

Thomas KROHN, Leipzig; Karin RICHTER, Halle (Saale)

Spielend lernen: zur Vernetzung geometrischer Grundbegriffe

Das Lernen geometrischer Grundbegriffe verbindet den Erwerb konkreter Kenntnisse mit dem Aufbau angemessener Vorstellungen und dem Aneignen damit verknüpfbarer Vorgehensweisen. Dies wird für Grundbegriffe dadurch erweitert, dass ein leistungsfähiges Netz zwischen Begriffen aufgebaut wird. Wie gelingt es, diese für geometrische Grundbegriffe vielschichtige Lernsituation so zu gestalten, dass sie nachhaltig, intensiv, differenziert ist? Der Beitrag stellt spielbasierte Ansätze und die zugehörigen fachdidaktischen Grundlagen vor.

1. Lernen geometrischer Begriffe im Mathematikunterricht

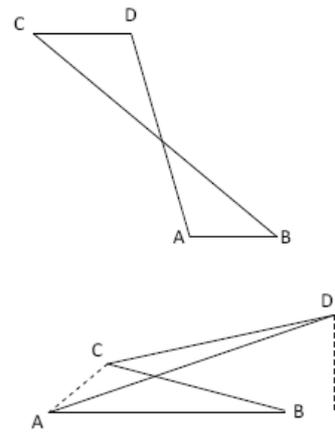
„Begriffe bilden Bausteine der Mathematik. Sie sind Gegenstände, über die wir nachdenken, und Werkzeuge, mit denen wir arbeiten.“ [Vollrath 1987] Diese Sichtweise macht deutlich, was A. Lambert 2003 betont: Begriffsbildung ist ein wesentlicher Gegenstand des Mathematikunterrichts, der alle Bereiche des Mathematik-Curriculums durchzieht. Der Aufbau angemessener Vorstellungen, der Erwerb von Kenntnissen um die Eigenschaften und die Vernetzung von Eigenschaften, die den Begriff ausmachen, ebenso wie das Aneignen von Fähigkeiten der Nutzung des Begriffs bilden zentrale Aspekte für den Prozess des Erlernens, Verankerns und Anwendens mathematischer Begriffe. Im Folgenden soll dies exemplarisch aus der Sicht des Erlernens geometrischer Schlüsselbegriffe beleuchtet werden.

Aufbauend auf geometrischen Grundbegriffen (wie Punkt, Gerade, Ebene,...) entwickelt sich das „Haus der Geometrie“ hieraus durch Zuweisung von charakterisierenden Eigenschaften für die Begriffsbausteine in ihrer Vernetzung und Abgrenzung untereinander. Ist ein geometrischer Begriff angelegt, ist sein Inhalt also durch Eigenschaften, Merkmale und deren Beziehungen untereinander bestimmt, gilt es, ihn einzuordnen in einen größeren Kontext, abzugrenzen und zu vernetzen. So kristallisieren sich über Beispiele und Gegenbeispiele, Begriffsnetzwerke heraus.

Anhand des Vierecks soll dies beispielhaft verdeutlicht werden: *Eine Fläche, die von 4 Strecken begrenzt wird, heißt Viereck. Ein Viereck hat 4 Ecken.* Diese gebräuchliche, auf den Grundbegriffen Fläche und Strecke aufbauende Begriffsfestlegung scheint durch die geforderten Eigenschaften, die den Grundbegriffen hier zugeordnet werden, wohl gelungen, wenn auch vielleicht etwas redundant - aber dies nimmt man im Mathematikunterricht zumindest auf den ersten Stufen der Begriffsbildung oft in Kauf,

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

geht es doch darum, angemessene und belastungsfähige Vorstellungen vom Begriff zu entwickeln. Im Umgang mit dem Begriff geht es darum zu untersuchen, ob betrachtete Objekte diese Eigenschaften oder vielleicht sogar Spezialisierungen hiervon erfüllen. So entwickeln sich speziell für Vierecke Ansätze zu unterschiedlichen *Häusern der Vierecke*, je nachdem, welche weiteren Eigenschaften im Blick sind. Gleichzeitig entsteht die Frage, ob betrachtete Objekte (wie etwa die nebenstehend abgebildeten Figuren) die geforderten Eigenschaften erfüllen.



Der hier beschriebene Weg zeichnet ein typisches, gewohntes Vorgehen nach: Der Begriff wird durch eine Familie von charakteristischen Eigenschaften festgelegt. Durch lokales Ordnen wird in einem bekannten Begriffsfeld nach Zusammenhängen und Beziehungen gesucht und diese werden im Haus der Geometrie verankert. Aber warum sollte – um das Begriffsverständnis und die Fähigkeit des schöpferischen Umgangs damit zu vertiefen und auszubauen – nicht auch noch ein weiterer Schritt getan werden: der Versuch, sich aus dem bekannten Begriffsfeld zu lösen und nun aus dem Blickwinkel der als wichtig erkannten Eigenschaften nach Begriffen zu suchen, die diese Eigenschaften erfüllen? Die im Folgenden vorgestellten spielerischen Ansätze zur Auseinandersetzung mit Vierecken versuchen diesen Perspektivwechsel zwischen Begriff und Eigenschaften exemplarisch am Beispiel von Vierecken umzusetzen und so einen Beitrag zu liefern für nachhaltig sicheren Umgang mit Begriffsvernetzungen und die logische Durchdringung des Bildens von geometrischen Begriffen.

2. Entdeckend-erkundende spielbasierte Ansätze

Die für einen Einsatz im Mathematikunterricht vorgesehenen Situationen innerhalb des Lernens geometrischer Grundbegriffe greifen nun die obigen Grundlagen zur Entwicklung eines gefestigten Begriffsverständnisses der Schülerinnen und Schüler auf und betten sie ein in spielerische Kontexte. Dabei wurden grundlegende allgemein-pädagogische und fachdidaktische Anforderungen an im Mathematikunterricht gewinnbringend eingesetzte Lernspiele berücksichtigt:

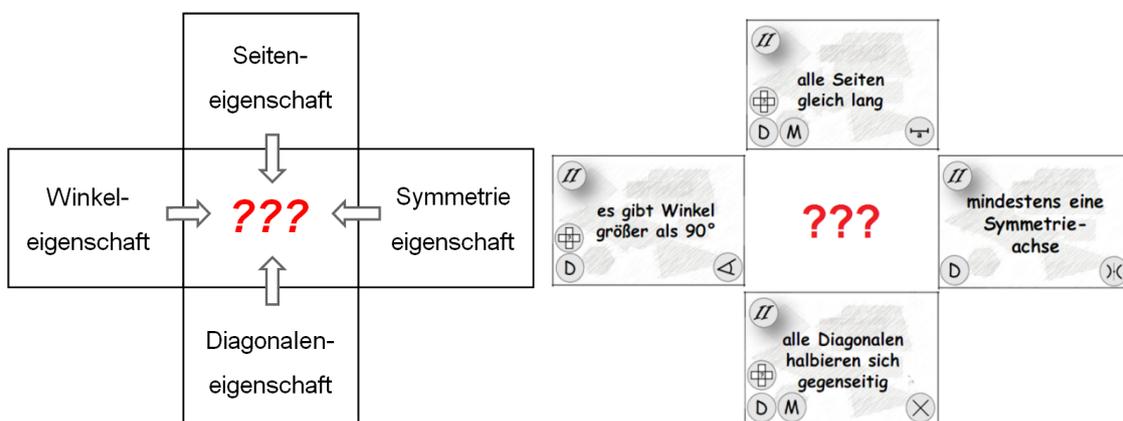
- ausgewogene Balance zwischen Strategie und Zufall
- einfache und nachvollziehbare Regeln
- individuell steuerbar und differenzierbar durch Lehrende, durch Lernende, durch Lerngruppe

- möglichst in unterschiedlichen Unterrichtsphasen einsetzbar

Hierauf aufbauend sind für den konkreten Unterrichtsgebrauch in der Sekundarstufe 1 verschiedene Spielsituationen entstanden, darunter einige basierend auf bekannten Gesellschaftsspielen.

Zu diesen zählt das Spiel „*n-Eck-Domino*“, welches auf Grundstruktur des Anlegens zweier zueinander passender Objekte beruht. Modifiziert wurden die bekannten Domino-Anlegeregeln dahingehend, dass es nun einen permanenten Blickrichtungswechsel zwischen Begriff/Abbildung und einer charakterisierenden Eigenschaft aus den Kategorien Seite, Winkel, Diagonale oder Symmetrie erfordert, um die bestehende Domino-Reihe zu ergänzen. Gerade die Blickrichtung von der Eigenschaft zu einem passenden Begriff steht dem vorrangig gewohnten Weg, einen Begriff mit (Gegen-) Beispielen zu begründen entgegen. Durch die unterschiedlich stark einschränkenen Eigenschafts-Vorgaben (z. B. „es gibt mindestens einen rechten Winkel“ gegen „alle Diagonalen sind senkrecht zueinander, aber halbieren sich nicht“) ist nicht nur der Zufall, sondern auch strategisches Vorgehen eine wesentliche Spieleigenschaft. Differenzierung ist etwa durch konkrete die Wahl der *n*-Ecke (etwa nur Vierecke) möglich.

Eine weitere Spielsituation, die besonders die Blickrichtung von charakterisierender Eigenschaft hin zur Reichhaltigkeit möglicher Begriffe thematisiert ist „*Aus vier wird Eins – n-Eck-Raten*“. Hierbei gilt es aus den oben genannten vier Eigenschafts-Kategorien (siehe Abbildung) einen möglichen Begriff zu erkennen oder (schwieriger!) die Nicht-Existenz zu begründen. Gerade diese Erkenntnis, dass unvereinbare Eigenschaften auf die Nicht-Existenz führen können, eröffnet viele Möglichkeiten für entdeckendes Lernen. Durch Aufzeichnen oder Auslegen mit Stäbchen ist der konstruktive Zugang möglich, gemeinsames argumentativ-kommunikatives Systematisieren und Vernetzen wird spielerisch umgesetzt. Auch hier ist eine Differenzierung wie oben möglich.



Fazit: Statt „Ist das ein ...?“ vor allem „Was ist das für ein ...?“

Kann es gelingen, die gewohnte Blickrichtung auf geometrische Begriffe, hier am Beispiel der Vierecke, aufzubrechen und die verstehende Sicht auf geometrische Eigenschaften nachhaltig zu entwickeln? Erste Erfahrungen aus der Schulpraxis haben gezeigt, dass dies zunächst *ungewohnt* und *anstrengend* sein mag, aber, eingebettet in eine Übungs- und Festigungsphase zu ebenen Vierecken, wirkt bald das Motivationspotential der Spielsituationen. Der entdeckende Umgang mit Eigenschaften und das Herausknobeln passender Vierecke entfalten rasch ihren Reiz und gleichzeitig wird ganz unversehens vorhandenes Wissen um Vierecke und ihre Eigenschaften vertieft und gefestigt.

Trotz dieses hohen Anspruchs hat sich gezeigt, dass die Einbettung des Lernens von geometrischen Begriffen in spielerische Situationen mit der Beachtung der Gleichwertigkeit der Blickrichtungen Begriff \leftrightarrow Eigenschaft erstens zu einem nachhaltig sicheren Umgang mit und innerhalb der Begriffsvernetzung von geometrischen Basisbegriffen führen kann und zweitens besonders die Rückrichtung sehr stark der wissenschaftlich-logischen Durchdringung des Bildens mathematischer Begriffe entspricht und damit über diesen Spielkontext hinaus einen Beitrag für das Erkunden, Systematisieren und Reflektieren von mathematischer Strukturen leistet.

Literatur

- Krohn, Th., Kurow, J., Richter, K. (2016): Lernspiele zu Eigenschaften von n-Ecken. Hamburg: Raabe.
- Grzesik, J. (1992). Begriffe lernen und lehren. Stuttgart Klett.
- Hischer, H. und Lambert, A. (2002): Begriffsbildung und Computeralgebrasysteme. In: Hischer, H. (2002): Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim Franzbecker, S. 138-166.
- Homann, G. (1991): Thesen zum Einsatz von Lernspielen im Mathematikunterricht. In: Homann, G. (Hrsg.)(1991) Mathematik – Lernspiele.
- Lambert, A. (2003): Begriffsbildung im Mathematikunterricht. Universität des Saarlandes: Preprint 77.
- Prediger, Susanne Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In: Peschek, W. [Hrsg.] (2002): Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim Franzbecker, S. 399-402.
- Vernay, R. (2013): Spiele im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 43, S. 6-12.
- Vollrath, H.-J. (1987) Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. In: ZDM Jg. 19(3), S. 123-127.
- Weth, Th. (1999): Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun. Hildesheim Franzbecker.