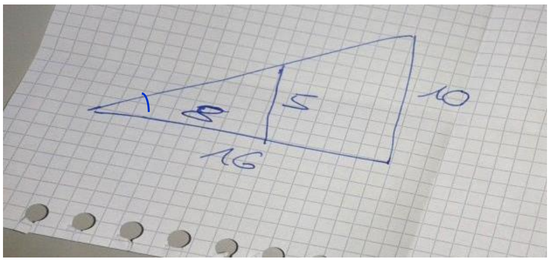
Michael MARXER, Freiburg

Was hat Geld umtauschen mit Trigonometrie zu tun? Verhältnismäßig: viel!

Ganz unterschiedlichen Problemen kann dieselbe Mathematik zugrunde liegen. Einer schlichten Verhältnisgleichung sieht man nicht (mehr) an, ob sie ein Geldwechselproblem löst oder eine trigonometrische Problemstellung. Der in frühen Klassenstufen entwickelte Blick auf Verhältnisse kann in den weiteren Klassenstufen zunehmend geschärft und genutzt werden. Ziel ist dabei, in unterschiedlichen Problemstellungen die Verhältnisse zu erkennen um dann auf bekannte Lösungsstrategien zurückgreifen zu können.



Einer Handskizze wie der obigen sieht man nicht eindeutig an, auf welchen mathematischen Inhalt sie sich bezieht und erst recht nicht, welche Problemstellung damit gelöst wird. Die Skizze könnte aus einer Aufgabenstellung zu ähnlichen Dreiecken stammen, möglicherweise aber auch aus der Trigonometrie. Oder es könnte sich um eine vereinfachte Darstellung von Steigungsdreiecken bezüglich des Graphen einer linearen Funktion handeln. Wechselt man auf die symbolische Ebene und stellt die Aussage durch die Verhältnisgleichung

$$\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$$

dar, könnte es sich auch um eine Aufgabenstellung zum Erweitern von Brüchen oder um Überlegungen zum maßstäblichen Vergrößern handeln. Es wird deutlich, dass all diesen (vermeintlich sehr verschiedenen) Stoffgebieten eine gemeinsame Mathematisierung zugrundliegt: die proportionale Zuordnung. Für das Lernen und die verständige Nutzung von Mathematik ist es also sinnvoll, diese Verbindung zwischen den jeweiligen mathematischen Inhalten transparent zu machen. Dies hat Auswirkungen auf die jeweiligen Aufgabenformate und die damit verbundenen Fragestellungen. Insgesamt ist es das Ziel, eine weitere Strategie im Umgang mit Prob-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

lemstellungen im Bewusstsein zu verankern und entsprechend den Handlungsspielraum in der Nutzung mathematischer Werkzeuge zu vergrößern.

Obwohl diese verbindende Strategie den Lehrenden bewusst ist, wird sie doch selten im Unterricht thematisiert. Beziehungen zwischen den Einflussgrößen herzustellen erscheint schwieriger, als sich auf dem vertrauten Boden von Formeln zu bewegen, in die nur richtig eingesetzt werden muss. Dabei ist das Aufstellen einer geeigneten Verhältnisgleichung oft der einfachere und schnellere Weg. Zur Illustration hierzu ein Beispiel aus der Prozentrechnung:

In der Klasse 6a gibt es 11 Brillenträger. Die Klasse hat 25 Schüler. Wie hoch ist der Anteil der Brillenträger?

Der Griff zur Formelsammlung wäre zunächst verlockend: $P = \frac{G \cdot P}{100}$

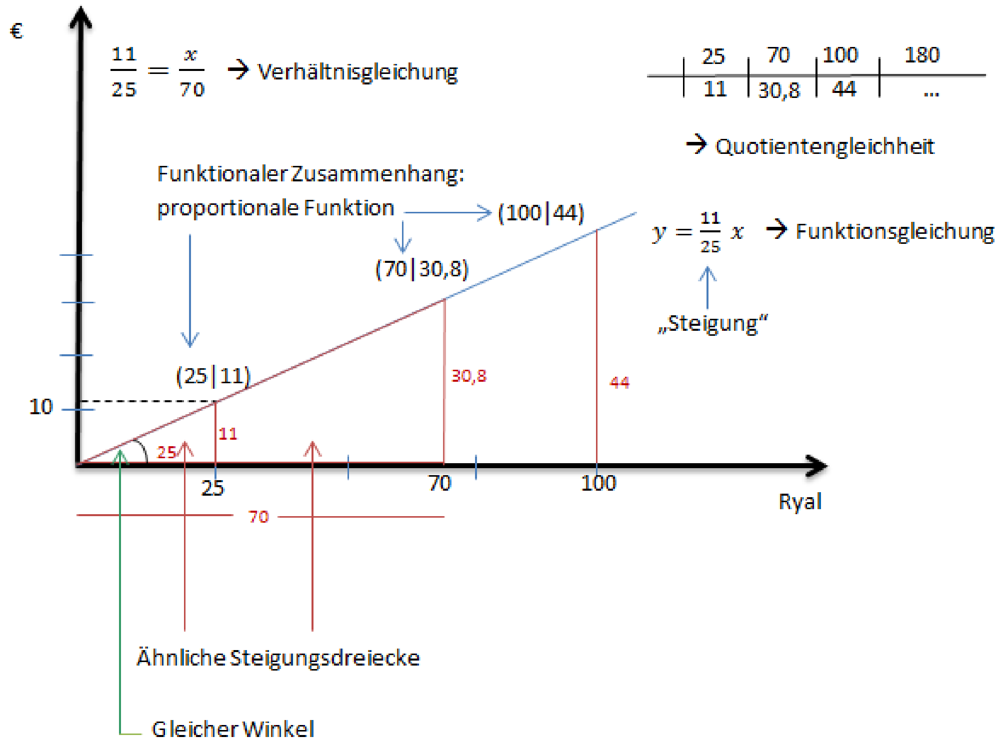
Nachdem geklärt ist, welche Zahl für den Prozentwert und welche für den Grundwert steht, muss nur noch eingesetzt und umgeformt werden. Nach dem Umstellen der Gleichung steht das Ergebnis fest. Allerdings setzt diese Herangehensweise ein Auswendiglernen der Formel oder eine geeignete Bezugsquelle voraus. Die gefundene Formel ist auch nur begrenzt verwendbar, sie löst genau dieses Problem bzw. alle entsprechend strukturierten Probleme mit anderen Zahlen. Bereits zum Lösen eines Geldumtauschproblems (s.u.) würden Schüler diese Formel nicht mehr als Lösungsmöglichkeit akzeptieren.

Es geht aber auch anders: Die Brillenträger sind ein Teil der ganzen Klasse, nämlich $\frac{11}{25}$. Wenn in der 5. Klasse ein solider Aufbau der Grundvorstellungen bei Brüchen geleistet wurde, fällt diese Bestimmung des Anteils leicht. Über die Normierung der Prozentrechnung („pro cent“/“pro hundert“) lässt sich die Aussage so aufbereiten, dass sie mit anderen Klassengrößen vergleichbar ist.

Die Konvention ist, dies auf die Vergleichsgröße 100 zu beziehen:
11 zu 25 wie x zu 100.
Also ist folgende Gleichung zu lösen: $\frac{11}{25} = \frac{x}{100}$

Mit dieser Lösungsstrategie folgt die Mathematisierung direkt der Struktur des Sachverhalts. Es geht um Anteile bzw. um konstante Verhältnisse: im Zähler steht die Größe der Teilmenge, im Nenner steht die Größe des Ganzen. Der linke Bruch stellt die tatsächlichen (Zahlen-)verhältnisse dar, der rechte Bruch normiert auf ein fiktives Ganzes von 100 Personen. Bei der Verwendung der Formel geht dieser Blick verloren, eine fehlerhafte Formel würde beispielsweise gar nicht erst erkannt, weil sich deren Konstruktionsprinzip nicht erschließt.

Warum ist die obige Verhältnisgleichung $\frac{11}{25} = \frac{x}{100}$ universeller als die zunächst genannte Formel? Einfach deshalb, weil andere Probleme mit *derselben* Denkweise gelöst werden können: Der Wechselkurs des Euro zum in den Vereinigten Arabischen Emiraten gültigen Ryal steht im Verhältnis 11:25. Der Gegenwert von 100 Ryal ist mit der obigen Verhältnisgleichung ebenso leicht zu berechnen wie der umgerechnete Preis des Hotelzimmers von 180 Ryal. Nachfolgend wird deutlich, dass sich eine einzige Darstellung für all die bisher angesprochenen Problemstellungen eignet:



Die Schulung des Blicks für Verhältnisse kann schon früh beginnen. Lehrende, die diese Chance wahrnehmen, eröffnen ihren Schülern die Möglichkeit, später auf diese Denkweise aufzubauen. Beispielsweise bietet das Thema „Maßstab" in Klasse 5 bereits breite Möglichkeiten, konstante Verhältnisse zu thematisieren und beim Namen zu nennen. Die Bruchrechnung erweitert das Spektrum der Möglichkeiten, Verhältnisse formal auszudrücken. Wer auf konstante Verhältnisse achtet, der „sieht" bei der Behandlung linearer Funktionen auch das größere, (mathematisch) ähnliche Steigungsdreieck und setzt es z.B. gezielt zur Erhöhung der Zeichengenauigkeit ein. Wer aber mit diesem Blick auf die Funktionsgraphen schaut, vermag in der Betrachtung zentrisch gestreckter Figuren oder in der Anwendung der Strahlensätze keine Schwierigkeit mehr erkennen. Ebenso werden in der Trigonometrie die zu einem bestimmten Winkel gehörenden rechtwinkligen Dreiecke als ähnlich erkannt und somit das Verständnis für die Definition z.B. des Tangens als Ausdruck gleicher Verhältnisse verstanden.

Kurz: die Betrachtung (konstanter) Verhältnisse stellt ein Konzept dar, das bei neuen mathematischen Inhalten zum besseren Verständnis immer wieder verwendet werden kann. Für die Lernenden lassen sich zukünftige Anwendungen für das Denken in Verhältnissen natürlich nicht vorhersehen. Deshalb liegt es in der Verantwortung der Lehrenden, bei den entsprechenden mathematischen Inhalten den Blick auf die Verhältnisse durch geeignete Aufgabenstellungen immer wieder auf diesen Zugang zu lenken. Umgekehrt wird, wer schon früh auf Verhältnisse geachtet hat, bei vielen mathematischen Inhalten späterer Klassen die Verhältnisse deutlicher „sehen“ und nutzen. Anstatt für jedes neue Kapitel andere Regeln und eine Vielzahl von „Eselsbrücken“ auswendig zu lernen, scheint es vorteilhafter, die Zusammenhänge zu sehen und diese immer wieder auf neue, andere Inhalte anzuwenden. So wird deutlich, dass Mathematik letztlich dazu verwendet wird, Probleme, die als strukturgleich erkannt wurden, mit den gleichen Werkzeugen zu lösen.

Literatur

Barzel, Bärbel & Kleine, Michael (2013): Verhältnisse – ein Thema quer durch die Schulmathematik. In: *Mathematik lehren*, Heft 179 (August 2013), S. 2 - 8

Rink, Roland (2013): *Zum Verhältnisbegriff im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlegung und Analyse kindlicher Vorgehensweisen im Umgang mit Verhältnissen im 4. Schuljahr.* Franzbecker-Verlag Hildesheim.

Greefrath, Gilbert (2010): *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag, S. 125 – 158

Führer, Lutz (2004): Verhältnisse – Plädoyer für eine Renaissance des Proportionsdenkens. In: *Mathematik lehren* Heft 123, S. 46 – 51

Andelfinger, B. (1981): Thema: Proportion. *Didaktischer Informationsdienst Mathematik*, Curriculum Heft 22. Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung Soest

Freudenthal, Hans (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structurs,* S. 178 – 209. Dordrecht 1983