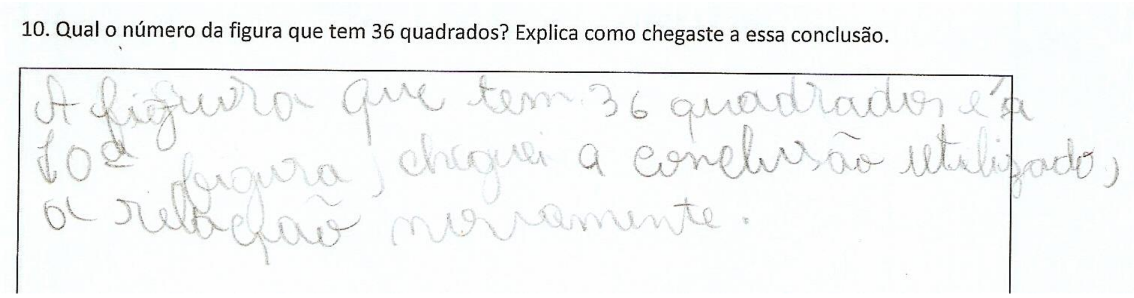
A 40ª figura terá 86 quadrados pretos e brancos, cheguei a essa conclusão utilizando a relação

Figura 62- Explicação de resultados feita pela Susana, para a 9.ª questão da tarefa 5

Para a resolução da 10.ª questão, os alunos teriam, uma vez mais, de aplicar um raciocínio inversivo, mas desta vez aplicando o raciocínio inversivo tendo em consideração as duas relações encontradas para os quadrados pretos e para os quadrados brancos.

> Emanuel- Qual o número da figura que tem 36 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Susana- Quinze. É a 15.ª. Porque… quinze… quinze vezes dois é trinta. Trinta mais seis é trinta e seis.
>
> (*pausa*)
>
> Emanuel- A 10.ª…
>
> Susana- Vigésima…
>
> Emanuel- A 10.ª figura…
>
> Susana- Não, a 30.ª… Não. A figura que tem… A figura…
>
> Emanuel- Que tem…
>
> Susana- Que tem… trinta e seis…
>
> Emanuel- Trinta e seis quadrados…
>
> Susana- É… a 15.ª.

A Susana voltou a aplicar erradamente apenas a relação entre os quadrados brancos e o número da figura ("Porque… quinze… quinze vezes dois é trinta. Trinta mais seis é trinta e seis.") e continuou convicta desta forma de pensamento escrevendo na sua folha de trabalho: "A figura que tem 36 quadrados é a 15.ª figura, cheguei a essa conclusão utilizando a relação novamente.".


10. Qual o número da figura que tem 36 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão.

A figura que tem 36 quadrados é a 10ª figura, cheguei a conclusão utilizado, a relação novamente.

Figura 63- Explicação de resultados feita pelo Emanuel, para a 10.ª questão da tarefa 5

Por seu lado, desta vez, o Emanuel tentou encontrar a sua resposta e até verbalizou ser a 10.ª figura. Mas a Susana não considerou a sua resposta e avançou com o seu raciocínio, guiando o diálogo como verificado na extrato e dando a resposta que deveriam escrever: "É… a 15.ª.". O Emanuel nunca refuta o que ela vai dizendo e no momento da escrita ele acaba mesmo por escrever a sua resposta, indicando que a figura com 36 quadrados será a 10.ª figura.

Tarefa 6

Depois de entregue o material (14 quadrados e 10 triângulos) ao grupo e a folha de registo, os elementos da díade tentaram observar a sequência e responder à 1.ª questão sem recorrer à utilização do material.

> Emanuel- Posso tirar o material?
>
> Susana- Sim. Então…
>
> Emanuel- Quantos tijolos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) Queres fazer com material ou sem material?
>
> Susana- Não sei. Se calhar sem material porque com material… (…) Pode levar mais tempo. Tipo, acrescenta-se sempre o número da figura. Porque aqui (*referindo-se à 3.ª figura na linha de cima*) acrescenta-se três (*pausa*) aqui em cima, acrescenta três. De lado, agora acrescenta-se aqui mais dois. (*referindo-se aos dois quadrados de baixo, da coluna mais à direita, da 3.ª figura*)
>
> Emanuel- Já vi. Já vi. Já vi.
>
> Susana- Eu acho que se acrescenta sempre… Espera, deixa ver.
>
> Emanuel- Vou fazer um desenho.

Susana- Eu acho que vamos ter que fazer com isto, tá [sic] bem! (*referindo-se ao material*) Espera, eu vou só fazer isto. (*e começa a usar o material para descobrir a sua resposta*)

Susana tenta encontrar a relação entre o número de tijolos e o número da figura recorrendo a um pensamento recursivo, pela adição de elementos entre a 2.ª e a 3.ª figuras ("acrescenta-se sempre o número da figura. Porque aqui acrescenta-se três aqui em cima, acrescenta três. De lado, agora acrescenta-se aqui mais dois"). Susana parece reparar que o que se acrescenta, de figura a figura, na linha de cima dos quadrados com tijolos é o número de ordem da figura, olhando concretamente para a 3.ª figura no enunciado. Focando-se só na 3.ª figura, refere ainda que se acrescentam também 2 de lado. Esta verbalização poderia conduzir à expressão iterativa da sequência como uma soma de números ímpares, fundada num raciocínio recursivo. Tal não aconteceu pois os alunos não voltam a incidir neste tipo de observação das figuras, optando, depois, por recorrer à representação pictórica da 4.ª figura, no caso do Emanuel, e à utilização do material, no caso da Susana.

Emanuel- Estou a desenhar os tijolos…

(*pausa e depois o Emanuel começa a olhar para a 4.ª figura construída pela Susana*)

Susana- Devia ter aqui mais dois. Pronto, aqui tem mais dois… (*estes dois são os espaços em branco pois só foram disponibilizados para esta tarefa catorze quadrados, o que não lhes permite construir a 4.ª figura, ficando a faltar dois quadrados, que são os quadrados aos quais a Susana se refere*)

Emanuel- Eu acho que isto dá para fazer a figura. *(e coloca dois triângulos no lugar dos dois quadrados como se os estivesse a substituir para fazer a contagem*) Se calhar a professora tirou. Vamos imaginar que isto é um quadrado.

Susana- Pronto, isso é um quadrado, isso é um quadrado.

Emanuel- Dezasseis. (*depois de fazer a contagem unitária dos quadrados que desenhou*)

Susana- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. (*a Susana também conta de forma unitária os quadrados e os triângulos que utilizou para a construção dos tijolos da 4.ª figura*)

Para a realização da representação pictórica na folha de trabalho, o Emanuel não teve a necessidade de desenhar as figuras anteriores à 4.ª figura, provavelmente por as mesmas se encontrarem representadas no enunciado da tarefa. Por seu lado, também a Susana conseguiu representar a figura através do recurso ao material. O facto de não existir material suficiente para a construção da 4.ª figura não foi um entrave para a sua construção tendo até verbalizado: "Devia ter aqui mais dois.". Dada esta falta de material, o Emanuel até sugeriu colocarem triângulos no lugar a ser ocupado por estes dois quadrados para procederem à contagem.

Ambos os elementos fizeram a contagem unitária dos tijolos da 4.ª figura para dar a resposta à 1.ª questão. Como justificação das suas conclusões, os alunos decidiram explicar que recorreram tanto ao desenho como ao material porque cada um deles utilizou uma forma diferente. Ambos os alunos utilizaram a estratégia de representação e contagem nesta fase do trabalho.

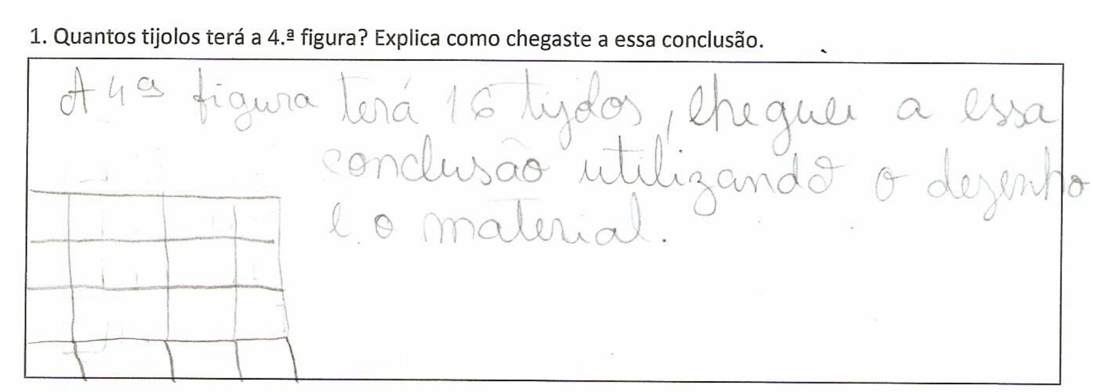


Figura 64- Representação pictórica da parte do termo dos tijolos da 4.ª figura feita pela Susana, para a 1.ª questão da tarefa 6

Para a resolução da 2.ª questão, a Susana sugeriu logo uma resposta apresentando alguma correspondência com a resolução da resposta anterior.

> Emanuel- Quantos tijolos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Susana- A 10.ª figura terá quarenta. Porque se cada um tem, tem o número de cada, tem o número da figura.
>
> Emanuel- Ok. (*e começam a desenhar a 10.ª figura*)
>
> (…)
>
> Susana- Como é que é? (*a Susana questiona o Emanuel mas ele não lhe responde*)

(…)

Emanuel- Já acabei a parte de baixo (*tendo colocado dez quadrados na linha de baixo*). Agora vou fazer de lado.

Susana- Pois, tu também pensaste bem. Vou fazer o desenho assim.

Emanuel- Dez. (*terminando os quadrados do lado esquerdo da 10.ª figura*) E depois estou quase. (*e depois começa a completar as seguintes colunas*)

Susana- Vou fazer em fila. (*a Susana segue o exemplo do Emanuel e está também a completar as colunas*)

Emanuel- Já acabei. Ah! Não. Ainda falta bué [sic]. Esqueci-me. (*pois só ainda tem três colunas terminadas*) Tinha-me esquecido que ainda tenho de fazer a parte de cima, que ainda tenho de fazer o resto. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. O quê? (*e verifica a contagem da 3.ª coluna que tem onze quadrados e neste momento apaga o quadrado que desenhou a mais*)

Susana- Vou fazer uma coisa mais simples. Já apaguei. (*apaga o desenho que estava a fazer com os quadrados separados e faz um quadrado grande, fazendo depois a sua divisão com 10 linhas e 10 colunas*) Já fiz.

Emanuel- Já sei uma maneira mais fácil. (*e apaga o seu desenho*)

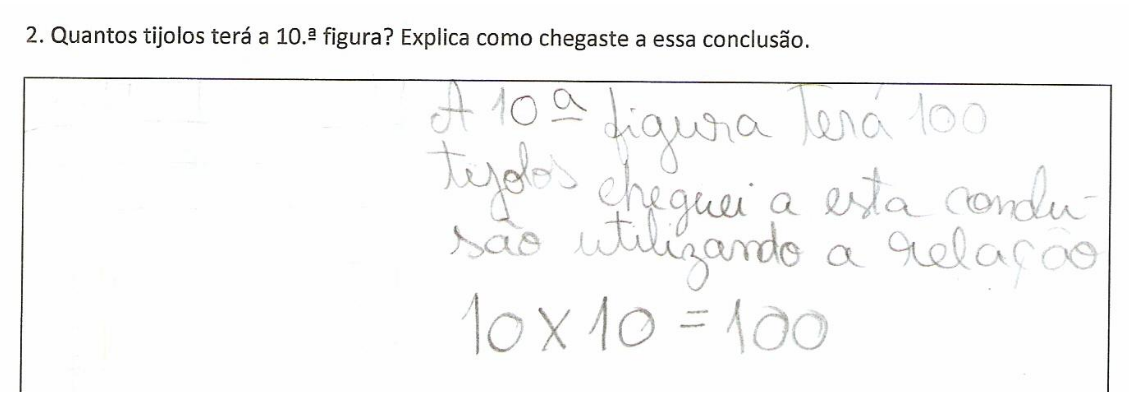
Susana- Já contei isto tudo. Já contei e acho que dá cem. Dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa, cem. É cem.

Neste extrato, ficou bem patente que o Emanuel, ao contrário da Susana, recorreu a um pensamento funcional por fazer a relação entre a decomposição do termo compreendendo a relação entre o número de tijolos e o número de ordem da figura, percebendo que a figura teria de ter 10 colunas e 10 linhas, embora não tivesse alcançado, de modo imediato, que tal disposição corresponderia ao produto 10x10.

Inicialmente, a Susana apresentou um raciocínio em que só relacionava uma das partes da figura com o número desta ("A 10.ª figura terá quarenta. Porque se cada um tem, tem o número de cada, tem o número da figura"). Essa compreensão adveio da resolução da questão anterior porque a Susana desenhou na figura anterior quatro quadrados na linha de baixo e agora fez essa correspondência com a linha de baixo da 10.ª figura, esquecendo-se de fazer essa correspondência com o número de quadrados da coluna. Assim, visualizou inicialmente o mesmo número de linhas da 4.ª figura, tendo calculado mentalmente 4x10. Só depois de visualizar a forma como o Emanuel estava a desenhar a sua figura é que ela percebeu o que deveria fazer, copiando-o. A Susana, nesta representação, foi mais hábil do que o Emanuel porque, enquanto o Emanuel estava a fazer todos os tijolos separadamente, a Susana decidiu depois fazê-los recorrendo a uma organização retangular, fazendo um quadrado grande e depois a sua divisão com 10 linhas e 10 colunas. Por ter feito esta organização, facilmente conseguiu fazer a sua contagem, embora ser ter aplicado um raciocínio multiplicativo, fazendo contagens sucessivas ("Dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa, cem.").

> Emanuel- Cem! (…) Dez, mais dez, mais dez, mais dez, mais dez, mais dez. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. (*contando as colunas que desenhou e as que lhe faltavam para completar a 10.ª figura*) É dez vezes dez. Sim, é cem. A décima… Já percebi. É o número vezes número. Quatro vezes quatro, dezasseis. (*apontando para o desenho da 4.º figura enquanto vai dizendo à Susana o que descobriu*)
>
> Susana- Dez vezes dez é igual a cem.

Após a Susana lhe ter verbalizado a sua contagem, ele próprio acabou por verificar essa contagem através de somas de parcelas sucessivas o que lhe conferiu uma outra visualização da figura, sendo capaz de fazer a correspondência das somas sucessivas para um raciocínio multiplicativo ("É dez vezes dez."). Por sua vez, a verbalização desta multiplicação fê-lo compreender a relação entre o número de tijolos e o número de ordem da figura verbalizando: "É o número vezes número.". Na sua ótica, a afirmação poderia ser aplicada a qualquer figura e por isso ele decidiu verificar essa aplicabilidade à 4.ª figura ("Quatro vezes quatro, dezasseis."). Esta visualização e a forma como verbalizou a relação encontrada indicaram um raciocínio funcional.


2. Quantos tijolos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

A 10ª figura Terá 100 tijolos cheguei a esta conclu- são utilizando a relação

10 X 10 = 100

Figura 65- Apresentação de resultados feita pela Susana, para a 2.ª questão da tarefa 6

Face à resolução da 2.ª questão e à descoberta da relação entre o número de tijolos e o número da figura, os alunos responderam à 3.ª questão com alguma rapidez.

> Susana- Então, a relação entre o número de tijolos com o número da figura…
>
> Emanuel- É que todos os lados da figura correspondem ao número da figura. (…) Todos os lados. Olha, aqui há dez, havia dez, aqui também, aqui também, aqui também (*apontando para todas as colunas e todas as linhas*). Todos os lados.
>
> Susana- Isto visto daqui (*referindo-se às linhas*) vai dar aqui dez, vinte, trinta, quarenta… Depois acho que vais dar aqui mais sessenta… Ya [sic], pois é! (…) É que o número da figura é sempre vezes dez. (*pausa*) Não. Não. O número da figura… É que o número da figura é sempre… multiplicado por… por… por o número da figura. Não. Não. Porque aqui tínhamos que fazer três vezes três, que era igual a doze (*referindo-se à 3.ª figura*).
>
> Emanuel- É… é… é multiplicado pelo número duas vezes!

Nesta conversação foi notório que os alunos compreenderam como se relacionava o número de tijolos com o número de ordem da figura ("É que o número da figura é sempre… multiplicado por… por… por o número da figura."). No entanto, não conseguiram escrever a relação da forma correta devido a dificuldades de utilização do vocabulário matemático de forma clara porque a forma como escreveram a relação indica o dobro do número da figura e não à multiplicação do número da figura pelo número da figura. Esta sua confusão deveu-se ao facto de na multiplicação patente na relação utilizar duas vezes o número da figura.

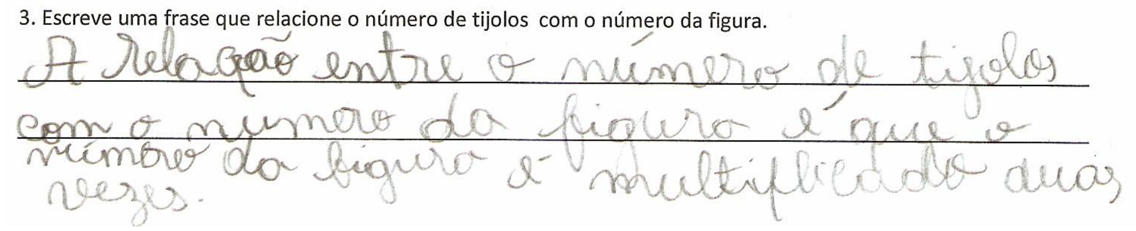

3. Escreve uma frase que relacione o número de tijolos com o número da figura.
A relação entre o número de tijolos com o número da figura é que o número da figura é multiplicado duas vezes.

Figura 66- Escrita da relação entre a parte do termo dos tijolos e o número de ordem do termo feita pelo Emanuel, para a 3.ª questão da tarefa 6

Após a escrita da relação, os alunos avançaram para a resolução da 4.ª questão que preconizava a utilização de um raciocínio inversivo.

> Emanuel- Qual o número da figura que tem 36 tijolos? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Susana- Trinta e seis? Então, o trinta e seis… Vamos ter que ir a uma tabuada onde tem o trinta e seis. O número da figura… multiplica… por trinta e seis. (*pausa*) Já sei! Seis vezes seis, trinta e seis.
>
> (…)
>
> Emanuel- É a 6.ª figura… Ia pôr o número da figura seis…
>
> Susana- É a 6.ª figura porque seis vezes seis é igual a trinta e seis.

A resolução desta questão foi rapidamente feita pela Susana por ser uma aluna muito hábil na utilização da tabuada e por isso rapidamente respondeu: "Seis vezes seis, trinta e seis.". Esta sua resposta poderá indiciar um raciocínio funcional porque poderia mobilizar outro cálculo multiplicativo que tivesse como produto o número trinta e seis, como por exemplo 4 x 9, mas não o faz e utiliza o produto dos fatores 6 x 6, que lhe permitiu responder à 4.ª questão, tendo escrito: "O número da figura que terá 36 tijolos é a 6.ª figura, cheguei a essa conclusão porque 6 x 6 = 36.".

De seguida, os alunos começaram a proceder à resolução da 5.ª questão. Para a resolução desta questão, os alunos decidiram-se pela utilização do material.

> Susana e Emanuel- Quantas telhas terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Susana- Oh! Meu Deus! (*pausa*) Ok. Olha, podemos vir aqui buscar à 4.ª figura (*apontando para o desenho que fizeram como representação dos tijolos da 4.ª figura na 1.ª questão*) e depois vamos fazer tudo. Vamos ter que desenhar a 4.ª

figura. Então, eu acho que nós devíamos desenhar a figura e depois desenhávamos as telhas.

Emanuel- Sim.

(…)

Susana- Não sei se… Espera… Vou fazer aqui de um lado… Faz como tu achas e eu faço como eu acho.

(*pausa*)

Emanuel- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. (*contando as telhas que desenhou, tendo desenhado 4 + 4+ 2 + 1*)

Susana- Não sei se é assim, porque… porque… eu, tipo, eu tive [sic] a encaixar… (*porque estava a encostar todos os triângulos*)

Emanuel- A 4.ª figura terá…

Susana- Eu acho que é 1, 2, 3, 4… (*e vira a folha para olhar para as figuras*) Este não é, este também não… (*vai pintando os triângulos que não deve contar*) Ya [sic], a mim deu-me dez. Só que eu aqui pus… pus três. (*referindo-se aos três triângulos que desenhou na 2.ª linha, onde o Emanuel desenhou quatro*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Agora… 1, 2, 3, 4, 8… (*e começa a contar os triângulos de desenhados pela Emanuel*) Aqui tem onze. (…) E tu aqui puseste quatro. (*a Susana chama a atenção de que na 2.ª linha o Emanuel tem quatro*) E aqui, se tu vires, é sempre, tipo, três, dois, um.

Numa parte inicial de operacionalização da representação da figura os alunos apresentaram algumas dificuldades: a Susana estava com dificuldades em fazer a contagem dos triângulos pois, como estava a fazer os triângulos encostados entre si, os espaços entre os triângulos eram também visualizados como triângulos, enquanto que o Emanuel estava com dificuldades na representação da figura tendo desenhado um triângulo a mais na 2.ª linha.

No entanto, os elementos do grupo compreenderam a relação entre o número de ordem da figura e as telhas que deveriam ter na figura, tendo conseguido fazer a decomposição da figura na parte das telhas. Este raciocínio foi mais óbvio na Susana que afirmou como deveria ser feita essa decomposição ("E aqui, se tu vires, é sempre, tipo, três, dois, um.”) e até conseguiu perceber onde o Emanuel estava a errar e corrigi-lo (“E tu aqui puseste quatro.”).

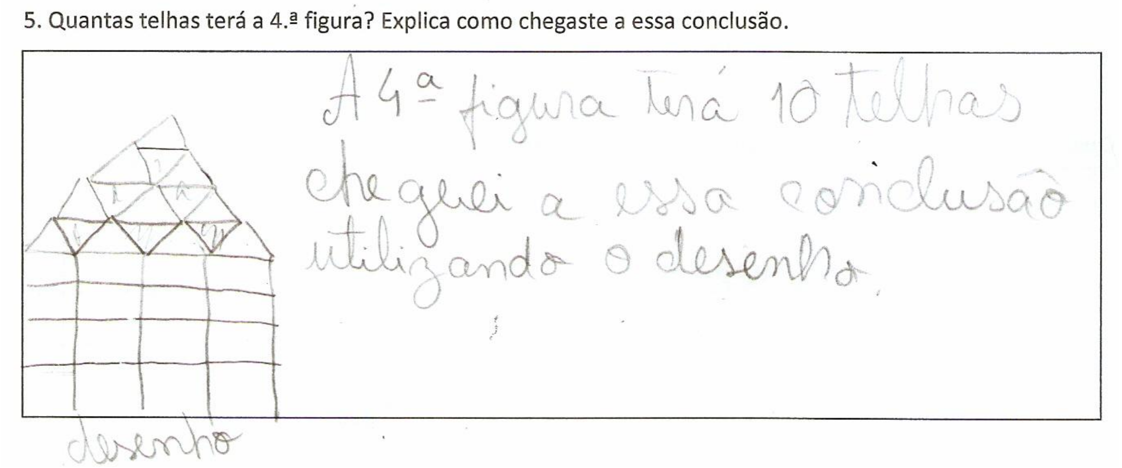


Figura 67- Representação pictórica da 4.ª figura feita pela Susana, para a 5.ª questão da tarefa 6

Para a resolução da 6.ª questão, que questionava a quantidade de telhas da 10.ª figura, os alunos voltaram a optar pela representação pictórica desta parte da figura.

> Susana- Quantas telhas terá a 10.ª figura? (*lendo o enunciado*) Acho que vamos ter que desenhar a 10.ª figura.
>
> Emanuel- Ok. Vou fazer.
>
> Susana- Tive uma ideia! Super uau [sic]. Fazemos só dez quadradinhos da última fila e depois começamos a fazer. Ok, vamos fazer.
>
> (…)
>
> Susana- Eu já não entendo isto. Tem de ser a direito. Ah! Estás só a fazer a parte de cima, né [sic]? (*porque o Emanuel desenha linhas para limitar o espaço onde deverá desenhas as telhas; e o Emanuel acena que sim com a cabeça*) Não vais fazer tudo.
>
> Emanuel- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. (*contando os triângulos da linha de baixo*)
>
> Susana- Então… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. (*contando os quadrados da linha de baixo*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
>
> (…)
>
> Emanuel- Agora vou contar. (…) 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39… (*contando unitariamente os triângulos da figura que construiu*)

Susana- 40.

Emanuel- 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55. 55. A 10.ª figura terá cinquenta e cinco, cinquenta e cinco…

Depois da representação da 10.ª figura, os alunos optaram pela contagem unitária das telhas na figura. Apenas na representação da figura ficou patente a decomposição da figura e só num momento pontual fizeram referência ao número da figura: “Fazemos só dez quadradinhos da última fila e depois começamos a fazer.”.

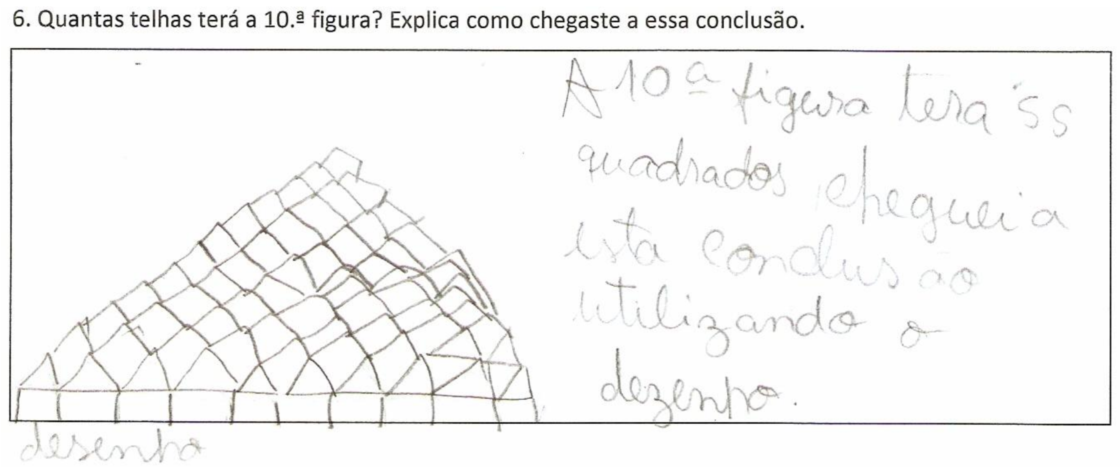


Figura 68- Representação pictórica da parte do termo das telhas da 10.ª figura feita pela Susana, para a 6.ª questão da tarefa 6

Na 7.ª questão os alunos teriam de determinar o número total de peças, considerando em conjunto os tijolos e as telhas. O Emanuel iniciou a resolução desta questão algum tempo antes da Susana porque, enquanto ela terminava a representação das telhas na questão anterior, o Emanuel começou logo a fazer a representação pictórica das telhas da 6.ª figura.

Emanuel- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21. Vinte e um. A 6.ª figura terá vinte e uma telhas.

Susana- Pronto, olha já fiz mas… (*pausa*) Não Emanuel, eu acho… Aqui não tá [sic] a dizer… Aqui tá [sic] a dizer peças, tudo. (…) Ya [sic], ao todo, tipo, peças… Se fosse só tijolos e telhas, mas agora, peças… Acho que é ao todo. (…) Olha aqui, quantas peças terá a 6.ª figura?

Quando a Susana iniciou a sua participação na resolução da 7.ª questão, ela percebeu que o Emanuel não tinha compreendido corretamente o que estava a ser solicitado nesta questão e interpelou o Emanuel para que ele entendesse que a sua resolução não estava completa uma vez que este só estava a desenhar as telhas.

Susana- Então, trinta e seis… Seis, seis, seis…

Emanuel- Trinta e seis… (*referindo o número de tijolos da 4.ª figura*) (…) Trinta e seis… mais vinte e um… Fiz isto primeiro. É igual…

Susana- Espera! Então vou ver se tá [sic] bem.

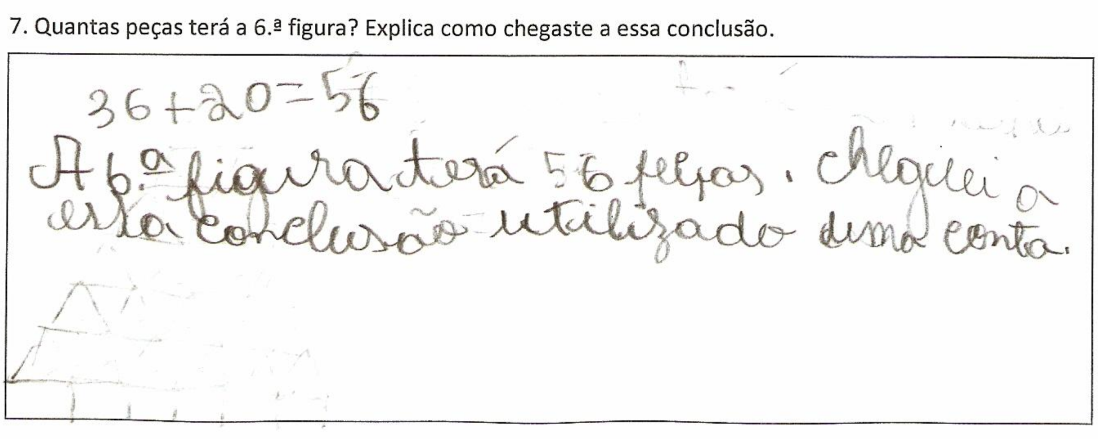
Emanuel- Fico com cinquenta e sete. Cálculo mental. (*pausa*) A 6.ª… figura…

Susana- Espera, não sei.

Emanuel- Terá… cinquenta e seis, cinquenta e sete…

Susana- Então, os meus deram-me vinte e os teus... Vinte, as telhas… As telhas deram-me vinte. (*pausa*) A mim deu-me ao todo cinquenta e seis. (*pausa enquanto o Emanuel continua a fazer contagens e agora conta vinte telhas*) Igual a cinquenta e seis.

O Emanuel inicialmente fez o cálculo adequado à situação (36 + 21 = 57) mas perante a insistência da Susana e por ter apagado o seu desenho, onde poderia confirmar a contagem das telhas, ele acabou por alterar na adição o número vinte e um pelo número vinte e o número cinquenta e sete pelo número cinquenta e seis.


7. Quantas peças terá a 6.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

36+20=56
A 6.ª figura terá 56 telhas. Cheguei a esta conclusão utilizado uma conta.

Figura 69- Apresentação de resultados feita pelo Emanuel, para a 7.ª questão da tarefa 6

Na 8.ª e última questão da tarefa, os alunos teriam de aplicar a relação entre o número de tijolos e o número de ordem da figura para uma figura distante.

Emanuel- Quantos tijolos terá a 100.ª figura? (*lendo o enunciado*) Cem vezes cem.

Susana- Então, temos que fazer cem vezes cem que é igual a… (*pausa*) Duzentos.

Emanuel- Duzentos!

Susana- Não, não, não.

Emanuel- Não é mais, é vezes.

Susana- Então… Se for cem vezes cem… É mil!

Emanuel- Igual a mil.

Nesta resolução, apesar de terem demonstrado a aplicabilidade da relação encontrada ao afirmarem que o cálculo a fazer seria de cem vezes cem, os alunos erraram o cálculo e deram uma resposta errada ao afirmarem que o resultado seria de mil em vez de dez mil, que seria a resposta correta. Nesta resolução, ficou patente a utilização de um raciocínio funcional por parte do Emanuel e da Susana.

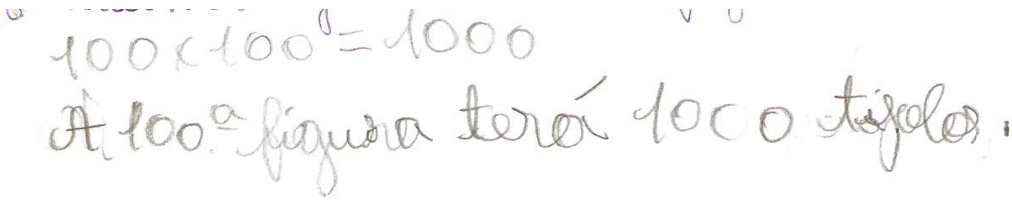


Figura 70- Apresentação de resultados feita pelo Emanuel, para a 8.ª questão da tarefa 6

Na revisão, os alunos limitaram-se a ler o que tinham estado a escrever acabando por não verificar a sua operacionalização e nem mesmo os cálculos e os seus resultados, não alterando nada do que tinham escrito antes.

4.3. Grupo da Patrícia e do Ricardo

Tarefa 1

Depois de entregue o material (6 quadrados brancos e 6 quadrados pretos) ao grupo e a folha de registo, os alunos retiraram de imediato o material do envelope e começaram a manuseá-lo. Ambos leram a 1.ª questão e começaram a construir as figuras em conjunto, ancorando-se sempre na construção anterior para acrescentarem alguns elementos, neste caso em particular, os quadrados pretos que estavam relacionados com a variável independente, e aí construírem a figura seguinte. No momento da discussão entre os elementos da díade, para a chegada a uma resposta para a 1.ª questão, foi notória a dificuldade da Patrícia na compreensão da questão colocada. A Patrícia pensava que estava a ser solicitado o número total de quadrados da 4.ª figura e por isso fez a contagem unitária de todos os quadrados da figura. Ao invés disso, o Ricardo compreendeu o que estava a ser pedido, mas a Patrícia conseguiu influenciá-lo de que a questão seria para todos os quadrados da 4.ª figura, como ilustrado no diálogo abaixo.

> Patrícia- Aqui vai ter 6 (*apontando para o espaço da 4.ª figura na folha de trabalho do Ricardo*).
>
> Ricardo- Eu acho que não (*e a Patrícia retira todos os quadrados pretos deixando apenas 1, que forma a 1.ª figura*). Só vai ter 4 (*e o Ricardo acrescenta, ao quadrado preto deixado pela Patrícia, os 3 quadrados pretos restantes que formam a 4.ª figura*). Então não percebeste.
>
> Patrícia- Então tu tens aqui 1, 2, 3 (*apontando para os 3 quadrados que constituem a 1.ª figura*).
>
> Ricardo- Quatro *(referindo-se ao total de quadrados da 2.ª figura*).
>
> Patrícia- Depois aqui fazemos 5 (*referindo-se ao total de quadrados da 3.ª figura*). E a outra vai ter 6 (*apontando para o espaço onde ficaria a 4.ª figura*).
>
> Ricardo- Sim. Ah, pois, vai ter 6.

Neste extrato foi notório que a Patrícia conduziu o seu raciocínio na evolução de figura a figura. No entanto, no momento de escrita da resposta, depois da Patrícia ter lido novamente a questão, o Ricardo percebeu realmente que se enganou e que o raciocínio da Patrícia estava incorreto, tentando depois levá-la a seguir o seu raciocínio e a fazer a resposta correta.

> Patrícia- Quantos quadrados pretos terá a 4.ª figura? A 4.ª figura terá 6 quadrados pretos. (*e começa a soletrar*) A 4.ª figura …
>
> Ricardo- Terá…
>
> Patrícia- Terá 6 …
>
> Ricardo- Não, 4. (*ele apaga o 6 e escreve 4*)
>
> (…)
>
> Patrícia- 6 quadrados…
>
> Ricardo- 4 quadrados pretos. Portanto são 4.
>
> Patrícia- É 4 quadrados. 6 quadrados pretos.

Ricardo- São quadrados pretos.

Patrícia- Explica como chegaste a essa conclusão.

Ricardo- Fazemos o desenho. E são 4. (*chamando a atenção da Patrícia porque apesar dele ter dito 4 quadrados pretos, a Patrícia escreveu 6 quadrados pretos*) Pergunta quantos quadrados pretos.

O Ricardo não conseguiu explicar a forma como estava a visualizar a figura ou como chegou à sua conclusão, mas conseguiu convencer rapidamente a Patrícia ser ter que lhe dar uma justificação. E de seguida fizeram a representação pictórica da 4.ª figura.

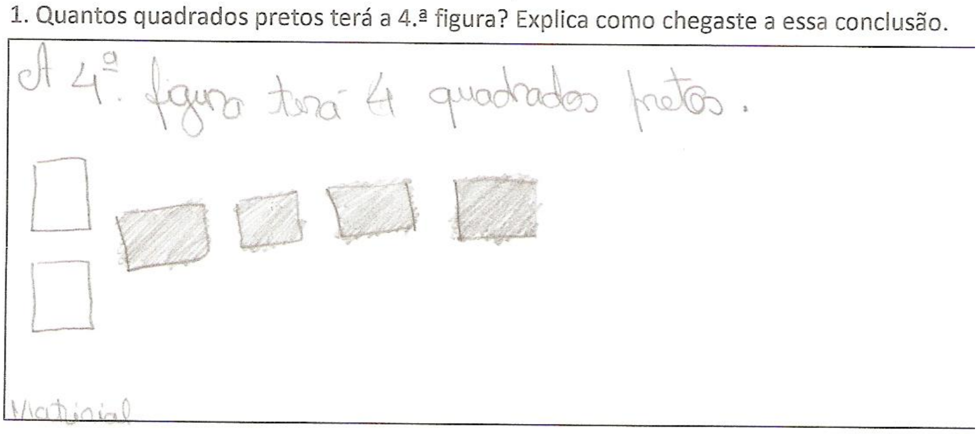


Figura 71- Representação pictórica da 4.ª figura feita pela Patrícia, para a 1.ª questão da tarefa 1

Avançaram depois para a resolução da 2.ª questão, mas a dificuldade na compreensão da questão entre o total dos quadrados e apenas os quadrados pretos persistiu. De tal forma, que começaram a tentar construir a 10.ª figura, e devido à falta de material suficiente (quantidade de quadrados pretos) recorreram aos quadrados brancos para terminar a figura. Contudo, esta utilização do material não agradou ao Ricardo que desfez a figura construída. Depois desta desistência por parte do Ricardo, que procurou dentro do envelope mais quadrados pretos, a Patrícia tomou o controlo da atividade e começou a construir uma figura que tivesse dez quadrados, construindo a 8.ª figura, assumindo tratar-se da 10.ª figura.

Patrícia- 2, 4, 6, 8 (*contando todos os 8 quadrados pretos*). 9, 10 (*desenhando e contando os dois quadrados brancos iniciais, construindo a 8.ª figura e não a 10.ª figura, enquanto o Ricardo procura no envelope do material mais quadrados*). Já temos 10. 2, 4, 6, 8, 10.

Ricardo- 10.

Patrícia- Quantos quadrados pretos terá a 10.ª figura?

(ambos começam a escrever e o Ricardo quando termina a resposta, começa a desenhar a figura)

Patrícia- São 8 quadrados pretos. Já fiz o 8.º. Já fizeste?

Ricardo- Estou quase (*o Ricardo continua a desenhar, desenhando dez quadrados pretos e depois pinta-os*). Décimo.

Depois da Patrícia construir a figura, começou a desenhá-la na sua folha de trabalho e respondeu que a 10.ª figura teria um total de oito quadrados pretos. A Patrícia parece ter deduzido da questão anterior que o número da figura correspondia ao total de quadrados, e ao retirar os dois elementos constantes (os 2 quadrados brancos), concluiu ter 8 quadrados pretos ("São 8 quadrados pretos."). Por sua vez, o Ricardo, sem confirmar a construção da Patrícia e a quantidade de quadrados que esta usou, desenhou corretamente a 10.ª figura. Depois de concluída esta questão, eu passei para ver os seus trabalhos e questionei sobre o facto da Patrícia ter uma resposta diferente da do Ricardo, ao que a Patrícia me respondeu que estava igual, sem confirmar. Pedi-lhes para discutirem sobre as diferentes resoluções mas a Patrícia optou apenas por copiar a resposta do Ricardo sem o questionar sobre o porquê da sua resposta e avançaram para a questão seguinte.

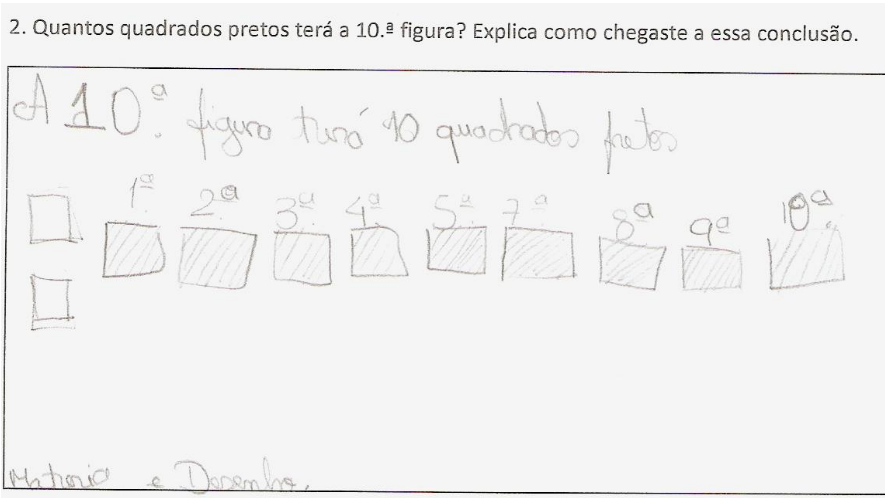


Figura 72- Representação pictórica da 10.ª figura feita pela Patrícia, para a 2.ª questão da tarefa 1

Tal como no trabalho das díades anteriores, na tarefa 1, esta 3.ª questão levantou muitas dúvidas por ser a primeira vez que teriam de escrever uma frase onde relacionariam o termo com o número de ordem do termo. A Patrícia, nesta resolução, esteve sempre muito distraída, a brincar com o material e a olhar para os colegas (informação retirada das notas de campo) e até sugeriu que a resolução passava por juntar os quadrados da 4.ª figura com os quadrados da 10.ª figura. Com a distração da colega, o Ricardo avançou e tentou encontrar uma relação matemática entre os números das figuras que observava no enunciado da tarefa e o número dos quadrados pretos.

Ricardo- Já encontrei uma relação.

Patrícia- O quê?

Ricardo- É que os quadrados pretos (*referindo-se aos 6 quadrados pretos das três primeiras figuras*) são, é metade destas figuras apresentadas (*referindo-se às três figuras apresentadas na sequência*).

(…)

Ricardo- O número de quadrados pretos. Ah! Não. Isto está ao contrário (*e apaga*). Não, o número da figura…

Patrícia- O número da figura? O número da figura.

Ricardo- É a metade…

Patrícia- É a metade…

Ricardo- Do número de quadrados pretos.

O grupo não compreendeu que seria para encontrar uma relação entre o número de quadrados pretos de uma figura e o seu número de ordem de forma a escrever uma generalização que se aplicasse a qualquer figura. Porém, o Ricardo tentou encontrar uma relação matemática observando as figuras que tinha na sequência apresentada. Este afirmou ter encontrado uma relação de metade porque conseguia contar seis quadrados pretos em três figuras, então mobilizou uma relação entre o 6 e o 3, que seria a metade. Contudo, na sua verbalização, ele começa por se enganar dizendo: "É que os quadrados pretos são, é metade destas figuras apresentadas.". No decorrer da escrita, ele apercebeu-se do erro e corrigiu afirmando: "… o número da figura (…) é a metade (…) do número de quadrados pretos.".

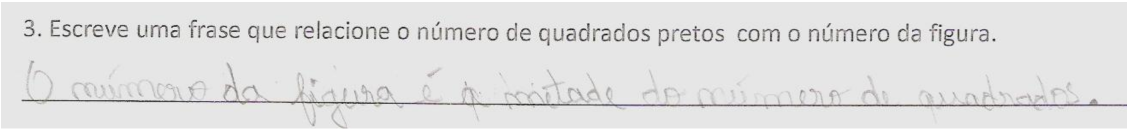


Figura 73- Escrita da relação entre a parte do termo dos quadrados pretos e o número de ordem do termo feita pelo Ricardo, para a 3.ª questão da tarefa 1

Na resolução da 4.ª questão, o grupo pensou inicialmente que eu me tinha enganado e que estava a propor questões iguais. Depois de me terem chamado, eu alertei para lerem novamente a questão e o Ricardo apercebeu-se que não se tratava dos quadrados pretos mas sim de todos os quadrados.

Esta resolução foi facilitada pelo facto de anteriormente a Patrícia já ter efetuado a contagem do número total de quadrados da 4.ª figura. Tal como na 1.ª questão, também aqui, os alunos fizeram a representação pictórica da 4.ª figura.

> Patrícia- Então tem (*e começa a apontar para as 3 primeiras figuras da sequência*) 3, 4, 5. A 4.ª tem que ter 6.
>
> Ricardo- É tudo como pensámos cá atrás.

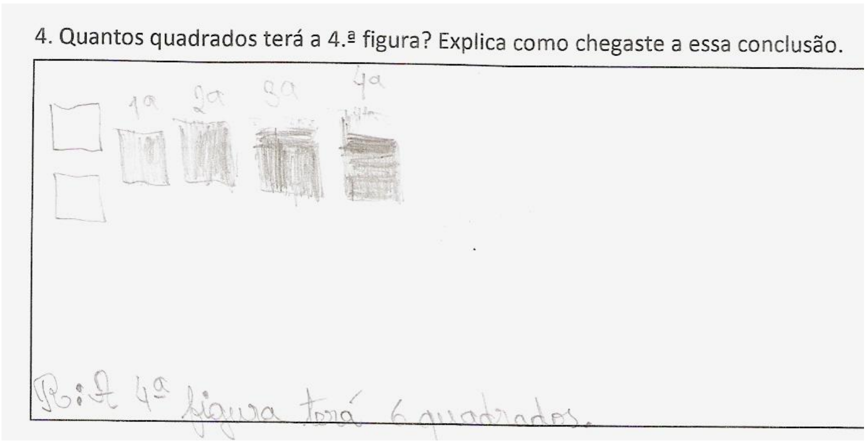


Figura 74- Representação pictórica da 4.ª figura feita pelo Ricardo, para a 4.ª questão da tarefa 1

Avançaram para a resolução da 5.ª questão e a Patrícia, como apenas tinha copiado a resposta do Ricardo na 2.ª questão, começou a construir uma figura colocando os dois quadrados brancos iniciais e a seguir 6 quadrados pretos e brancos, aleatoriamente, como se fossem quadrados pretos. O Ricardo terminou a figura acrescentando os dois últimos quadrados pretos, construindo a 8.ª figura como na resolução da 2.ª questão.

Patrícia- Então é 10 (*colocando quadrados brancos que corresponderiam aos 5.º e 6.º quadrados pretos*). Não, é 8. (*o Ricardo coloca 2 quadrados pretos nos lugares dos 7.º e 8.º quadrados pretos, formando a 8.ª figura*)

Ricardo- Não, não. Olha, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (*contando os quadrados que ocupam o lugar dos quadrados pretos*) 9, 10 (*contando agora os 2 quadrados brancos iniciais*).

A Patrícia ainda afirmou que a 10.ª figura teria 10 quadrados e depois corrigiu dizendo que teria 8, ambas as respostas incorretas. O Ricardo apoiou-se na construção desta figura, a 8.ª figura, e nega que sejam 8 quadrados fazendo a contagem unitária dos quadrados, num total de dez quadrados. Depois deste diálogo, a Patrícia voltou a folha de trabalho do Ricardo e diz-lhe que alguma coisa devia estar errada.

Ricardo- Então, esta deve estar mal (*referindo-se à 4.ª figura que fez corretamente no exercício anterior*).

Patrícia- Quantos quadrados terá a 10.ª figura? A 10.ª figura…

Ricardo- Terá 10 quadrados.

Patrícia- A 10.ª figura…

(*o Ricardo olha para a figura feita com o material*)

Ricardo- Hum, hum, está mal. Não pensámos bem.

Patrícia- São 10 quadrados…

Ricardo- Sim. É nesta que não pensámos bem (*e começa a mexer na figura feita com o material, correspondendo à 8.ª figura*). Aqui estão 8. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (*e acrescenta mais dois quadrados para ocupar os lugares dos 9.º e 10.º quadrados pretos*), 9, 10. Olha agora estão 10.

Patrícia- Agora estão, era isso que eu estava a dizer.

Ricardo- Então são (*e começa a contar todos os quadrados desde o início da figura*): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Após uma observação mais cuidada, o Ricardo percebeu onde estava a errar e corrigiu a figura, representando a 10.ª figura e não a 8.ª figura, como estava a fazer. O Ricardo, nesta correção da figura, evidenciou mais claramente um raciocínio funcional ao colocar os dez quadrados pretos da 10.ª figura e depois fazendo a contagem correta. Também aqui optaram por fazer a representação pictórica da 10.ª figura.

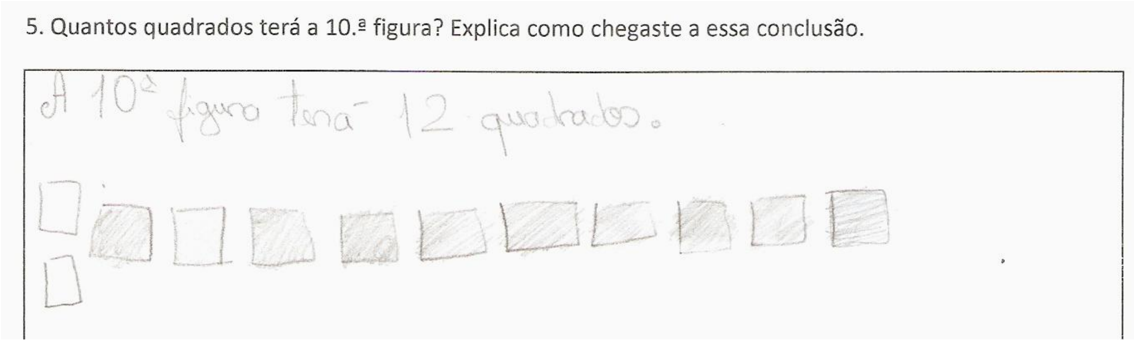


Figura 75- Representação pictórica da 10.ª figura feita pela Patrícia, para a 5.ª questão da tarefa 1

Mais uma vez, a questão que requeria a escrita da relação entre o número de quadrados da figura e o número de ordem da figura levantou muitas dúvidas. Tal como aconteceu na 3.ª questão, também aqui o Ricardo tentou encontrar uma relação matemática entre os números como podemos verificar no diálogo abaixo, olhando para a sequência das primeiras três figuras apresentadas no enunciado.

Ricardo- Ok. São 3 figuras.

Patrícia- Sim.

Ricardo- E ao todo são 12 *(referindo-se ao número total dos quadrados das três figuras iniciais da sequência*).

Patrícia- São 4 (*referindo-se a uma relação de quádruplo entre o 3 e o 12*).

Ricardo- Então o 12 é o quádruplo…

Patrícia- Não, 3 vezes 4.

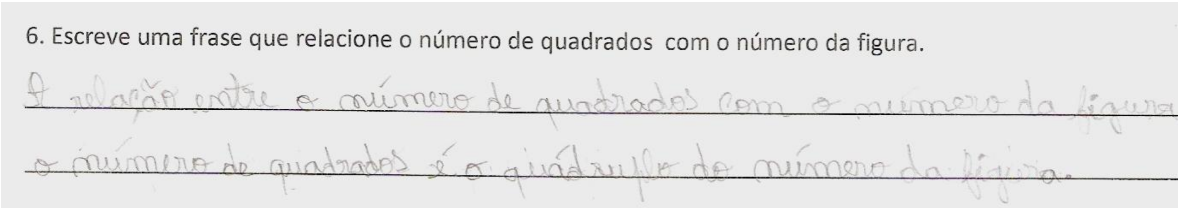
Ricardo- Então esse 4 é o quádruplo, é o quádruplo.

Patrícia- Sim, então uma frase…

Ricardo- Quádruplo.

(…)

Ricardo- O número de quadrados é o quádruplo do número da figura.


6. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados com o número da figura.

A relação entre o número de quadrados com o número da figura o número de quadrados é o quádruplo do número da figura.

Figura 76- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pelo Ricardo, para a 6.ª questão da tarefa 1

Mais uma vez, os alunos da díade encontraram uma relação matemática, que lhes era familiar, entre dois números sem que representasse a relação pedida entre o número de quadrados e o número de ordem das figuras.

Tarefa 2

Na tarefa dois, os elementos da díade, logo depois de lerem a 1.ª questão, não observaram a sequência de figuras durante muito tempo e passaram logo para a manipulação do material disponibilizado para a tarefa (15 quadrados). À medida que foram observando as figuras da sequência, o Ricardo foi construindo as primeiras figuras do padrão.

> Ricardo- Já percebi. O da esquerda é sempre o número da figura.
>
> Patrícia- Eu acho que é sempre de três em três. (*o Ricardo acena que não com a cabeça*) Sim, porque, olha, aqui tem três (*referindo-se ao número de quadrados da 1.ª figura*), aqui tem seis (*referindo-se erradamente ao número de quadrados da 2.ª figura*).
>
> Ricardo- De dois em dois…
>
> Patrícia- Não. 1, 2, 3, 4, 5. Aqui tem cinco. (*comentário feito pela Patrícia depois de ter dado conta que contou erradamente o número de quadrados da 2.ª figura*) É sempre mais dois.
>
> Ricardo- Vamos ver como é que é a quatro. A 4.ª… Fazemos assim… Pera [sic] aí. (*e coloca três quadrados do lado esquerdo da figura*) Quer dizer, mais um. (*e fica com quatro quadrados do lado esquerdo da figura*) E cinco aqui. (*referindo-se ao número de quadrados que tem de colocar do lado direito da figura*)

Depois de construídas as três primeiras figuras, o Ricardo demonstrou ter encontrado uma relação funcional entre o termo e o seu número de ordem referindo: "Já percebi, o da esquerda é sempre o número da figura.”. Ao fazer este comentário, o Ricardo revelou estar a mobilizar um raciocínio funcional. Contudo, reagindo à observação da regularidade iterativa de 3 em 3 formulada pela Patrícia quando esta refere “Eu acho que é sempre de três em três.”, o Ricardo retifica a regularidade presente, revelando um raciocínio recursivo (“De dois em dois…”). Por seu lado, a Patrícia, mesmo com a manipulação do material, não percebeu de imediato a transformação que ia ocorrendo de figura a figura e só com uma demonstração do Ricardo é que ela conseguiu compreender o padrão, apresentando um raciocínio recursivo porque narra a evolução de figura a figura: “É sempre mais dois.”.

Apesar do Ricardo ter revelado já alguma compreensão da relação funcional entre o termo e o seu número de ordem aquando da explicação de como seria a 4.ª figura fazendo a decomposição do termo, na explicação de como chegaram à sua resposta, para além da representação pictórica da 4.ª figura, os alunos escreveram que tinham começado na 3.ª figura e que depois tinham juntado dois quadrados, o que mostrou um raciocínio recursivo.

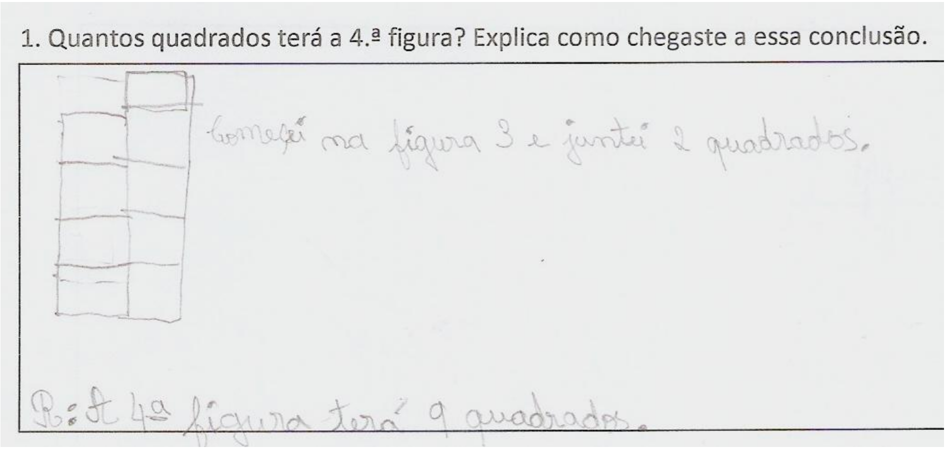


Figura 77- Representação pictórica da 4.ª figura e explicação feita pelo Ricardo, para a 1.ª questão da tarefa 2

Na 2.ª questão, quando os alunos tentavam construir, com o material, as figuras a partir da 4.ª figura até chegarem à 10.ª figura, depararam-se com a falta, propositada, de material. Esta falta de material levou a que os alunos tivessem a necessidade de encontrar uma estratégia diferente para chegarem a uma resposta pois o material apenas lhes permitia chegarem até à 7.ª figura.

Ricardo- E agora a 7.ª… (*juntando mais dois quadrados à 6.ª figura, um em cada uma das colunas*) Vamos ao desenho. (*o Ricardo sugere esta resolução pois ficaram sem material*)

Patrícia- Então, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. (*contando os quadrados da coluna da direita*)

Ricardo- Não! Essa é a 7.ª, não dá!

Patrícia- Sim, esta é a 7.ª. A 7.ª tem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e aquele 15. (*sendo o 15.º quadrado o que está por cima na coluna da direita*) Agora, esta é a 7.ª. A 8.ª vai ter mais dois. 16, 17. (*contando mais dois quadrados para formar a 8.ª figura*) 19, 20. (*contando mais dois quadrados para formar a 9.ª figura*) 21, 22. (*contando mais dois quadrados para formar a 10.ª figura*)

Ricardo- Vinte e dois!

Patrícia- Sim!

Neste extrato, foi visível que Ricardo sugeriu a estratégia do desenho por ter ficado sem material, mas a Patrícia antecipou-se e começou a fazer uma contagem de dois em dois, imaginando os quadrados até chegar à 10.ª figura, apresentando um raciocínio recursivo. Porém, com esta forma de contagem, imaginando os quadrados, a Patrícia não fez a contagem do 18.º quadrado e terminou dizendo que a 10.ª figura tinha, erradamente, vinte e dois quadrados.

Nesse momento, eu intervim e iniciei um diálogo com os alunos quando estes estavam a iniciar a representação pictórica da 10.ª figura.

Professora- Ah! Então e… por observarem a sequência, não conseguiram perceber nenhuma relação que vos conseguisse chegar à 10.ª figura?

Ricardo- Sim.

Professora- Perceberam? (*o Ricardo acena que sim com a cabeça*) E qual foi essa relação? É que às vezes pode ajudar, sem terem que fazer os desenhos todos.

Ricardo- É que o da direita… é que… corresponde ao número da figura e… e o da… Ah! Não! Quer dizer… O da esquerda corresponde ao número da figura e… e… o da direita é sempre mais um.

Professora- Mais um do que o quê?

Ricardo- Do que… do que… do que o da esquerda, mais quadrados da esquerda. (…) Os quadrados da esquerda corresponde ao número da figura e os da direita é sempre mais um.

(…)

Professora- E agora a minha pergunta é: precisam de fazer todas as figuras até chegar à 10.ª?

Ricardo- Não.

Professora- Porquê?

Ricardo- Porque…

Professora- Porquê Patrícia? Não viste a mesma relação que o Ricardo?

Patrícia- Vi.

Professora- Então, qual é a relação que tu viste?

(*a Patrícia não responde e a professora afasta-se*)

Patrícia- Eu acho que esses são todos ímpares.

Ricardo- Não. Ouviste o que eu expliquei, não ouviste?

Patrícia- Sim.

Ricardo- Que o número da figura corresponde aos quadrados do lado esquerdo.

Patrícia- Mas aqui… temos neste… Pera [sic]. Na 1.ª temos três. Na 2.ª já temos cinco. Na 3.ª temos sete. (*pausa*) São todos ímpares. O três é ímpar, o cinco é ímpar, o sete é ímpar, o nove é ímpar.

Ricardo- Acho que tens razão. O número da fig… o número… Pera [sic] aí! O número de quadrados do lado esquerdo corresponde ao número da figura e o número do lado direito é sempre mais um. (…) Então, os da 10.ª figura… que… (*pausa*) De um lado são dez e do outro lado também são dez e depois é mais um.

Patrícia- Sim. (*e continua a mexer no material sem prestar muita atenção ao que o Ricardo lhe diz*)

Ricardo- A 10.ª figura terá… vinte e um quadrados. (*pausa*) Sim, vinte e um quadrados.

Patrícia- Ah! Agora já percebi. Dos lados é sempre de dois em dois, porque aqui passa, é sempre mais dois, mais dois…

No decorrer deste diálogo, as minhas questões permitiram que o Ricardo conseguisse explicar, de uma forma mais explícita e correta, a forma como visualizava o padrão e a relação funcional entre o termo e o seu número de ordem ("Os quadrados da esquerda corresponde ao número da figura e os da direita é sempre mais um."). Por seu lado, o facto de insistir com os dois elementos da díade na descoberta da relação, fez também com que a Patrícia observasse o padrão e chegasse a uma conclusão diferente da do Ricardo, dizendo que o total de quadrados de todas as figuras eram sempre números ímpares ("Eu acho que esses são todos ímpares.").

Nesta questão, a Patrícia, ao dizer que era sempre mais dois porque ia acrescentando um quadrado de cada lado, num total de dois quadrados, ("Dos lados é sempre de dois em dois, porque aqui passa, é sempre mais dois, mais dois…") apresentou um raciocínio recursivo. Por sua vez, o Ricardo ao decompor a figura e por visualizar a relação entre o número de ordem e o termo, apresentou um raciocínio funcional.

Os alunos, depois do diálogo, abandonaram a ideia de fazer a representação pictórica da 10.ª figura e narram a forma como pensaram, tendo o Ricardo escrito: "A 10.ª figura terá 21 quadrados. Porque o número de quadrados do lado esquerdo corresponde ao n.º da figura e o n.º de quadrados do lado direito corresponde ao n.º da figura mas tem 1 quadrado a mais.".

Para a 3.ª questão, aquando da escrita da relação entre o número de quadrados da figura e o número da figura, os alunos mobilizaram logo a relação encontrada na resposta anterior e pensavam que bastaria copiar a mesma resposta que tinham feito na 2.ª questão.

> Patrícia- Três. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados com o número da figura (*lendo o enunciado*).
>
> Ricardo- Escrevemos a mesma coisa.
>
> Patrícia- Sim.
>
> Ricardo- Mas acho que dá para escrever de uma forma mais pequena.

Mais uma vez, eu intervim e coloquei algumas questões para que os alunos se focassem no que estava a ser solicitado.

> Professora- Mas é a mesma pergunta que a número dois?
>
> Ricardo- Não. É diferente.

Professora- Porque é que é diferente?

Ricardo- Porque na dois pergunta o número de quadrados da 10.ª figura e explica como chegaste a essa conclusão.

Professora- Sim. E agora da três?

Ricardo- É, é a mesma coisa que a explicação. É essa a conclusão.

(…)

Professora- Então e agora aí nessa explicação temos que pôr o número da figura? Falar na 1.ª figura, na 2.ª, na 3.ª, na 4.ª? Ou podemos aplicar a frase a todas as figuras?

Ricardo- A todas as figuras.

Depois deste esclarecimento, tentaram escrever a relação baseando-se na decomposição do termo, ou seja, explicando a relação com base no termo dividido em duas partes, o lado esquerdo e o lado direito, tendo a Patrícia escrito: "O número de quadrados do lado esquerdo corresponde ao número da figura e o número de quadrados do lado direito corresponde ao número da figura mas tem 1 a mais.".

Perante esta situação em que os alunos estavam a referir a relação fazendo a decomposição do termo, tentei que os alunos encontrassem a relação pedida entre o número de ordem da figura e o total dos quadrados da figura.

Professora- (…) Vocês separaram a figura em duas partes. E agora a minha pergunta é se existe… Se vocês conseguem ver a relação que existe entre o número da figura e o todo dos quadrados. Vocês estão a fazer como se fosse uma soma, certo? (*o Ricardo acena que sim com a cabeça*) A juntar os quadrados de um lado com os quadrados do outro e fazem uma soma. E agora, será que existe outra relação entre o número da figura e o número dos quadrados todos? (*pausa*) Pensem nisso.

(*e a professora afasta-se*)

(…)

Ricardo- Não consigo. (*sorrisos*) Mas estou perto! Já estou perto! Já estou perto de descobrir. Ok. Repara… repara bem na 3.ª figura.

Patrícia- A 3.ª tem sete.

Ricardo- Sim. De um lado tem três e do outro lado tem outros três, mas tem mais um! Três mais três?

Patrícia- Seis. Mais um, sete.

Ricardo- Mais um, sete.

Patrícia- E ao todo destas… destas três figuras têm quinze quadrados.

Ricardo- Desta figura?

Patrícia- Não, ao todo de todas as figuras. (*referindo-se que seriam os quadrados todos das três primeiras figuras da sequência*)

Ricardo- Ah! Das terceiras. (*referindo-se ao total de quadrados das 3 figuras iniciais da sequência*) Ah! Então, cinco mais três é oito, mais sete… (*pausa*) Não dá quinze! Portanto esquece.

Patrícia- Quinze, Ricardo!

Ricardo- Eu prefiro fazer a minha solução. (…) Mas depois vamos tentar descobrir qual é a outra maneira.

Neste diálogo, reforcei que eles estavam a visualizar e a descrever a figura como tendo duas partes e que estavam a estabelecer a relação com o número da figura baseando-se nessas duas partes. Esta minha questão e o reforço nas duas partes da figura foi uma tentativa de que percebessem que havia uma relação de dobro, ao referir a soma ("A juntar os quadrados de um lado com os quadrados do outro e fazem uma soma."). Então pedi que tentassem encontrar a relação baseando-se no total de quadrados. Ao solicitar que tentassem encontrar essa relação, houve uma má interpretação do que eu estava a pedir e a Patrícia entendeu que eu me estava a referir aos quinze quadrados dados para a realização da tarefa, quando, na realidade, eu estava a referir-me ao total de quadrados de cada figura. Este constrangimento na compreensão levou a que voltassem a esta resposta no final da realização de todas as tarefas.

Ricardo- Consegues descobrir outra maneira? Eu estou sempre a pensar. (*pausa*) Ok, já sabes, já sabemos que o número da figura tem alguma coisa a ver com os quadrados do lado esquerdo e é mais um do lado direito. Não sabemos?

Patrícia- Sim.

Ricardo- E então… Será que há outra? (*pausa*) Não faço ideia.

Patrícia- Vamos em frente.

Ricardo- Não consigo descobrir.

Todavia, no momento da revisão, por não conseguirem encontrar outra relação, optaram por manter a mesma resposta evidenciando a decomposição do termo ("O número de quadrados do lado esquerdo corresponde ao número da figura e o número de quadrados do lado direito corresponde ao número da figura mas tem 1 a mais.").
Seguidamente, os alunos partiram para a resolução da 4.ª questão.

Ricardo- Quantos quadrados terá a 15.ª figura? (*pausa*) Queres fazer desenho?

Patrícia- Ok. Pode é ser muito grande.

Ricardo- Eu sei. Vamos ter que desenhar trinta quadrados…

Patrícia- Eles são trinta.

Ricardo- Sim, (*acenando que não com a cabeça*) mas não são trinta, vão ser…

Patrícia- Trinta e um, não trinta e dois. (…) Quantos quadrados terá a 15.ª figura? A 15.ª figura terá…

Ricardo- Nós conseguimos fazer um esquema.

Patrícia- Uma tabela.

Ricardo- Uma tabela! Acho que isso é mais… (*pausa*) Sim, isso conseguimos. Vamos fazer uma tabela.

(…)

Patrícia- Podemos pôr número da figura, podemos pôr número da figura…

Ricardo- Da figura…

Patrícia- E a seguir, e a seguir pomos o quê, Ricardo? Dos quadrados… (…) Eu acho que também devemos pôr os quadrados.

Ricardo- Sim, vamos pôr. Quadrados do lado… quadrados da figura… quadrados… Patrícia, metemos quadrados E (*referindo-se aos quadrados da coluna da esquerda*) e depois quadrados D (*referindo-se aos quadrados da coluna da direita*).

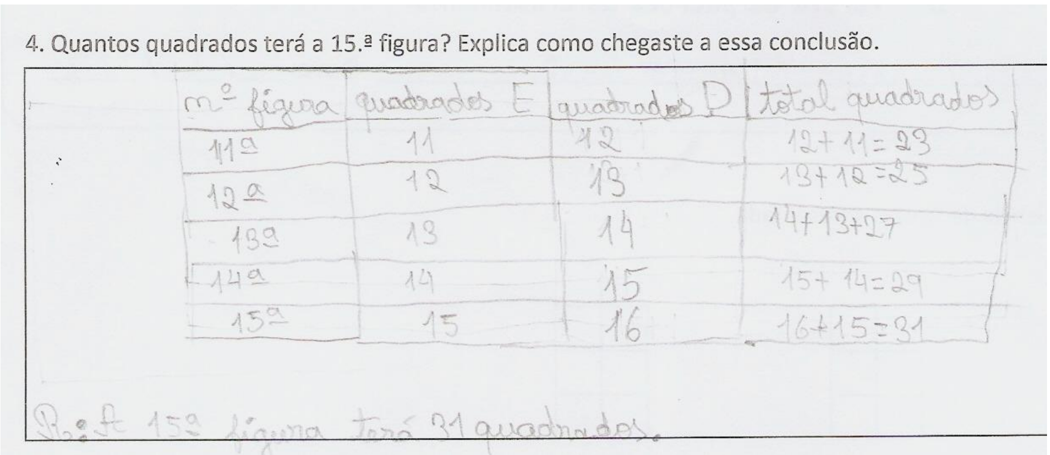
Logo depois de lida a questão, os alunos apresentaram a necessidade de desenharem muitos quadrados ("Vamos ter que desenhar trinta quadrados."). Então, decidiram construir uma tabela pois nessa tabela conseguiriam concentrar toda a informação que precisavam mobilizar, fazendo a decomposição do termo tal como referido pelo Ricardo ("… metemos quadrados E e depois quadrados D.").

Neste extrato retirado do diálogo entre os alunos, no momento inicial da resolução desta questão, pode-se verificar algum raciocínio funcional por parte do Ricardo porque referiu logo no início que a 15.ª figura teria trinta quadrados.

No início do preenchimento da tabela, na coluna dos quadrados do lado direito, o grupo escreveu que teria o mesmo número de quadrados da figura e ainda mais um.

> Patrícia- A 11.ª figura…
>
> (…)
>
> Ricardo- Número de quadrados do lado esquerdo, onze. E agora, número de quadrados do lado direito, onze mais um…
>
> Patrícia- Onze mais um…
>
> (…)
>
> Ricardo- 12, 12.ª figura… Agora os quadrados do lado esquerdo…
>
> (…)
>
> Patrícia- Doze… mais…
>
> Ricardo- Agora direito, doze mais um.

Mas no momento da revisão decidiram alterar e colocar logo o número total de quadrados do lado direito em detrimento da soma, que tinham escolhido inicialmente. A forma com que tinham optado inicialmente levaria a que visualizassem mais claramente o dobro.



4. Quantos quadrados terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

nº figura	quadrados E	quadrados D	total quadrados
11ª	11	12	12+11=23
12ª	12	13	13+12=25
13ª	13	14	14+13+27
14ª	14	15	15+14=29
15ª	15	16	16+15=31

R: A 15ª figura terá 31 quadrados.

Figura 78- Tabela feita pelo Ricardo, para a 4.ª questão da tarefa 2

Na 5.ª questão, o grupo tentou encontrar outra estratégia de resolução porque este grupo achava que teria sempre de apresentar uma resolução diferente para cada uma das questões (informação retirada das notas de campo). Inicialmente a Patrícia sugeriu uma tabela, depois o Ricardo sugeriu fazerem "contas" e por fim concordaram em fazer a resolução através de uma reta numérica.

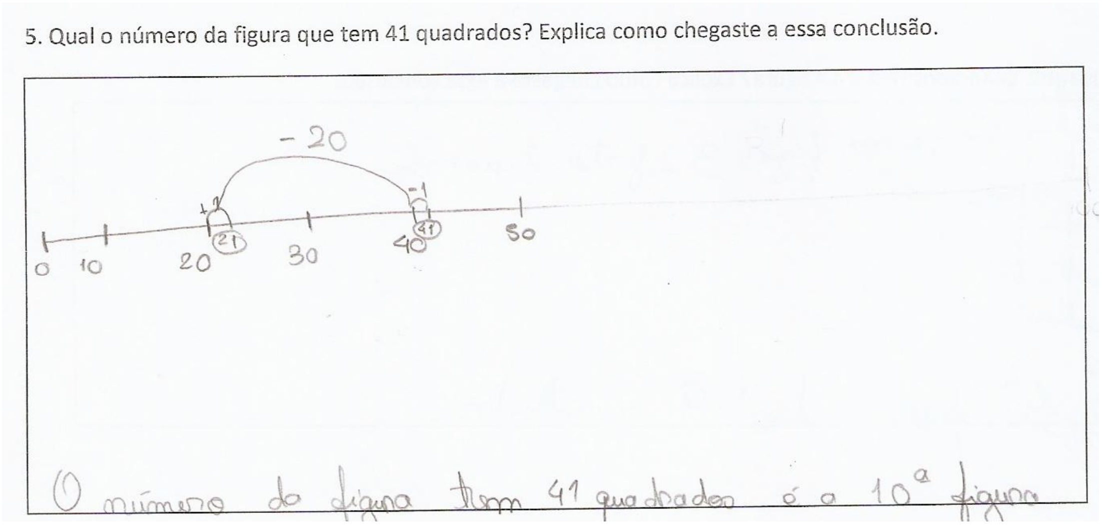


Figura 79- Reta numérica com apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 5.ª questão da tarefa 2

No decorrer da utilização da reta foi visível algum raciocínio inversivo por parte do Ricardo.

> Ricardo- Quarenta e um menos um.
>
> Patrícia- Fica quarenta.
>
> Ricardo- Menos um. Agora, vamos fazer… (*pausa*) Agora já sabemos que é quarenta de um lado e quarenta do outro. Aí, não! São duas barras, não são? Já tirámos menos um, agora esquecemos que tem quarenta e um.
>
> Patrícia- Agora tem quarenta.
>
> Ricardo- Agora temos que fazer a dividir por dois, que dá…
>
> Patrícia e Ricardo- Vinte. (*pausa*) Menos vinte, certo?
>
> Ricardo- Sim. Mas agora, mas agora vamos t…, agora vamos ter que fazer e mais um.
>
> Patrícia- Mais um para a frente?
>
> Ricardo- Sim.
>
> Patrícia- Que vai dar vinte e um.

O Ricardo fez o raciocínio inversivo mas não o compreendeu na sua totalidade pois achou que o que tinha feito no início do seu raciocínio (subtração) tinha de fazer o oposto no final (adição) para compensar o que fez no início. O facto de terem terminado a resolução com um total de vinte e um quadrados, fê-los retroceder à 2.ª questão onde a 10.ª figura tinha um total de 21 quadrados e confundiram o total de quadrados da 10.ª figura com os quadrados de cada uma das colunas, porque tinham acabado de fazer a divisão por dois.

> Ricardo- Ah! Não! Qual o núm… Sim, mas só que ainda não descobrimos o número da figura. (*pausa*) Pera [sic] aí, quantos quadrados tem… quantos quadrados tem a 10.ª figura?
>
> Patrícia- Vinte e um. Então, acho que é mais dez.
>
> Ricardo- Então é a 10.ª figura.

Se no final tivessem verificado o total de quadrados, tendo em conta o número de quadrados de cada uma das colunas, tal como disseram no momento da divisão, ou se tivessem aplicado a relação que haviam encontrado anteriormente, teriam percebido que a resposta correta seria a 20.ª figura e não a 10.ª figura.

Por fim, passaram para a 6.ª questão. A resposta a esta questão foi extremamente rápida pois na resolução da 2.ª questão, a Patrícia já tinha referido que o número total de quadrados das figuras era sempre ímpar.

Desta forma, em resposta à 6.ª questão, o grupo narrou: "Não, neste padrão nenhuma figura poderá ter 50 quadrados. Porque em cada figura, o número de quadrados é sempre ímpar.".

Tarefa 3

O grupo da Patrícia e do Ricardo resolveu a 1.ª questão com recurso ao material.

> Ricardo- Quantos sorrisos, quantos sorrisos terá a 4.ª figura? (*lendo o enunciado*)
>
> (*a Patrícia faz uma contagem de iterativa na sequência apresentada e responde*)
>
> Patrícia- 13.
>
> Ricardo- 13?
>
> Patrícia- Sim. Porque repara bem na 1.ª figura. Na 1.ª figura tu tens 4, na 2.ª figura nós temos 7, então é só acrescentar mais 3.

Ricardo- Mais 3? (*acenando com o dedo que não*) Mais 2. É mais 2. (…) Não. Tipo, 3 mais 2. 3 mais 2 sorrisos. Mas o que interessa é o de baixo. Primeiro estamos a ir pelo de baixo, estás a perceber?

Patrícia- Sim.

Ricardo- Então 3 sorrisos mais 2 são 5. E 5 mais 2 é 7. E agora 7 mais 2 é 9. Temos de fazer o 9.

(*e começam a construir a parte inferior da figura*)

Ricardo- Como é a 4.ª figura, temos que meter aqui os sorrisos, temos que meter aqui 4 sorrisos. (*e começa a colocar os 4 sorrisos da vertical, por cima do sorriso colocado ao meio da linha horizontal*)

Ambos revelaram um raciocínio recursivo, ancorando-se na evolução de figura a figura. A Patrícia visualizou a figura no seu todo e no total de círculos referindo: "…então é só acrescentar mais 3.". Por sua vez, o Ricardo visualizou a figura como tendo uma parte horizontal e uma parte vertical, indicando já alguma decomposição do termo, mas apesar dessa decomposição, este também se baseou na evolução de figura a figura e no raciocínio recursivo ao afirmar: "É mais 2.". Apesar desta evidência de raciocínio recursivo para a parte horizontal, a forma como o Ricardo construiu a 4.ª figura colocando os quatro círculos por cima do elemento constante indicou alguma evidência de raciocínio funcional.

No final, recorreram à representação pictórica da 4.ª figura e explicaram o número de círculos com a construção da figura.

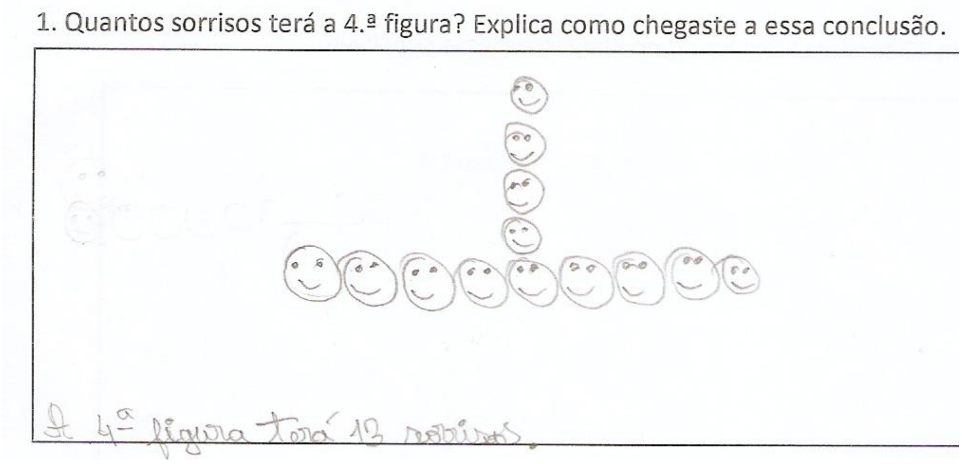


Figura 80- Representação pictórica da 4.ª figura feita pelo Ricardo, para a 1.ª questão da tarefa 3

Na 2.ª questão tentaram a utilização dos círculos mas também rapidamente perceberam que não teriam círculos suficientes e sugeriram "inventar".

> Ricardo- Sim. Agora vamos para a 5.ª figura. Vai ter… (*desmonta o que tinha feito e constrói a 5.ª figura*) A 5.ª figura vai ter cinco de cada lado (*enquanto olha para a ficha*). (…) Não tenho a certeza. Ah! Não! Vai ter 4 de cada lado (*e constrói a figura enquanto a colega apenas lhe vai dando os sorrisos*).
>
> Patrícia- Não sei, eu acho que são 8 e com este do meio 9 (*ela não acompanhou a construção da figura e no final conta apenas os sorrisos da figura*).
>
> Ricardo- 4 de um lado e 4 do outro, 8. Mais 1, 9. Mais 5, 14. (*pausa*) Então, aqui já sabemos que a 5.ª figura, 14.
>
> (…)
>
> Patrícia- 14. Agora a 6.ª. (*e espera que o colega avance*)
>
> Ricardo- A 6.ª figura… Terá 5 de cada lado…
>
> Patrícia- Aqui já estão (*apontando para os 5 sorrisos do lado esquerdo*).
>
> Ricardo- Então quantos terá? 5 mais 5, 10. Mais 1, 11. Agora mais 6…
>
> Patrícia- 17.
>
> (…)
>
> Ricardo- E agora é sempre mais 3. Agora já não vamos precisar disto. (*referindo-se ao material*) Agora, a 7.ª figura terá 20. A 8.ª figura…
>
> Patrícia- Terá 20. A 8.ª…
>
> Ricardo- Terá 23. A 9.ª…
>
> Patrícia- 27.
>
> Ricardo- E a10.ª terá 29.

Os alunos começaram por tentar construir a 5.ª figura no entanto, só colocaram corretamente a parte vertical e mantiveram a parte horizontal da 4.ª figura. Como construíram a 5.ª figura de forma errada, obtendo um total de 14 círculos, e se basearam nessa construção para a contagem de sempre mais três círculos ao total de círculos, até chegarem à 10.ª figura, obtiveram um número incorreto de círculos para a 10.ª figura, afirmando que a 10.ª figura teria um total de 29 círculos. Nesta questão não fizeram o desenho pois, segundo estes dois elementos da díade, queriam fazer uma resposta sempre diferente da anterior.

Para a escrita da frase com a generalização na 3.ª questão, ambos os elementos participaram na discussão.

Ricardo- O número da figura corresponde ao de sorrisos em cima…

Patrícia- Sim…

Ricardo- Isso aplica-se em todas.

Patrícia- À primeira… A 1.ª figura temos 1 sorriso em cima, a 2.ª temos 2 e a 3.ª temos 3.

Ricardo- Em cima.

Patrícia- Sim. Então é isso.

Ricardo- Não, mas deve haver outra coisa para completar isto. (…) Acho que já encontrei!

Patrícia- Qual?

Ricardo- Os de baixo, os que estão na horizontal? (…) O número da figura corresponde ao de sorrisos em cima… (…) Por exemplo, da 1.ª figura… mas eu estou a falar nos hori… os que estão na horizontal, tipo deitado, estás a perceber?

Patrícia- Sim.

Ricardo- Da 1.ª figura, da horizontal, para a 2.ª, são mais 2.

(…)

Patrícia- A figura tem em cima o número da figura cá em baixo.

Ricardo- Sim, mas os sorrisos que estão em baixo são sempre mais 2 ao número da figura. E o número da figura corresponde ao número de sorrisos que está em cima. Mas só que nós estamos a separar.

(…)

Patrícia- E que tal deixarmos esta e avançarmos para a outra?

Neste extrato foi visível que o Ricardo continuou a visualizar a figura como tendo uma parte vertical e uma parte horizontal, fazendo a decomposição do termo e associando cada uma das partes ao número de ordem da figura ("… mas os sorrisos que estão em baixo são sempre mais 2 ao número da figura. E o número da figura corresponde ao número de sorrisos que está em cima.") demonstrando um raciocínio funcional. Contudo, depois de alguma hesitação, e achando que esta não seria a generalização correta por estar a separar, a Patrícia acaba por sugerir que avancem e voltem a esta questão mais tarde.

Seguindo o plano de fazerem uma explicação diferente para cada uma das suas respostas, o Ricardo sugeriu fazer uma tabela para a resolução da 4.ª questão. Assim, para a construção da tabela foram sugeridas colunas para os números das figuras, para os círculos na vertical, para os círculos na horizontal e para o total de círculos, uma vez que esta era a forma como o Ricardo visualizava a figura. Como começaram a partir da 11.ª figura, ancorando-se a partir do número de círculos da figura anterior, neste caso a 10.ª figura, erradamente, com 29 círculos, todos os seus cálculos ficaram incorretos, chegando ao final da 15.ª figura com um total de 44 círculos.

Na 5.ª questão foram confrontados com a descoberta do número da figura que teria 22 círculos. Nesse momento, olharam para a resolução da 2.ª questão, e apercebendo-se de que nenhuma figura tinha um total de 22 círculos, ou seja, que tinham a 8.ª figura com 23 círculos, perceberam que algo não era compatível com o que estava a ser questionado.

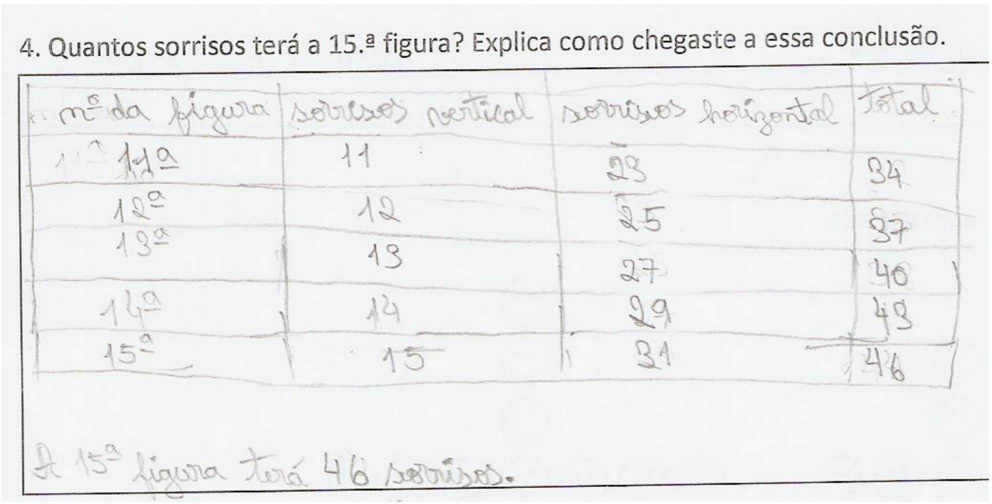
> Ricardo- Acho que já tínhamos feito.
>
> Patrícia- Não, mas na 8.ª figura tínhamos 23.
>
> Ricardo- Na 8.ª figura?
>
> Patrícia- Sim. (*apontando para o trabalho do colega*)
>
> Ricardo- 22? Não pode estar bem! (*o Ricardo fica muito pensativo e olha para o seu trabalho*) Ah! Nós é que fizemos mal. Não é isto que está mal, fomos nós.
>
> Patrícia- A partir da 5.ª. (…) Quantos é que tem a 4.ª?
>
> Ricardo- Tem 13 sorrisos. Então é mais 3. (*e começam a corrigir a 2.ª questão)*
>
> Patrícia- E são todos de 3 em 3.
>
> Ricardo- 16, 19…
>
> Patrícia- 22.
>
> Ricardo- 25. Agora, 9.ª figura, 28. 10.ª figura, 31 sorrisos.

Aqui percebe-se que os alunos estavam a utilizar um raciocínio recursivo (“E são todos de 3 em 3.”), e corrigem a resolução da 2.ª questão fazendo a apresentação dos seus resultados em forma de esquema como a resolução da 5.ª questão.

Depois de terem alterado a resolução da 2.ª questão, que fora o ponto de partida para a resolução da 4.ª questão, também esta resolução teve de ser alterada.

> Patrícia- Espera aí, aqui deu 31, aqui já vai no 32! (*referindo-se ao número de círculos da 10.ª figura com que iniciaram a tabela utilizada na 4.ª questão*) Então tudo a partir daqui já está mal. Sim, porque aqui metemos 32. Agora aqui temos tudo mal. Agora é que eu estava a estranhar.
>
> (…)
>
> Ricardo- Então é…
>
> Patrícia- 34.
>
> Ricardo- Espera aí.
>
> Patrícia- De certeza.
>
> Ricardo- Espera aí. Sim. 37, 40, 43, 46. Quantos sorrisos terá a 15.ª figura?
>
> Ricardo e Patrícia- Quarenta e seis.

Após a correção da 2.ª questão, procederam também à alteração dos resultados da sua tabela para a 4.ª questão e começaram respondendo que a 10.ª figura tinha 31 círculos e que a 15.ª figura tinha 46 círculos. Mais uma vez, os alunos recorreram à decomposição do termo mas recorrendo a um raciocínio recursivo evidenciado pelos cálculos de sempre mais três.



4. Quantos sorrisos terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

nº da figura	sorrisos vertical	sorrisos horizontal	total
11ª	11	23	34
12ª	12	25	37
13ª	13	27	40
14ª	14	29	43
15ª	15	31	46

A 15ª figura terá 46 sorrisos.

Figura 81- Tabela feita pelo Ricardo, para a 4.ª questão da tarefa 3

Depois da correção da 2.ª e da 4.ª questão, os alunos resolveram copiar o esquema que utilizaram para a resolução da 2.ª questão de forma a explicarem que a figura que tinha 22 círculos seria a 7.ª figura.

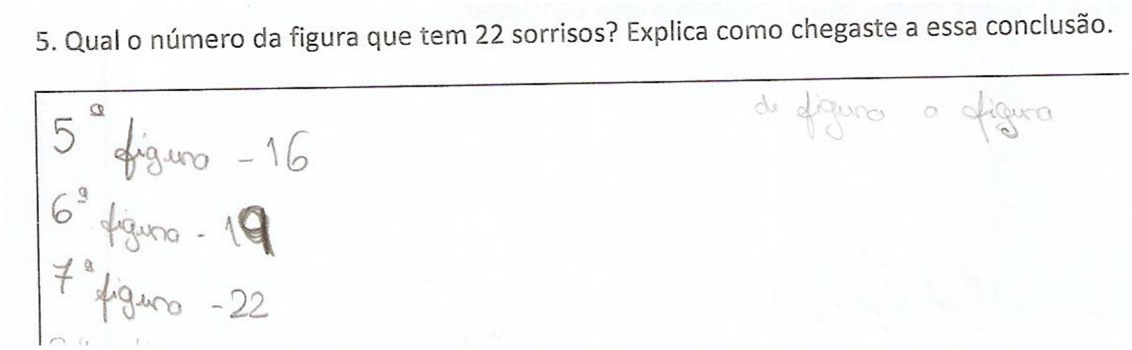


Figura 82- Apresentação de resultados feito pela Patrícia, para a resolução da 5.ª questão da tarefa 3

Também para a 6.ª questão, que impunha um raciocínio inversivo, os alunos ancoraram-se na tabela que começaram a construir para a resposta à 4.ª questão.

Patrícia- Não é mais fácil continuarmos esta sequência?

Ricardo- É.

Patrícia- Só os resultados, a tabela.

Ricardo- Espera aí.

Patrícia- Mas assim vamos ficar com quase praticamente tudo igual.

Ricardo- Ok.

Patrícia- Continuamos com o 46 ou começamos com o 34? 46? (*e vai escrevendo os números 46, 49, 52, 55, 58 e 61 do lado de fora do retângulo destinado à resolução*)

Ricardo- Sim.

Patrícia- Já encontrei!

Ricardo- Já encontraste?

Patrícia- O 61. Sim, sim, sim.

(…)

Ricardo- O 33 é para a 16.ª. (…) 17.ª. Sorrisos vertical.

Ricardo e Patrícia- 17.

Ricardo- Horizontal… 35. Agora… 52, total. 18.ª. Sorrisos vertical, 18. Horizontal, 37. Total, 55.

Patrícia- 19.ª.

Ricardo- 19.ª. Sorrisos vertical, 19. Horizontal é 39. Total, 58. Já estamos perto. 20.ª. Vertical…

Patrícia- 20.

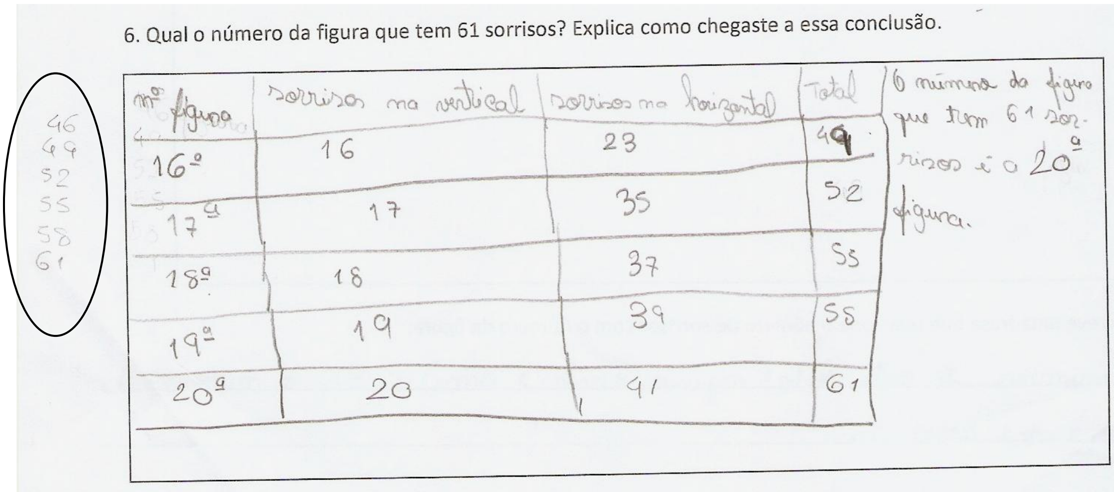
Ricardo- Horizontal…

Patrícia- 41.

Ricardo- Total, 61.

Patrícia- Então é a… 20.ª.

A Patrícia, ao apontar os números em que ia pensando (como indicado na figura seguinte com uma figura oval) e que lhe permitiram chegar tão rapidamente ao número 61, continuou a demonstrar um raciocínio recursivo. O Ricardo ao fazer a contagem de dois em dois para os círculos na horizontal e de três em três para o total de círculos também revelou um raciocínio recursivo.


6. Qual o número da figura que tem 61 sorrisos? Explica como chegaste a essa conclusão.

46
49
52
55
58
61

nº figura	sorrisos na vertical	sorrisos na horizontal	Total
16º	16	23	49
17º	17	35	52
18º	18	37	55
19º	19	39	58
20º	20	41	61

O número da figura que tem 61 sorrisos é a 20º figura.

Figura 83- Tabela feita pela Patrícia, para a resolução da 6.ª questão da tarefa 3

Depois de terminadas todas as questões, o grupo voltou à 3.ª questão, referindo que esta era a mais difícil e que tinham deixado por fazer por estarem confusos. Observaram novamente a sequência de figuras apresentadas e começaram a debater entre si o que observavam.

Ricardo- Achas que melhor nós fazermos junto ou separado (*referindo-se à parte horizontal e à parte vertical*), que é mais fácil?

(…)

Patrícia- O de cima representa o quê?

Ricardo- O de cima representa o número da figura.

Patrícia- E os de baixo?

Ricardo- Representa… o número da figura mais… Espera aí.

Patrícia- O número da figura aqui (*apontando para o número de ordem da 3.ª figura*)…

Ricardo- E os de baixo… representa o número da figura mais 4. (…) Então… 2.ª… Mais 3… (*observando a sequência de figuras apresentada*) Acho que é mais fácil separado. Já encontrei a solução. Por exemplo 1 mais 3… A 1.ª figura mais 3 dá 4. Então, 2.ª figura, 2 mais 5. Então os de baixo vai… Espera aí, não era isso que eu estava a pensar, mas pronto. Ah! Os de baixo vai sempre aumentando…

Patrícia- Isto também só vai…

Ricardo- Vai sempre aumentando mais 2.

Patrícia- E os de cima mais 1.

Ricardo- Não, os de cima representam igualzinho o número da figura. E os de baixo representam o número da figura mas só que.. mais 2. Mas só que vai aumentando e nós temos que encontrar para todas. Por isso esta solução que acabei de ver não vai dar.

(…)

Patrícia- É sempre acrescentando…

Ricardo- Sim, olha. O número de cada lado da figura… Por exemplo, na 1.ª figura quantos, quantos sorrisos tem, tens de um lado? 1.

Patrícia- 1.

Ricardo- E do outro, 1.

Patrícia- Sim, vai dar…

Ricardo e Patrícia- 2.

Ricardo- Então, o número de lados corresponde ao número da figura conforme… também… com o número… com o número de sorrisos cá em cima. (*a professora aproxima-se*) Já encontrei, de certeza que eu já encontrei. Por exemplo… são 3. (*mostrando uma das figuras à colega*)

Patrícia- Sim.

Ricardo- O que eu encontrei é que são 2… vezes… vezes… vezes o número da figura… Quer dizer, não é 2 vezes, é 3 vezes… o número da figura…

(…)

Professora- São? 3 vezes o número da figura?

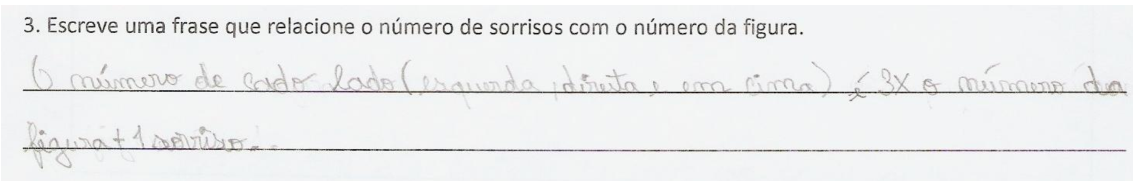
Ricardo- De cada lado, mais 1.

Professora- 3 vezes o número da figura de cada lado?

Ricardo- Não, 3 vezes o número da figura, mais 1.

As questões que foram colocando entre si também permitiram que os elementos da díade se fossem focando nas partes do termo e na evolução das figuras, o que facilitou a descoberta da relação entre o termo e o seu número de ordem.

A discussão entre os elementos demonstrou que a Patrícia continuou a mobilizar um raciocínio recursivo por afirmar “É sempre acrescentando…”, ancorando-se nas figuras anteriores. Por seu turno, o Ricardo mesmo afirmando “Vai sempre aumentando mais 2.”, ele estava a fazer a decomposição do termos nas duas partes (vertical e horizontal) e a relacionar cada uma dessas partes com o número de ordem do termo. Depois da hesitação inicial em separar a figura em duas partes, o Ricardo acabou por perceber que os dois círculos que acrescentou na horizontal e o círculo que acrescentou na vertical estavam associados ao triplo, levando-o na descoberta da relação que acabaram por escrever: “O número de cada lado (esquerda, direita e em cima) é 3x o número da figura +1 sorriso.”.


3. Escreve uma frase que relacione o número de sorrisos com o número da figura.

O número de cada lado (esquerda, direita e em cima) é 3X o número da figura+1 sorriso.

Figura 84- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pelo Ricardo, para a 3.ª questão da tarefa 3

Revisão da tarefa 3

Depois de resolvidas todas as questões, os alunos procederam à verificação dos seus resultados. Apesar da resposta à 2.ª questão já estar correta, este grupo decidiu alterar a explicação de como chegou à resposta a esta questão.

Ricardo- Quantos sorrisos terá a 10.ª figura? 10 de um lado. 10 da esquerda, 10 da direita, 10 em cima, 30, mais 1, 31. (*pausa*) Acho que podemos fazer isto aqui. (*e apaga o esquema que tinham feito para substituir pelo cálculo*) Para não ser igual.

Patrícia- Então?

Ricardo- Fica… Fazemos 3 vezes 10 mais 1 é igual a 31.

Com a alteração da explicação a esta resposta e pela descrição feita pelo Ricardo ("10 da esquerda, 10 da direita, 10 em cima, 30, mais 1, 31.") foi visível que ele evoluiu de um raciocínio recursivo para um raciocínio funcional.

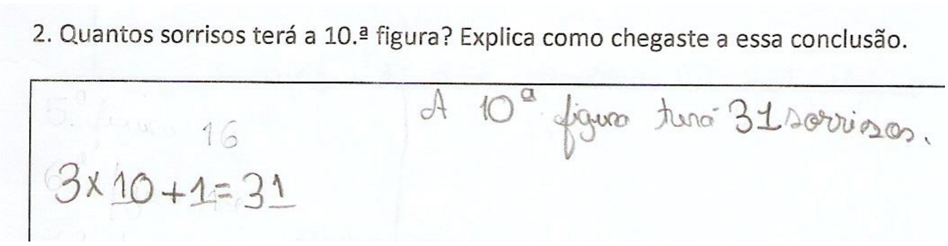


Figura 85- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 2.ª questão da tarefa 3

O estabelecimento da relação entre a figura e o número de ordem da figura fez com que revissem as questões, ancorando-se desta vez na relação funcional.

Ricardo- Quantos sorrisos terá a 15.ª figura? 15 de um lado, mais 15 do outro. Mas… esta não é preciso apagar. Que dá 30. Mais outros 15, 45, 46. Está certo. Agora o número que tem 22 sorrisos.

Patrícia- 22 sorrisos.

Ricardo- É a 7.ª.

Patrícia- É a 7.ª figura.

Ricardo- Porque 7 de um lado, 7 do outro e…

Ricardo e Patrícia- 7 em cima.

Ricardo- 7 vezes 3 é 21, mais 1, 22. Qual o número da figura que tem 61 sorrisos? 20.ª. 20 de um lado, 20 do outro, 20 em cima. 20 vezes 3, 60, mais 1, 61.

No momento de revisão das 4.ª, 5.ª e 6.ª questões, os alunos mobilizaram o raciocínio funcional para a verificação das suas respostas.

Tarefa 4

Depois de entregue o material (21 palitos) ao grupo e a folha de registo, o Ricardo começou por dizer à Patrícia que a tarefa seria muito fácil mas depressa corrige-se dizendo que não seria assim tão fácil.

Os elementos da díade, depois de lerem o enunciado relativo à 1.ª questão, pegaram no material disponibilizado para a tarefa e foram construindo as figuras da sequência, ancorando-se sempre na construção anterior para acrescentar alguns palitos e fazer a construção seguinte. Desta forma, chegaram até à 3.ª figura e depois desta, acrescentaram 3 palitos e ficaram com a 4.ª figura construída.

> Ricardo- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. De certeza que é treze!
>
> Patrícia- Fazemos um desenho?
>
> Ricardo- Sim.

Após a construção da figura, o Ricardo fez a contagem unitária dos palitos utilizados na construção e decidiram fazer a representação pictórica da 4.ª figura como explicação dos resultados obtidos.

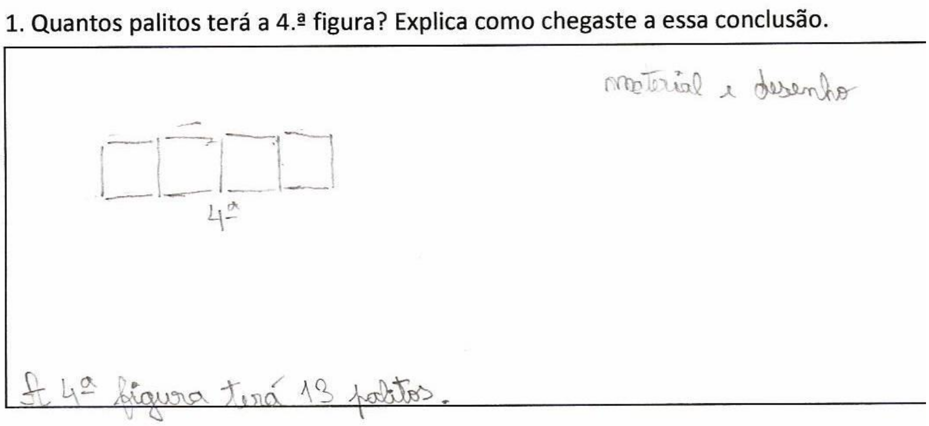


Figura 86- Representação pictórica da 4.ª figura feita pelo Ricardo, para a 1.ª questão da tarefa 4

Depois da resolução da 1.ª questão, avançaram para a leitura e resolução da 2.ª questão. Como vinha sendo hábito não terem disponível todo o material necessário para a construção das figuras, o grupo decidiu verificar se tinham material suficiente para a construção da 10.ª figura.

> Ricardo- Quantos palitos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)

Patrícia- Podemos fazer…

Ricardo- Primeiro, vamos ter que ver se vai dar. (*referindo-se ao facto de terem que verificar se têm ou não material necessário para construir a 10.ª figura*) Se não der vamos ter que encontrar outra solução. (*e começam a tentar construir a 10.ª figura*)

(…)

Ricardo- É melhor arranjarmos… Vamos arranjar outra maneira.

Patrícia- Pois.

Ricardo- Primeiro que tudo, vamos tentar… perceber… na figura, a relação entre os palitos e o número da figura. E depois arranjamos uma solução.

Patrícia- Mas primeiro podemos continuar… Podemos fazer com… a partir da 5.ª figura.

Logo depois de concluírem que não tinham o material suficiente para a construção da 10.ª figura, pois só conseguiram construir até à 6.ª figura, tentaram encontrar uma estratégia para a superação deste entrave. O Ricardo sugeriu tentarem encontrar uma relação que revelou alguma preocupação com a descoberta da relação funcional ("Primeiro que tudo, vamos tentar… perceber… na figura, a relação entre os palitos e o número da figura."). Por sua vez, a Patrícia estava concentrada numa estratégia de representação e contagem sugerindo a estratégia de figura em figura ("Podemos fazer com… a partir da 5.ª figura."). Com esta sua sugestão acabou por convencer o Ricardo, como verificado no diálogo seguinte.

Ricardo- Aqui temos quatro (*contando os palitos da 1.ª figura no enunciado*). 3, 4, 5, 6, 7. Sete (*contando os palitos da 2.ª figura no enunciado*). (…) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Dez. (*contando os palitos da 3.ª figura no enunciado*) Então, é sempre mais três, de figura a figura.

Patrícia- Ok. Então podemos continuar já na 5.ª.

Ricardo- Sim. A 5.ª figura.

Patrícia- Terá dezasseis.

Ricardo- 6.ª figura, dezanove. 7.ª figura, vinte e dois.

Patrícia- Pera [sic]. 8.ª figura…

Ricardo- Vinte e cinco.

Patrícia- 9.ª figura…

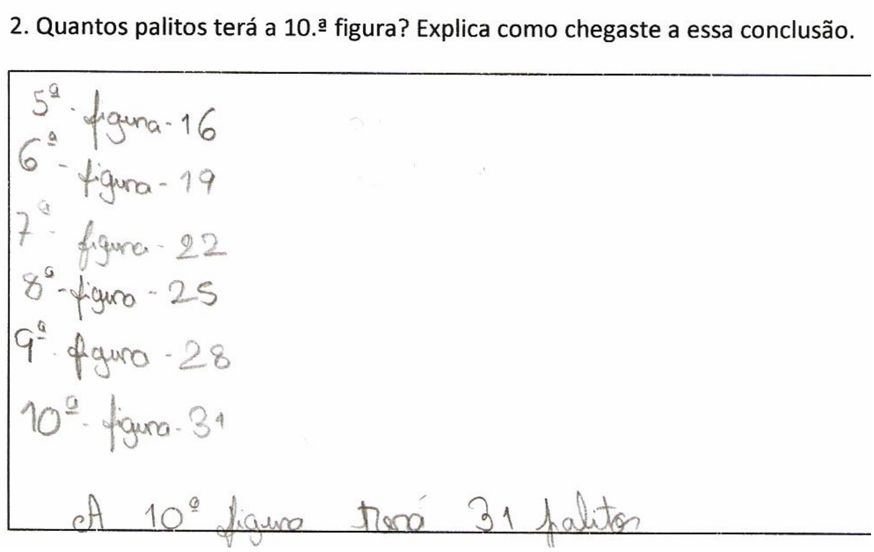
Ricardo- Vinte e oito.

Patrícia- 10.ª figura…

Ricardo- Trinta e um. Talvez!

Patrícia- Trinta e um.

A estratégia utilizada pelo grupo revelou um raciocínio recursivo, nomeadamente quando o Ricardo refere a forma como identificou, a partir do número total de palitos, a evolução de figura a figura (“Então, é sempre mais três, de figura a figura.”). Apesar de acrescentarem sempre mais três palitos em cada nova figura construída, os alunos parecem não reparar nessa relação iterativa, numa fase inicial, tendo simplesmente contado os palitos da 4.ª figura. A falta de material levou o Ricardo a contar de novo os palitos das três primeiras figuras e a observar a regularidade numérica da sequência (4, 7, 10), identificando que “…é sempre mais três, de figura a figura.” Enquanto iam fazendo a contagem de três em três, referindo o número da figura a que essa contagem se associava, foram registando o seu raciocínio num esquema como demonstrado na figura seguinte.


2. Quantos palitos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

5ª - figura - 16
6ª - figura - 19
7ª - figura - 22
8ª - figura - 25
9ª - figura - 28
10ª - figura - 31

A 10ª figura terá 31 palitos

Figura 87- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 2.ª questão da tarefa 4

Na 3.ª questão, o Ricardo continuava focado na descoberta da relação entre o termo e o seu número de ordem.

Ricardo- Escreve uma frase que relacione o número de palitos com o número da figura (*lendo o enunciado*). (*pausa*) Já encontrei.

Patrícia- É sempre acrescentando mais três.

Ricardo- Hum, hum (*acenando com a cabeça que não*)! Não é. É vezes três mais um. Por exemplo. A 1.ª figura…

Patrícia- Temos quatro.

Ricardo- E três vezes um?

Patrícia- Dá três.

Ricardo- Mais um?

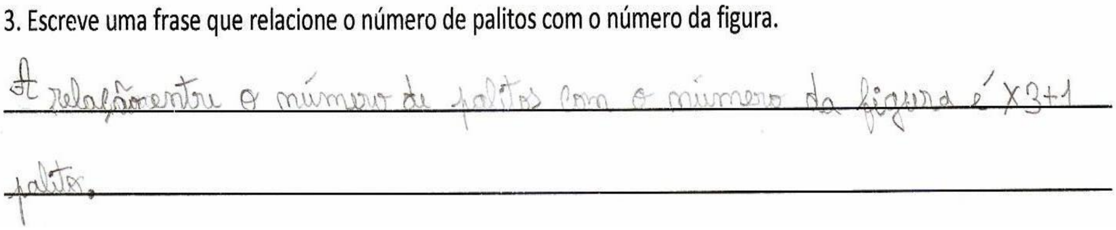
Patrícia- Quatro.

Ricardo- Quatro. Três vezes… Sete a dividir por dois? É três e sobra um. Então, três vezes dois é seis, mais um, sete. Dez a dividir por três é nove e sobra um. Então, nove mais um, dez. Estás a perceber?

Neste extrato foi percetível que o Ricardo foi muito perspicaz e célere na descoberta da relação, que já tinha sugerido tentar encontrar. Para além de ter encontrado a relação entre o termo e o seu número de ordem, na explicação que encetou perante a Patrícia, ele fê-lo de forma a também incorporar um raciocínio inversivo porque tenta explicar-lhe das duas formas ("Sete a dividir por dois? É três e sobra um. Então, três vezes dois é seis, mais um, sete. Dez a dividir por três é nove e sobra um. Então, nove mais um, dez.") evidenciando um raciocínio funcional. Mais uma vez, a relação encontrada apoiou-se nos números e não na decomposição figurativa do termo. O Ricardo não via a relação na figura mas sim nos números. Parece partir do 1.º termo com 4 palitos, encarando-o como 3 x 1 + 1 e rapidamente confirmou essa relação nos termos seguintes para o 7 e o 10.

Por seu lado, a Patrícia continuou a revelar um raciocínio recursivo recorrendo à evolução de figura a figura: "É sempre acrescentando mais três.".

Após a descoberta da relação por parte do Ricardo, ambos escreveram a relação encontrada.


3. Escreve uma frase que relacione o número de palitos com o número da figura.

A relação entre o número de palitos com o número da figura é x3+1 palitos.

Figura 88- Escrita da relação entre o termo e o número de ordem do termo feita pelo Ricardo, para a 3.ª questão da tarefa 4

Logo que escreveram a relação avançaram para a 4.ª questão.

> Patrícia- Quantos palitos terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Ricardo- Então…
>
> Patrícia- Tabela!
>
> Ricardo- É sempre tabela, agora não. Então vamos fazer… (*pausa*) É quantos palitos?
>
> (…)
>
> Patrícia- Parámos na 10.ª.
>
> Ricardo- Então vamos fazer uma coisa mais fácil. Então, então… (…) Quinze vezes três, mais um. Portanto, quinze vezes três… (*pausa*) quarenta e cinco, mais um, quarenta e seis. Ok.

Nesta conversação, a Patrícia continuou a revelar uma intencionalidade na utilização de um raciocínio recursivo ("Tabela!"), apesar de já terem descoberto a relação entre o termo e o seu número de ordem. Contudo, e após um breve instante de hesitação, o Ricardo optou por aplicar a relação já encontrada ("Quinze vezes três, mais um."), revelando a aplicação do raciocínio funcional que já havia demonstrado ter atingido. Apesar desta aplicação, num momento mais adiante, revelou um raciocínio diferente.

> Ricardo- Vamos ver se temos a certeza.
>
> Patrícia- Então como é que fazemos para ver se temos a resolução correta?
>
> Ricardo- Então, fazemos a 11.ª, trinta e quatro.
>
> Patrícia- A 11.ª quantos?
>
> Ricardo- Trinta e quatro. 12.ª, trinta e sete. 13.ª, quarenta. 14.ª…
>
> Patrícia- Quarenta e três.

Ricardo- E 15.ª…

Ricardo e Patrícia- Quarenta e seis.

Desta feita, e como forma de verificação, o Ricardo aplicou novamente um raciocínio recursivo, constatando através da evolução de figura a figura, se o seu raciocínio funcional estaria correto. Parece, assim, ter mais confiança na correção da iteração de 3 em 3.

Apesar desta inconstância entre a utilização de um raciocínio funcional ou um raciocínio recursivo, no momento após a conclusão da resposta, o Ricardo aplicou um raciocínio diferente.

Ricardo- Fazemos só quinze… Assim faz-me confusão. Então, quinze vezes três dá quarenta e cinco, mais um, quarenta e seis. Vamos ver se… se tá [sic] bem. Quarenta e seis menos… um, igual a quarenta e cinco. Quarenta e cinco a dividir por três…

Desta vez, o Ricardo aplicou um raciocínio inversivo para a confirmação de que os seus cálculos estariam corretos.

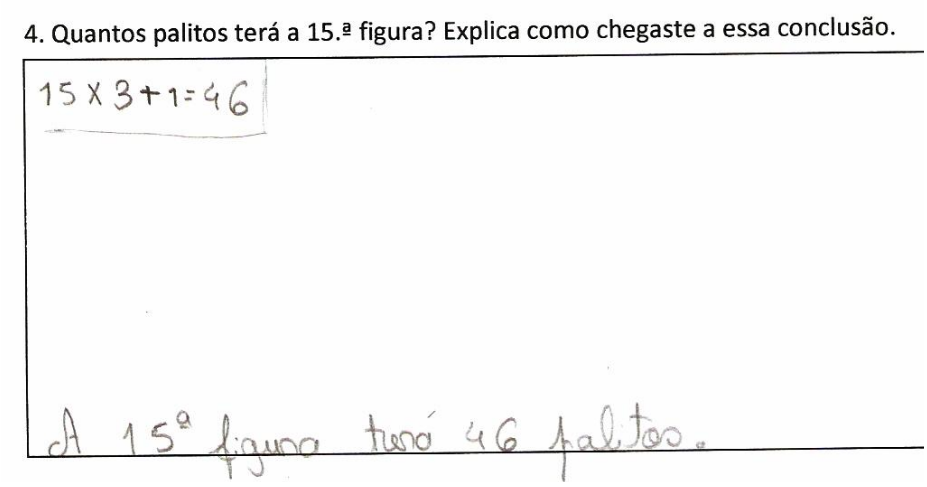


Figura 89- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 4.ª questão da tarefa 4

Na 5.ª questão, era desejada a aplicação do raciocínio inversivo.

Patrícia- Cinco. Qual o número da figura que tem 22 palitos? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)

Ricardo- Então…

Patrícia- É a 7.ª figura. (*mostrando-lhe o esquema que tinham feito como resposta à 2.ª questão em que têm escrito que a 7.ª figura tem vinte e dois palitos*)

Ricardo- Hum! Mas acho que é melhor nós fazermos uma coisa, uma coisa simples, tipo vinte e dois menos um. E depois, vinte e dois, vinte e um a dividir por três. (…) Vinte e um a dividir por três é a sete. (…) Então, nós escrevemos 7.ª figura.

A descoberta do número da figura, por parte da Patrícia, foi muito rápida mas apenas porque a Patrícia mobilizou a resposta dada na 2.ª questão que conferia que era a 7.ª figura a ter 22 palitos. Esta forma de resposta não agradou ao Ricardo, que sugeriu a aplicação do raciocínio inversivo que já havia demonstrado dominar ("… tipo vinte e dois menos um. E depois, vinte e dois, vinte e um a dividir por três."). Esta sua flexibilidade em aplicar o raciocínio inversivo indica a mobilização do raciocínio funcional.

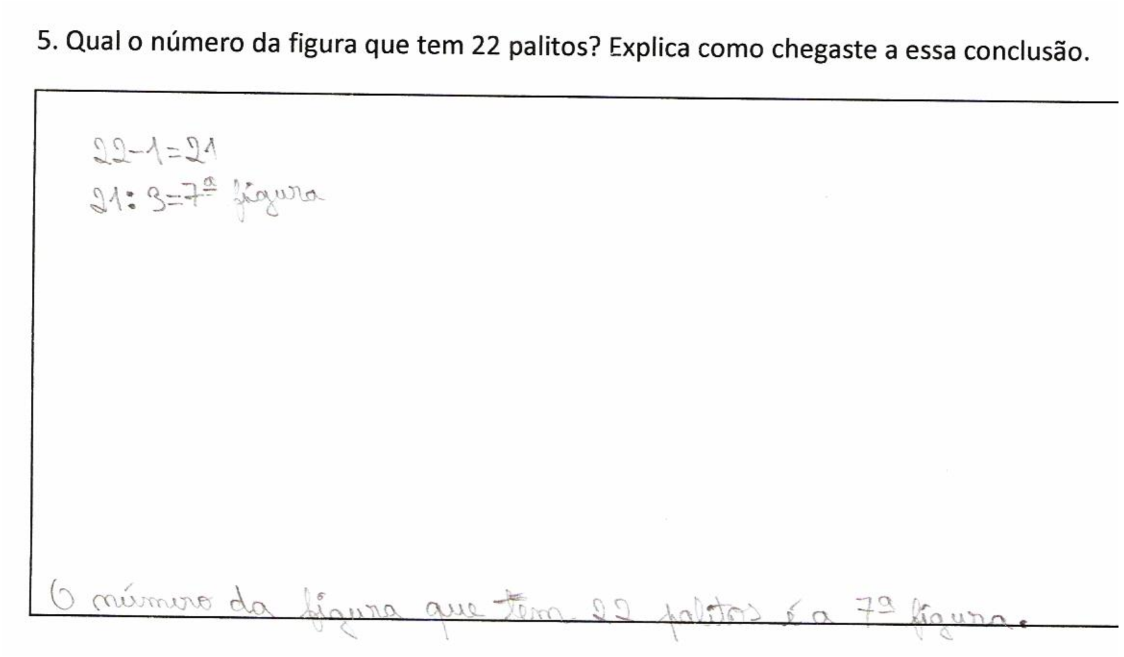


Figura 90- Apresentação de resultados feita pelo Ricardo, para a 5.ª questão da tarefa 4

A díade avançou para a resolução da 6.ª questão. Mais uma vez, esta questão também solicitava a aplicação do raciocínio inversivo.

Ricardo- Qual o número da figura que tem 61 palitos? (*lendo o enunciado*) Queres fazer o mesmo?

(…)

Patrícia- Uma conta em vez de tarmos [sic] a fazer…

Ricardo- Sim.

Patrícia- Então… Fazemos sessenta e um menos um.

Ricardo- Sim. Igual a sessenta. E sessenta a dividir por três, que é igual a… (*pausa*) Vinte. Quer dizer que é a 20.ª figura.

(…)

Patrícia- Ou podíamos também fazer de outra forma.

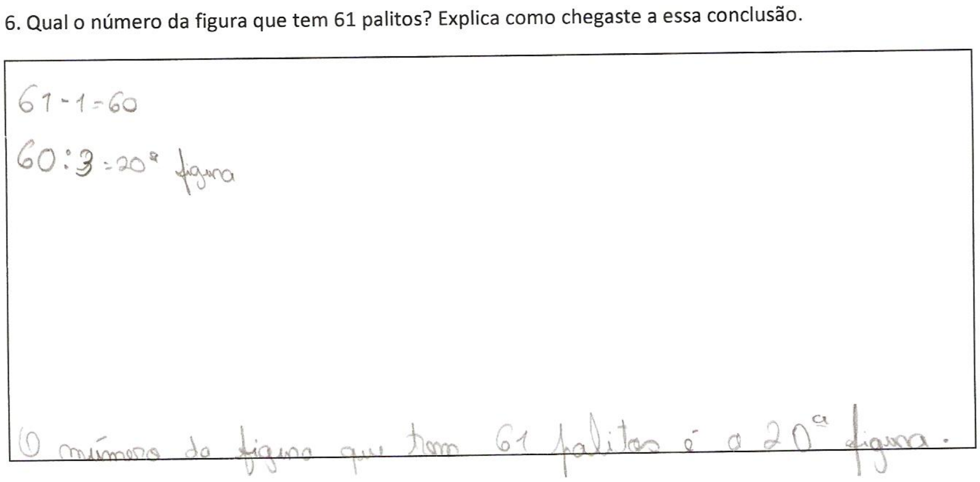
Ricardo- De outra forma mas…

Patrícia- Podíamos ter feito… vinte vezes três… e mais um.

(*o Ricardo acena que não com a cabeça*)

Ricardo- Não, assim era por tentativa. E a tentativa na Matemática não é correto.

Nesta extrato, verifica-se que a Patrícia, que até então havia sempre privilegiado a utilização de um raciocínio recursivo, iniciou a aplicação do raciocínio inversivo ("Fazemos sessenta e um menos um."). Também no final da questão demonstrou ter percecionado a relação entre o termo e o seu número de ordem ao afirmar: "Podíamos ter feito… vinte vezes três… e mais um.". Estas duas afirmações demonstraram que a Patrícia atingiu um raciocínio funcional, apesar do Ricardo o desvalorizar por considerar a abordagem da Patrícia "por tentativa" menos válida. Por seu lado, o Ricardo, aplicou o raciocínio inversivo que demonstrou, mais uma vez, dominar, associado ao raciocínio funcional.


6. Qual o número da figura que tem 61 palitos? Explica como chegaste a essa conclusão.

$61 - 1 = 60$

$60 : 3 = 20^a$ figura

O número da figura que tem 61 palitos é a 20ª figura.

Figura 91- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 6.ª questão da tarefa 4

Revisão da tarefa 4

Depois de realizadas todas as questões, os elementos da díade procederam à revisão dos seus resultados de algumas questões.

> Ricardo- Quantos palitos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão. Então, trinta e um menos um, trinta. Trinta a dividir por três…
>
> Patrícia- Pera [sic]. Então, a dividir por três…
>
> Ricardo- É dez. Ok. Está certo. (*referindo-se à resposta da 2.ª questão*) (…) É fazer sete vezes três, vinte e um, mais um, vinte e dois. Tá [sic] certo. (*referindo-se à resposta da 5.ª questão*) (…) Qual o número da figura que tem 61 palitos? (*lendo o enunciado*)
>
> Patrícia- Então, temos vinte…
>
> Ricardo- Vezes três, igual a sessenta.
>
> Patrícia- Mais um?
>
> Ricardo- Sessenta e um. (*referindo-se à resposta da 6.ª questão*)

No momento de revisão das questões, os alunos aplicaram sempre a relação encontrada entre o termo e o seu número de ordem, mesmo nas questões em que haviam aplicado o raciocínio inversivo, o que demonstrou a habilidade do seu raciocínio funcional.

Tarefa 5

Depois de distribuído o material para a tarefa (6 quadrados pretos e 30 quadrados brancos) e as folhas de trabalho, os alunos começaram com a leitura da 1.ª questão. Após essa leitura, os alunos retiraram o material do envelope, separaram os quadrados brancos dos quadrados pretos e fizeram a contagem de cada um dos tipos de quadrados.

O Ricardo, depois dessa separação e contagem, começou a construir de imediato a 4.ª figura sem necessitar de fazer a evolução de figura a figura. Neste aspeto, o Ricardo demonstrou ter percebido como a figura era constituída e qual a relação entre os quadrados pretos e o número de ordem da figura.

> Patrícia- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11… (*contando os quadrados brancos da 4.º figura*)
>
> Ricardo- Não! É quadrados pretos.
>
> Patrícia- Ah! Quadrados… Quatro.

Ricardo- Também podemos só escrever: terá… Ah, não. Escrevemos… Para a conclusão em vez de fazermos, como nós já sabemos qual é a relação dos quadrados pretos com o número da figura, explicamos por palavras.

Depois da construção da figura, a Patrícia procedeu à contagem unitária dos quadrados brancos, mas o Ricardo alertou-a que não necessitava fazer essa contagem porque o que estava a ser solicitado era a quantidade de quadrados pretos. A Patrícia compreendeu o seu comentário e alterou a sua resposta, indicando, então, que a quantidade de quadrados pretos seria de 4 quadrados pretos. Após o diálogo, o grupo escreveu a seguinte resposta: "A 4.ª figura terá 4 quadrados pretos. Porque o número da figura corresponde ao número de quadrados pretos.".

Para a resposta à 2.ª questão, o grupo mobilizou o mesmo raciocínio funcional que mobilizou para a resposta anterior.

Patrícia- A 10.ª figura terá…

Ricardo- Dez quadrados pretos.

Rapidamente concluíram que a 10.ª figura teria um total de 10 quadrados pretos, escrevendo: "A 10.ª figura terá 10 quadrados pretos. Porque o número da figura corresponde ao número de quadrados pretos.".

Quando avançaram para a escrita da relação entre o número de quadrados pretos e o número de ordem da figura, os elementos da díade afirmaram de imediato que bastaria copiar a justificação utilizada nas duas questões anteriores, escrevendo: "O número da figura corresponde ao número de quadrados pretos.".

De seguida, os alunos avançaram para a resolução da 4.ª questão que questionava, desta vez, acerca da quantidade de quadrados brancos da 4.ª figura. O Ricardo, percebendo como se processava o desenrolar das tarefas, sugere que tentem já encontrar a relação entre os quadrados brancos e o número de ordem da figura.

Ricardo- Uma coisa simples. Vamos já tentar descobrir qual é a relação entre o número de quadrados brancos e o número da figura. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (*fazendo a contagem unitária dos quadrados brancos da 1.ª figura*). 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Na 1.ª figura temos nove (*fazendo a contagem unitária de todos os quadrados da 1.ª figura*). Certo?

Patrícia- Na 2.ª temos doze. Se não me engano.

Ricardo- Nove, doze. Ah! Não. É o número de quadrados brancos. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (*fazendo a contagem unitária dos quadrados brancos da 1.ª figura*). Oito quadrados brancos. E são… Na 1.ª figura. Segunda figura. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (*fazendo a contagem unitária dos quadrados brancos da 2.ª figura*).

Patrícia- Dez.

Ricardo- Dez quadrados brancos. Terceira figura. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (*fazendo a contagem unitária dos quadrados brancos da 3.ª figura*). Doze quadrados brancos. Então, de figura para figura é sempre mais dois quadrados.

Nesta primeira tentativa de descoberta da relação, o Ricardo tentou encontrar a relação funcional. No entanto, a única conclusão a que chegou foi ancorada no raciocínio recursivo ao compreender que a evolução de figura a figura se processava acrescentando sempre mais dois quadrados ("Então, de figura para figura é sempre mais dois quadrados."). Depois desta tentativa, e percebendo que não conseguia encontrar a relação, optaram por recorrer à representação pictórica da 4.ª figura.

Ricardo- Então, então, fazemos pelo desenho.

Patrícia- Ok.

Ricardo- Não vejo outra maneira.

(*ambos começam a desenhar a 4.ª figura nas suas folhas de trabalho*)

(…)

Patrícia- 1, 2, 3, 4, 5, 6. São seis colunas!

Ricardo- Seis colunas?

Patrícia- Sim.

Ricardo- Seis colunas? Deixa verificar. Ah, pois. 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Patrícia- Agora são três na horizontal. (*e o Ricardo continua a copiar o desenho da Patrícia com a ajuda das indicações que esta lhe vai dando*)

(…)

Ricardo- Pois. 1, 2, 3, 4, 5, 6. (…) 1, 2, 3, 4, 5… Falta aqui um… 6 (*porque lhe faltava uma coluna*).

Patrícia- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (*fazendo a contagem unitária dos quadrados brancos da 4.ª figura*).

Ricardo- Isto não está a bater certo, isto não está a bater certo. São quatro quadrados pretos.

Patrícia- Então espera aí…

Ricardo- São quatro quadrados pretos…

Patrícia- Porque é que tu não fazes como eu fiz, assim… É de três em três…

Ricardo- É assim. (*depois de desenhar os quadrados pretos, reveste-os com os quadrados brancos*) Já está, já está.

(…)

Patrícia- Eu faço aqui os do meio (*referindo-se aos quatro quadrados pretos da 4.ª figura, que vai colocar na mesa para construir a 4.ª figura*)

(*pausa enquanto constroem a 4.ª figura*)

(…)

Ricardo- São catorze (*depois de contar os quadrados da figura construída com o material*). (…) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. (*fazendo a contagem unitária dos quadrados brancos da 4.ª figura no seu desenho*) São catorze quadrados brancos.

Aquando da representação da figura, tornou-se percetível que os elementos da díade tinham uma visão diferente da forma como a figura era constituída e qual a decomposição do termo. Enquanto a Patrícia visualizava a figura sendo constituída por colunas e filas ("São seis colunas! (…) É de três em três…"), o Ricardo representava a figura sustentando-se na quantidade dos quadrados pretos e revestindo-os com os quadrados brancos. Após a realização da representação pictórica da 4.ª figura, os alunos construíram a 4.ª figura com o material e fizeram a contagem unitária dos quadrados brancos, tanto na representação pictórica como na figura construída com o material. Contudo, o Ricardo não desiste de tentar encontrar a relação.

Patrícia- Mas eu acho que são catorze. Aquilo deu catorze porque na 3.ª tem doze e é sempre a acrescentar mais dois.

Ricardo- Mas vamos lá tentar com a relação entre o número da figura e o número de quadrados brancos. Que é mais fácil. (…) Oito (*referindo-se ao número de quadrados brancos da 1.ª figura*). 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Dez quadrados brancos (*referindo-se ao número de quadrados brancos da 2.ª figura*). (…) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Doze quadrados brancos (*referindo-se ao número de quadrados brancos da 3.ª figura*). (*o Ricardo escreve por baixo das figuras da sequência o número total de quadrados brancos*) Aqui é vezes quatro *(referindo-se que a 3.ª figura vezes quatro dará doze que é o total de quadrados brancos da 3.ª figura*). Vezes cinco *(referindo-se que a 2.ª figura vezes cinco dará dez que é o total de quadrados brancos da 2.ª figura*). Um vezes oito *(referindo-se que a 1.ª figura vezes oito dará oito que é o total de quadrados brancos da 1.ª figura*). Por isso não faz sentido, tem que ter a mesma relação.

Enquanto a Patrícia continuou a demonstrar um raciocínio recursivo ("…é sempre a acrescentar mais dois."), o Ricardo tentou encontrar uma relação matemática entre o número de quadrados brancos e o número de ordem de cada figura e para o auxiliar até colocou, por baixo das figuras da sequência, o número total de quadrados brancos. Depois dos cálculos efetuados, o Ricardo verificou que não podia ser nenhuma das relações intentadas porque para haver a relação funcional teria de multiplicar o número de ordem da figura sempre pelo mesmo número para chegar ao total de quadrados brancos de cada uma das figuras e isso não se verificava. Mas o Ricardo não desistiu e encetou uma nova tentativa.

Ricardo- Seis vezes um… Pode ser seis vezes um, mais dois.

Patrícia- É sempre mais dois.

Ricardo- Pode ser seis vezes um, mais dois. Aqui pode ser… (*pausa enquanto tenta esta relação na 2.ª figura*) Não, não dá. Aqui não dá, tem que ser maior.

Patrícia- Porquê não fazemos seis mais dois (*e continua a mexer no material enquanto o Ricardo observa as figuras da sequência*). Vá.

Ricardo- Já descobri. Pode dar quatro vezes um, mais quatro. Aqui pode ser quatro vezes dois, que dá seis, mais quatro.

Patrícia- Ah! Quatro vezes dois…

Ricardo- Oito. Pera [sic] aí. Não. Quatro…

(…)

Patrícia- Eu acho que é cinco… Não. Pera [sic] aí.

Ricardo- Mais quatro.

Patrícia- Quatro vezes… Ah! Já percebi. Quatro vezes dois, mais dois.

Ricardo- Não, mas tem que… tem que ter uma relação igual. Tem que ter uma relação igual, completamente igual. Então, já tentámos com o quatro, com o cinco… Com o cinco já encontrámos? Tem que ser um número menor. Então vamos tentar com três. Três vezes um é igual… Três, mais cinco…

Patrícia- E agora?

Ricardo- Três vezes dois, seis. Não dá.

Patrícia- Mais quatro…

Ricardo- Agora vamos tentar com dois. Dois vezes um, dois. Para oito…

Patrícia e Ricardo- Seis.

Ricardo- Agora, dois vezes dois, quatro. Mais seis…

Ricardo e Patrícia- Dez.

Ricardo- A 2.ª já tá [sic] a dar. Dois vezes três, igual a seis…

Ricardo e Patrícia- Mais seis, doze.

Patrícia- Ok.

Ricardo- Já encontrámos a relação.

Patrícia- Então…

Ricardo- Com estes cálculos, já encontrámos a… É dois vezes o número da figura, mais seis.

A Patrícia continuou a insistir na utilização de um raciocínio recursivo "É sempre mais dois.". Por seu lado, o Ricardo continuou a tentar encontrar a relação funcional através de várias tentativas utilizando diversas multiplicações e somas. Como resultado dessas tentativas, o Ricardo foi-se aproximando da relação por se ir apercebendo da necessidade de efetuar cálculos multiplicativos com números maiores ("Aqui não dá, tem que ser maior.") ou menores ("Tem que ser um número menor."). O Ricardo conseguiu descobrir a relação entre o número de quadrados brancos e o número da figura, numa tentativa de cálculos e não com a decomposição do termo. Mais uma vez, o Ricardo tentou encontrar a relação observando unicamente os números correspondentes à ordem do termo e não as figuras.

Como explicitação das suas conclusões, os elementos da díade optaram por continuar com a representação pictórica da 4.ª figura referindo a quantidade de quadrados brancos contidos na figura.

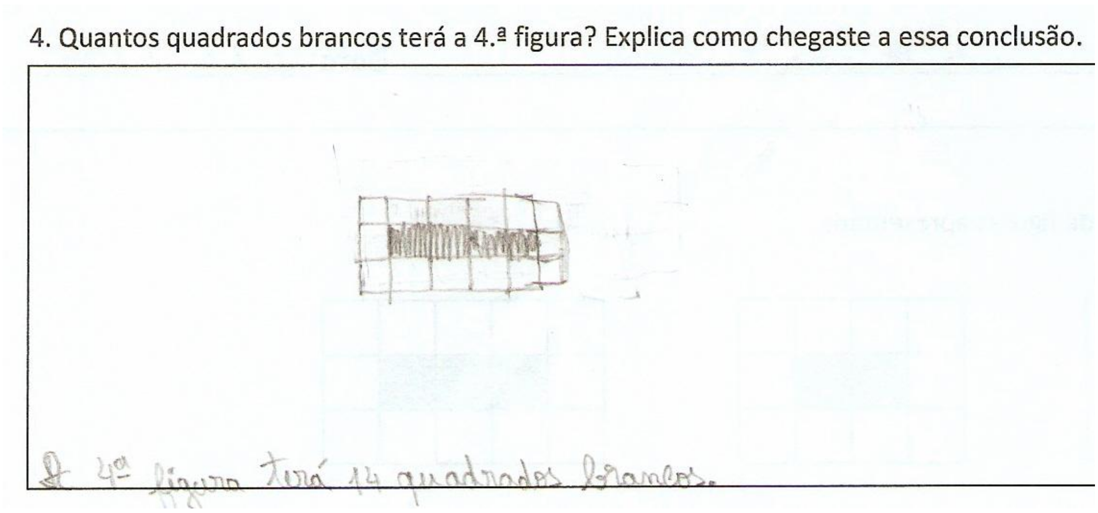


Figura 92- Representação pictórica da 4.ª figura feita pelo Ricardo, para a 4.ª questão da tarefa 5

Depois de encontrada a relação, que o Ricardo tanto ambicionava, os alunos passaram para a realização da 5.ª questão.

> Ricardo- Sim, já encontrámos. Então, temos de fazer dois vezes dez, mais seis. Dois vezes dez, vinte, mais seis, vinte e seis. Então, quantos quadrados terá… a 10.ª figura? A 10.ª figura… terá vinte e seis quadrados brancos.
>
> Patrícia- Terá vinte e seis quadrados brancos.

Rapidamente mobilizaram a relação entre os quadrados brancos e o número de ordem da figura e chegaram à resposta solicitada. Para a explicação, registaram sob a forma de expressão numérica os cálculos efetuados.

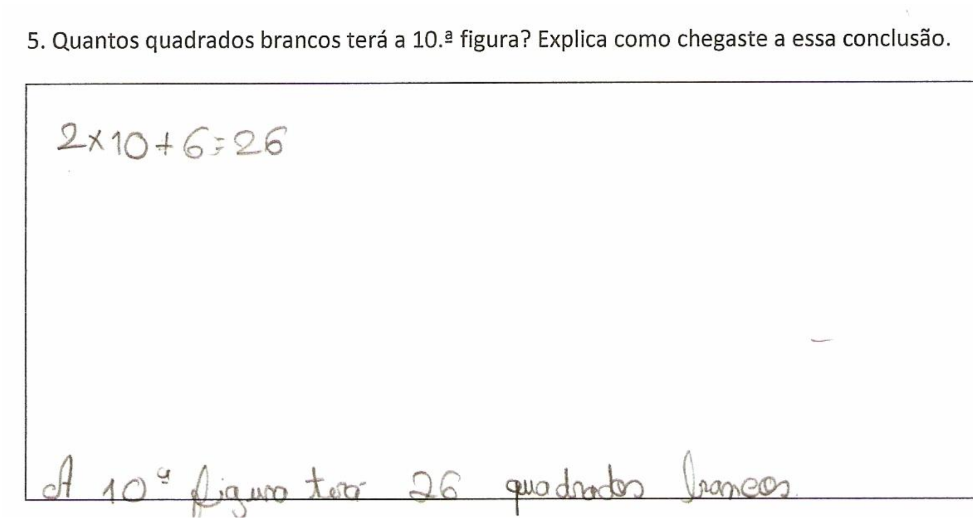
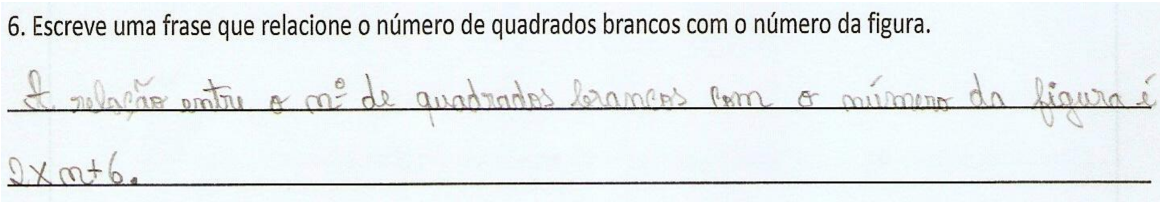


Figura 93- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 5.ª questão da tarefa 5

Os alunos, quando confrontados com a escrita da relação entre os quadrados brancos e o número de ordem da figura, limitaram-se a escrever a relação descoberta anteriormente.

Ricardo- É dois vezes *n*, que é o número da figura, mais seis.

Este relato do Ricardo foi o resultado da relação encontrada mas agora com a aplicação de uma incógnita, conseguindo escrever a relação sob a forma de expressão algébrica, explicitando o que significava a letra utilizada relacionando-a com o número de ordem da figura, que permitiria a aplicação desta expressão em qualquer figura.



6. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados brancos com o número da figura.

A relação entre o nº de quadrados brancos com o número da figura é 2xn+6.

Figura 94- Escrita da relação entre a parte do termo dos quadrados brancos e o número de ordem do termo feita pelo Ricardo, para a 3.ª questão da tarefa 5

Depois da escrita desta relação com a explicitação da expressão algébrica, os alunos começaram a ler a 7.ª questão.

Ricardo- Qual o número da figura que tem 25 quadrados pretos? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*) Portanto temos de fazer…

Patrícia- Essa é fácil.

Ricardo- Vinte e cinco quadrados pretos!?

Patrícia- Já sabemos que… o número dos quadrados pretos é o número da figura. (…) Vinte e cinco quadrados pretos… pretos…

Ricardo- É a 25.ª figura.

Patrícia- É a 25.ª figura. (*pausa*) Agora temos de mostrar como chegámos a essa conclusão.

Ricardo- O número de quadrados pretos corresponde… Só escrevemos porque o número de quadrados pretos…

Patrícia- Pretos…

Ricardo- Corresponde ao número da figura.

A Patrícia, tal como na parte inicial desta tarefa quando as questões se relacionavam com os quadrados pretos, aplicou com muita rapidez um raciocínio funcional relacionando os quadrados pretos com o número da figura reafirmando a relação ("… o número dos quadrados pretos é o número da figura.") em jeito de confirmação do que o Ricardo respondeu. O Ricardo, pela celeridade da sua resposta ("É a 25.ª figura.") revelou também a aplicação do raciocínio funcional. A resposta a esta questão foi tão rápida que, a determinado momento, os alunos puseram a hipótese de que eu tinha errado ao formular a questão porque as questões acerca dos quadrados pretos das figuras estavam todas na parte da frente da ficha de trabalho. Contudo, esta questão não era similar porque apelava à utilização do raciocínio inversivo.

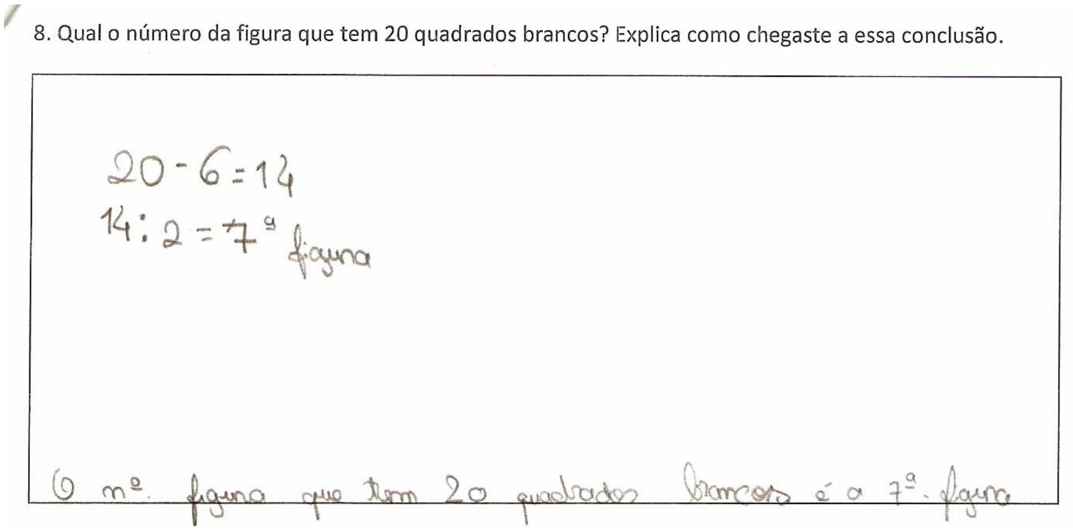
Como resposta à questão, os alunos escreveram: "O número da figura que tem 25 quadrados pretos é a 25.ª figura. Porque o número de quadrados pretos corresponde ao número da figura.".

Na 8.ª questão, os elementos da díade tinham de descobrir o número da figura que teria 20 quadrados brancos. Depois de lerem a questão, rapidamente começaram a dialogar sobre a forma de resolução da questão.

> Patrícia- (…) Qual o número da figura que tem 20 quadrados brancos? Explica como chegaste… Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Ricardo- Podemos fazer… Ah! Podemos fazer, vinte menos seis, que deu… que vai dar catorze.
>
> Patrícia- Catorze…
>
> Ricardo- Agora…
>
> Patrícia e Ricardo- Catorze…
>
> Ricardo- Catorze a dividir por dois…
>
> Patrícia- Que dá…
>
> Ricardo- Sete. Não. Sim, é sete.
>
> Patrícia- A 7.ª figura.

O Ricardo foi muito perspicaz na compreensão da questão e na aplicação do raciocínio inversivo relacionado com a relação funcional conhecida para os quadrados brancos. Apesar da Patrícia se mostrar disponível para colaborar na conversação com o Ricardo, foi este que dirigiu todo o raciocínio, não havendo elementos suficientes que permitam afirmar que a Patrícia conseguiu atingir um raciocínio funcional, ao contrário do

Ricardo que demonstrou a utilização do raciocínio funcional para chegar ao número da figura.



8. Qual o número da figura que tem 20 quadrados brancos? Explica como chegaste a essa conclusão.

20 - 6 = 14
14 : 2 = 7.ª figura

O n.º figura que tem 20 quadrados brancos é a 7.ª figura

Figura 95- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 8.ª questão da tarefa 5

A 9.ª questão preconizava a aplicação de uma nova relação onde poderia ser mobilizada a junção das duas relações (a dos quadrados pretos e a dos quadrados brancos) porque nesta questão era solicitado o número total de quadrados (pretos e brancos) de uma dada figura.

Ricardo- (…) Temos que fazer… Temos que fazer dois vezes quarenta…

Patrícia- Dois vezes quarenta dá oitenta…

Ricardo- Mais seis.

Patrícia- E fazemos… Igual a…

Ricardo- Oitenta e seis. Mais um. Quer dizer, não é mais um…

Patrícia- Mais dois…

Ricardo- Não é mais um, não é mais um, não, não… É… mais quarenta…

Patrícia- Então vai dar, cento…

Ricardo- Oitenta mais quarenta, é cento e vinte…

Patrícia- Oitenta e seis…

Ricardo- Cento e vinte. (…) Vai ter esse número de quadrados pretos e brancos porque, porque… Como nós descobrimos antes são duas vezes o número da figura e dois vezes quarenta é oitenta. Oitenta mais seis, oitenta e seis. E como são quarenta quadrados no meio, temos que, temos que fazer oitenta e seis mais quarenta e seis… Que dá cento e vinte e seis.

Tal como era pretendido, foi visível que o Ricardo percebeu a essência da questão e conseguiu agregar as duas relações já descobertas e mobilizá-las para a resposta à questão ("Como nós descobrimos antes são duas vezes o número da figura e dois vezes quarenta é oitenta. Oitenta mais seis, oitenta e seis. E como são quarenta quadrados no meio, temos que, temos que fazer oitenta e seis mais quarenta e seis… Que dá cento e vinte e seis."). Apesar do Ricardo cometer o erro linguístico de adicionar ao oitenta e seis a quantidade de quarenta e seis, denotou-se que não estava a fazer os cálculos conforme estava a verbalizar porque adicionou corretamente a quantidade de quarenta e não de quarenta e seis como afirmou.

Uma vez mais, a Patrícia foi apenas completando os cálculos verbalizados pelo Ricardo. Apesar disso, desta vez foi notório que não estava a conseguir mobilizar qualquer relação funcional quando não consegue concluir o raciocínio do Ricardo dizendo "Mais dois…", quando deveria concluir o seu raciocínio dizendo que seriam mais quarenta. A sua ideia de acrescentar dois poderá estar relacionada com o raciocínio recursivo que utilizou, por diversas vezes, quando o Ricardo tentava descobrir a relação entre os quadrados brancos e o número de ordem da figura aquando da 4.ª questão.

Para a resolução da questão, os alunos fizeram o registo de todos os cálculos.

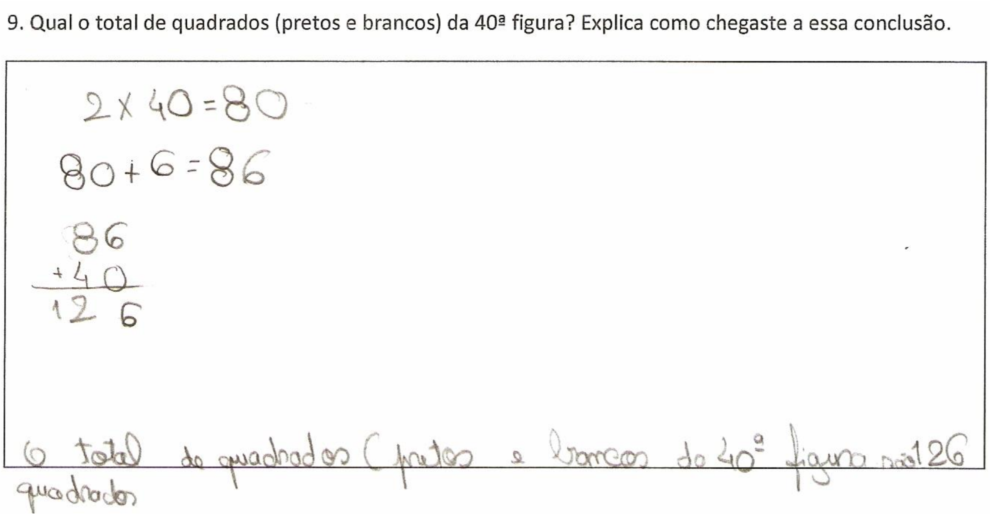
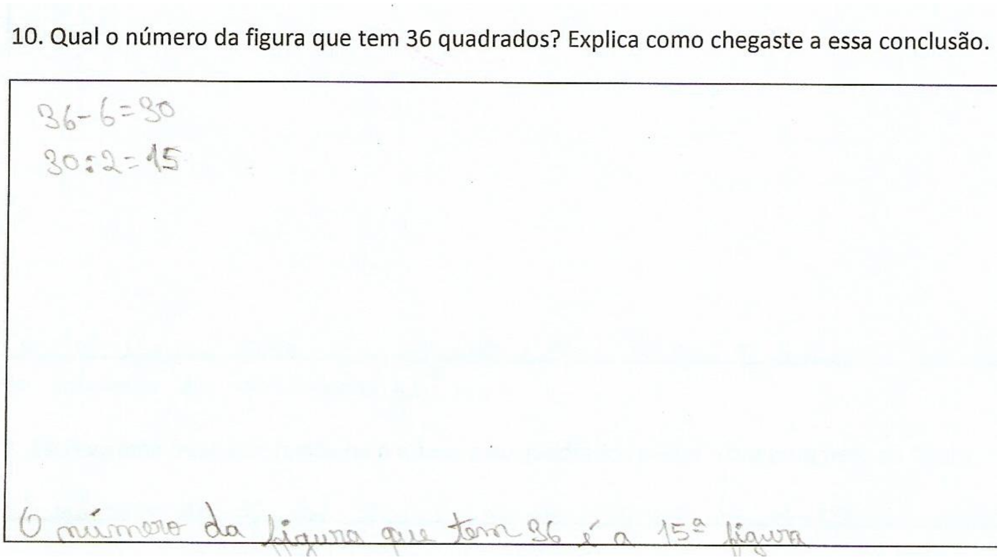


Figura 96- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 9.ª questão da tarefa 5

A 10.ª e última questão solicitava a aplicação do raciocínio inversivo de acordo com o número total de quadrados da figura.

> Ricardo- Dez. Qual o número que tem 36 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão. (*lendo o enunciado*)
>
> Patrícia- Trinta e seis…
>
> Ricardo- Então, temos que fazer, trinta e seis menos seis… (…) Trinta e seis menos seis, igual a trinta. Agora, trinta a dividir por dois…
>
> Patrícia- Que dá quinze.
>
> Ricardo- Então, é a 15.ª figura. (…) Então, quinze vezes dois, trinta. Trinta mais seis, trinta e seis.

Como foi notório no diálogo apresentado, o grupo errou esta resolução porque fez o raciocínio inversivo da relação funcional encontrada para os quadrados brancos e não o raciocínio inversivo para a quantidade total dos quadrados. Até mesmo quando fez a verificação, o Ricardo, que havia conseguiu fazer a decomposição do termo em quadrados pretos e brancos na questão anterior, não teve em consideração novamente essa decomposição colocando apenas duas vezes o número de ordem da figura (“Então, quinze vezes dois, trinta. Trinta mais seis, trinta e seis.”), esquecendo-se de colocar o número da figura, uma terceira vez, para fazer também a contagem dos quadrados pretos.


10. Qual o número da figura que tem 36 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão.

36-6=30
30:2=15

O número da figura que tem 36 é a 15ª figura

Figura 97- Apresentação de resultados feita pelo Ricardo, para a 10.ª questão da tarefa 5

Revisão da tarefa 5

No momento de revisão da 4.ª questão, os alunos recorreram à relação encontrada para a verificação de resultados.

> Ricardo- Quantos quadrados brancos terá a 4.ª figura? (*lendo o enunciado*) Como já sabemos é… Temos de fazer quatro vezes dois, oito. Oito mais seis, catorze. Está certo.

Na revisão da 5.ª questão, os alunos utilizaram o raciocínio inversivo para a verificação dos seus resultados.

> Ricardo- (…) Quantos quadrados brancos terá a 10.ª figura? (*lendo o enunciado*) Então, fazemos, fazemos… Vinte e seis menos seis…
>
> Patrícia- Igual a vinte. A seguir?
>
> Ricardo- Não, não, não. Espera aí. Igual a vinte. A dividir por dois, igual a dez. Certo.

Também para a revisão da 9.ª questão, como vinha sendo hábito, o Ricardo tentou utilizar o raciocínio inversivo.

> Ricardo- Agora aqui na nove. Vamos fazer cento e vinte e seis menos seis igual a cento e vinte. Cento e vinte… a dividir… (*pausa*) por dois é igual a sessenta…
>
> Patrícia- Agora sessenta…
>
> Ricardo- Agora, temos que… (*pausa*) Aqui não há solução.

Neste extrato ficou percetível que o Ricardo revelou dificuldades no raciocínio inversivo quando dado o número total de quadrados para descobrir a figura porque utilizou a apenas a relação conhecida para os quadrados brancos. Por este motivo talvez tivesse sido pertinente ter sido também pedida a frase onde fosse escrita a relação entre o número total de quadrados e o número da figura.

No final, os elementos da díade voltaram a discutir a resolução da 10.ª questão.

> Ricardo- Qual o número que tem 36 quadrados?
>
> Patrícia- Trinta e seis menos seis, trinta. Trinta a dividir por dois, quinze. Que vai dar a 15.ª figura.
>
> Ricardo- Pera [sic] aí, é… (*pausa*) Esta não está bem.
>
> Patrícia- A 15.ª figura… (*e vai buscar novamente o material*)

Ricardo- Está a dizer o total. Qual o número da figura que tem 36 quadrados?

Patrícia- Ah! É o total e nós fizemos… separado.

Ricardo- Então, temos de fazer trinta e seis menos seis igual a trinta. Trinta a dividir por dois…

Patrícia- Trinta e seis menos seis…

Ricardo- Igual a quinze…

Patrícia- Eu acho que não…

Ricardo- Mais um é dezasseis. Se quiseres podemos verificar!? Que vai dar. A 4.ª figura vai ter catorze quadrados. 5.ª…

Patrícia- A 5.ª vai ter…

Ricardo- Dezasseis. A 6.ª vai ter dezoito.

Patrícia- A 7.ª… Vinte.

Ricardo- Vinte. A 8.ª, vinte e dois. A 9.ª, vinte e quatro. A 10.ª, vinte e seis. A 12.ª, vinte e oito. A 14.ª… Quer dizer… Aí… Chi [sic] … Estamos a saltar… Estamos a saltar…

Patrícia- Não, não saltámos.

Ricardo- Sim. Olha, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, aqui é 11…

Patrícia- Não saltaste.

Ricardo- 12, 12.ª figura vai ter trinta, a 13.ª, trinta e dois, a 14.ª, trinta e se…

Patrícia- Trinta e quatro…

Ricardo- Trinta e quatro, a 15.ª, trinta e seis. Tinhas razão.

Nesta revisão, o grupo voltou a mobilizar o raciocínio inversivo tendo por base a relação funcional dos quadrados brancos com o número de ordem da figura. Contudo, o Ricardo não se mostrou totalmente convencido e decidiu recorrer a um raciocínio recursivo para efetuar a verificação. E mais uma vez errou porque utilizou o raciocínio recursivo, acrescentando dois quadrados de figura a figura, raciocínio este que fora utilizado pela Patrícia na contagem dos quadrados brancos e não para a contagem de todos os quadrados (pretos e brancos). O Ricardo ficou totalmente convencido porque depois da utilização deste raciocínio recursivo terminou com uma contagem de 36 quadrados, valor esse que era igual ao resultado dos seus cálculos com a aplicação do raciocínio inversivo. Contudo, esta contagem de 36 quadrados teria efetivamente de ser igual porque as estratégias utilizadas tinham ambas em consideração apenas a contagem dos quadrados brancos e não da quantidade total de quadrados da figura.

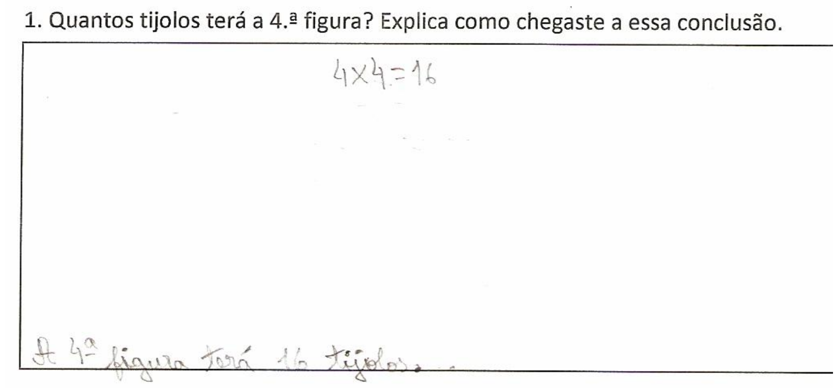
Tarefa 6

Depois de entregue o material (14 quadrados e 10 triângulos) ao grupo e a folha de registo, os elementos da díade retiraram o material do envelope e começaram a construir a 4.ª figura. Decidiram construir a figura com a cooperação dos dois elementos, estando o Ricardo responsável pela construção da parte dos triângulos e a Patrícia responsável pela construção da parte dos retângulos.

> Ricardo- 4.ª figura. Como é a 4.ª figura vai começar em baixo com quatro triângulos.
>
> Patrícia- Lá em baixo vão ficar… são os quadrados.
>
> Ricardo- E depois vai decrescendo. E depois vai decrescer. Não, primeiro… Vamos fazer primeiro com os triângulos. Não, os triângulos é mais fácil. Vamos fazer assim…
>
> Patrícia- Eu faço os quadrados. Com licença… Um, dois, três… O número de baixo corresponde ao número da figura.
>
> Ricardo- E na vertical corresponde ao número da figura também.
>
> Patrícia- Eu faço os triângulos e tu os quadrados. (*pausa*) Já está.
>
> Ricardo- Ajuda-me lá nos quadrados. (*pausa*) Não vai chegar, vamos ter que arranjar uma maneira. (…) Vamos usar simplesmente o desenho. (…) Espera aí, não é preciso fazer o desenho. Patrícia, não é preciso usarmos o desenho.
>
> Patrícia- Então, como é que fazemos?
>
> Ricardo- São tijolos, não são as telhas. Portanto podemos fazer uma conta.
>
> Patrícia- Uma conta?
>
> Ricardo- Uma simples conta. Então podemos fazer quatro vezes quatro, igual a dezasseis. Quatro em cima, quatro em baixo, quatro no meio e outros quatro no meio.
>
> Patrícia- Ok. Então…
>
> Ricardo- Quantos tijolos terá a 4.ª figura? (*pausa*) A 4.ª figura terá dezasseis quadrados.

Numa primeira abordagem, os alunos revelaram mobilizar um pensamento funcional, focando sempre a relação entre algumas características dos termos e a respetiva ordem ("Como é a 4.ª figura vai começar em baixo com quatro triângulos."), ("O número de baixo corresponde ao número da figura.") e (E na vertical corresponde ao número da figura também.").

Depois da distribuição de tarefas, a Patrícia percebeu rapidamente que não tinha quadrados suficientes e para evitar esse constrangimento e a necessidade de ter de encontrar um estratagema para superar esse constrangimento, ela sugeriu que trocassem de tarefa ("Eu faço os triângulos e tu os quadrados."). Por seu lado, o Ricardo, quando se viu perante essa dificuldade, referiu que tinham de encontrar outra forma para chegarem à resposta e sugeriu a representação da 4.ª figura através do desenho. Aquando da representação da figura, o Ricardo notou que não teria a necessidade de representar a parte dos triângulos mas só a parte do quadrados (tijolos) e esse facto levou-o a adotar o cálculo multiplicativo ("Uma simples conta. Então podemos fazer quatro vezes quatro, igual a dezasseis. Quatro em cima, quatro em baixo, quatro no meio e outros quatro no meio."), descrevendo ainda a forma como fez a decomposição da parte do termo relativa aos tijolos. Quando identificou o número da figura no número de quadrados na base e na vertical, os alunos marcaram a estrutura linha/coluna subjacente ao modelo retangular desta parte do termo. Provavelmente, foi esta a estrutura que levou o Ricardo ao produto de 4 por 4, referindo-o depois de forma aditiva enumerando-a na localização nas diversas linhas. Esta sua visualização e decomposição da parte do termo levou à confirmação de que o Ricardo começou a mobilizar um raciocínio funcional.


1. Quantos tijolos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

4x4=16

A 4ª figura terá 16 tijolos.

Figura 98- Apresentação de resultados feita pelo Ricardo, para a 1.ª questão da tarefa 6

Na 2.ª questão, e após a leitura da questão, os alunos encetaram a sua resolução.

Ricardo- (…) Então fazemos, dez…

Patrícia- Vezes quatro…

Ricardo- Não, dez vezes dez.

Patrícia- Que dá cem.

Neste extrato ficou percetível que a Patrícia não tinha atingido o raciocínio funcional porque não conseguiu aplicar a relação para a 10.ª figura e por isso mesmo é que sugeriu “Vezes quatro…”.

O Ricardo, efetivamente, atingiu um raciocínio funcional conseguindo apropriar-se da relação funcional e aplicá-la a um número de ordem mais distante sem ter de reproduzir a evolução de figura a figura.

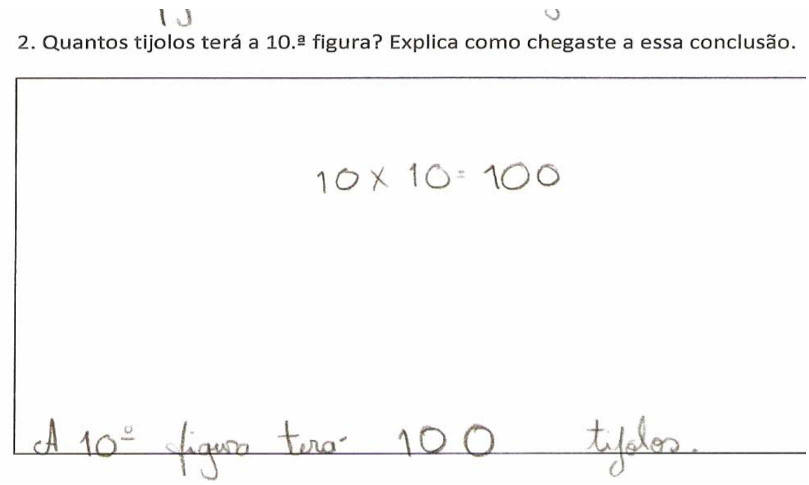


Figura 99- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 2.ª questão da tarefa 6

Depois da resolução das duas primeiras questões foi solicitada a escrita da relação entre o número de tijolos e o número da figura.

Patrícia- A relação…

Ricardo- Entre o número de tijolos com o número da figura… da figura… é… Não sei como é que vamos explicar isto em palavras mas é sempre o número vezes o número da figura…

Patrícia- Então quatro vezes *n*…

Ricardo- Não, é vezes, é vezes o número da figura.

Patrícia- Da figura… Já tá [sic].

Ricardo- Espera aí. Ou podemos fazer de outra forma, que é mais fácil.

Patrícia- Como?

Ricardo- Podemos fazer a expressão matemática. Podemos fazer *n* x *n*.

Patrícia- Ah!?

Ricardo- *n* x *n*.

(…)

Patrícia- *n* x *n*, pode ser duas vezes o número da figura como pode ser duas vezes o número de tijolos.

Este diálogo evidenciou a evolução do raciocínio funcional do Ricardo. Num primeiro instante, o Ricardo afirmou que era difícil explicar por palavras ("Não sei como é que vamos explicar isto em palavras mas é sempre o número vezes o número da figura…") mas esta sua dificuldade fê-lo evoluir até à escrita de uma expressão algébrica com a utilização de uma letra representativa do número da figura.

A expressão algébrica sugerida pelo Ricardo não foi totalmente compreendida pela Patrícia, pois esta ao verbalizar "*n* x *n*, pode ser duas vezes o número da figura como pode ser duas vezes o número de tijolos." refere a potência n^2 como se tratando de um dobro (2 x número da figura). No entanto, a expressão do dobro parece dever-se à sua dificuldade em exprimir a multiplicação do número por si próprio duas vezes.

Para a escrita da relação, os alunos escreveram: "A relação entre o número de tijolos com o número da figura é vezes o número da figura. (*n* x *n*)".

Para a resolução da 4.ª questão, a Patrícia sugeriu a continuação de figura a figura partindo da 4.ª figura, mas o Ricardo recusou esta sua sugestão pois pretendia fazê-lo de outra forma.

Ricardo- Então, trinta e seis tijolos… temos que procurar um número em que tenha trinta e seis. Temos de procurar os divisores de trinta e seis.

Patrícia- Vá!

Ricardo- O 2. O 3. O 6. Ah! E o 4 também. E depois já não há… E o 23. Agora temos que escolher um que faça sentido. O 2 já não vale a pena, porque já foi. O 3 também. O 4 também. Agora só sobra o 23 e o 6. Usamos o desenho?

Patrícia- Sim. Não é mais fácil… fazermos uma tabela.

Ricardo- Se quiseres, podemos continuar. Vamos continuar. (*dando a entender que podem continuar de figura a figura mas colocando os dados em formato de* *tabela*) (…) Se a 10.ª figura são cem, deve ser menor. A 9 não pode ser. A 8 não pode ser. Podemos fazer o desenho. Vamos só continuar. Ok, paramos na 5.ª figura. A 5.ª figura, quantos tijolos irá ter? Vinte e cinco. Total... Quer dizer, total não é preciso. Total, não. Vinte e cinco tijolos. 6.ª figura, irá ter trinta e seis, porque seis vezes seis é trinta e seis.

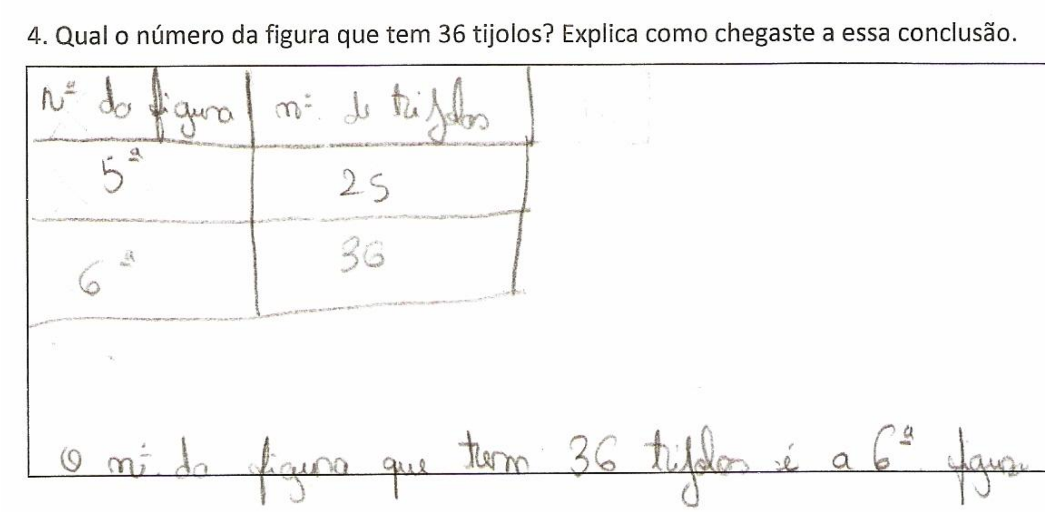
Patrícia- Então, já encontrámos.

Ricardo- Sim. 6.ª figura.

A aplicação inversa da relação funcional do quadrado de *n* implicaria a determinação de uma $\sqrt{n}$, conteúdo que só será abordado no 3.º Ciclo. Daí que, inicialmente, o Ricardo tentasse utilizar a relação funcional encontrada ao procurar os divisores do número 36 ("Temos de procurar os divisores de trinta e seis."). Contudo, depois de encontrar alguns deles (tendo considerado erradamente o 23 como divisor, provavelmente na determinação da metade de 46), não os foi eliminando de acordo com a relação encontrada de $n \times n$, mas sim por eliminação de acordo com dados já conhecidos acerca da 2.ª, 3.ª e 4.ª figuras, restando-lhe a 6.ª figura e a 23.ª figura como hipóteses. Aí, o Ricardo optou por querer encontrar a sua resposta recorrendo à estratégia do desenho mas acabou por ser influenciado pela Patrícia que continuou a insistir na verificação de figura a figura, usando a construção de uma tabela de registo de dados ("Não é mais fácil… fazermos uma tabela."). Mesmo aceitando a sugestão da Patrícia, o Ricardo ainda encetou um outro raciocínio de verificação de figura a figura partindo da 10.ª figura e indo por ordem decrescente até à 8.ª figura. Apesar dessa tentativa, não houve uma verbalização clara por parte do Ricardo que permitisse perceber qual o raciocínio utilizado porque foi apenas eliminando figuras ("A 9 não pode ser. A 8 não pode ser.").

Após esta tentativa, volta à estratégia indicada pela Patrícia com a construção da tabela começando na 5.ª figura. Para o preenchimento da tabela, o Ricardo já mobilizou um raciocínio funcional, pelo menos quando verbalizou a forma como encontrou o total de tijolos da 6.ª figura ("6.ª figura, irá ter trinta e seis, porque seis vezes seis é trinta e seis.") utilizando a relação encontrada entre o número de tijolos e o número de ordem da figura.

Nesta resolução, a Patrícia apenas sugeriu a estratégia da resolução com uma tabela e depois ausentou-se de todo o trabalho que acabou por ser feito pelo Ricardo.



4. Qual o número da figura que tem 36 tijolos? Explica como chegaste a essa conclusão.

Nº da figura	nº de tijolos
5ª	25
6ª	36

O nº da figura que tem 36 tijolos é a 6ª figura

Figura 100- Tabela feita pela Patrícia, para a 4.ª questão da tarefa 6

A 5.ª questão interrogava acerca da quantidade de telhas da 4.ª figura. A Patrícia, como já havia construído com o material esta parte da figura aquando da resolução da 1.ª questão, foi muito rápida na explicitação da forma como visualizava esta parte da figura.

> Patrícia- (…) Sim, porque em baixo vão ter quatro, em cima três, depois mais em cima dois, depois um.
>
> Ricardo- Só vejo uma solução… (*pausa*) Podemos fazer outra conta, em vez… em vez do desenho. (pausa) Ou podemos… Podemos fazer, já sei, quatro…
>
> Patrícia- Olha, já fiz as telhas. Olha só: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (*utilizando novamente o material*).
>
> Ricardo- Ou podemos fazer quatro, mais três, mais dois, mais um. (*e escreve 4 + 3 + 2 + 1 = 10*) (…) Mas podemos fazer também o desenho. Vou fazer o desenho. Acho que podia ficar mais correto com desenho.
>
> (*ambos fazem o desenho das telhas da 4.ª figura e apagam o cálculo*)

Para a resolução desta questão, os alunos começaram por descrever a forma como haviam visualizado esta parte do padrão, tanto a Patrícia ("… em baixo vão ter quatro, em cima três, depois mais em cima dois, depois um.") como o Ricardo ("Ou podemos fazer quatro, mais três, mais dois, mais um.") que até registou o cálculo que fez. Apesar disso, decidiram posteriormente apagar esse cálculo e proceder à representação pictórica da 4.ª figura.

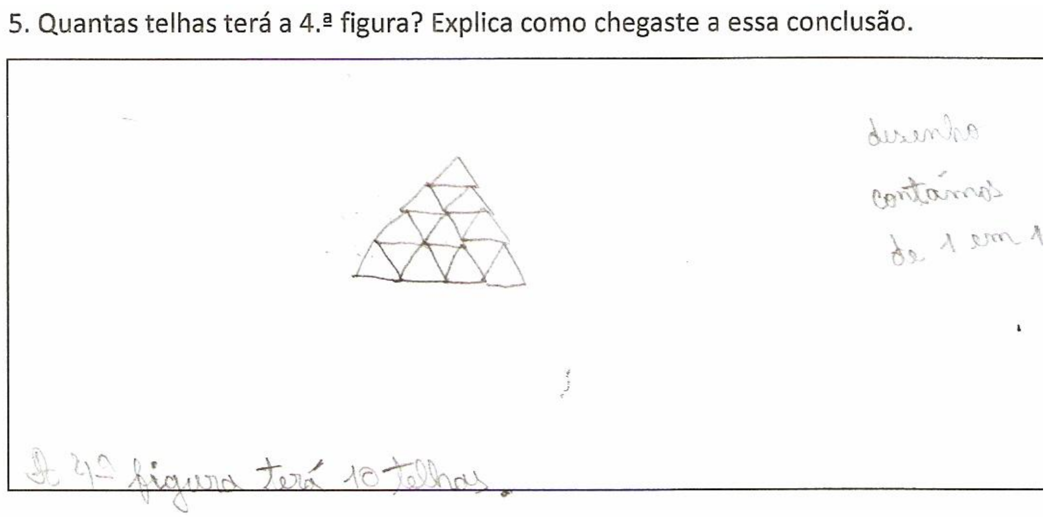


Figura 101- Representação pictórica da parte do termo das telhas da 4.ª figura feita pelo Ricardo, para a 5.ª questão da tarefa 6.

Também a 6.ª questão interrogava acerca do número de telhas, mas desta vez da 10.ª figura. Os elementos da díade pensaram que poderiam fazer a representação pictórica da figura mas depressa se aperceberam que iriam demorar muito tempo. Então decidiram-se por outra estratégia que seria mais rápida.

Ricardo- (…) Ou se quiseres podemos fazer uma coisa mais fácil, contas.

Patrícia- Ok, mais fácil, contas.

Ricardo- Podemos fazer… Podemos fazer, dez mais nove, mais oito, mais sete, mais seis, mais cinco… (…) Dez mais nove, dezanove. Mais oito, dezanove mais oito, vinte e sete. Vinte e sete mais sete, trinta e quatro. Trinta e quatro mais seis, quarenta. Quarenta…

Patrícia- Quarenta e cinco…

Ricardo- Quarenta mais cinco, quarenta e cinco.

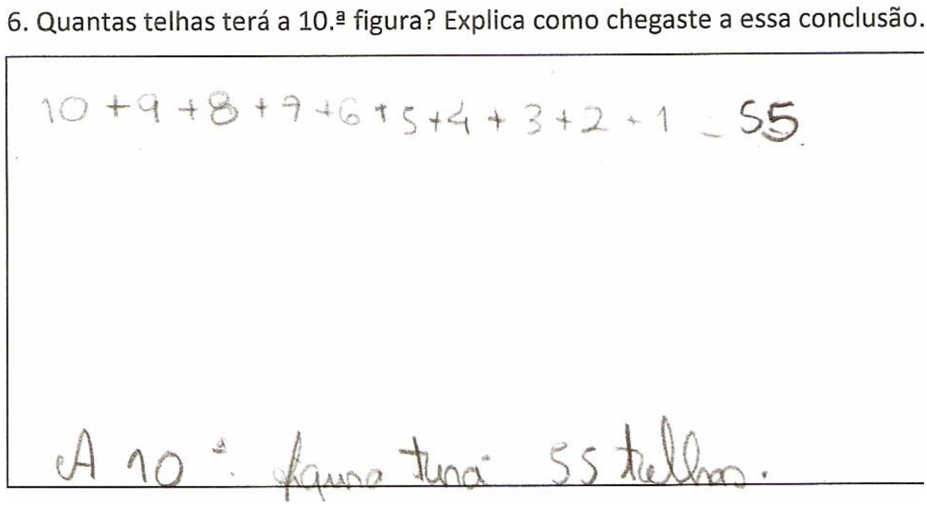
Patrícia- Quarenta e cinco mais quatro…

Ricardo- Quarenta e nove.

Patrícia- Quatro…

Ricardo- Quarenta e nove mais três, cinquenta e dois. Mais dois, cinquenta e quatro e mais um, cinquenta e três. Ah! Não! Cinquenta e cinco. Resposta. A 10.ª figura… terá… cinquenta e cinco telhas.

Nesta questão, os alunos decidiram fazer a sua resolução recorrendo a uma adição porque seria mais rápido e porque ambos eram muito hábeis na realização de cálculos. A forma como organizaram a adição revelou a forma como o Ricardo visualizava esta parte do padrão.


6. Quantas telhas terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55

A 10.ª figura terá 55 telhas.

Figura 102- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 6.ª questão da tarefa 6

Para a resolução da 7.ª questão, e como era pretendida a apresentação da quantidade total de peças de 6.ª figura, a Patrícia optou por fazer a contagem de todas as peças da 2.ª e da 3.ª figura da sequência.

Ricardo- (...) Contaste o quê?

Patrícia- Contei estes. (*respondendo que tinha estado a contar as peças todas da 3.ª figura*)

Ricardo- Quinze… (*depois de contar também as peças da 3.ª figura*) Então podemos fazer…

Patrícia- Eu acho que é sempre mais oito.

(*o Ricardo acena que não com a cabeça*)

Patrícia- A 2.ª figura tem sete. (*pausa*) Espera aí. (*a Patrícia escreve na sua folha que a 3.ª figura tem 15 peças, a 4.ª figura tem 23 peças, a 5.ª figura tem 31 peças e a 6.ª figura tem 39 peças*)

Ricardo- Acho que é melhor fazermos uma tabela, que é mais fácil.

Patrícia- Estive aqui a fazer, a mim deu-me trinta e nove a 6.ª figura.

Ricardo- Então a 6.ª figura vai ter trinta e seis, não vai? Trinta e seis tijolos. (…) Trinta e seis tijolos. Mas para ser mais fácil, podemos fazer o desenho da 6.ª figura.

Patrícia- Ok. Então, começamos em cima com seis…

(…)

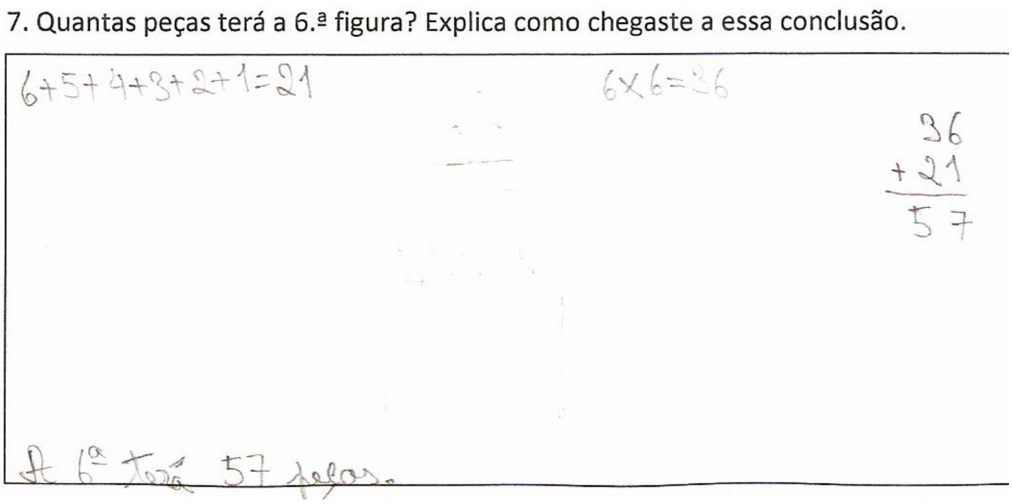
Ricardo- Então… Espera aí, há aqui uma maneira. (*e apaga o seu desenho depois de ter construído toda a figura*) Podemos fazer de uma maneira ainda mais fácil. Podemos fazer… decrescente como nós estávamos a fazer. Podemos fazer… Como tu estás a fazer agora… Seis mais cinco, mais quatro, mais três, mais dois e mais um. (…) Seis mais cinco, onze, mais quatro, quinze, mais três, dezoito, mais dois, vinte, mais um, vinte e um. Agora fazemos já os tijolos. (…) Fazemos seis vezes seis, que dá trinta e seis. Agora fazemos vinte… trinta e seis mais vinte e um…

Patrícia- Cinquenta e sete.

A Patrícia apresentou uma conjetura recorrendo ao raciocínio recursivo ("Eu acho que é sempre mais oito.") porque verificou que da 2.ª figura para a 3.ª figura havia um acréscimo de 8 peças, assumindo que haveria uma diferença constante entre os termos como tinha acontecido nos padrões anteriores. Para tentar convencer o Ricardo, que tinha refutado a sua ideia, a Patrícia começou a tentar provar a sua teoria de ser sempre mais oito, escrevendo na sua folha que a 3.ª figura tinha 15 peças, a 4.ª figura tinha 23 peças, a 5.ª figura tinha 31 peças e a 6.ª figura tinha 39 peças. Quando esta afirmou que a 6.ª figura teria um total de 39 peças, o Ricardo imediatamente fê-la pensar e questionou-a de que a 6.ª figura tinha um total de 36 tijolos, como já haviam verificado, e sugeriu a realização da representação pictórica da 6.ª figura.

Depois de feita esta representação, o Ricardo compreendeu que poderiam fazer de outra forma recorrendo à decomposição do termo, nomeadamente fazendo os cálculos para a parte das telhas e os cálculos para a parte dos tijolos, como já havia feito nas restantes questões e depois juntar esses cálculos.

Mais uma vez ficou bem patente que a Patrícia privilegiou um raciocínio recursivo ao invés do Ricardo que privilegiou um raciocínio mais focado em cada um dos termos. A forma como ele efetuou a decomposição da parte das telhas, levou-o a atentar nas linhas sucessivas com um número decrescente de triângulos. Este exprimiu o número de telhas através da soma dos números compreendendo que tal sequência corresponde aos números naturais desde o 1 até ao 6 (número da figura). Assim, o Ricardo consegue determinar qualquer número de telhas através da soma dos números naturais até ao número da figura, sem precisar de construir as figuras anteriores. No entanto, esta forma iterativa faz com que seja um processo muito moroso para a determinação de termos distantes, uma vez que não recorre à expressão do termo geral. Ou seja, apesar da forma como determinou o número de telhas corresponder à forma recursiva de exprimir a sequência das figuras triangulares correspondentes à parte das telhas, pois explicita o que se acrescenta de figura a figura (o número de telhas da parte lateral), não foi esse o seu raciocínio, tendo antes decomposto o termo em linhas, compreendendo a sua ordenação decrescente.


7. Quantas peças terá a 6.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

6+5+4+3+2+1=21

6×6=36

36
+21
57

A 6ª terá 57 peças.

Figura 103- Apresentação de resultados feita pelo Ricardo, para a 7.ª questão da tarefa 6

A realização de 8.ª questão que preconizava a aplicação da relação encontrada para os tijolos numa figura distante, os alunos foram muito céleres nas suas respostas.

> Ricardo- Oito. Quantos tijolos terá a 100.ª figura? (*lendo o enunciado*) A 100.ª figura, não é? Como nós fizemos quase em todos, na 1 e na 2, podemos fazer cem vezes cem.
>
> Patrícia- Igual…
>
> Ricardo- Ok. Então, vamos esquecer os zeros. Cem vezes um, cem. Mais um zero, mil. E mais outro zero, dez mil. Dá dez mil.

A rapidez com que efetuaram este cálculo decorreu da compreensão que haviam feito da relação entre o número de tijolos e o número de ordem do termo, aplicando a expressão algébrica *n* x *n*.

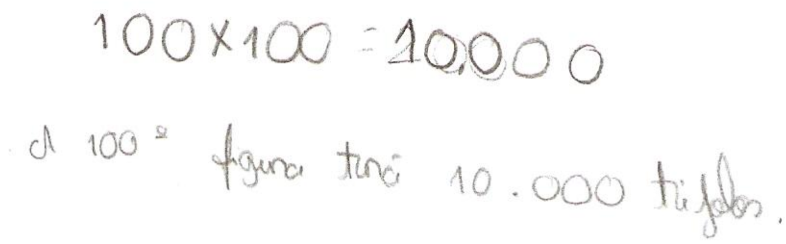


Figura 104- Apresentação de resultados feita pela Patrícia, para a 8.ª questão da tarefa 6

Ao longo desta tarefa, muitas das vezes, não foi compreensível o tipo de raciocínio mobilizado pela Patrícia, dada a falta de dados nas participações que fez.

Revisão da tarefa 6

No momento de revisão, o grupo voltou à 3.ª questão por forma a proceder a alguns melhoramentos.

> Ricardo- A relação entre o número de tijolos com o número da figura é vezes o número da figura. Acho que isto não faz sentido. (…) Espera, pera [sic], espera, isto não faz sentido. É o número da figura… vezes… (*pausa*) O número da figura vezes… (*pausa enquanto apaga a sua frase*) Não explicámos bem, temos… (…) A relação entre o número de tijolos com o número da figura é… é… o número… (…) É o número da figura…
>
> Patrícia- É o número da figura…
>
> Ricardo- Podemos pôr a dividir… pelo número de tijolos.
>
> Patrícia- Ok.
>
> Ricardo- Mas… (…) Espera aí. Mas às vezes não sabemos. É o número da figura, podemos pôr vezes.
>
> Patrícia- Vezes… (*pausa*) Vezes… (*pausa*) Não era mais fácil se fazermos assim, escrevêssemos nesta folha o que nós pensamos, depois para ver e passamos aqui.
>
> Ricardo- Vezes o próprio número da figura.

O melhoramento da escrita da relação incidiu no completamento da expressão usando a linguagem natural ("…figura é vezes o número da figura. Acho que isto não faz sentido."). No momento em que o Ricardo ponderou colocar a divisão, ele pensa exprimir a relação funcional através do raciocínio inversivo (número total de tijolos a dividir pelo número da figura). Abandona esta ideia ao aperceber-se que por vezes não se sabe o número total de tijolos sendo que é precisamente a relação que permite determinar qualquer termo, isto é, qualquer número de tijolos. Depois, focando o seu raciocínio na expressão algébrica, conseguiu clarificá-la, explicitando o significado do *n*. Ao contrário dos esforços do Ricardo, a Patrícia demonstrou uma atitude muito mais passiva acabando na maioria das vezes por repetir aquilo que o Ricardo lhe dizia. Para a resposta escrita da relação entre a parte do termo dos tijolos e o valor de ordem do termo, os alunos escreveram: "A relação entre o número de tijolos com o número da figura é o número da figura vezes o próprio número da figura (*n* x *n*)."

No momento de revisão da resposta à 4.ª questão, o Ricardo já foi bastante mais claro na forma como construiu a tabela.

> Ricardo- Chegámos à conclusão que quatro vezes quatro, dezasseis. Cinco vezes cinco, vinte e cinco. E seis vezes seis, trinta e seis.

Pelo seu diálogo, ficou percetível a utilização de um raciocínio funcional apesar de ter corrigido as figuras, uma a uma, partindo da 4.ª até chegar à 6.ª, mesmo quando a 4.ª figura não fazia parte da construção da tabela. A necessidade de percorrer as várias figuras decorreu da dificuldade em inverter o raciocínio nesta situação.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

O presente estudo tem como objetivo compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano de escolaridade, em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências pictóricas e procura responder às seguintes questões:

i) Quais as estratégias e raciocínios utilizados pelos alunos?
ii) Como evoluem as estratégias utilizadas pelos alunos e o seu raciocínio?
iii) Que fatores influenciam essa evolução?

Este capítulo está organizado por forma a dar resposta às questões orientadoras deste estudo.

5.1. Estratégias e raciocínios

As estratégias e os raciocínios estiveram estreitamente interligados durante a exploração das tarefas e relacionam-se entre si. Os alunos usaram as seguintes estratégias: estratégia de representação e contagem, estratégia aditiva, e estratégia de decomposição dos termos (Ponte et al., 2009). Assim, neste estudo, de entre as estratégias elencadas em Ponte et al. (2009), apenas não houve a evidência de utilização da estratégia do objeto inteiro. Relativamente aos raciocínios, também foi notória a verificação de que todos os alunos conseguiram fazer generalizações próximas (Stacey, 1989; Vale, Pimentel, Alvarenga et al., 2011), associadas à utilização de estratégias aditivas, apresentando assim um raciocínio recursivo por terem a necessidade de verificarem o que ia alterando de figura para figura. Para tal, os alunos ancoraram-se nas figuras anteriores representadas no padrão apresentado, ou nas figuras modeladas com o material ou ainda em cálculos matemáticos que lhes permitia verificar o que se acrescentava de figura a figura, focando-se não na visualização da figura mas na contagem dos elementos de cada figura.

No grupo da Clara e do José, as estratégias apresentadas pelos dois alunos foram muito díspares. A Clara foi a que mais evidenciou a estratégia da representação e contagem e a mais persistente com a modelação das figuras através do material manipulável. Primeiramente, efetuava a modelação das figuras, depois procedia à contagem de todos os elementos do termo requerido e no final fazia a representação pictórica da figura. Noutras situações, aplicou a estratégia aditiva ao referir o que acrescentava de figura a figura, apresentando um raciocínio recursivo. A aplicação de estratégia de decomposição dos termos ocorreu apenas em alguns momentos pontuais, nomeadamente na tarefa 2, quando a Clara compreendeu claramente que o termo poderia ser decomposto em duas colunas e, focando-se na coluna do lado esquerdo, afirmou que esta teria o número de quadrados do termo, evidenciando um raciocínio funcional. Durante a realização de todas as tarefas, a Clara assumiu um papel muito mais passivo, não havendo muitos dados sobre as estratégias ou raciocínios utilizadas por ela. Este facto poderá ter ocorrido por vários fatores: o José era sempre muito rápido na partilha da sua estratégia não dando espaço a que a Clara verbalizasse a sua estratégia; a autoestima da Clara era baixa e por isso omitia a forma como estava a pensar; e mesmo quando verbalizava a forma como pensava, o José desvalorizava o seu trabalho; e a limitação do material pode ter sido excessiva para a fase de aprendizagem da Clara. Estes fatores poderão ter condicionado o seu trabalho, levando-a muitas das vezes a copiar o que o José fazia. Por seu lado, o José apresentou sempre um pensamento muito mais estruturado no que concerne às estratégias utilizadas. Relativamente à utilização da estratégia de representação e contagem, esta estratégia foi mais evidente na tarefa 4, quando na 6.ª questão se pretendia a utilização do raciocínio inversivo para identificar a figura que teria 61 palitos. Nesta questão, o José representou e contou unitariamente os 61 palitos de acordo com a estrutura do padrão e só depois chegou ao número da figura, por reconhecer que o número de quadrados formados com os palitos era igual ao número de ordem do termo. Por diversas vezes, o José demonstrou ter aplicado a estratégia aditiva, tanto pela modelação das figuras através do material, como pela representação pictórica das figuras ou até mesmo quando refere o que se acrescenta de figura para figura, utilizando a linguagem natural nos diálogos com a Clara e comigo, e desta forma evidenciando um raciocínio recursivo. A estratégia da decomposição dos termos demonstrou-se ser um ponto forte do José que o levava a estabelecer a relação entre o termo e o seu número de ordem. Utilizou esta estratégia, tirando partido do contexto visual, ou seja, decompondo as figuras em partes e raciocinando visualmente (Barbosa et al., 2008), de forma a relacionar o número de ordem do termo com o número de itens presentes em cada uma das partes. A partir daqui, ele conseguia aplicar a relação encontrada para termos mais distantes, e numa última instância efetuar até um raciocínio inversivo, evidenciando um raciocínio funcional.

No grupo da Susana e do Emanuel, as estratégias apresentadas pelos dois alunos foram muito similares. O grupo utilizou a estratégia de representação e contagem maioritariamente nos padrões que apresentavam figuras diferentes no mesmo padrão, ou seja, nos padrões com partes brancas e partes coloridas (tarefa 1 e 5) e nos padrões com figuras diferentes (tarefa 6). A estratégia aditiva e a estratégia de decomposição dos termos foram utilizadas quase com a mesma frequência em todas as tarefas. A Susana foi uma aluna muito ponderada ao nível do seu desempenho em todas as tarefas. Para esta aluna, o contexto visual foi muito importante. Primeiramente, a Susana primava pela utilização do material para modelar as figuras do padrão e desta forma compreendia quais os elementos que ia acrescentando de figura para figura e qual a posição desses elementos, apresentando assim uma estratégia aditiva aliada a um raciocínio recursivo (tarefa 3). Quando não o conseguia fazer desta forma, procedia à contagem dos elementos dos termos e, comparando os números entre si, tentava perceber o que se ia acrescentando de figura para figura (tarefa 6). Quanto à estratégia de decomposição dos termos, e mais uma vez evidenciando o potencial do contexto visual, nomeadamente o potencial das partes coloridas do padrão (Warren & Cooper, 2008; Wilkie 2014), a Susana demonstrou essa sua capacidade conseguindo, para a mesma figura, apresentar duas formas distintas de fazer a decomposição do termo (quando na tarefa 5 decompôs a parte do termo relativa aos quadrados brancos em: duas vezes o n.º da figura mais 3 constantes, do lado esquerdo e mais outros 3 constantes, do lado direito; e duas vezes (o n.º da figura mais dois) mais dois constantes), manifestando um raciocínio funcional. Por seu lado, o Emanuel sempre se focou muito mais nos números do que no potencial visual das figuras, apresentando muitas vezes uma estratégia aditiva aliada ao raciocínio recursivo, tendo sempre a necessidade de contabilizar tudo o que fazia e modelava. Este seu foco nos números ficou bem patente na apresentação dos múltiplos (6.ª questão da tarefa 2), na tarefa 5 (com a descoberta da relação), ou quando na tarefa 3 construiu a 3.ª figura com o material e afirmava ser a 4.ª figura. Talvez por dar primazia a este foco, o Emanuel não tenha evidenciado com tanta clareza a estratégia de decomposição dos termos. Esta estratégia sobressaiu quando o termo era composto por partes coloridas ou para a descoberta de termos mais distantes (caso da 10.ª figura da tarefa 6, na parte dos tijolos), demonstrando um raciocínio funcional.

No grupo da Patrícia e do Ricardo, as estratégias apresentadas pelos dois alunos também foram diferentes, talvez até pelo empenho com que efetuaram as tarefas. A Patrícia resolveu as tarefas com alguma passividade e descontração esperando, na maioria das vezes, que o seu colega desse a resposta por ela estar a brincar com o material, por estar a olhar para os colegas ou simplesmente à espera que ele verbalizasse uma resposta, visto ser o aluno com melhor desempenho na área da Matemática. A Patrícia evidenciou maioritariamente a estratégia de representação e contagem e a estratégia aditiva. Na estratégia de representação e contagem, esta aluna modelava as figuras com o material ou esperava a modelação feita pelo colega e depois procedia à contagem dos elementos do padrão. A estratégia aditiva foi a estratégia mais evidenciada pela aluna, tendo demonstrado o recurso a esta por diversas vezes, colocando os resultados das somas sucessivas na sua folha de trabalho, como ocorreu na 6.ª questão da tarefa 3, os esquemas sugeridos por si e até nas tabelas, apresentando assim um raciocínio recursivo. A estratégia de decomposição dos termos foi utilizada pela Patrícia, principalmente por ser impulsionada pelo Ricardo no completamento do que ele ia verbalizando. Por sua vez, o Ricardo apresentou um pensamento mais estruturado do que a Patrícia relativamente às estratégias. Este aluno aproximou-se das estratégias demonstradas pelo José, principalmente por mobilizar por diversas vezes a estratégia de decomposição dos termos levando-o a estabelecer a relação entre o termo e o seu número de ordem (tarefa 6, na parte dos tijolos) e a partir daqui conseguir aplicar a relação encontrada para termos mais distantes e até aplicar um raciocínio inversivo (tarefa 5), apresentando também um raciocínio funcional. Este aluno apresentou também uma grande proximidade com os números tentando por diversas vezes, como o Emanuel, encontrar relações entre os números e não de acordo com a visualização das figuras (tarefa 1 e tarefa 5). Assim, o Ricardo utilizou a estratégia de decomposição dos termos sobretudo através de decomposições numéricas, sem se focar no contexto visual. O seu raciocínio funcional, neste caso, encontra-se associado a um raciocínio analítico, através das relações numéricas estabelecidas (Barbosa et al., 2008). A estratégia menos evidenciada por si foi a estratégia da representação e contagem, sendo mais óbvia na tarefa 4, e seguidamente, a estratégia aditiva. Este aluno, na tarefa 3, aplicou a estratégia aditiva juntamente com alguma decomposição dos termos na visualização da mesma figura, visualizando a figura como tendo uma parte horizontal, a que ia sempre acrescentando mais dois sorrisos, e uma parte vertical que correspondia ao número de ordem do termo.

Quanto aos raciocínios apresentados, a Clara foi a única aluna que numa das tarefas (tarefa 3) não conseguiu avançar para além da estratégia da representação e contagem, não apresentando, nesta tarefa nem um raciocínio recursivo nem um raciocínio funcional, porque apresentou os seus resultados baseando-se nas construções modeladas com o material ou nas indicações que o José lhe foi dando. A Clara, nas tarefas 3 e 4, também não conseguiu apresentar um raciocínio funcional. Embora, na tarefa 4, ela tenha conseguido estabelecer a relação entre o número de quadrados formados pelos palitos e o número de ordem da figura, essa relação não pode ser encarada como raciocínio funcional porque o termo são os palitos e não os quadrados formados pelos palitos. Também para a tarefa 1, o seu raciocínio funcional aplicou-se apenas a uma parte do termo, nomeadamente, à parte dos quadrados pretos, sendo que não o conseguiu fazer para todo o termo. A Patrícia também não conseguiu evidenciar um raciocínio funcional na resolução da tarefa 2, da tarefa 3 e da tarefa 6. Tal como a Clara, também a Patrícia, na tarefa 5, conseguiu apenas aplicar o seu raciocínio funcional numa parte do termo, nomeadamente, na parte dos quadrados pretos, sendo que não o conseguiu fazer para os quadrados brancos, onde apresentou um raciocínio recursivo, nem para todo o termo. Dada alguma passividade que estas alunas assumiram durante a exploração das tarefas, verifica-se a falta de evidência empírica relativamente aos tipos de raciocínio que terão mobilizado.

Todos os alunos apresentaram evidências de terem atingido um raciocínio funcional baseando-se nas generalizações distantes (Stacey, 1989; Vale, Pimentel, Alvarenga et al., 2011) feitas, embora nem todos de um modo consistente, como foi o caso de Clara e Patrícia que atingiram este tipo de raciocínio para as situações mais simples em que a parte do termo correspondia ao próprio número de ordem do termo. Estas generalizações foram maioritariamente feitas através da visualização do termo e da decomposição deste, levando os alunos a encontrar uma relação entre o termo e o seu número de ordem. Apesar de só na 6.ª tarefa se ter solicitado um termo mais distante, a 100.ª figura, a forma como os alunos estabeleceram a relação funcional entre ordem e termo permitia que conseguissem determinar qualquer termo, por mais distante que fosse.

5.2. Evolução das estratégias e dos raciocínios

A apresentação de diferentes padrões conforme a justificação apresentada na sequência de tarefas, indo desde os padrões com partes coloridas apresentando o mesmo número de elementos do número de ordem da figura e elementos constantes, a outros que evoluíam sempre da mesma forma pela decomposição do termo até a um padrão não linear, levou os alunos a adotarem posturas diferentes perante a utilização das estratégias e, de acordo com estas, evidenciando raciocínios diferentes. Neste estudo, ficou bem patente que a evolução das estratégias esteve dependente das tarefas porque a última tarefa apresentada, dado o seu grau de complexidade, por apresentar um padrão não linear, acabou por ser mais difícil e aí os alunos começaram por apresentar estratégias mais elementares como a estratégia de representação e contagem.

Ao longo das tarefas, foi notória a evolução dos raciocínios por parte dos alunos, conseguindo fazer a exploração dos padrões percecionando como estes estavam estruturados (Palhares & Mamede, 2002). Para todas as tarefas, alguns alunos demonstraram ter evoluído de um raciocínio recursivo até um raciocínio funcional (Barbosa et al., 2008; Blanton & Kaput, 2005; Smith, 2003; Warren & Cooper, 2008).

Em alguns grupos, nomeadamente no da Clara e do José e no grupo da Patrícia e do Ricardo, foi notória a disparidade entre os raciocínios apresentados pelos elementos da díade. Os alunos José e Ricardo evidenciaram ter atingido o raciocínio funcional em todas as tarefas, o que facilitou a inversão exigida em algumas questões das tarefas. Para o José, a apresentação do raciocínio recursivo esteve associado, por diversas vezes, à progressão da estratégia aditiva para a estratégia de decomposição dos termos, porque ao compreender a evolução de figura a figura, conseguia depois visualizar a figura de outra forma levando-o à decomposição dos termos, sendo bem evidente esta progressão na tarefa 3, na resolução da 1.ª para a 2.ª questão. Por seu lado, as alunas Clara e Patrícia, pelo contrário, não apresentaram indícios frequentes de terem atingido o raciocínio funcional e consequentemente, talvez por este facto não tenham conseguido aplicar o raciocínio inversivo, evidenciando maioritariamente estratégias de representação e contagem e estratégias aditivas, e em situações pontuais, a estratégia da decomposição dos termos. Assim sendo, estas alunas evidenciaram o raciocínio recursivo de forma mais recorrente do que o raciocínio funcional. Até mesmo a progressão para um raciocínio recursivo deveu-se em grande medida à limitação do material. Assim, a Clara progrediu da estratégia de representação e contagem para a estratégia aditiva, em algumas situações pontuais, perante a limitação do material que a fez aplicar a estratégia aditiva, quando referia os elementos que se acrescentavam de figura a figura. Também a Patrícia, perante a limitação do material, viu-se confrontada com a necessidade de compreender a evolução de figura a figura e foram principalmente nesses momentos que progrediu para uma estratégia aditiva (tarefa 1).

Em alguns casos, a Susana e o Emanuel também conseguiram progredir da estratégia aditiva (raciocínio recursivo) para a estratégia de decomposição dos termos (raciocínio funcional), como evidenciado na tarefa 3, pelo facto de verificarem o que se acrescentava de figura para figura.

O Ricardo e o Emanuel evidenciaram diversas vezes um raciocínio funcional, não pela visualização e decomposição figurativa do termo, mas sim pela relação entre os números, havendo aqui uma evidência clara do contexto numérico presente nos padrões. Este resultado parece contrariar o referido por Barbosa et al. (2008) quando afirmam que o contexto numérico, presente nas tabelas, pode ser dificultador. Neste caso, e dadas as características individuais destes dois alunos, de pendor mais analítico e menos visual, tal não aconteceu.

Assim, após a visualização dos padrões e da compreensão da sua decomposição, os alunos conseguiram aplicar uma linguagem natural para proceder à explicação da relação entre o termo e o seu número de ordem, chegando mesmo a transformar essa linguagem natural numa linguagem algébrica, explicitando a generalização (Blanton & Kaput, 2005; Warren & Cooper, 2008) e evocando assim um raciocínio funcional. Tal como para o raciocínio recursivo, também aqui, e dependendo do grau de dificuldade dos padrões apresentados, alguns alunos não conseguiram evoluir de um raciocínio recursivo para um raciocínio funcional.

Neste estudo, os alunos, na maioria dos casos, conseguiram ir desde uma generalização próxima para uma generalização distante, conseguindo escrever uma frase que poderia ser aplicada a qualquer termo da sequência considerando o seu número de ordem (Stacey, 1989; Vale, Pimentel, Alvarenga et al., 2011). Logo, poder-se-á afirmar que os alunos conseguiram evoluir de um raciocínio recursivo, associado à estratégia aditiva, para um raciocínio funcional, associado à estratégia de decomposição dos termos, embora em diferentes graus, através do trabalho desenvolvido com sequências pictóricas de crescimento (Barbosa et al., 2008; Blanton & Kaput, 2005; Warren & Cooper, 2008). Quanto à mobilização do raciocínio inversivo (Greer, 2012), nem sempre ocorreu a associação entre esta mobilização e o raciocínio funcional no contexto dos padrões de crescimento. Houve alunos que demonstraram ter atingido um raciocínio funcional para determinada tarefa mas aquando da resolução das questões que preconizavam o raciocínio inversivo, não o conseguiram fazer. Este resultado evidencia a complexidade inerente à inversão do pensamento (Greer, 2012).

5.3. Fatores que influenciaram a evolução

As representações foram um fator importante para a evolução dos alunos neste trabalho com padrões. Neste estudo, as representações apresentadas pelos alunos passaram pela modelação das figuras através da utilização do material disponibilizado para as tarefas, pela representação pictórica das figuras (estas representações ancorando-se muitas das vezes nas representações feitas com o material), pela construção de tabelas (Blanton & Kaput, 2005), pela utilização da linguagem natural e pela utilização da linguagem aritmética.

O material manipulável assumiu um papel importante na ancoragem do raciocínio dos alunos (Barbosa et al., 2008; Blanton & Kaput, 2005; Damas et al., 2010; Warren & Cooper, 2008). A limitação do material foi fundamental para provocar um avanço cognitivo em alguns alunos, levando-os a mobilizar um raciocínio funcional pois a impossibilidade de se ancorar na totalidade do material manipulável provocou um salto qualitativo ao nível do seu pensamento algébrico. Isto é, a impossibilidade de representação física das figuras fez com que os alunos focassem o seu pensamento nos elementos estruturantes dos termos. No entanto, essa limitação revelou-se inibidora da evolução de alunos com estratégias mais rudimentares, nomeadamente a de representação e contagem, como aconteceu com Clara.

Durante a exploração das tarefas, a utilização do material manipulável e a limitação deste assumiram papéis diferentes consoante o nível de desempenho matemático dos alunos em causa. Nas questões relativas ao número de itens onde a parte colorida era igual ao número de ordem do termo, com uma clara evidência do seu potencial visual, os alunos foram sempre muito hábeis na descoberta da relação e dessa forma não sentiram tanto a necessidade de utilização do material, ancorando-se sempre no que estavam a observar e nas suas conclusões (Barbosa et al., 2008). Todos os grupos utilizaram o material nas diversas tarefas, sendo que por parte do José, essa utilização foi muito reduzida. Ao contrário deste, a Clara, o Ricardo e a Patrícia fizeram uma utilização exaustiva do material. A Clara mais por necessidade para ancorar as suas estratégias e o Ricardo e a Patrícia como verificação de resultados. Para a Susana e o Emanuel, essa utilização era apenas feita até os alunos adquirirem alguma proficiência sobre a replicação do padrão.

A Clara sempre se mostrou muito dependente da utilização do material e mesmo quando o seu colega não demonstrava a necessidade da sua utilização, a Clara reforçava que se o material estava disponível, então seria para utilizar. Por diversas vezes, a limitação do material foi um constrangimento para esta aluna que necessitava de uma maior quantidade de material para a concretização das figuras mais distantes (Warren & Cooper, 2008). Quando isso não era possível, a Clara recorria à representação pictórica da figura para responder à questão e quando não conseguia fazer essa representação de forma autónoma, por não ter compreendido a forma de construção da figura, pedia o auxílio ao José que lhe descrevia a figura e lhe indicava como deveria representar a figura. Assim, a Clara, embora manifestando envolvimento nas tarefas, nomeadamente na concretização do trabalho na sua folha, assumiu alguma passividade na modelação das figuras com o material manipulável (que esteve quase sempre a cargo de José), acabando por seguir o trabalho do colega sem desenvolver o seu próprio pensamento.

Também a Patrícia se mostrou muito dependente do material para a modelação das figuras e a limitação deste também se revelou um constrangimento para esta aluna. Ao contrário da Clara, que perante a limitação do material recorria à representação pictórica das figuras, a Patrícia recorria à estratégia aditiva tentando perceber o que acrescentava de figura a figura até porque em algumas situações, principalmente na tarefa 1, a Patrícia conseguia construir as figuras com o material disponível mas depois não conseguia compreender qual a figura que havia construído.

Apesar do material ter tido um grau de importância diferenciado para cada um dos alunos, por vezes a sua utilização serviu apenas para confirmarem se as suas respostas estavam corretas ou não. Nas questões, onde era passível a utilização do material, a aplicação inicial do material na construção de figura a figura (estando na maioria das vezes apenas visível a figura atual e não as anteriores) levou alguns alunos, mais evidentemente o José, o Ricardo e a Susana, a reconhecer a regularidade iterativa dos padrões, acrescentando sempre algo mais para a construção da figura seguinte. A forma como acrescentavam o material levou-os também a visualizar as figuras no âmbito da decomposição do termo (Ponte, Branco & Matos, 2009; Rivera, 2010).

Contudo, nas questões em que se pretendia a observação do termo no seu todo ou a inversão da raciocínio, as dificuldades aumentaram e aí foi notória a importância do material para auxiliar na interpretação dos padrões.

A representação pictórica das figuras esteve presente nas resoluções destes alunos muitas das vezes apenas para justificar as suas respostas, porque os alunos não tinham chegado às suas conclusões pela representação pictórica mas sim pela utilização do material ou até mesmo por terem percebido qual a relação entre o termo e o seu número de ordem.

As representações utilizadas através da linguagem aritmética apareceram nas resoluções de todos os grupos, passando pelos cálculos aditivos (principalmente no caso de decomposição da figura), pelos cálculos multiplicativos (principalmente na aplicação da relação entre o termo e o seu número de ordem) e pelos cálculos divisórios (principalmente na aplicação da raciocínio inversivo). As multiplicações e as divisões foram sugeridas pelos alunos mais hábeis ao nível do cálculo ou com uma grande relação ao sistema aritmético e que por isso eram muito mais perspicazes na utilização e aplicação de cálculos para expressar as relações numéricas (Barbosa et al., 2008). Até mesmo na visualização dos padrões, nomeadamente na decomposição de alguns termos, surgiram cálculos aritméticos que não estavam diretamente relacionados com a forma como tinham explicitado na relação encontrada (1.ª questão da tarefa 6 da Clara e do José).

O grupo da Patrícia e do Emanuel apresentou uma grande variedade de representações passando pela representação pictórica das figuras, por esquemas, por tabelas, por esquemas, por retas numéricas até à linguagem aritmética porque os alunos afirmavam ter de fazer coisas sempre diferentes. Uma tarefa em que sobressaiu essa abordagem foi a tarefa 3, em que os resultados apresentados na 2.ª questão apresentam uma estrutura de pensamento mais complexa do que aquela que foi apresentada na resolução da 4.ª e da 5.ª questão pois os alunos no final da resolução da tarefa decidiram alterar algumas apresentações de resultados, precisamente para ficarem todas diferentes.

O grupo da Susana e do Emanuel foi o grupo que deu maior relevância à utilização da tabela para o registo dos seus dados, sendo a tabela utilizada para a estratégia aditiva, e à utilização da linguagem natural para a explicitação dos seus resultados escrevendo a forma como verbalizavam.

Em algumas situações, as estratégias utilizadas pelos alunos, nomeadamente a estratégia aditiva e a estratégia da contagem, aquando da visualização e descrição do padrão, focando-se apenas no termo e desvalorizando ou esquecendo o número de ordem desse termo (Warren & Cooper (2008) também se apresentaram como um constrangimento para a evolução dos seus raciocínios. A inversão do padrão, sendo dado o número de ordem do termo questionando o termo, também se revelou muito difícil para a maioria dos alunos que não haviam atingido o raciocínio funcional, logo, não conseguiam aplicar a relação encontrada a qualquer número de ordem do termo e determinar como seria constituído o termo.

Também a linguagem utilizada, que a nível oral se revela muito mais facilitadora por ser acompanhada de gestos e insinuações, ao contrário da linguagem escrita que se revela muito mais problemática, foi por vezes dificultadora pois os alunos não descreviam o termo da forma mais correta possível e aquilo que se apresentava como óbvio para os alunos, não era de fácil compreensão para o leitor ou para o ouvinte a quem os alunos tentavam descrever a forma como visualizavam o padrão ou na escrita da relação entre o termo e o seu número de ordem.

Um outro fator relevante foi a sequência de tarefas, com a apresentação gradativa de padrões, desde mais simples até mais complexos. No âmbito ainda do desenho da tarefa, há a referir o tipo de questões presentes, com um grau crescente de dificuldade, desde a solicitação do termo seguinte, a outros próximos e ainda, a outros mais distantes. Também foi importante a presença de questões a solicitar o termo dada a sua ordem, pela exigência de inverter o pensamento.

As questões que solicitavam a frase que conteria a generalização do padrão também levantaram muitas dúvidas, pois era a primeira vez que o estavam a fazer. Assim que apoiei os alunos na interpretação da questão e com o desenrolar das várias tarefas, os alunos conseguiram compreender a generalização apesar de, em momentos pontuais, terem a necessidade de recorreram a um exemplo em particular para suportar o seu raciocínio. Por vezes, a descoberta da relação que poderia ser aplicada a qualquer figura não foi imediata, tendo passado por um processo de evolução. Para essa evolução muito contribuiu as questões colocadas por mim para guiar o pensamento dos alunos, levando-os a focar-se na decomposição do termo e na relação deste com o seu número de ordem, abstraindo-se de uma figura concreta (Billings et al., 2008; Pimentel et al., 2010; Warren & Cooper, 2008). Assim, o questionamento contribuiu para uma maior consciência da relação funcional fazendo com que os alunos conseguissem fazer generalizações, usando em alguns momentos a linguagem natural e noutros momentos a linguagem algébrica com a utilização de letras como símbolos. Apesar dessas questões serem descritas como importantes (Billings et al., 2008; Warren & Cooper, 2008) para vincular a relação entre o termo e o número de ordem do termo, fica em aberto a questão se não direcionarem em demasia o pensamento dos alunos.

O contexto visual também aqui foi tido como essencial pois os alunos conseguiram com mais facilidade estabelecer a relação entre o termo e o seu número de ordem (Barbosa et al., 2008; Canavarro, 2007; Vale, Pimentel, Alvarenga et al., 2011; Warren & Cooper, 2008), através da decomposição figurativa das figuras, conseguindo aplicar a relação de generalização a termos mais distantes.

Numa última referência, o trabalho desenvolvido através destas tarefas com padrões de crescimento pictóricos levou os alunos a conjeturar, generalizar e justificar relações matemáticas entre quantidades, ajudando-os nas generalizações matemáticas (Blanton & Kaput, 2005; Canavarro, 2007; Wilkie, 2014).

5.4. Reflexão pessoal sobre o percurso investigativo

Quando decidi embarcar neste projeto que seria um mestrado em Matemática fi-lo pelo meu gosto pessoal por esta área curricular e por ter tido uma experiência extremamente enriquecedora aquando da Formação Contínua da Matemática. A formadora Deolinda Ribeiro, que tive durante dois anos, fez despoletar em mim um enorme prazer em estudar novos métodos de ensino, experiências e estratégias, muitas delas baseadas na aplicação de material manipulável. Desde então, o material manipulável assumiu uma grande importância nas minhas práticas letivas. Após ter assistido à apresentação de uma dissertação de mestrado baseada no pensamento algébrico e nos padrões pictóricos de repetição e de crescimento, tudo passou a fazer mais sentido e decidi agregar estas duas temáticas (material manipulável e padrões pictóricos) num estudo de investigação.

Decidi então fazê-lo com a minha turma de 4.º ano pois só assim poderia aplicar todas as tarefas que pretendia. Este trabalho foi muito bem recebido pelos alunos, principalmente pelo desafio de descoberta dos padrões. Uma vez que se tratou de uma sequência de tarefas, os alunos ficavam sempre muito entusiasmados com a tarefa seguinte. E sempre que me viam chegar com as máquinas fotográficas, o delírio era total porque sabiam que nesse dia seria dia de aplicação de tarefa com padrões.

Estas tarefas foram muito importantes tendo em conta que seguiram o modelo exploratório, onde os alunos construíram o saber matemático com base nas suas experiências e naquilo que observavam.

Numa fase inicial, foi difícil o distanciamento do trabalho que estava a ser feito pelos alunos, intervindo apenas em momentos pontuais. Com o desenrolar das tarefas, não descurei o meu papel de professora, mas adotei uma postura mais distante observando os alunos e os seus desempenhos sob a vertente de investigadora, de acordo com a fundamentação teórica revista. Desta fundamentação, retive o evidenciado por Blanton e Kaput (2005) quando defendem que os professores devem estar mais sensíveis ao pensamento das crianças e assentar a sua prática neste pensamento, de modo a conseguir guiá-los no caminho correto de forma a haver uma mudança no currículo e ensino da Matemática e ainda no referido por Warren e Cooper (2008) que defendem a mudança no ensino da Matemática de modo a dar a importância devida aos processos matemáticos.

Após a conclusão deste estudo, fiquei mais sensível para a aplicação de tarefas com padrões, pois apesar de no currículo atual português não ser dada a ênfase necessária a esta temática, consegui perceber o enorme potencial dos padrões, principalmente para o desenvolvimento de pensamento algébrico e o potencial deste para a vida futura dos alunos.

Com as conclusões deste estudo ficaram em aberto algumas questões que poderão ser alvo de investigação futura por outros investigadores: a limitação do material é um aspeto crítico que carece de mais investigação pois a adequação da ordem de grandeza do número de materiais disponíveis parece depender do nível de desempenho dos alunos; e o tema das questões colocadas pelos professores também carece de mais investigação pois se estas forem feitas de forma a que os alunos se foquem em demasia no termo e no número de ordem do termo parece condicionar o desempenho dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarenga, D. & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante, 15* (1), 27-55.

Barbosa, A., Vale, I. & Palhares, P. (2008). A resolução de problemas e generalização de padrões: estratégias e dificuldades emergentes. *Actas do Encontro Investigación en Educación Matemática XII*, (pp. 461-475). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Billings, E., Tied, T. & Slater, L. (2008). Algebraic tinking and pictorical growth patterns. *Teaching Children Mathematics December 2007/January 2008*, 302-308.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 1-9.

Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). Investigação qualitativa em investigação. Porto: Porto Editora.

Borralho A., Cabrita, I. Palhares, P. & Vale, I. (2007). Os padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L. & Canavarro, P. (*Orgs*), *Números e Álgebra*. (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16* (2), 81-118.

Carvalho, A., Gaio, A., Ribeiro, D., Nunes, F., Veloso, G., Valério, N., Almeida, P., Mestre, R. & Canário, S. (s.d.). *Pensamento Algébrico nos primeiros anos de escolaridade - Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa, Escola Superior de Educação.

Coutinho, M. C. (2011). *Metodologia da investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Coimbra: Almedina

Damas, E., Oliveira, V., Nunes, R. & Silva, L. (2010). *Alicerces da Matemática – Guia prático para e educadores*. Lisboa: Areal Editores

Dicionário da Língua Portuguesa (2004). Lisboa, Porto Editora.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Equipa da Escola Superior de Educação de Lisboa do Programa de Formação Contínua da Matemática (s.d.). *Como desenvolver o pensamento algébrico nos alunos*. Manuscrito não publicado.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Education Studies in Mathematics Education 79*, 429-438.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Léssard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*.(2ª ed.) Lisboa: Instituto Piaget.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher e M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-98). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

Orton, A. (1999). *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassell.

Palhares, P. & Mamede, E. (2002). Os padrões na Matemática do Pré-escolar. *Educare-Educere*, *10*(1), 107-123.

Pacheco, J. A. (1993). *O pensamento e a acção do professor em formação* (Dissertação de Doutoramento, Instituto de Educação e Psicologia: Universidade do Minho, Braga).

Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D. & Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos. Tarefas e desafios para a sala de aula*. Lisboa: Texto Editores.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.

Ponte, J. P., Serrazina. L., Guimarães, H. M., Breda, Martins, E., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes L. & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Education Studies in Mathematics Education 73*, 297-328.

Romberg, A. (1992). Problematic feature of the school mathematics curriculum. In Philip W. Jackson (Ed.). *Handbook of Research on Curriculum* (pp. 748-788). New York: MacMillan.

Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra throghout the K-12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W. Gary Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (2003).

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Education Studies Mathematics 20*, 147-164.

Steen, L. (1990). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy.* Washington, DC: National Academy Press.

Suh, J. (2007). Developing "Algebra-'Rithmetic" in the Elementary Grades. *Teaching Children Mathematics, November 2007*, 246-252.

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the Early Years? Yes!. *Young Children 58*(1), 14-21.

Threlfaal, J. (1999). Repeating patterns in the primary ears. In A. Orton (1999). *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática – propostas* *curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo – Projeto Padrões.

Vale, I. & Pimentel, T. (2013). O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. *Da Investigação às Práticas, 3* (2), 98-124.

Vale, I., Pimentel, T., Alvarenga, D. & Fão, A. (2011). *Uma proposta didática envolvendo padrões. 1.º e 2.º ciclos do ensino básico – Material de apoio ao Novo programa de Matemática do Ensino Básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Borralho, A., Cabrita, I. & Fonseca, L. (2011). *Padrões em Matemática. Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico*. Lisboa: Texto Editores.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth: Actions that support 8 year olds' thinking. *Education Studies in Mathematics Education 67*, 171-185.

Wilkie, K. (2014). Learning to like algebra through looking. *Australian Primary Mathematics Classroom 19* (4), 171-185.

Yin, R. (1989). *Case Study Research: Design and Methods*. Newbury Park: Sage Publications.

ANEXOS

Anexo A - Informação enviada ao Diretor do Agrupamento

Lisboa, 4 de janeiro de 2016

Exmo. Sr. Diretor

No âmbito da realização de um trabalho de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-escolar, 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, na Escola Superior de Educação de Lisboa, sob a orientação da professora Doutora Margarida Rodrigues, pretendo compreender o papel das representações no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano, em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências figurativas.

Para realizar este estudo, irei recolher dados com a turma de que sou professora titular de turma, o que implicará a gravação áudio e vídeo do trabalho realizado pelos alunos, dos seus diálogos e, também, da observação de tarefas propostas.

As gravações áudio e vídeo serão utilizadas exclusivamente no âmbito deste trabalho. Os nomes das crianças serão alterados, garantindo assim a preservação da privacidade das crianças e também da própria escola.

Todos os encarregados de educação das crianças deste grupo serão contactados, para que seja solicitada a devida autorização por escrito.

Agradeço desde já a atenção dispensada.

A professora

____

(Sílvia Nunes)

Anexo B - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Lisboa, 5 de janeiro de 2016

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito da realização de um trabalho de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-escolar, 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, na Escola Superior de Educação de Lisboa, sob a orientação da professora Doutora Margarida Rodrigues, pretendo compreender o papel das representações no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano, em contexto de exploração de padrões de crescimento em sequências figurativas.

Para o desenvolvimento deste trabalho será necessário realizar gravações áudio e vídeo do trabalho realizado em alguns momentos do dia, bem como alguns registos fotográficos. Esta recolha será feita exclusivamente por mim.

As gravações áudio e vídeo serão utilizadas exclusivamente no âmbito deste trabalho. Os nomes das crianças serão alterados, garantindo assim a preservação da privacidade das crianças e também da própria escola.

Solicito assim a sua autorização para proceder à gravação desses momentos, colocando-me inteiramente ao vosso dispor para qualquer esclarecimento que considere importante.

Grata pela atenção.

A professora

____

(Sílvia Nunes)

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) ____, declaro que:

☐ autorizo a gravação áudio/vídeo e captação de fotografias do meu/minha educando(a).

☐ não autorizo a gravação áudio/vídeo e captação de fotografias do meu/minha educando(a).

Anexo C - Enunciado da tarefa 1

Observa a sequência de figuras apresentada.

1.ª **2.ª** **3.ª**

1. Quantos quadrados pretos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

2. Quantos quadrados pretos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

3. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados pretos com o número da figura.

4. Quantos quadrados terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

5. Quantos quadrados terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

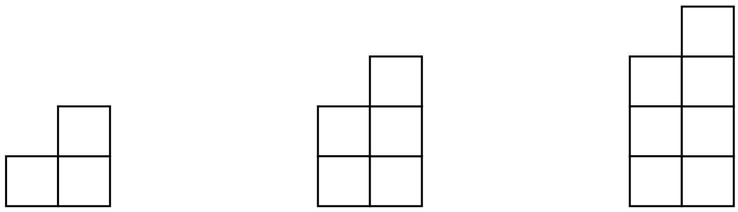
6. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados com o número da figura.

____

____

Anexo D - Enunciado da tarefa 2

Observa a sequência de figuras apresentada.



1ª **2ª** **3ª**

1. Quantos quadrados terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

2. Quantos quadrados terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

3. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados com o número da figura.

____

____

4. Quantos quadrados terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

5. Qual o número da figura que tem 41 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão.

6. Neste padrão, alguma figura poderá ter 50 quadrados? Justifica a tua resposta.

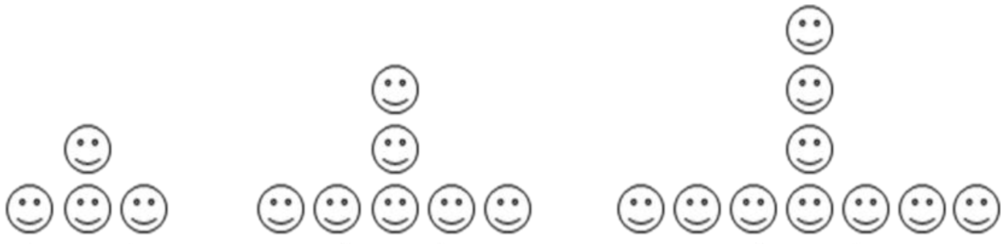
____

____

____

Anexo E - Enunciado da tarefa 3

Observa a sequência de figuras apresentada.



1.ª 2.ª 3.ª

1. Quantos sorrisos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

2. Quantos sorrisos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

3. Escreve uma frase que relacione o número de sorrisos com o número da figura.

____

____

4. Quantos sorrisos terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

5. Qual o número da figura que tem 22 sorrisos? Explica como chegaste a essa conclusão.

6. Qual o número da figura que tem 61 sorrisos? Explica como chegaste a essa conclusão.

Anexo F - Enunciado da tarefa 4

Observa a sequência de figuras apresentada.

1.ª **2.ª** **3.ª**

1. Quantos palitos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

2. Quantos palitos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

3. Escreve uma frase que relacione o número de palitos com o número da figura.

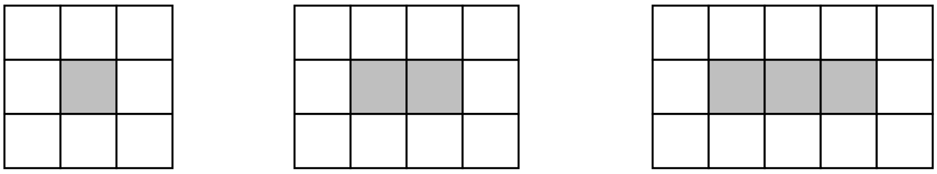
4. Quantos palitos terá a 15.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

5. Qual o número da figura que tem 22 palitos? Explica como chegaste a essa conclusão.

6. Qual o número da figura que tem 61 palitos? Explica como chegaste a essa conclusão.

Anexo G - Enunciado da tarefa 5

Observa a sequência de figuras apresentada.



1.ª **2.ª** **3.ª**

1. Quantos quadrados pretos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

2. Quantos quadrados pretos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

3. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados pretos com o número da figura.

____

____

4. Quantos quadrados brancos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

5. Quantos quadrados brancos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

6. Escreve uma frase que relacione o número de quadrados brancos com o número da figura.

____

____

7. Qual o número da figura que tem 25 quadrados pretos? Explica como chegaste a essa conclusão.

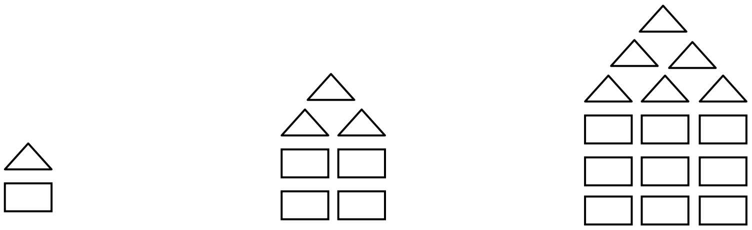
8. Qual o número da figura que tem 20 quadrados brancos? Explica como chegaste a essa conclusão.

9. Quantos o total de quadrados (pretos e brancos) da 40.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

10. Qual o número da figura que tem 36 quadrados? Explica como chegaste a essa conclusão.

Anexo H - Enunciado da tarefa 6

Observa a sequência de figuras apresentada.



1.ª **2.ª** **3.ª**

1. Quantos tijolos terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

2. Quantos tijolos terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

3. Escreve uma frase que relacione o número de tijolos com o número da figura.

____

____

4. Qual o número da figura que tem 36 tijolos? Explica como chegaste a essa conclusão.

5. Quantas telhas terá a 4.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

6. Quantas telhas terá a 10.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

7. Quantas peças terá a 6.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

8. Quantos tijolos terá a 100.ª figura? Explica como chegaste a essa conclusão.