Kerstin Krimmel, Werner Blum, Universität Kassel

Materialien aus dem Projekt MAKOS – Eine kompetenzorientierte Behandlung von Prognose- und Konfidenzintervallen

Im Februar 2016 wurde in Hessen das neue Kerncurriculum (KC) für die gymnasiale Oberstufe im Fach Mathematik verabschiedet, das zum Schuljahr 2016/17 in Kraft tritt. Im Bereich Stochastik (Q3) wurde das Thema „Prognose- und Konfidenzintervalle" als neuer Unterrichtsinhalt aufgenommen; es löst damit in manchen Schuljahren (jeweils per Erlass) das Thema Hypothesentest als verpflichtenden Unterrichtsgegenstand ab.

Das Projekt MAKOS (**MA**thematische **K**ompetenzentwicklung in der **O**ber**S**tufe) unterstützt die Einführung des KC durch die Erstellung einer Handreichung mit vielfältigen Unterrichtsmaterialien zu den verschiedenen Oberstufenthemen, mit einem Fokus auf Kompetenzorientierung, Binnendifferenzierung und Technologieunterstützung. Das Projekt wird vom HKM und vom DZLM finanziert und ist an den Universitäten Darmstadt und Kassel angesiedelt (für nähere Informationen zu diesem Projekt siehe Bruder & Roder, 2015, sowie den Beitrag von U. Roder in diesem Band).

Im vorliegenden Beitrag wird ein Einblick in die Projektergebnisse zu dem Modul „Prognose- und Konfidenzintervalle" gegeben. Nach einer kurzen fachlichen Einordnung wird eine mögliche Unterrichtsreihe mit besonderem Blick auf die Einstiege skizziert, bei der die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen sowie der Selbstregulation der Lernenden durch binnendifferenzierende Bausteine im Vordergrund steht.

Fachliche Einordnung und Ziele

An das Themenfeld Wahrscheinlichkeitsverteilungen, das im Grundkurs die Binomialverteilung als einzige verpflichtende Verteilung beinhaltet, schließt im KC das Themenfeld Prognose- und Konfidenzintervalle mit folgenden drei inhaltlichen Stichworten an (vgl. Hessisches Kultusministerium 2016: Kerncurriculum gymnasiale Oberstufe Mathematik, Q.3.5):

- Sigma-Regeln: Legitimieren der Sigma-Regeln (1σ-, 2σ-, 3σ-Umgebungen) anhand konkreter Binomialverteilungen
- Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten (auf Grundlage der obigen Sigma-Regeln): Schließen von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe, Bestimmen von Prognoseintervallen in versch. Sachzusammenhängen
- Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten (auf Grundlage der Sigma-Regeln): Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit,

Konfidenzniveau, Bestimmen von Konfidenzintervallen in verschiedenen Sachzusammenhängen

Die Prognoseintervalle werden in der nachfolgend skizzierten Unterrichtseinheit als eine Verallgemeinerung der Sigma-Regeln aufgefasst, bei denen der Trefferanteil h ‚prognostiziert' wird und bei denen neben ganzzahligen σ-Umgebungen auch Umgebungen wie ±1,96·σ mit ganzzahligen W'keiten betrachtet werden. Die Legitimierung dieser Faustregeln erfolgt nur exemplarisch und empirisch durch Betrachtung konkreter Binomialverteilungen mit ausreichend großem Stichprobenumfang (Konvention: $\sigma > 3$).

Bei Prognoseintervallen wird mittels Informationen über die Grundgesamtheit auf eine Stichprobe geschlossen. Die Konfidenzintervalle werden dem als Intervallschätzung mit umgekehrter Schlussrichtung gegenübergestellt: Man schließt anhand von Informationen über eine Stichprobe auf die Grundgesamtheit, d.h. es wurde eine Trefferanzahl X (bzw. ein Trefferanteil h) in einer Stichprobe beobachtet, mit der man dann die unbekannte Trefferw'keit p schätzt.

Bei beiden Themen soll der Fokus im Unterricht nicht auf dem Berechnen der Intervalle und damit der Kompetenz K5 liegen, sondern auf den Kompetenzen Modellieren, Kommunizieren und Argumentieren, um ein nachhaltiges Grundverständnis bei den Lernenden aufzubauen. Neben der Grundidee des (Intervall-) Schätzens und dem wechselseitigen Schließen zwischen Grundgesamtheit und Stichproben sollen anhand der Konfidenzintervalle exemplarisch die Möglichkeiten und Grenzen der induktiven Statistik in verschiedenen Anwendungsbereichen erfasst werden.

Differenzierende Einstiege

Gemäß dem zugrundeliegenden Binnendifferenzierungskonzept des MAKOS-Projekts werden den Lernenden zum Einstieg in eine Unterrichtseinheit verschiedene Zugänge zum selben inhaltlichen Kern ermöglicht. Die Einstiege zu den Themen Prognose- und Konfidenzintervalle umfassen jeweils drei ähnlich aufgebaute Lernaufgaben, die sich hinsichtlich Schwierigkeitsgrad, Grad der Offenheit und Kontext unterscheiden und aus denen die Lernenden (oder die Lehrkräfte) je eine Aufgabe wählen. Die drei Kontexte „A: Haribo", „B: Umfragen zu Mathe als Lieblingsfach" und „C: Werfen von Legosteinen & Würfeln", die zur Einführung alltagsnah gewählt wurden, werden bei den Prognoseintervallen verwendet und wiederholen sich bei den Einstiegen zu den Konfidenzintervallen. Durch die ähnlichen Kontexte zu beiden Themen bietet sich die Chance, dass die wechselseitige Beziehung zwischen Prognose- und Konfidenzintervallen, d.h. deren Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede besonders deutlich werden. Exemplarisch werden nun die beiden Haribo-Aufgaben näher beschrieben, die als jeweils leichteste der drei Varianten erstellt wurden.

Zum Haribo-Teil 1 (Sigma-Regeln & Prognoseintervalle): Ausgehend von der bekannten W'keit p=1/6 dafür, dass ein zufällig ausgewählter Goldbär weiß ist (die W'keit wird in den Materialien durch einen Zeitungsartikel über Haribo belegt), schätzen die Schüler die Anzahl der weißen Bären in einer großen Tüte vom Stichprobenumfang n=100. Die Lernaufgabe mit den vorgegebenen Daten eignet sich gut, um sie handlungsorientiert durch tatsächliches Zählen von Goldbären zu begleiten oder auch zu ersetzen. Neben einer Punktschätzung sollen die Lernenden in der Aufgabe zunächst ein Intervall nennen, das sie intuitiv für plausibel halten. Anschließend berechnen sie mit geeigneter technischer Unterstützung (z.B. WTR, GeoGebra) und schriftlichen Hilfestellungen die W'keit für dieses Intervall und für weitere, symmetrische Umgebungen um μ, wie z.B. $\mu \pm 2\sigma$ (Ergebnis ca. 95,5%). Sie vergleichen ihre Ergebnisse mit den W'keiten, die ihnen nun als Faustregeln auch für andere Umgebungen wie $\mu \pm 1{,}96\sigma$ (ca. 95%) genannt werden, und validieren dadurch exemplarisch die Sigma-Regeln. Zum Abschluss geben sie mit Hilfe der nun bekannten Faustregeln ein 95%-Prognoseintervall für den *Anteil* der weißen Goldbären in einer großen Tüte an. Hiermit kann in späteren Aufgaben leicht das $1/\sqrt{n}$-Gesetz wie auch das empirische Gesetz der großen Zahlen begründet werden.

Zum Haribo-Teil 2 (Konfidenzintervalle): Wie groß ist der Anteil von Goldbären bei Haribo-ColoRados? Dieser Frage sollen die Lernenden anhand einer Stichprobe ColoRados vom Umfang n=80 nachgehen, entweder nur mit Hilfe von Daten aus der geführten Lernaufgabe oder auch durch tatsächliches Zählen. Nach einer intuitiven Punkt- und Intervallschätzung auf Basis des beobachteten Stichprobenwertes X überprüfen die Lernenden zunächst nur graphisch für verschiedene B(n;p)-Verteilungen, bei welchen p (zu festem n) der beobachtete X-Wert im 95%-Prognoseintervall liegt. Hierfür steht z.B. auf GeoGebra Tube eine abgestimmte Umgebung zur Verfügung. Die Lernenden erhalten damit eine anschauliche Definition des Konfidenzintervalls zum Niveau 95%. Im Anschluss an das Entwickeln dieser Grundvorstellung wird nun das Konfidenzintervall (mit schriftlichen Hilfestellungen) wie üblich schrittweise berechnet. Zum Abschluss dieser Lernaufgabe wird die vereinfachte Näherungsformel zur Berechnung eingeführt, bei der das unbekannte p im Radikanten durch h abgeschätzt wird.

Diagnosesets

Bei beiden Themen folgt im Anschluss an die Einstiege und ersten Übungen jeweils ein Diagnoseset zur Feststellung und Förderung des Grundverständnisses zu den neuen Inhalten. Die unbenoteten Sets sind ähnlich aufgebaut, umfassen jeweils vier Aufgaben und werden von den Lernenden in Einzelarbeit unter genauen Zeitvorgaben bearbeitet (25 Min.). In der ersten Aufgabe soll jeweils die Grundidee der Themen unter Nennung von Anwendungsbereichen verbal erläutert werden. In beiden Sets folgen eine Grundaufgabe zur Berechnung und Interpretation eines Prognose- bzw. Konfidenzintervalls in einem neuen Sachkontext und eine Umkehraufgabe, bei der Rechnung und Ergebnis gegeben sind. In der letzten Aufgabe werden im Muliple-Choice-Stil inhaltliche Aussagen beurteilt (richtig/falsch).

Aufgabenset

Mit einem niveaugestuften Aufgabenset zu den beiden Themen Prognose- und Konfidenzintervalle wird das Verständnis der Lernenden gefördert und vertieft. Das Set umfasst acht Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad, aus denen die Lernenden z. B. drei auswählen und selbständig bearbeiten. Durch die Bereitstellung von Wahlaufgaben mit schülergerechten Lösungen wird die Selbstregulation der Lernenden gefördert.

Das Set umfasst vielfältige Basis-, Standard- und Vertiefungsaufgaben, die hinsichtlich Aufgabentyp und geforderten Kompetenzen variieren. Im Kasten ist exemplarisch eine Aufgabe mit mittlerem Schwierigkeitsgrad abgebildet, durch die insbesondere Argumentieren, Kommunizieren und Umgehen mit formalen Elementen der Mathematik gefördert werden.

Aufgabe 5: Behauptungen prüfen *(K1, K5, K6)*

Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob die die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Dabei sind die nicht angesprochenen Parameter (Konfidenzniveau, W'keit, Stichprobenumfang) jeweils konstant.

Nr.	Aussage	w	f
A	Je höher der Stichprobenumfang, desto kürzer ist das Konfidenzintervall.		
B	Bei einer Verdoppelung des Stichprobenumfangs halbiert sich die Länge des Konfidenzintervalls (wenn es mithilfe der Näherungsformel bestimmt wurde).		

Checkliste

Ein abschließender Überblick zu der Unterrichtseinheit wird den Lernenden durch eine Checkliste ermöglicht, in der die Basiskompetenzen zu den beiden Themen auf einer DinA4-Seite zusammengefasst werden. Die „Ich kann“ – Formulierungen werden alle durch eine Beispielaufgabe illustriert.

Literatur

Bruder, R. & Roder, U. (2015): MAKOS - Ein Projekt zur Umsetzung der Abiturstandards Mathematik in Hessen. In Kaiser, G. & Henn, H.-W. (Hrsg.): *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (S.281 - 295). Wiesbaden: Springer Spektrum.