Anna-Christin SÖHLING, Münster

Das Lernen von Mathematik beim Problemlösen

1. Einleitung

Das Problemlösen hat spätestens seit den internationalen Vergleichsstudien einen festen Platz im Mathematikunterricht, der auch in den Bildungsstandards festgelegt ist. Befasst man sich als DidaktikerIn mit dem Problemlösen im Mathematikunterricht, so stößt man auf eine Fülle an Materialien zu den sogenannten heuristischen Strategien (siehe etwa Bruder & Collet 2011). Eine Frage, die nicht so oft gestellt zu werden scheint, ist die Frage danach, was beim Problemlösen an Mathematik gelernt wird und gelernt werden kann. Dennoch gibt es Bemühungen, das mathematische Lernen durch Problemlösen stärker in den Unterricht miteinzubinden (siehe etwa Schoen & Charles 2003). So werden zunehmend Materialien entwickelt, die das Lernen mathematischer Inhalte durch Problemlösen fördern sollen.

Auf der anderen Seite dieser recht optimistischen Bemühungen stehen Beobachtungen, dass das Lernen mathematischer Inhalte oft bereichsspezifisch erfolgt (siehe Bauersfeld 1983). Es ist naheliegend, dass auch das mathematische Lernen beim Problemlösen bereichsspezifisch ist.

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, was beim Problemlösen an Mathematik gelernt wird und gelernt werden kann, also wie allgemein oder bereichsspezifisch die Erkenntnisse sind, die beim Problemlösen gewonnen werden. Es wird ein Analyseinstrument vorgestellt, welches dazu dienen kann, das Allgemeine oder Bereichsspezifische von Äußerungen bzw. Lösungswegen von SchülerInnen herauszuarbeiten.

2. Methoden

In Einzelinterviews wurden 51 SchülerInnen der 4.-6. Klasse verschiedener Schulformen dazu aufgefordert, Problemaufgaben laut denkend zu lösen. Dabei wurden nacheinander Aufgaben aus einer Aufgabengruppe gestellt, die aus Expertensicht dieselbe mathematische Struktur aufweisen (siehe

Lesen-Aufgabe	Schäfchen-Aufgabe
Quicki las in einer Woche ein Buch von 133 Seiten. Am Montag las sie einige Seiten und von da ab jeden Tag 5 Seiten mehr als am Tag davor. Am Sonntag wurde sie fertig. Wie viele Seiten las sie am Montag? (Rasch 2001, S. 182)	Von Montag bis Freitag wurden auf einer Weide zusammen 60 Schäfchen geboren. Am Dienstag waren es drei mehr als am Montag, am Mittwoch wieder drei mehr als am Dienstag, am Donnerstag wieder drei mehr als am Mittwoch, am Freitag drei mehr als am Donnerstag. Kannst du herausfinden, wie viele Schäfchen an den einzelnen Wochentagen geboren wurden? (Rasch 2001, S. 194)

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

zum Beispiel die Lesen- und die Schäfchen-Aufgabe). Das bedeutet, dass die Variablen und Konstanten in den Aufgabenstellungen je in der gleichen Relation zueinander stehen, wobei die Größen der Konstanten variierten. Im Prinzip war es dadurch möglich, ein bei einer Aufgabe gefundenes Lösungsverfahren bei den strukturgleichen Aufgabenvarianten ebenfalls anzuwenden. Hierdurch sollte überprüft werden, ob und wenn ja inwiefern Erkenntnisse, die beim Lösen einer Aufgabe gewonnen wurden, zum Lösen weiterer strukturgleicher Aufgaben genutzt wurden.

3. Abduktionstheorie und der Begriff der latenten Sinnstruktur

Das Vorgehen der SchülerInnen wurde mithilfe der Abduktionstheorie nach Peirce (1903) rekonstruiert, die Meyer (2007) für die Mathematikdidaktik nutzbar machte. Bei der Abduktion wird von einem überraschenden Resultat aus auf einen erklärenden Fall und ein passendes Gesetz geschlossen. Dabei kann die Anwendbarkeit bekannter Gesetze im neuen Kontext entdeckt werden oder es können neue Gesetze gefunden werden. Da sich SchülerInnen beim Problemlösen in ihnen unbekannten Bereichen bewegen, sind beide Möglichkeiten naheliegend.

Eine Schwierigkeit bei der Analyse von Problemlöseprozessen besteht in der Rekonstruktion des entdeckten Gesetzes. Es ist möglich, dass ein Schüler einen allgemeinen Zusammenhang entdeckt hat, den er problemlos in anderen Kontexten nutzen kann, aber es ist ebenso denkbar, dass die Erkenntnis vorerst bereichsspezifisch bleibt. Je nachdem, wie allgemein oder bereichsspezifisch die Erkenntnis wohl seitens des Schülers war, ist das Gesetz entsprechend zu formulieren.

An dieser Stelle bietet es sich an, die Theorie der logischen Schlussformen um den Begriff der latenten Sinnstruktur zu erweitern. Der Begriff der latenten Sinnstruktur entstammt der objektiven Hermeneutik nach Oevermann und umfasst „die durch Regeln erzeugten objektiven Bedeutungen einer Sequenz von sinntragenden Elementen einer Ausdrucksgestalt“ (Oevermann 2001, S. 39). Dies schließt alle denkbaren Allgemeinheitsgrade mit ein, die man in einer Äußerung sehen kann, und auch unterschiedlich tiefgehende Erkenntnisse, etwa einer mathematischen Struktur.

Bei der Rekonstruktion von entdeckten Gesetzmäßigkeiten ist es sinnvoll, das Gesetz in allen möglichen Allgemeinheitsgraden zu formulieren, bevor an Folgeäußerungen oder an der Bearbeitung einer strukturgleichen Aufgabe entschieden werden kann, wie allgemein oder bereichsspezifisch eine Entdeckung wohl war.

Aber nicht nur bei der Analyse von Problemlöseprozessen, sondern auch in der Praxis kann es hilfreich sein, sich als Lehrkraft der latenten Sinnstruktur von Schüleräußerungen und von Lösungswegen bewusst zu sein. Denn beim Problemlösen können entdeckte Zusammenhänge oder Lösungswege oftmals verallgemeinert werden. Dabei ist die allgemeine Form des entdeckten Zusammenhangs oder Lösungsweges latent im konkreten Vorgehen eines Schülers angelegt. Der Schüler mag noch nicht realisieren, dass sein gefundener Lösungsweg verallgemeinerbar ist, und für ihn mag die allgemeine Form eines entdeckten Zusammenhangs zunächst latent bleiben. Dies würde sich zum Beispiel dann zeigen, wenn es einem Schüler nicht gelingt, sein gefundenes Verfahren auf eine strukturgleiche Aufgabe zu übertragen.

4. Beispielanalyse

Um die bisher recht abstrakten Ausführungen zu veranschaulichen, soll im Folgenden ein Ausschnitt einer Beispielanalyse gezeigt werden.

Lennart (5. Klasse, Realschule) probiert bei der Lesen-Aufgabe zunächst verschiedene Summen mit 7 Summanden aus, die jeweils um 5 wachsen. Dabei nähert er sich schrittweise der gewünschten Summe von 133 an. Bei der Summe 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 = 140 sieht er, dass sein Ergebnis um 7 zu groß ist und dass er von jedem Summanden 1 abziehen muss, um auf das Ergebnis zu kommen. Lennarts Entdeckung lässt sich unterschiedlich allgemein rekonstruieren. Im Folgenden seien nur drei unterschiedlich allgemeine Gesetze genannt, die latent in Lennarts Entdeckung angelegt sein können:

Gesetz A: Wenn man in einer Summe mit 7 Summanden (und konstanter Differenz) jeden Summanden um 1 verringert, dann ändert sich die Summe insgesamt um 7, ohne dass sich die konstante Differenz zwischen den Summanden ändert.

Gesetz B: Wenn man in einer Summe mit x Summanden jeden Summanden um 1 verringert, dann ändert sich die Summe insgesamt um x.

Gesetz C: Wenn man in einer Summe mit x Summanden jeden Summanden um y verringert, dann ändert sich die Summe insgesamt um x*y.

Gesetz A ist bereichsspezifisch an die gegebene Situation gebunden. Vielleicht hat Lennart nur in dieser konkreten Situation gesehen, dass sich die Zielsumme schneller erreichen lässt, aber kann diese Erkenntnis nicht auf andere Summen, etwa mit einer anderen Anzahl an Summanden und ohne konstanter Differenz der Summanden (Gesetz B) anwenden. Interessant ist Gesetz C, welches sich auf beliebige lange Summen anwenden lässt und auch größere Differenzen zur Zielsumme schnell überwinden lässt. Die allgemeineren Gesetze B und C sind im Vorgehen von Lennart bereits latent angelegt, wobei fraglich ist, ob Lennart dies bereits realisiert. Da Lennart bei der Bearbeitung der Schäfchen-Aufgabe den entdeckten Zusammenhang erst nutzt, als seine durch Probieren ermittelte Summe mit 5 Summenden um 5 von der gewünschten Zielsumme abweicht, liegt es nahe, dass für ihn das Allgemeine seiner Entdeckung, also etwa Gesetz C, noch latent bleibt.

5. Fazit

In einem Mathematikunterricht, in dem der mathematische Erkenntnisgewinn beim Problemlösen im Vordergrund steht, kann die Lehrkraft sich dafür verantwortlich sehen, den SchülerInnen bei der Realisierung zunächst latent bleibender Zusammenhänge zu helfen oder von Mitschülern helfen zu lassen. Außerdem kann sie den Vergleich von verschiedenen Lösungswege (etwa bei Mathekonferenzen) gezielt moderieren und den SchülerInnen besser helfen, allgemeinere Verfahren oder Zusammenhänge in ihren konkreten Lösungswegen zu sehen, wenn sie sich der latenten Sinnstruktur möglicher Lösungswege und Schüleräußerungen bewusst ist. Durch die Herausarbeitung der latenten Sinnstruktur von möglichen und tatsächlichen Lösungswegen gelingt es außerdem, das mathematische Potential von Aufgaben zu erfassen, was wesentlich ist, wenn man Problemaufgaben gezielt zur Erarbeitung von mathematischen Inhalten einsetzen möchte.

Insgesamt wurde die Weiterentwicklung eines Analyseinstruments zur Untersuchung des Erkenntnisgewinns bei Problemlöseprozessen vorgestellt, welches möglicherweise auch dazu nutzbar sein kann, Transferprozesse detailliert zu untersuchen.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. Bauersfeld u.a. (Hrsg.): Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6. Köln: Aulis Verlag Deubner, S. 1-56.

Bruder, R., & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Skriptor.

Meyer, M. (2007): Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Oevermann, U. (2001). Die Struktur sozialer Deutungsmuster – Versuch einer Aktualisierung. sozialersinn, 2, 35-81.

Peirce, C.S. Collected Papers of Charles Sanders Peirce, (Band 1-6. C. Hartshorne & P. Weiß (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 A.W. Burks (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.

Rasch, R. (2001). Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker.

Schoen, H.L. & Charles, R.I. (2003). Teaching Mathematics through Problem Solving – Grades 6-12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.