

Oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse und Modellierung von Elektrizitätspreisen

Dissertation

Zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt
der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund

VON
DIPL.-WIRT.MATH. DANIEL KOBE

Dortmund, Juli 2016

Datum der mündlichen Prüfung

27.10.2016

Veröffentlichte Fassung

08.11.2016

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	iii
Notationen	v
Einleitung	vii
Strompreismodelle in der Literatur	viii
Motivation und Aufbau der Arbeit	x
Kapitel 1. Verallgemeinerte oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse	1
1.1. Additive Prozesse und Lévy-Prozesse	2
1.2. Verallgemeinerte Moving-Average Prozesse	7
1.3. Oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse	17
Kapitel 2. Spotpreismodellierung europäischer Strommärkte	29
2.1. Das Spotpreismodell	30
2.2. Bewertung von Derivaten auf Basis des Spotpreismodells	36
Kapitel 3. Parameterschätzung in oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen	53
3.1. Momentenmethode	53
3.2. Zentraler Grenzwertsatz	69
3.3. Statistik für den treibenden Lévy-Prozess	87
3.3.1. Schätzungen im niederfrequenten Beobachtungsschema	89
3.3.2. Schätzungen im hochfrequenten Beobachtungsschema	109
3.4. Simulationsergebnisse	117
Kapitel 4. Zusammenfassung und Ausblick	129
Anhang A. Testergebnisse	133
Anhang B. Matlab - Quellcode	137
Literatur	141

Danksagung

Zahlreiche Personen begleiteten mich während der Erstellung dieser Arbeit, denen ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen möchte:

Zuallererst möchte ich meiner Betreuerin *Frau Prof. Dr. Jeannette H.C. Woerner* für das ausgesprochen interessante Thema und die ausgezeichnete Betreuung während der Anfertigung und Entwicklung dieser Arbeit danken. Sie stand jederzeit für gewinnbringende Diskussionen und Ratschläge zur Seite. Zudem ermöglichte sie mir die Teilnahme an mehrere Konferenzen und Workshops, an denen fachliche Erfahrungen gesammelt und zahlreiche Kontakte geknüpft werden konnten.

Ich bedanke mich bei *Herrn Prof. Dr. Gernot Müller* für die Übernahme des Zweitgutachtens und die Einladung nach Augsburg. Die inspirierenden Gespräche und Anregungen habe ich sehr geschätzt.

Zudem bedanke ich mich bei dem *DFG- Sonderforschungsbereich „Statistical modeling of nonlinear dynamic processes“ (SFB 823)* für die finanzielle Unterstützung über einige Monate.

Am Lehrstuhl IV der TU Dortmund fand ich stets ein hervorragendes Forschungs- und Arbeitsumfeld vor, was ich nicht zuletzt meinen Arbeitskollegen zu verdanken habe. Ich danke *Benedikt, Alexander, Sven, Christian, Waldemar und Sebastian* sowie allen weiteren Weggefährten für die schöne und gehaltvolle Zeit.

Ich bedanke mich bei meiner Freundin *Christina* für ihre Geduld, die sie speziell am Ende dieser Arbeit mit mir hatte. Ihre Liebe und ihr zuverlässiger Rückhalt waren mir stets eine große Hilfe. *Meine Eltern* haben mir den akademischen Lebensweg erst ermöglicht. Ihr Vertrauen in mich sowie ihre bedingungslose Unterstützung haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Um ihnen meinen Dank auszudrücken, möchte ich diese Arbeit widmen.

Notationen

\mathbb{N}	natürliche Zahlen $\{1, 2, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	ganze Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\mathbb{R}_+	positive, reelle Zahlen
\mathbb{C}	komplexe Zahlen
$\mathbb{1}$	Indikatorfunktion
P	Wahrscheinlichkeitsmaß
E	Erwartungswert
Var	Varianz
Cov	Kovarianz
$\mu * \nu$	Faltung zweier Maße μ und ν
$f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P) =: L^p(P)$	$\int_{\Omega} f(x) ^p d\mu(x) < \infty$ für $p > 1$
$f \in L^p(\mathbb{R})$	$f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ mit dem Lebesgue-Maß λ
$X_n \xrightarrow{f.s.} X$	X_n konvergiert fast sicher gegen X
$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$	X_n konvergiert stochastisch gegen X
$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$	X_n konvergiert in Verteilung gegen X
$X_n \xrightarrow{L^p(P)} X$	X_n konvergiert im p -ten Mittel bzgl. des Maßes P gegen X
$X_n \xrightarrow{L^p(\mathbb{R})} X$	X_n konvergiert im p -ten Mittel bzgl. des Lebesgue-Maßes gegen X
$P - \lim_{\cdot \rightarrow \infty}$	stochastischer Limes bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes P
$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$	Es existiert ein $C \geq 0$, sodass $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow C$ für $x \rightarrow x_0$
$f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$	Es gilt $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$
$x \wedge y$	$\min(x, y)$

Einleitung

Die Liberalisierung des deutschen Strommarktes zur Stärkung des Wettbewerbs wurde ähnlich wie in anderen europäischen Ländern erst im Jahre 1998 vollzogen. Dies führte zur Auflösung monopolistischer Energieunternehmen, die durch regulatorische Maßnahmen die Preise durch Anpassung an die eigenen Bedürfnisse und Kosten steuern konnten, sodass den Unsicherheiten in der Preisentwicklung keine große Bedeutung beizumessen war. Nach der Liberalisierung traten neue Händler und Unternehmen in die Märkte, Handelsplätze für Strom wurden gegründet und der Preisbildungsprozess reformiert. Seit dieser Zeit wird die Festlegung der Preise an den Strombörsen durch einen Ausgleich von Nachfrage und Angebot herbeigeführt. Die neuen Strukturen führten dabei zu vielerlei neuen Herausforderungen für die teilnehmenden Akteure, was insbesondere die Prognose zukünftiger Preise betrifft. Dabei ist die Preisentwicklung einer Reihe von Einflussfaktoren ausgesetzt. Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist dabei die Restriktion der Einlagerung von Strom: So besteht etwa in Deutschland bis heute nicht die Möglichkeit, den erzeugten oder erworbenen Strom in einem wirtschaftlich relevanten Rahmen zu speichern. Daher erhält der Ausgleich von Nachfrage und Angebot eine große Bedeutung. Beide Größen unterliegen derweil Schwankungen, die oft nicht vorherzusehen sind. Diese Unsicherheiten werden dabei zusätzlich durch die in Deutschland seit dem Jahr 2000 verabschiedeten „*Erneuerbaren-Energien-Gesetze*“ verschärft, welche Subventionen und einen Einspeisevorrang für erneuerbare Energieträger beinhalten. Gerade die potenzielle Produktionsmenge regenerativer Energien unterliegt jedoch etwa den Wind- und Sonnenverhältnissen des Tages und erschwert daher herkömmlichen Kraftwerken die Erstellung eines effizienten und zuverlässigen Einsatzplans. Von diesen Plänen kann dabei aus technischen Gründen oft nicht oder allenfalls in Verbindung mit hohen Kosten abgewichen werden. Werden etwa die Wetterbedingungen eines Tages falsch eingeschätzt, können Überproduktionen zu sehr niedrigen Preisen führen. Umgekehrt können auch überraschende Unwetter und eine damit verbundene höhere Nachfrage nach Strom den Einsatz eines zusätzlichen Kraftwerks erfordern und die Kosten der Produktion und folglich die Preise erhöhen. Aus solchen und vielerlei weiteren Gründen zeigen die Preiskurven auf Strommärkten daher

ein ausgesprochen volatiles Verhalten. Ein möglicher Weg dem Wunsch eines verlässlichen Prognoseverfahrens nachzukommen, führt dabei zur Stochastik. Seither sind Konzepte zur Modellierung von Spotpreis- und Forwardpreiskurven von Energiemärkten und deren statistische Kalibrierung ein aktuelles Thema der finanzmathematischen Fachliteratur. Hierbei steht die besondere Struktur der Märkte und der Eigenschaften der beobachteten Preise im Fokus, welche im Vergleich zu „klassischen Finanzmärkten“ einige Unterschiede aufweisen und daher aus Sicht der Mathematik neue Herausforderungen bieten. Auf weitere Details dieser typischen Charakteristiken von Strommärkten werden wir im Laufe der Arbeit näher eingehen. Im Folgenden richtet sich unser Interesse auf einen kleinen Auszug der Artikel, die sich der finanzmathematischen Modellierung von Energiemärkten widmen:

Strompreismodelle in der Literatur

Im Allgemeinen unterscheiden wir zwei Herangehensweisen der Modellbildung: Die erste Möglichkeit ist die „zeitdiskrete Modellierung“, die sich etwa den Ideen der Zeitreihentheorie bedient. Exemplarisch nennen wir etwa den Artikel von *Misiorek, Trueck und Weron (2006)*. Hier werden ein sogenanntes „ARMA-Modell“, ein „GARCH-Modell“ sowie ein „Regime-Switching Modell“ zur Preisprognose von Strom eingeführt und deren Güte anhand historischer Daten verglichen. Hierbei werden die Begriffe *ARMA-Modell* bzw. *GARCH-Modell* als Abkürzungen für ein „autoregressive Moving Average-Modell“ bzw. ein „generalized autoregressive conditional heteroscedasticity-Modell“ verwendet. Eine weitere Übersicht und Zusammenfassung über zeitdiskrete Ansätze liefert etwa *Weron (2014)*. In dieser Arbeit werden wir jedoch die Ideen nicht vertiefen, stattdessen die alternative Herangehensweise wählen und ein neues, zeitkontinuierliches Modell vorstellen.

Die Grundlage vieler zeitstetiger Strompreismodelle stellt dabei der Ornstein-Uhlenbeck Prozess dar. Dieser ist in der „klassischen Form“ die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dB_t$$

für ein $\lambda > 0$ und einen zufälligen Startwert X_0 sowie einer Brownschen Bewegung B als treibenden Prozess. Die explizite Lösung der Gleichung ergibt sich durch

$$X_t = e^{-\lambda t} X_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s.$$

Solche Prozesse werden zur Modellierung von sogenannten „mean-reverting Effekten“ stationärer Daten verwendet. Dieser Effekt beschreibt die Eigenschaft von Prozessen stets zu einem durchschnittlichen Niveau zurückzukehren. Ersetzen wir die Brownsche Bewegung durch einen Lévy-Prozess L , so erhalten wir typische Charakteristiken des klassischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses und können zusätzlich Sprünge modellieren. Die geschilderten Eigenschaften beobachtet man insbesondere bei der Analyse von Strompreisdaten. Diese motivierten *Schwartz (1997)* zur Konstruktion eines geometrischen Spotpreismodells $(S_t)_{t \geq 0}$, welches die Gestalt $S_t := \exp(P_t)$ besitzt. Hierbei beschreibt $(P_t)_{t \geq 0}$ einen klassischen Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit einer Brownschen Bewegung als treibenden Prozess. Da Strompreise darüber hinaus saisonale Effekte und Trends aufweisen, erweiterte beispielsweise *Barlow (2002)* das Modell mit Hilfe einer deterministischen Saisonalitäten-Funktion Λ und nahm an, dass der Spotpreis S von der Form $S_t := \exp(\Lambda_t + P_t)$ ist. Um zusätzlich die Sprünge in den beobachteten Daten abzubilden schlugen *Geman und Roncoroni (2006)* das Spotpreismodell $S_t = \exp(\Lambda_t + P_t)$ mit einer deterministischen Trend-Funktion Λ und dem Markov-Prozess $(P_t)_{t \geq 0}$ als Lösung der Sprung-Diffusion

$$dP_t = (\mu_t - \lambda P_t) dt + \sigma dB_t + h_t dJ_t$$

vor. Hierbei sind $\sigma, \lambda > 0$ und μ_t sowie h_t deterministische Funktionen. Der Prozess $(J_t)_{t \geq 0}$ beschreibt zudem einen zusammengesetzten Poisson-Prozess. Einen sehr großen Überblick über weitere Modelle findet man etwa in dem Buch *Stochastic Modeling Of Electricity And Related Markets* von *Benth, Benth und Koekebakker (2008)*.

Interessiert man sich für explizite Formeln zur Bewertung von Derivaten auf Basis obiger geometrischer Spotpreismodelle, treten bei der Berechnung oft mathematische Schwierigkeiten auf. Eine Perspektive in dieser Hinsicht bieten arithmetische Modelle, in denen eine Superposition von stochastischen Prozessen betrachtet wird. Eine Möglichkeit hierzu wäre es etwa eine Summe Lévy-getriebener Ornstein-Uhlenbeck Prozesse Y_1, \dots, Y_n zur Modellierung zu nutzen. Eine umfangreiche Einführung hierzu bietet der Artikel von *Barndorff-Nielsen und Shephard (2001)*. Von diesem inspiriert entwarfen *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis (2007)* das arithmetische Spotpreismodell $S(t) = \Lambda(t) + \sum_{i=1}^n Y_i$, wobei Λ abermals eine Trend-Funktion und Y_1, \dots, Y_n Lévy-getriebene Ornstein-Uhlenbeck Prozesse als Lösung der stochastischen Differentialgleichungen

$$dY_i = (\mu_i - \lambda_i Y_i) dt + dL_i(t)$$

beschreiben. Auf Grundlage dieses Modells zeigen die Autoren, dass sich explizite Preisformeln für zwei mögliche Derivate auf Elektrizitätsmärkten herleiten lassen. Eine weitere

Verallgemeinerung dieses Modells findet sich etwa in *Barndorff-Nielsen, Benth und Veraart (2010)*. In dem erwähnten Artikel werden sogenannte „semistationäre Lévy-Prozesse“ zur Modellbildung vorgeschlagen. Diese sind für ein $\mu \in \mathbb{R}$, die positiven deterministischen Funktion g und q , einem Lévy-Prozess L und den stochastischen Prozessen ω_s und a_s von der Form

$$S_t = \mu + \int_{-\infty}^t g(t-s)\omega_s dL_s + \int_{-\infty}^t q(t-s)a_s ds.$$

Das Modell lässt dabei Freiheit bei der Wahl der Komponenten und impliziert auf diese Weise eine Reihe obiger Modelle. Allerdings sind die stochastischen Prozesse im Allgemeinen nicht mehr stationär, was insbesondere im Hinblick auf die statistische Kalibrierung des Modells für Schwierigkeiten sorgen kann.

Ein weiterer Ansatz zur Modellierung der Preise stellt die zeitkontinuierliche Verallgemeinerung von ARMA-Prozessen dar, welche CARMA-Prozesse genannt werden. Diese Idee wird etwa in *Garcia, Klüppelberg und Müller (2011)* näher diskutiert. Ein Vorschlag zur statistischen Anpassung eines Modells auf der Basis von CARMA-Prozessen findet man derzeit in *Benth, Klüppelberg, Müller und Vos (2014)*.

Motivation und Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit wird ein neues arithmetisches Spotpreismodell vorgestellt. Dabei basiert unser Modell auf sogenannten *oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen* von der Form

$$X(t) := \int_{-\infty}^t \sin(a(t-s))e^{-\lambda(t-s)} dA_s \quad \text{und} \quad Y(t) := \int_{-\infty}^t \cos(a(t-s))e^{-\lambda(t-s)} dA_s$$

mit $\lambda, a > 0$ und einem additiven Prozess A als Treiber. In unserem Modell verzichten wir auf die Verwendung deterministischer Trend-Funktionen. Diese werden in den zuvor vorgestellten Spotpreismodellen bereits vor der stochastischen Modellierung festgelegt. Dabei gilt es zu beachten, dass diese maßgeblich auf die Beschaffenheit des Modells einwirken, obgleich eine eindeutige Trennung von Trend- und stochastischen Einflüssen in der Praxis nicht möglich ist. In dem hier vorgestellten Ansatz werden hingegen die Saisonalitäten direkt durch eine oszillierende Abhängigkeitsstruktur, welche durch die Wahl der Parameter gesteuert wird, implizit durch den verwendeten stochastischen Prozess modelliert. Das oszillierende Verhalten wird dabei zu einer zufälligen Komponente. Ein solcher Versuch wurde in der Fachliteratur bisher nicht unternommen. Dennoch soll unser Modell wesentliche Eigenschaften wie etwa den „mean-reverting-Effekt“ erhalten, unendlich

teilbare Randverteilungen aufweisen, aber auch das volatile Verhalten und Sprünge in den Strompreisen abbilden können. Zweckmäßig ist zudem ein Spotpreismodell, welches zur Bewertung von Derivaten und zur Nachbildung beobachteter Risikoprämien genutzt werden kann. Um das Modell anhand von realen Daten etwa mit Hilfe der Momentenmethode kalibrieren zu können, wären zudem Stationarität und Ergodizität des entworfenen Spotpreisprozesses wünschenswerte Attribute. Zentrale Grenzwertsätze für die Parameterschätzer des Modells und eine Simulationsstudie sollen die Thematik abrunden.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im ersten Kapitel werden zunächst grundlegende Begriffe vorgestellt. Hierzu richtet sich das Augenmerk auf die zugrunde gelegten stochastischen Prozesse sowie dem hier verwendeten Begriff des stochastischen Integrals. Im Anschluss fokussieren wir uns schließlich auf die Einführung *oszillierender Ornstein-Uhlenbeck Prozesse*. Dabei stehen neben der Existenzfrage auch die Diskussion über die Eigenschaften der Prozesse und die Betrachtung von Spezialfällen im Blickpunkt. Wir werden hierzu etwa die Momente und die Abhängigkeitsstruktur der Prozesse untersuchen. Im zweiten Kapitel stellen wir schließlich das neue Spotpreismodell für Elektrizitätsmärkte vor. Anschließend wird der Frage nachgegangen inwieweit das eingeführte Modell die beobachteten Charakteristiken von Strompreisdaten abbildet. Nach dem Entwurf und der kritischen Betrachtung des Modells richtet sich unser Interesse auf die Bewertung zweier möglicher Derivate, die auf Elektrizitätsmärkten gehandelt werden. Das letzte Kapitel der Arbeit widmet sich der Modellkalibrierung. Hierzu verwenden wir schließlich eine Momentenmethode zur Schätzung der Parameter der verwendeten Prozesse. Zur Untersuchung der Güte der entwickelten Parameterschätzer wird anschließend ein zentraler Grenzwertsatz hergeleitet. Abschließend blicken wir auf den treibenden Lévy-Prozess. Eine spezielle Zurückgewinnungsstrategie des Lévy-Prozesses auf Grundlage von Beobachtungen der Prozesse wird daraufhin in einem niederfrequenten als auch hochfrequenten Beobachtungsschema analysiert. Den Schwerpunkt setzen wir dabei auf die Beschaffenheit von kanonischen Schätzern, um den Mittelwert und die Varianz des treibenden Prozesses zu schätzen. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit einer Simulation der Prozesse. Es werden zwei mögliche Algorithmen zur Simulation vorgestellt. Abschließend werden die zuvor entwickelten Schätzer in speziellen Modellsituationen getestet und die Ergebnisse der Studie dargelegt.

KAPITEL 1

Verallgemeinerte oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse

Zur Modellierung von Spotpreisen europäischer Strommärkte, richtet sich das Interesse in dieser Arbeit insbesondere auf die Klasse verallgemeinerter Moving-Average Prozesse $X := (X(t))_{t \geq 0}$ der Form

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) dA_s, \quad (1.1)$$

welche durch einen sogenannten *zweiseitig-additiven Prozess* $A := (A_t)_{t \in \mathbb{R}}$ „angetrieben“ werden. Oft betrachten wir lediglich einen Spezialfall und ersetzen A durch einen *zweiseitigen Lévy-Prozess* $L = (L_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Daher dient dieses Kapitel dazu, additive Prozesse, Lévy-Prozesse sowie das vorgestellte stochastische Integral X einzuführen. Bevor darüber hinaus Eigenschaften solcher stochastischer Prozesse diskutiert und wichtige Spezialfälle näher untersucht werden, beschäftigen wir uns jedoch vorab mit grundlegenden Begriffen sowie Schreibweisen, von denen im Laufe dieser Arbeit Gebrauch gemacht wird.

Wir gehen zunächst davon aus, dass den hier behandelten stochastischen Prozessen stets ein geeigneter, filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$ zugrunde liegt. Unter einem *stochastischen Prozess* verstehen wir eine Familie von \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen $X := (X_t(\omega))_{t \in I}$, wobei ω aus dem Grundraum Ω stammt und die Indexmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ als Zeitbereich des Prozesses gedeutet werden kann. Den Messraum der Prozesse verstehen wir wie üblich mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Oft beschränken wir uns auf den Fall $d = 1$. Wenngleich der Prozess stets von ω abhängt, verzichten wir im Verlauf der Arbeit auf die Erwähnung und schreiben X als $(X_t)_{t \in I}$ oder auch $(X(t))_{t \in I}$. Gleichmaßen verwenden wir die Notation X_t oder auch $X(t)$ und meinen dabei den stochastischen Prozess X zum Zeitpunkt $t \in I$. In dieser Arbeit wird im Wesentlichen mit den Zeitbereichen $I = [0, \infty[$ bzw. $I = \mathbb{N}$ oder auch $I = \mathbb{R}$ bzw. $I = \mathbb{Z}$ gearbeitet. Im dritten und vierten Fall spricht man von einem *zweiseitigen stochastischen Prozess*. Darüber hinaus nennen wir die Abbildung

$$I \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto X_t(\omega)$$

Pfad des Prozesses X zu einem $\omega \in \Omega$. Der Prozess wird als *fast sicher stetig* bezeichnet, falls die Pfade von X fast sicher stetig sind. Analog sprechen wir von einem *RCLL-Prozess* („*right continuous with left limits*“), falls die Pfade fast sicher rechtsstetig sind und zudem existierende Grenzwerte von links besitzen.

Bezeichnet das Maß μ speziell ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so nennen wir die Funktion

$$\varphi_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_\mu(y) := \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} d\mu(x)$$

charakteristische Funktion von μ . Ferner sprechen wir von der *charakteristischen Funktion* φ_Y einer Zufallsvariablen Y , wenn die charakteristische Funktion φ_{P_Y} der Verteilung P_Y von Y gemeint ist. Ferner bezeichnet in diesem Sinne

$$\varphi_X(t, y) := \varphi_{X_t}(y)$$

die *charakteristische Funktion des Prozesses X in $y \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t \in I$* . Zur Vertiefung von stochastischen Prozessen und charakteristischen Funktionen empfiehlt sich etwa das Buch von *Bauer (2002)*.

1.1. Additive Prozesse und Lévy-Prozesse

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse aus dem Buch von *Sato (1999, Chapter 2, Chapter 4)* zusammengefasst. Wie angekündigt widmen wir uns der

DEFINITION 1.1.1. (Lévy - Prozesse und additive Prozesse).

Der stochastische Prozess $L := (L(t))_{t \geq 0}$ wird *Lévy - Prozess* genannt, falls

- (i) der Prozess L unabhängige Zuwächse besitzt, das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zufallsvariablen $L(t_0)$, $L(t_1) - L(t_0)$, $L(t_2) - L(t_1)$, \dots , $L(t_n) - L(t_{n-1})$ unabhängig,
- (ii) $L(0) = 0$ fast sicher gilt,
- (iii) der Prozess L stationäre Zuwächse besitzt, das heißt die Verteilung von $L(s+t) - L(s)$ hängt für $0 \leq s < t$ nicht von s ab,
- (iv) der Prozess L stetig in Wahrscheinlichkeit ist, das heißt für alle $\epsilon > 0$ und $t \geq 0$ gilt

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|L(t) - L(s)| > \epsilon) = 0,$$

und

- (v) der Prozess L ein RCLL-Prozess ist.

Ein *additiver Prozess* $A := (A(t))_{t \geq 0}$ ist ein stochastischer Prozess, welcher die Bedingungen (i), (ii) sowie (iv) und (v) erfüllt. Verzichtet man bei einem *Lévy-Prozess* bzw. einem *additiven Prozess* auf Bedingung (v), so spricht man von einem *Lévy-Prozess in Verteilung* bzw. einem *additiven Prozess in Verteilung*. \diamond

Die Konstruktion von Lévy-Prozessen (in Verteilung) sowie additiven Prozessen (in Verteilung), die auch zur Existenzaussage führt, lässt sich in *Sato (1999, Chapter 2)* sowie *Sato (1999, Theorem 11.5)* nachlesen.

Die Definition der Prozesse zeigt, dass jeder Lévy-Prozess auch der Klasse additiver Prozesse angehört. Wir wollen daher im Folgenden einige wichtige Resultate für additive Prozesse zusammenfassen und anschließend das Ergebnis für den Spezialfall eines Lévy-Prozesses ableiten: Eine Charakterisierung von additiven Prozessen mittels ihrer charakteristischen Funktion liefert die sogenannte *Lévy-Khintchine-Formel*:

THEOREM 1.1.2.

- (i) *Es sei A ein additiver Prozess. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, eine sowohl stetige als auch monoton wachsende Funktion $\sigma^2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sowie ein σ -endliches Maß ν auf der Borel- σ -Algebra von $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} \nu(B \times \{0\}) = 0, \quad \nu(\{t\} \times \mathbb{R}) = 0 \quad \text{und} \\ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge y^2) \nu(dt, dy) < \infty \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ und } t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

sodass sich die charakteristische Funktion φ_{A_t} für alle $t \geq 0$ durch

$$\varphi_A(t, y) = \exp(\psi_A(t, y)) \quad (1.3)$$

mit dem charakteristischen Exponenten

$$\psi_A(t, y) = iy\gamma(t) - \frac{1}{2}y^2\sigma^2(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{iyz} - 1 - iyz\mathbb{1}_{|z| \leq 1}) \nu(ds, dz)$$

ergibt.

- (ii) *Umgekehrt gilt: Es seien γ, σ^2 Funktionen wie in (i) und ν ein Maß, welches (1.2) erfüllt, dann existiert ein additiver Prozess (in Verteilung), dessen charakteristische Funktion $\varphi_A(\cdot, \cdot)$ von der Form (1.3) ist.*

BEWEIS. Siehe *Sato (1999, Theorem 9.8)*. \square

BEMERKUNGEN 1.1.3. Statt der Funktion $z \mapsto \mathbb{1}_{|z| \leq 1}$ können auch andere, geeignete Abschneidefunktionen gewählt werden. Abhängig von der Wahl ergibt sich dadurch eine andere Funktion γ_t und andere Darstellung von ψ_A . Für weitere Details verweisen wir erneut auf *Sato (1999)*. \diamond

Für einen Lévy-Prozess L besitzt die *Lévy-Khintchine-Formel* die folgende Gestalt:

THEOREM 1.1.4.

- (i) *Es sei L ein Lévy-Prozess. Dann gibt es genau ein $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ sowie ein Maß ν , welches die Bedingung*

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \, d\nu(x) < \infty \quad (1.4)$$

erfüllt, sodass sich die charakteristische Funktion φ_{L_t} für alle $t \geq 0$ durch

$$\varphi_L(t, y) = \exp(t \cdot \psi_L(y)) \quad (1.5)$$

mit dem sogenannten charakteristischen Exponenten

$$\psi_L(y) = i\gamma y - \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iyz} - 1 - iyz \mathbb{1}_{|z| \leq 1}) \, d\nu(z)$$

ergibt. Wir nennen daher (γ, σ^2, ν) das charakteristische Triplet des Lévy Prozesses L .

- (ii) *Umgekehrt gilt: Es seien $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ und ν ein Maß, welches (1.4) erfüllt, dann existiert ein Lévy-Prozess (in Verteilung), dessen charakteristische Funktion $\varphi_L(\cdot, \cdot)$ von der Form (1.5) ist.*

BEWEIS. Siehe *Sato (1999, Theorem 8.1)*. \square

Ähnlich wie bei Lévy-Prozessen wird schließlich also auch ein additiver Prozess durch die Funktionen $\gamma_t := \gamma(t)$, $\sigma_t^2 := \sigma^2(t)$ und die eindeutigen Maße $\nu_t(B) := \nu([0, t] \times B)$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $t \geq 0$ eindeutig identifiziert, weshalb man auch hier von dem *charakteristischen Triplet* $(\gamma_t, \sigma_t^2, \nu_t)$ des Prozesses A spricht.

Im Gegensatz zu Lévy-Prozessen sind die additiven Prozesse allerdings jedoch im Allgemeinen keine Semimartingale. Ein Kriterium, welches additive Prozesse zusätzlich der Klasse der Semimartingale angehören lässt, findet sich in *Sato (2004)*. Demnach ist ein additiver Prozess genau dann ein Semimartingal, falls die Funktion γ in Theorem 1.1.2 von endlicher Variation ist. In diesem Sinne spricht man auch von natürlichen additiven

Prozessen (vgl. [Sato, 2006](#)). Im Folgenden nehmen wir für den Rest der Arbeit an, dass γ diese Eigenschaft besitzt. Im Hinblick auf das Vorhaben, additive Prozesse zur Modellierung von Finanzmarktdaten zu verwenden, stellt dies keine Restriktion dar.

Zum Abschluss dieses Kapitels wird die sogenannte *Lévy-Itô-Zerlegung* sowohl für additive Prozesse als auch Lévy-Prozesse vorgestellt. Sie zeigt, dass sich die betrachteten Prozesse in einen stetigen Prozess und einen Sprungprozess zerlegen lassen. Hierbei sind die beiden Komponenten darüber hinaus unabhängig. Wir beginnen vorab mit der folgenden Definition: Hierzu sei $\mathcal{H} :=]0, \infty[\times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $A_{t-} := \lim_{s \uparrow t} A_s$ definiert man zu einem additiven Prozess A das Zufallsmaß

$$J_A(\omega, H) := \#\{s : (s, A_s(\omega) - A_{s-}(\omega)) \in H\} \quad (1.6)$$

für ein $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. In [Sato \(1999, Theorem 9.8\)](#) zeigt sich, dass durch J_A ein sogenanntes Poissonsches Zufallsmaß auf dem Messraum $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ definiert wird. Mit Hilfe des Zufallsmaßes J_A lässt sich schließlich die Lévy-Itô-Zerlegung formulieren:

THEOREM 1.1.5.

- (i) *Es sei A ein additiver Prozess mit charakteristischem Triplet $(\gamma_t, \sigma_t^2, \nu_t)$ und J_A das Zufallsmaß wie in (1.6). Dann besitzt A für alle $t \geq 0$ die Zerlegung*

$$A_t = A_t^{(1)} + A_t^{(2)} + A_t^{(3)}.$$

Hierbei sind $A_t^{(1)}$, $A_t^{(2)}$ und $A_t^{(3)}$ unabhängige, additive Prozesse. Diese ergeben sich durch

$$A_t^{(1)} = \gamma_t \quad \text{und} \quad A_t^{(2)} = M_t,$$

wobei $M := (M_t)_{t \geq 0}$ ein lokales L^2 -Martingal bezeichnet. Hierbei besitzt $A_t^{(1)}$ das charakteristische Triplet $(\gamma_t, 0, 0)$ sowie $A_t^{(2)}$ das charakteristische Triplet $(0, \sigma_t^2, 0)$. Die Sprungkomponente ist der additive Prozess

$$A_t^{(3)} = \int_{(0,t] \times \{|x| \geq 1\}} x J_A(ds, dx) + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{(0,t] \times \{\epsilon < |x| < 1\}} x (J_A(ds, dx) - \nu(ds, dx))$$

mit dem charakteristischen Triplet $(0, 0, \nu_t)$. Hierbei beschreibt ν das mit den Maßen ν_t in Verbindung stehende Maß aus [1.1.2](#).

Nehmen wir zusätzlich an, dass $\int_0^t \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(ds, dx) < \infty$ für alle $t \geq 0$ gilt, so hat $A^{(3)}$ die Gestalt

$$A_t^{(3)} = \int_{(0,t] \times \mathbb{R}} x J_A(ds, dx).$$

In diesem Fall besitzt $A^{(3)}$ die charakteristische Funktion

$$\varphi_{A^{(3)}}(t, y) = \exp \left(\int_{(0, t] \times \mathbb{R}} (e^{iyx} - 1) \nu(ds, dx) \right).$$

(ii) Es sei L ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Triplet (γ, σ^2, ν) wie in Theorem 1.1.4. Dann vereinfacht sich obige Zerlegung zu

$$\begin{aligned} L_t = & \gamma t + \sigma B_t + \int_{(0, t] \times \{|x| \geq 1\}} x J_L(ds, dx) \\ & + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{(0, t] \times \{\epsilon < |x| < 1\}} x (J_L(ds, dx) - \nu(dx) ds). \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt J_L das Zufallsmaß (1.6) des Lévy-Prozesses L sowie $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

BEWEIS. Siehe Sato (1999, Theorem 19.2 und Theorem 19.3). □

Ein wichtiges Beispiel dieser Arbeit ist der folgende Lévy-Prozess:

BEISPIEL 1.1.6. [NIG - Prozess]

Für $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in (-\alpha, \alpha)$, $\delta > 0$ sowie $\gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ seien X und Y Zufallsvariablen, sodass Y einer inversen Gauß-Verteilung $\mathcal{IG}(\delta, \gamma)$ sowie die bedingte Zufallsvariable $X|(Y = y)$ einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu + \beta y, y)$ gehorche. Die resultierende Verteilung der unbedingten Zufallsvariablen X mit dieser Eigenschaft wird derweil als Normal-Inverse-Gauß-Verteilung (kurz: NIG($\alpha, \beta, \mu, \delta$)-Verteilung) bezeichnet (für mehr Details vgl. etwa Barndorff-Nielsen, 1997a). Da sich mit Hilfe der Verteilung eine Faltungshalbgruppe der Form

$$(\mu_t := \text{NIG}(\alpha, \beta, t\mu, t\delta))_{t \geq 0}$$

definieren lässt, kann diese zur Konstruktion eines Lévy-Prozesses L , dem sogenannten NIG-Prozess, genutzt werden. Neben der Übergangsdichte und der Momente lassen sich für diesen auch das charakteristische Triplet $(\gamma, 0, \nu)$ explizit angeben. Dieses ist von der Form

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2}{\pi} \delta \alpha \int_0^1 \sinh(\beta x) \cdot \mathcal{K}_1(\alpha x) dx, \\ \nu(dx) &= \frac{\delta \alpha}{\pi} \cdot |x|^{-1} \cdot \exp(\beta x) \cdot \mathcal{K}_1(\alpha |x|) dx. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{K}_1(\cdot)$ eine modifizierte Bessel-Funktion dritter Ordnung mit Index 1. Während durch den Parameter α das Tail-Verhalten der Verteilung gesteuert

werden kann, wird mit Hilfe von β „die Schiefe“ kalibriert. Ferner wird die Verteilung durch μ lokalisiert und δ skaliert. \diamond

Ein spezieller additiver Prozess, der sogenannte zeitinhomogene Poisson-Prozess, wird in Beispiel 1.3.4 beschrieben. Auf der Suche nach weiteren Beispielen solcher Prozesse wird man etwa in den Büchern von *Benth*, *Benth* und *Koekebakker* (2008) oder auch *Cont* und *Tankov* (2004) fündig.

Der Fokus richtet sich nun auf die Konstruktion des stochastischen Integrals:

1.2. Verallgemeinerte Moving-Average Prozesse

Ein stochastischer Prozess der Form

$$\int_0^t f(s) dA_s$$

mit einer deterministischen und zudem beschränkten, stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann als klassisches Itô-Integral aufgefasst werden, wenn wir annehmen, dass A der Klasse der Semimartingale angehört. Zur Einführung des stochastischen Integrals der Form

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) dA_s, \quad (1.7)$$

in dem A einen geeigneten additiven Prozess bezeichnet, kann durch obigen Integralbegriff nicht beschrieben werden, sodass ein alternativer Weg beschritten werden muss. Dies liegt etwa daran, dass wir über die reelle Achse integrieren möchten.

Beschränkt man sich in der Klasse der Integratoren auf spezielle Lévy-Prozesse mit einem endlichen zweiten Moment sowie Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$, so führt ein möglicher Weg der Definition hierbei ebenso über die L^2 -Theorie stochastischer Integration. Eine Basis hierzu legte etwa *Marquard* (2006) durch den Nachweis einer geeigneten L^2 -Isometrie. Wir führen das Integral (1.7) jedoch „direkt“ im Sinne von *Rajput* und *Rosinski* (1989) ein. Ein großer Vorteil dieser Herangehensweise ist dabei, dass sich das stochastische Integral für eine sehr breite Klasse von Funktionen f und additive Prozesse A definieren lässt. Zudem bietet dieser Weg den Vorzug, dass die charakteristische Funktion φ_{X_t} des Prozesses (1.7) unmittelbar aus dem verwendeten Definition des Integrals abgeleitet werden kann.

Zur Konstruktion richtet sich daher unser Augenmerk auf einen Integralbegriff von *Rajput* und *Rosinski* (1989) für eine deterministische Funktion als Integranden sowie ein sogenanntes *unendlich teilbares, unabhängig gestreutes Zufallsmaß* als Integrator, welches

mit einem additiven Prozess (in Verteilung) assoziiert werden kann. Dieses Zufallsmaß gilt es zunächst zu definieren:

DEFINITION 1.2.1. (Unendlich teilbares, unabhängig gestreutes Zufallsmaß).

Es bezeichne $\mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ den δ -Ring aller beschränkten Mengen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Eine Familie von \mathbb{R} -wertigen Zufallsvariablen $\{\Lambda(B) : B \in \mathcal{B}^b(\mathbb{R})\}$, welche auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) definiert seien, wird *unendlich teilbares, unabhängig gestreutes Zufallsmaß* auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^b(\mathbb{R}))$ genannt, falls

- (i) für jedes $B \in \mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ die Zufallsvariable $\Lambda(B)$ unendlich teilbar ist,
- (ii) für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ die Zufallsvariablen $\Lambda(B_1), \dots, \Lambda(B_n)$ unabhängig sind und
- (iii) für eine Folge disjunkter Mengen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \Lambda(B_i)$ fast sicher konvergiert sowie die Identität

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Lambda(B_i) = \Lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

fast sicher erfüllt. ◇

Da für $B \in \mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ durch $\Lambda(B)$ eine Zufallsvariable definiert wird, deren Verteilung unendlich teilbar ist, kann die charakteristische Funktion von $\Lambda(B)$ ermittelt werden. Nach *Rajput* und *Rosinski* (1989) ist diese für $B \in \mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ von der Form

$$\varphi_{\Lambda(B)}(y) = \exp\left(iy\nu_0(B) - \frac{1}{2}y^2\nu_1(B) + \int_{B \times \mathbb{R}} (e^{iyz} - 1 - iz\mathbb{1}_{|z|<1}) \nu(ds, dz)\right). \quad (1.8)$$

Hierbei beschreiben $\nu_0 : \mathcal{B}^b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ein endliches, signiertes Maß, $\nu_1 : \mathcal{B}^b(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty[$ ein endliches Maß sowie ν ein Intensitätsmaß mit den Eigenschaften von (1.2). Nach *Rajput* und *Rosinski* (1989, Proposition 2.1) werden diese Maße eindeutig durch Λ festgelegt. Für $B =]0, t] \in \mathcal{B}^b(\mathbb{R})$ definieren wir zur Einordnung in den vorherigen Kontext die Funktionen $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma^2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit Hilfe der endlichen Maße ν_0 und ν_1 durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \nu_0(]0, t]) \quad \text{und} \\ \sigma^2(t) &:= \nu_1(]0, t]) \end{aligned} \quad (1.9)$$

und erkennen auf diese Weise einen Zusammenhang zur *Lévy-Khintchine-Formel* für additive Prozesse 1.1.2. Diese Beziehung wird nun näher untersucht: Vorab richten wir den Blick kurz zurück auf das Integral (1.1). Um eine Integration über die gesamte reelle Achse zu ermöglichen, müssen additive Prozesse auf der reellen Zeitachse sinnvoll fortgesetzt werden. Dies geschieht wie folgt:

DEFINITION 1.2.2. (Zweiseitig-additive Prozesse und zweiseitige Lévy-Prozesse).

Es seien $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ zwei unabhängigen Kopien eines additiven Prozesses \tilde{A} . Der *zweiseitig-additive Prozess* A zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$A(t) := \begin{cases} A^{(1)}(t), & \text{falls } t \geq 0, \\ -A^{(2)}(-t) & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Analog definiert man einen zweiseitigen Lévy-Prozess. \diamond

Der Prozess A wird gewissermaßen im Ursprung gespiegelt. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird $A := (A(t))_{t \in \mathbb{R}}$ stets als zweiseitig-additiver Prozess beziehungsweise $L = (L(t))_{t \in \mathbb{R}}$ als zweiseitiger Lévy-Prozess aufgefasst. Der Zusammenhang von (zweiseitig-)additiven Prozessen mit unendlich teilbaren, unabhängig gestreuten Zufallsmaßen zeigt sich etwa in *Sato* (2004, Theorem 3.2). Demnach wird durch

$$\Lambda([t_1, t_2]) := A(t_2) - A(t_1) \quad \text{für } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } t_1 < t_2 \quad (1.10)$$

ein unendlich teilbares, unabhängig gestreutes Zufallsmaß definiert. Der Integralbegriff von *Rajput* und *Rosinski* (1989) kann daher zur Definition von stochastischen Integralen (1.1) genutzt werden. Im erwähnten Artikel betrachten die Autoren für eine messbare Funktion $K(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $Z := (Z(t))_{t \geq 0}$ den stochastischen Prozess der Gestalt

$$Z_t := \int_{\mathbb{R}} K(t, s) dA_s, \quad (1.11)$$

wobei A einen zweiseitig-additiven Prozess beschreibe, welcher auch *treibender Prozess* genannt wird. Um als Grundlage einen Integralbegriff (1.11) für eine Kernfunktion $K(\cdot, \cdot)$ zu erhalten, führen wir das Integral in dieser Form ein. Nach der Definition des Integrals konstruieren wir mit Hilfe einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine spezielle Kernfunktion $K(\cdot, \cdot)$ wie in (1.7) und reduzieren weitere Überlegungen auf diesen Spezialfall. Bevor wir uns der Konstruktionsidee des stochastischen Integrals widmen, definieren wir vorab das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fortgesetzte, sogenannte *Kontrollmaß*

$$\rho : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty[, \quad \rho(B) = |\nu_0(B)| + \nu_1(B) + \int_{B \times \mathbb{R}} (1 \wedge z^2) \nu(ds, dz),$$

wobei ν_0, ν_1 und ν die Maße aus (1.8) bezeichnen. Es zeigt sich, dass durch ρ ein σ -endliches Maß definiert wird. Wird das Zufallsmaß Λ in (1.10) durch einen Lévy-Prozess definiert, so ist ρ ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maßes (siehe dazu etwa *Basse* und *Pedersen*, 2009).

DEFINITION 1.2.3. (Konstruktion des stochastischen Integrals).

Es sei Z ein Prozess der Gestalt (1.11) und Λ das durch den treibenden Prozess A in (1.10) definierte Zufallsmaß. Dann definiert man das stochastische Integral (1.11) durch

$$\int_{\mathbb{R}} K(t, s) dA_s := \int_{\mathbb{R}} K(t, s) \Lambda(ds),$$

wobei wir das zweite Integral wie folgt konstruieren:

- (i) Für $n \in \mathbb{N}$ und die disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sei $K(t, \cdot)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion der Form

$$K(t, s) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{B_k}(s)$$

mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. In diesem Szenario definieren wir für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ das Integral durch

$$\int_B K(t, s) \Lambda(ds) := \sum_{k=1}^n c_k \Lambda(B_k \cap B).$$

- (ii) Für $t \in \mathbb{R}$ sei nun $K(t, \cdot)$ eine messbare Funktion. Ferner nehmen wir an, dass für $t \in \mathbb{R}$ eine Folge von Treppenfunktionen $(K_n(t, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ existiere, sodass
- die Folge $(K_n(t, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ fast überall bezüglich des Kontrollmaßes ρ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegen $K(t, \cdot)$ konvergiere und
 - für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Folge $(\int_{\mathbb{R}} K_n(t, s) \Lambda(ds))_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ in Wahrscheinlichkeit konvergiere.

Sind beide Bedingungen für $K(t, \cdot)$ erfüllt, so nennen wir $K(t, \cdot)$ Λ -integrierbar und definieren:

$$\int_{\mathbb{R}} K(t, s) d\Lambda(ds) := P - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} K_n(t, s) \Lambda(ds).$$

Es gilt zu beachten, dass der Grenzwert nicht von der speziellen Wahl der approximierenden Folge $(K_n(t, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ abhängt und daher wohldefiniert ist (vgl. *Rajput* und *Rosinski*, 1989). \diamond

In dieser Arbeit beschränken wir uns ausschließlich auf den folgenden Spezialfall des Integrals (1.11):

DEFINITION 1.2.4. (Zeitstetige Moving-Average Prozesse).

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion sowie

$$K(t, s) := f(t - s),$$

die aus f konstruierte Funktion $K(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Existiert der resultierende Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ (1.1) der Form

$$X_t := \int_{\mathbb{R}} f(t-s) dA_s$$

im Sinne obiger Konstruktion, so wird dieser als *verallgemeinerter, zweiseitiger Moving-Average Prozess* bezeichnet. Ist A ein Lévy-Prozess, so wird X *Lévy-getriebener, zweiseitiger Moving-Average Prozess* genannt. Geht man zusätzlich davon aus, dass $f(x) = 0$ für alle $x < 0$ gilt, so verzichtet man jeweils auf den Begriff „zweiseitig“. In diesem Fall spricht man auch von einem „einseitigen“ Prozess. \diamond

Eine direkte Konstruktion der approximierenden Treppenfunktionen ist in der Praxis sehr aufwändig. Glücklicherweise ist dies dank *Theorem 2.7* in *Rajput und Rosinski (1989)* nicht notwendig, in dem Bedingungen an die Kernfunktion f sowie das Triplet $(\gamma_t, \sigma_t^2, \nu_t)$ des treibenden Prozesses A entwickelt werden, welche die Existenz des Integrals im obigen Sinne garantieren. In unserer Sprechweise liefert das Theorem:

SATZ 1.2.5 (Allgemeiner Existenzsatz). *Es seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $X := (X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess der Form*

$$X_t := \int_{\mathbb{R}} f(t-s) dA_s,$$

wobei A den sogenannten treibenden (natürlichen, zweiseitig-) additiven Prozess A mit charakteristischem Triplet $(\gamma_t, \sigma_t^2, \nu_t)$ beschreibe. Dann existiert das stochastische Integral X genau dann, wenn die Bedingungen

- (i) $\int_{\mathbb{R}} |f(t-s)| d\gamma(s) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t-s)z (\mathbf{1}_{|zf(t-s)| \leq 1}(z) - \mathbf{1}_{|z| \leq 1}(z))| \nu(ds, dz) < \infty,$
- (ii) $\int_{\mathbb{R}} |f(t-s)|^2 d\sigma^2(s) < \infty,$
- (iii) $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \min(|zf(t-s)|^2, 1) \nu(ds, dz) < \infty$

für $t \in \mathbb{R}$ erfüllt sind.

BEWEIS. Siehe *Rajput und Rosinski (1989, Theorem 2.7)*. \square

Man bemerke, dass die Integrale in (i) und (ii) bezüglich der Funktionen γ , welche nach Voraussetzung von endlicher Variation ist, und der monotonen Funktion σ^2 als Stieltjes-Integrale aufgefasst werden können. Die Existenzbedingungen des stochastischen Integrals ergeben sich dabei maßgeblich aus der Herleitung der charakteristischen Funktion des Prozesses Z :

SATZ 1.2.6. Falls $X := (X_t)_{t \geq 0}$ die Existenzbedingungen aus Satz 1.2.5 erfüllt, so besitzt die charakteristische Funktion von X in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ die Darstellung

$$\varphi_X(t, y) = \exp(\psi_X(t, y))$$

mit dem charakteristischen Exponenten:

$$\begin{aligned} \psi_X(t, y) = & iy \int_{\mathbb{R}} f(t-s) d\gamma(s) - \frac{1}{2} y^2 \int_{\mathbb{R}} f(t-s)^2 d\sigma^2(s) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (e^{iyzf(t-s)} - 1 - iyzf(t-s) \cdot \mathbb{1}_{|z| \leq 1}) \nu(ds, dz). \end{aligned}$$

BEWEIS. Siehe Rajput und Rosinski (1989). □

BEMERKUNG 1.2.7. Wird der Prozess X von einem Lévy-Prozess mit charakteristischem Triplet (γ, σ^2, ν) angetrieben, so vereinfacht sich der charakteristische Exponent von X zum Zeitpunkt $t \geq 0$ zu:

$$\begin{aligned} \psi_X(t, y) = & \gamma \cdot iy \int_{\mathbb{R}} f(t-s) ds - \sigma^2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \int_{\mathbb{R}} f(t-s)^2 ds \\ & + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (e^{iyzf(t-s)} - 1 - iyzf(t-s) \cdot \mathbb{1}_{|z| \leq 1}) \nu(dz) ds \\ = & \int_{\mathbb{R}} \psi_L(yf(t-s)) ds, \end{aligned}$$

wobei ψ_L den charakteristischen Exponenten des Lévy-Prozess L aus Theorem 1.1.4 bezeichnet. ◇

Hieraus ergibt sich, dass auch X_t für jedes $t \geq 0$ eine unendlich teilbare Verteilung mit den Charakteristiken

$$(\gamma_f(t), \sigma_f^2(t), \nu_f^t)$$

besitzt, wobei

$$\begin{aligned} \gamma_f(t) = & \int_{\mathbb{R}} f(t-s) d\gamma(s) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |zf(t-s)(\mathbb{1}_{|zf(t-s)| \leq 1}(z) - \mathbb{1}_{|z| \leq 1}(z)) \nu(ds, dz), \\ \sigma_f^2(t) = & \int_{\mathbb{R}} f(t-s)^2 d\sigma^2(s), \\ \nu_f^t(B) = & \nu(\{(s, z) \in \mathbb{R}^2 : zf(t-s) \in B \setminus \{0\}\}) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

In vielerlei Situationen, etwa zur Bestimmung der Dynamiken von verallgemeinerten Moving-Average Prozessen, erweist sich das folgende Resultat als hilfreich:

LEMMA 1.2.8. *Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei*

$$X_t := \int_{-\infty}^t f(t-s) dA_s$$

ein verallgemeinerter Moving-Average Prozess. Ferner sei $|f(0)| < \infty$ und f absolut stetig, das heißt zu f existiert eine Funktion f' , sodass

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(u) du$$

gilt. Falls zusätzlich

$$\int_{-\infty}^t f'(t-s) dA_s$$

existiert im Sinne von Satz 1.2.5 und f' quadratintegrierbar ist, so gilt

$$dX_t = \left(\int_{-\infty}^t f'(t-s) dA_s \right) dt + f(0) dA(t). \quad (1.13)$$

BEWEIS. Der Prozess $X(t)$ lässt sich zunächst zerlegen in

$$X(t) = \int_{-\infty}^0 f(t-s) dA_s + \int_0^t f(t-s) dA_s. \quad (1.14)$$

Unter Verwendung der Absolutstetigkeit der Funktion erhält man die Existenz einer Funktion f' , sodass

$$f(t-s) - f(-s) = \int_0^t f'(u-s) du.$$

Mit dieser Überlegung besitzt das erste der beiden obigen Integrale in (1.14) sowie mit Hilfe des Fubini-Theorems für stochastische Integrale wie in *Barndorff-Nielsen und Basse-O'Connor* (2011, Theorem 3.1) die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(t-s) dA_s &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^t f'(u-s) du \right) dA_s + \int_{-\infty}^0 f(-s) dA_s \\ &= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^0 f'(u-s) dA_s \right) du + X(0). \end{aligned}$$

Für das zweite Integral in (1.14) führen die gleichen Argumente zu

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t-s)dA_s &= \int_0^t (f(t-s) - f(s-s))dA_s + \int_0^t f(0)dA_s \\ &= \int_0^t \left(\int_s^t f'(u-s)du \right) dA_s + f(0)(A(t) - A(0)) \\ &= \int_0^t \left(\int_0^u f'(u-s)dA_s \right) du + f(0)A(t). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zusammen

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left(\int_{-\infty}^u f'(u-s)dA_s \right) du + f(0)A(t) \quad (1.15)$$

und schließlich obige Behauptung. \square

Im Folgenden werden *Lévy-getriebene Moving-Average Prozesse* näher untersucht. Zunächst können wir die folgende Beobachtung machen:

LEMMA 1.2.9. *Es sei X ein Lévy-getriebener Moving-Average Prozess, dann ist X ein stationärer Prozess.*

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus der Gestalt der charakteristischen Funktion φ_X in Bemerkung 1.2.7. \square

Abschließend werfen wir einen Blick auf die Momente und die Abhängigkeitsstruktur von Lévy-getriebenen Moving-Average Prozessen. Es wird sich dabei etwa zeigen, dass die konstruierten Prozesse eine Abhängigkeitsstruktur aufweisen, welche durch die Kernfunktion f gesteuert werden kann.

KOROLLAR 1.2.10 (Momente des Lévy-getriebene Moving-Average Prozesses). *Es sei*

$$X_t := \int_{-\infty}^t f(t-s) dL_s$$

ein Lévy-getriebener Moving-Average Prozess mit $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$. Ferner bezeichne $\mu_k := \mathbb{E}(L_1^k)$ das k -te Moment und $V := \text{Var}(L_1) < \infty$ die Varianz von L . Dann gilt:

(i) *Für die ersten beiden Momente ergibt sich*

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu_1 \int_0^\infty f(x) dx, \quad (1.16)$$

$$\mathbb{E}(X_t^2) = V \int_0^\infty f(x)^2 dx + \mathbb{E}(X_t)^2 \quad (1.17)$$

und schließlich

$$\text{Var}(X_t) = V \int_0^\infty f(x)^2 dx. \quad (1.18)$$

(ii) Es sei zusätzlich $\mu_3 < \infty$ sowie $f \in L^3(\mathbb{R}_+)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X_t^3) = \eta_3 \int_0^\infty f(x)^3 dx - 2\mathbb{E}(X_t)^3 + 3\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_t^2), \quad (1.19)$$

wobei sich η_3 durch

$$\eta_3 = \int x^3 \nu(dx) = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 - 4\mu_1^3$$

ergibt.

(iii) Es sei $\mu_4 < \infty$ und zusätzlich $f \in L^3(\mathbb{R}_+) \cap L^4(\mathbb{R}_+)$. Dann ergibt sich das vierte Moment durch

$$\mathbb{E}(X_t^4) = \eta_4 \int_0^\infty f(x)^4 dx + 4\mathbb{E}(X_t) \cdot \eta_3 \int_0^\infty f(x)^3 dx - 2\mathbb{E}(X_t)^4 + \mathbb{E}(X_t^2)^2, \quad (1.20)$$

wobei sich η_4 mittels

$$\eta_4 = \int x^4 \nu(dx) = \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^4 - 3\mu_2^2$$

berechnen lässt.

(iv) Es sei $Y_t := \int_{-\infty}^t g(t-s)dL_s$ ein weiterer, durch den Lévy-Prozess L getriebener Moving-Average Prozess mit $g \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$. Dann ergibt sich die Kovarianzstruktur der Prozesse X und Y für $u \geq t \geq 0$ durch

$$\text{Cov}(X_u, Y_t) = V \int_0^\infty f(u-t+x) g(x) dx \quad (1.21)$$

und schließlich die Korrelation als

$$\text{Corr}(X_u, Y_t) = \frac{\int_0^\infty f(u-t+x)g(x) dx}{\sqrt{\int_0^\infty f(x)^2 dx} \sqrt{\int_0^\infty g(x)^2 dx}}. \quad (1.22)$$

BEWEIS. Unter den obigen Annahmen existiert der Prozess X , was sich im späteren Verlauf der Arbeit in Lemma 1.3.3 sowie 1.3.4 zeigt.

Die Momente des Prozesses X berechnet man mit Hilfe der charakteristischen Funktion des Lévy-Prozesses, welche nach 1.1.4 von der Form $\varphi_{L(1)}(y) = \exp(\psi_L(y))$ mit dem charakteristischen Exponenten

$$\psi_L(y) = iy\gamma - \frac{y^2}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iyx} - 1 - iyx \mathbb{1}_{|x| \leq 1}) \nu(dx) \quad \text{ist.}$$

Die charakteristische Funktion von X_t ergibt sich daraus unter Verwendung von Satz 1.2.6 zusammen mit Bemerkung 1.2.7 durch $\varphi_{X_1}(y) = \exp(c(y))$ mit $c(y) := \int \psi_L(yf(t-s))ds$. Für die ersten Momente verwenden wir

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \frac{1}{i} \varphi_{X_1}^{(1)}(0) = \frac{1}{i} (c^{(1)}(0)) \quad \text{und} \\ E(X_t^2) &= -\varphi_{X_1}^{(2)}(0) = -(c^{(2)}(0) + (c^{(1)}(0))^2). \end{aligned}$$

Die bekannte Formel $\text{Var}(X_t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2$ liefert schließlich das gewünschte Resultat für die Varianz. Das dritte und vierte Momente ergibt sich mit Hilfe der Formeln

$$E(X_t^3) = i\varphi_{X_1}^{(3)}(0) = i(c^{(3)}(0) + 3c^{(1)}(0)c^{(2)}(0) + (c^{(1)}(0))^3)$$

sowie

$$E(X_t^4) = \varphi_{X_1}^{(4)}(0) = (c^{(4)}(0) + 4c^{(1)}(0) \cdot c^{(3)}(0) + 3c^{(2)}(0) + 6(c^{(1)}(0))^2 \cdot c^{(2)}(0) + c^{(1)}(0)^4).$$

Hier bezeichnen $\varphi_{X_1}^{(j)}$ bzw. $c^{(j)}$ die j -ten Ableitungen der Funktionen φ_{X_1} bzw. c . Die Berechnung dieser und ein iteratives Auflösen führen schließlich zu obigen Ergebnissen.

Zur Ermittlung der Kovarianz $\text{Cov}(X_u, Y_t)$ wird die Formel

$$\text{Cov}(X_u, Y_t) = \frac{1}{2} (E[X_u^2] + E[Y_t^2] - E[(X_u - Y_t)^2]) - E[X_u]E[Y_t] \quad (1.23)$$

benutzt. Hierzu wird der Zuwachs $X_u - Y_t$ als

$$X_u - Y_t = \int_{-\infty}^u (f(u-s) - g(t-s) \mathbb{1}_{]-\infty, t]}(s)) dL_s$$

dargestellt. Mit Hilfe von (1.17) beobachtet man

$$\begin{aligned} E[(X_u - Y_t)^2] &= V \int_{-\infty}^u (f(u-s) - g(t-s) \mathbb{1}_{]-\infty, t]}(s))^2 ds + (E[X_u - Y_t])^2 \\ &= V \cdot \left(\int_{-\infty}^u (f(u-s))^2 ds + \int_{-\infty}^t (g(t-s))^2 ds - 2 \int_{-\infty}^t f(u-s)g(t-s) ds \right) \\ &\quad + (E[X_u - Y_t])^2 \\ &= -2V \int_{-\infty}^t f(u-s)g(t-s) ds + \text{Var}(X_u) + \text{Var}(Y_t) + (E[X_u - Y_t])^2. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1.23) ein, so erhält man

$$\text{Cov}(Y_u, X_t) = V \int_{-\infty}^t f(u-s)g(t-s) ds.$$

Die Substitution $x := t - s$ liefert die Behauptung. □

1.3. Oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnisse finden sich ebenso im Artikel „Oscillating Ornstein-Uhlenbeck processes and modelling of electricity prices“ von *Kobe* und *Woerner* (2015). Das eingeführte stochastische Integral wird nun konkretisiert:

DEFINITION 1.3.1. (Oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse).

Es seien

$$X(t) := \int_{-\infty}^t \sin(a(t-s)) e^{-\lambda(t-s)} dA_s,$$

$$Y(t) := \int_{-\infty}^t \cos(a(t-s)) e^{-\lambda(t-s)} dA_s$$

mit $a, t \geq 0$ und $\lambda > 0$ sowie einem zweiseitig-additiven Prozess A , sodass die obigen stochastischen Integrale existieren. Die zeitstetigen Moving-Average Prozesse $X := (X_t)_{t \geq 0}$ und $Y := (Y_t)_{t \geq 0}$ werden *oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse* genannt. Dabei wird X als *Sinus-oszillierender-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* (oder kurz: „Sinus-OOU-Prozess“) bzw. Y als *Kosinus-oszillierender-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* (oder kurz: „Kosinus-OOU-Prozess“) bezeichnet. Die Kernfunktionen der beiden Prozesse X und Y nennen wir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$f(x) := \sin(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \quad \text{und}$$

$$g(x) := \cos(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x).$$

◇

Die Namensgebung der oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse ist dabei an einen klassischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (oder kurz: „OUP“) angelehnt, den wir wie folgt auffassen:

BEMERKUNGEN 1.3.2. Ein *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* $Z := (Z_t)_{t \geq 0}$ ist ein zeitstetiger Moving-Average Prozess von der Form

$$Z(t) := \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dA_s$$

mit einem zweiseitig-additiven Prozess A und $\lambda > 0$, sodass obiges Integral existiert. Die dort verwendete Kernfunktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt folglich die Gestalt

$$h(x) := e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x).$$

Im Folgenden verwenden wir weiterhin Z bzw. h und meinen damit den obigen Prozess bzw. die obige Funktion. Es gilt dabei zu bemerken, dass Z ein Spezialfall des oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses Y für $a = 0$ ist. \diamond

Während die Existenz eines klassischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses für einen treibenden Lévy-Prozess geklärt ist (vgl. etwa *Schnurr* und *Woerner*, 2011), gilt es sich nun der Diskussion zu widmen, unter welchen Voraussetzungen die stochastischen Prozesse X und Y existieren. Hierbei implizieren die folgenden Überlegungen ebenso die Existenz des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses Z . Es wird sich schließlich herausstellen, dass die Beschaffenheit des charakteristischen Triplets des zugrunde gelegten additiven Prozesses dabei eine entscheidende Rolle spielt:

LEMMA 1.3.3 (Existenz oszillierender Ornstein-Uhlenbeck Prozesse).

Es seien X der Sinus-OOU-Prozess mit der Kernfunktion f sowie Y der Kosinus-OOU-Prozess mit der Kernfunktion g . Ferner sei der treibende Prozess A ein zweiseitig-additiver Prozess mit dem charakteristischen Triplet $(\gamma_t, \sigma_t^2, \nu_t)$.

Der Prozess X existiert im Sinne von 1.2.5, falls die Bedingungen

$$(a) \int_{-\infty}^t |f(t-s)| d\gamma(s) < \infty, \quad (b) \int_{-\infty}^t |f(t-s)|^2 d\sigma^2(s) < \infty$$

sowie

$$(c) \int_{-\infty}^t \int_{|z|>1} e^{-\lambda(t-s)|z|} \nu(ds, dz) < \infty$$

erfüllt sind. Dabei beschreibt ν das mit ν_t in Verbindung stehende Maß. Der Prozess Y existiert, falls obige Bedingungen analog für die Kernfunktion g nachweisbar sind.

BEWEIS. Es gilt die Bedingungen (i) – (iii) aus dem Existenzsatz 1.2.5 zu überprüfen. Zu (i): Für X gilt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} |f(t-s)z| (\mathbf{1}_{|zf(t-s)| \leq 1}(z) - \mathbf{1}_{|z| \leq 1}(z)) | \nu(ds, dz) \\ & \leq \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(t-s)|z|} (\mathbf{1}_{|z \sin(a(t-s))| \leq \exp(\lambda(t-s))}(z) - \mathbf{1}_{|z| \leq 1}(z)) \nu(ds, dz) \\ & \leq \int_{-\infty}^t \int_{|z|>1} e^{-\lambda(t-s)|z|} \nu(ds, dz) < \infty. \end{aligned}$$

Zusammen mit (a) folgt Bedingung (i). Der Nachweis für den Prozess Y funktioniert analog.

Zu (ii): Die nachzuweisende Bedingung stimmt mit (b) überein.

Zu (iii): Die Bedingung wird für $X_t + Y_t$ nachgewiesen. Daraus lässt sich schließlich die gewünschte Existenz der einzelnen Integrale folgern. Hierzu beobachtet man

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} \min(|zf(t-s)|^2, 1) \nu(ds, dz) + \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} \min(|zg(t-s)|^2, 1) \nu(ds, dz) \\ & \leq \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} \min\left(|ze^{-\lambda(t-s)}|^2 (\sin(a(t-s))^2 + \cos(a(t-s))^2), 2\right) \nu(ds, dz) < \infty. \end{aligned}$$

□

Es stellt sich schließlich die Frage, in welchen Situationen obige Bedingungen nachweisbar sind. Dazu dienen die folgenden

BEISPIELE UND BEMERKUNGEN 1.3.4.

Es seien X der Sinus-OU-Prozess mit der Kernfunktion f sowie Y der Kosinus-OU-Prozess mit der Kernfunktion g .

1. Es gilt $f, g \in L^n(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^n dx & \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda xn} dx = \frac{1}{\lambda n} < \infty, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^n dx & \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda xn} dx = \frac{1}{\lambda n} < \infty. \end{aligned}$$

2. Es sei A ein zweiseitig-additiver Prozess mit dem charakteristischen Triplet $(\gamma_t, \sigma_t^2, \nu_t)$. Ferner seien γ_t und σ_t^2 differenzierbar mit $|\gamma'(t)| < C_1$ und $|\sigma'^2(t)| < C_2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $C_1, C_2 > 0$. Dann sind die Bedingungen (a) und (b) aus Lemma 1.3.3 erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t |f(t-s)| d\gamma(s) & \leq C_1 \int_0^{\infty} |\sin(ax) e^{-\lambda x}| dx < \infty, \\ \int_{-\infty}^t |f(t-s)|^2 d\sigma^2(s) & \leq C_2 \int_0^{\infty} |\sin(ax) e^{-\lambda x}|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Eine analoge Vorgehensweise führt zum Nachweis für den Prozess Y .

3. Es sei A ein Lévy-Prozess L mit charakteristischem Triplet (γ, σ, ν) . Das heißt in obiger Sprechweise ist L ein additiver Prozess mit

$$\gamma(t) = t\gamma, \quad \sigma^2(t) = t\sigma^2, \quad \tilde{\nu}(dt, dz) = \nu(dz)dt.$$

Dann lassen sich die Existenzbedingungen (i) und (ii) des Lemmas 1.3.3 für X und Y direkt aus 1.3.4.2 folgern. Abschließend beobachtet man, dass Bedingung (iii) für $\nu(dt, dz) = \nu(dz)dt$ jener eines Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess gleicht. Diese ist nach *Schnurr* und *Woerner* (2011) erfüllt, falls das Lévy-Maß ν die Bedingung

$$\int_{|z|>1} \log(|z|) \nu(dz) < \infty$$

erfüllt. Unter dieser Annahme sind Lévy-getriebenen Prozesse X und Y folglich wohldefiniert.

4. Ein wichtiges Beispiel eines additiven Prozesses sind die sogenannten zeitinhomogenen, zusammengesetzten Poisson-Prozesse

$$A_t := \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i.$$

Hierbei sei $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(\xi_1) < \infty$, welche die Sprünge des Prozesses modellieren. Ferner sei $N(t)$ ein von der Zeit $t \geq 0$ abhängiger Poisson-Prozess. Die mit einem solchen Prozess assoziierte „Intensität“ ist eine beschränkte Funktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Das charakteristische Triplet des Prozesses A_t ergibt sich hier als $(0, 0, \nu)$ mit

$$\nu(ds, dz) = \rho(s) F_{\xi_1}(dz) ds,$$

wobei F_{ξ_1} die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen ξ_1 bezeichne. In diesem Szenario existieren die stochastischen Integrale X_t und Y_t mit Integrator A_t für jedes $t \geq 0$, denn: Während die Bedingungen (i) und (ii) aus Lemmas 1.3.3 offenbar erfüllt sind, lässt sich die letzte Bedingung (iii) ebenso mit Hilfe der Überlegung

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^t \int_{|z| \geq 1} e^{-\lambda(t-s)} |z| \nu(ds, dz) \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^t \int_{|z| \geq 1} e^{-\lambda(t-s)} |z| |\rho(s)| F_{\xi_1}(dz) ds \\ & \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |\rho(s)| \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} ds \underbrace{\int_{|z| \geq 1} |z| F_{\xi_1}(dz)}_{< \infty, \text{ denn } E(\xi_1) < \infty} < \infty \end{aligned}$$

nachweisen. ◇

Wie beim „klassischen Ornstein-Uhlenbeck Prozess“ können auch die Dynamiken des Sinus-OOU-Prozesses X und des Kosinus-OOU-Prozesses Y bestimmt werden:

LEMMA 1.3.5. *Es seien*

$$X_t = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \sin(a(t-s)) dA_s, \quad Y_t = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \cos(a(t-s)) dA_s$$

die oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse wie in Definition 1.3.1. Dann sind die Prozesse X und Y die starken Lösungen des Systems stochastischer Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} dX_t &= (aY_t - \lambda X_t)dt, \\ dY_t &= (-\lambda Y_t - aX_t)dt + dA_t. \end{aligned}$$

BEWEIS. Für die Kernfunktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Prozesses X und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Prozesses Y mit

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sin(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x), \\ g(x) &:= \cos(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \end{aligned}$$

beobachtet man

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag(x) - \lambda f(x), \\ g'(x) &= -af(x) - \lambda g(x). \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aus Lemma 1.2.8 resultiert daraus unmittelbar die Behauptung. \square

Ein Lévy-getriebener Ornstein-Uhlenbeck Prozess $Z := (Z_t)_{t \geq 0}$ wird oft durch den sogenannten „mean reversion-Effekt“ charakterisiert (vgl. Einleitung). Betrachten wir eine etwas allgemeinere Version des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses als in Bemerkung 1.3.2, so ist dieser die starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t = \lambda(\delta - Z_t) dt + dL_t \tag{1.24}$$

mit $\delta \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$. In Bemerkung 1.3.2 wurde dabei $\delta = 0$ gewählt, was im späteren Verlauf der Arbeit auch weiterhin angenommen wird. Trotzdem ermöglicht es für den Augenblick einen interessanten Vergleich der Dynamiken von Z mit jenen der oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse X und Y :

Für die Driftfunktion in (1.24) beobachtet man, dass diese einen negativen Wert aufweist, wenn sich der Prozess Z oberhalb von δ aufhält. Im umgekehrten Szenario folgt der Prozess Z einem tendenziell steigenden Verlauf. Zusammen beobachtet man einen

Trend zum durchschnittliche Niveau δ . Die Geschwindigkeit des beschriebenen Effekts wird dabei durch den Parameter λ zusätzlich gedämpft oder beschleunigt. Die oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse besitzen wie zuvor gesehen die Dynamiken

$$\begin{aligned} dX_t &= \lambda \left(\frac{a}{\lambda} Y_t - X_t \right) dt \\ dY_t &= \lambda \left(-\frac{a}{\lambda} X_t - Y_t \right) dt + dA_t. \end{aligned}$$

Folgt man obigen Überlegungen, kann auch hier der Parameter λ zur Steuerung einer Geschwindigkeit zu einem durchschnittlichen Niveau genutzt werden, während dieses jedoch etwa beim Sinus-OUU-Prozess X durch den Kosinus-OUU-Prozess Y beeinflusst wird. Gleichermaßen verhält es sich umgekehrt, sodass der Trend hier gewissermaßen als „zufälliger, oszillierender Prozess“ interpretiert werden kann.

Bevor einige weitere Eigenschaften von oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen zusammengefasst werden, beobachten wir die folgende Zerlegungen oszillierender Ornstein-Uhlenbeck Prozesse:

LEMMA 1.3.6. *Es seien*

$$X_t = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \sin(a(t-s)) dA_s, \quad Y_t = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \cos(a(t-s)) dA_s$$

die oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse wie in Definition 1.3.1. Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} X_t &= \sin(at)e^{-\lambda t} \cdot Y_0 + \cos(at)e^{-\lambda t} \cdot X_0 \\ &\quad + \cos(at)e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sin(-as) dA_s + \sin(at)e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \cos(-as) dA_s \\ &=: \sin(at)e^{-\lambda t} \cdot Y_0 + \cos(at)e^{-\lambda t} \cdot X_0 + \cos(at)e^{-\lambda t} \cdot I_t + \sin(at)e^{-\lambda t} \cdot J_t \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} Y_t &= \cos(at)e^{-\lambda t} Y_0 - \sin(at)e^{-\lambda t} X_0 \\ &\quad + \cos(at)e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \cos(-as) dA_s - \sin(at)e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \sin(-as) dA_s \\ &=: \cos(at)e^{-\lambda t} \cdot Y_0 - \sin(at)e^{-\lambda t} \cdot X_0 + \cos(at)e^{-\lambda t} \cdot J_t - \sin(at)e^{-\lambda t} \cdot I_t. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen liefern

$$\begin{aligned} \cos(a(t-s)) &= \cos(at) \cos(-as) - \sin(at) \sin(-as) \quad \text{und} \\ \sin(a(t-s)) &= \sin(at) \cos(-as) + \cos(at) \sin(-as). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Hieraus ergibt sich direkt die Behauptung. \square

Es sei nun

$$(\mathcal{G}_t := \sigma(A_s : 0 \leq s \leq t))_{t \geq 0}$$

die kanonische Filtration eines einseitigen additiven Prozesses. Modifizieren wir diese, sodass die üblichen Bedingungen erfüllt sind, so nennen wir die entstandene Filtration $(\mathcal{F}_t^A)_{t \geq 0}$. Mit Hilfe dieser legen wir nun unserem Wahrscheinlichkeitsraum die Filtration

$$(\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{F}_t^A, X_0, Y_0))_{t \geq 0} \quad (1.26)$$

zugrunde. Es wird sich zeigen, dass oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Semimartingale sind, was sich insbesondere im Hinblick auf finanzstochastische Anwendungen als nützlich erweist. Wir fassen einige Eigenschaften der oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse zusammen:

LEMMA 1.3.7. *Es seien*

$$X_t = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \sin(a(t-s)) dA_s, \quad Y_t = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \cos(a(t-s)) dA_s$$

die oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse wie in Definition 1.3.1. Dann gilt:

- (i) Die Prozesse X und Y sind $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Semimartingale im Sinne von Jacod und Shiryaev (1987, Definition I.4.24), wobei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die Filtration (1.26) beschreibe.
- (ii) Der Sinus-OUU-Prozess X besitzt stetige Pfade, während der Kosinus-OUU-Prozess das gleiche Sprungverhalten wie der treibende Prozess A aufweist.
- (iii) Verwendet man einen Lévy-Prozess L als treibenden Prozess, so sind X und Y stationäre Prozesse.

BEWEIS.

Zu (i):

Da die treibenden, additiven Prozesse A nach Voraussetzungen $(\mathcal{F}_t^A)_{t \geq 0}$ -Semimartingale sind, können die Integrale I_t und J_t aus der Zerlegung 1.3.6 der Form

$$\int_0^t f(s) dA_s \quad (1.27)$$

mit einer beschränkten, stetigen Funktion $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ als Itô-Integrale aufgefasst werden, welche mit den hier eingeführten Integralen übereinstimmen. Nach Jacod und Shiryaev (1987, Theorem I.4.34) sind damit die stochastischen Integrale I_t sowie J_t zunächst $(\mathcal{F}_t^A)_{t \geq 0}$ -Semimartingale und schließlich damit auch $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Semimartingale (vgl. Protter, 2004, Theorem VI. 2). Mit Blick auf die Zerlegung 1.3.6 ergibt sich daraus, dass X und Y Semimartingale bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ im Sinne von Jacod und Shiryaev (1987,

Definition I.4.24) sind.

Zu (ii): Die Sprünge eines \mathbb{R} -wertigen stochastischen RCLL-Prozesses ξ zum Zeitpunkt $t \in I$ bezeichnen wir in diesem Beweis als $\Delta\xi_t$, wobei wir diese mit Hilfe von

$$\xi_{t-} := \lim_{s \uparrow t} \xi_s \quad \text{durch} \quad \Delta\xi_t := \xi_t - \xi_{t-}$$

bestimmen.

Nach *Jacod* und *Shiryaev* (1987, Proposition I.4.36) ergeben sich die Sprünge der Itô-Integrale I_t und J_t in 1.3.6 für $t \geq 0$ durch

$$\Delta I_t = e^{\lambda t} \sin(-at) \Delta A_t \quad \text{und} \quad \Delta J_t = e^{\lambda t} \cos(-at) \Delta A_t.$$

Hieraus berechnet man mit Hilfe der Additionstheoreme (1.25)

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= \Delta A_t \cdot (\cos(at) \sin(-at) + \sin(at) \cos(-at)) = 0 \quad \text{und} \\ \Delta Y_t &= \Delta A_t \cdot (\cos(at) \cos(-at) - \sin(at) \sin(-at)) = \Delta A_t. \end{aligned}$$

Zu (iii): Die Stationarität ergibt sich unmittelbar aus der Gestalt der verwendeten Kernfunktionen f und g zusammen mit Lemma 1.2.9. \square

Einige Kriterien zur Überprüfung der Semimartingaleigenschaft von Lévy-getriebenen Moving-Average Prozessen bezüglich der Filtration

$$(\mathcal{F}_t^{A, \infty} := \sigma(A_s : -\infty < s \leq t))_{t \geq 0}$$

werden in *Basse* und *Pedersen* (2009) untersucht. Diese lassen sich jedoch für oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse nur mit einigen Restriktionen nachweisen, weshalb in dieser Arbeit darauf verzichtet und der hier eingeschlagene Weg bevorzugt wurde.

Im Folgenden betrachten wir Lévy-getriebene, oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse. Ein Blick auf das System stochastischer Differentialgleichung 1.3.5 lässt erahnen, dass die X und Y keine Markov-Prozesse bezüglich ihrer natürlichen Filtration sind (genauer in *Benth, Kallsen* und *Meyer-Brandis*, 2007). Betrachten wir jedoch den Vektorprozess $\xi := (X, Y)^\top$, so lässt sich dieser einigen bekannten Prozessklassen zuordnen, welche die Markov-Eigenschaft erfüllen:

BEISPIEL 1.3.8. Wir betrachten den zweidimensionalen Prozess $(\xi(t) := (X_t, Y_t)^\top)_{t \geq 0}$ mit den Lévy-getriebenen oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozessen X und Y wie in

Definition 1.3.1. Mit Hilfe der Additionstheoreme (1.25) bestimmen wir für ein $h > 0$ und $t \geq 0$ vorab die Zerlegungen

$$\begin{aligned} X(t+h) &= e^{-\lambda h} \cos(ah) \cdot X(t) + e^{-\lambda h} \sin(ah) \cdot Y(t) \\ &\quad + \int_t^{t+h} \sin(a(t+h-s)) e^{-\lambda(t+h-s)} dL_s, \\ Y(t+h) &= e^{-\lambda h} \cos(ah) \cdot Y(t) - e^{-\lambda h} \sin(ah) \cdot X(t) \\ &\quad + \int_t^{t+h} \cos(a(t+h-s)) e^{-\lambda(t+h-s)} dL_s. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Hiermit erhält der Vektorprozess ξ die Darstellung

$$\begin{aligned} \xi(t+h) &= \begin{pmatrix} e^{-\lambda h} \cos(ah) & e^{-\lambda h} \sin(ah) \\ -e^{-\lambda h} \sin(ah) & e^{-\lambda h} \cos(ah) \end{pmatrix} \cdot \xi(t) + \begin{pmatrix} \epsilon_1(t, h) \\ \epsilon_2(t, h) \end{pmatrix} \\ &=: A(h) \cdot \xi(t) + \epsilon(t, h) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \epsilon_1(t, h) &= \int_t^{t+h} \sin(a(t+h-s)) e^{-\lambda(t+h-s)} dL_s \quad \text{und} \\ \epsilon_2(t, h) &= \int_t^{t+h} \cos(a(t+h-s)) e^{-\lambda(t+h-s)} dL_s. \end{aligned}$$

Die Matrix A kann dabei als

$$A(h) = e^{-B(h)} \quad \text{mit der Matrix} \quad B(h) = h \cdot \begin{pmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{pmatrix} =: h \cdot Q$$

dargestellt werden. Es zeigt sich zudem, dass Q offenbar eine positiv definite Matrix ist. Auch der Vektorprozess $\epsilon(t, h)$ kann mit Hilfe der Matrix Q dargestellt werden. Mit Hilfe des zweidimensionalen Lévy-Prozesses $\tilde{L}_t := (0, L_t)^\top$, wobei L den treibenden Prozess der beiden Prozesse X und Y beschreibe, besitzt $\epsilon(t, h)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \epsilon(t, h) &= \int_t^{t+h} \begin{pmatrix} e^{-\lambda(t+h-s)} \cos(a(t+h-s)) & e^{-\lambda(t+h-s)} \sin(a(t+h-s)) \\ -e^{-\lambda(t+h-s)} \sin(a(t+h-s)) & e^{-\lambda(t+h-s)} \cos(a(t+h-s)) \end{pmatrix} d\tilde{L}_s \\ &= \int_t^{t+h} e^{-(t+h-s) \cdot Q} d\tilde{L}_s. \end{aligned}$$

Zusammen erhält man

$$\xi(t+h) = e^{-h \cdot Q} \cdot \xi(t) + \int_t^{t+h} e^{-(t+h-s) \cdot Q} d\tilde{L}_s.$$

Ein Prozess dieser Form wird dabei in der Literatur als *multidimensionaler, Lévy-getriebener Ornstein-Uhlenbeck Prozess* bezeichnet. Ein solcher Prozess wurde von *Masuda* (2004) eingeführt. In seinem Artikel zeigt sich etwa, dass ξ ein Markov-Prozess bezüglich seiner natürlichen Filtration ist. Ferner lässt sich der Prozess der Klasse der sogenannten Lévy-getriebenen, multivariaten, zeitstetigen, autoregressiven Moving-Average Prozesse, kurz *MCARMA*(p, q, d)-Prozesse mit $p = 1$, $q = 0$ und Dimension $d = 2$, zuordnen. *CARMA*(p, q)-Prozesse wurden von *Brockwell* (2001) eingeführt und für einen mehrdimensionalen Fall von *Schlemm* und *Stelzer* (2012) verallgemeinert. Solche Prozesse wurden in *Garcia, Klüppelberg* und *Müller* (2011) etwa im Kontext von Elektrizitätspreismodellierung untersucht. \diamond

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass der treibende Lévy-Prozess L eine endliche Varianz $\text{Var}(L_1) < \infty$ besitzt. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich mit Hilfe von Korollar 1.2.10 die ersten Momente als auch Varianzen der Prozesse X , Y und Z bestimmen:

LEMMA 1.3.9. *Es seien X, Y Lévy-getriebene oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse im Sinne von Definition 1.3.1 und Z ein Lévy-getriebener Ornstein-Uhlenbeck Prozess wie in Bemerkung 1.3.2. Ferner besitze der treibende Lévy-Prozess L das erste Moment $\mu := \mathbb{E}(L_1)$ und eine endliche Varianz $V := \text{Var}(L_1)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \mu \cdot \frac{a}{a^2 + \lambda^2}, & \mathbb{E}(Y_t) &= \mu \cdot \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}, & \mathbb{E}(Z_t) &= \frac{\mu}{\lambda}, \\ \text{Var}(X_t) &= V \cdot \frac{a^2}{4\lambda(\lambda^2 + a^2)}, & \text{Var}(Y_t) &= V \cdot \frac{2\lambda^2 + a^2}{4\lambda(\lambda^2 + a^2)}, & \text{Var}(Z_t) &= \frac{V}{2\lambda}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Falls zusätzlich $\mu = 0$ und $\mathbb{E}(L_1^3) < \infty$, so gilt:

$$\mathbb{E}(X_t^3) = \eta_3 \cdot \frac{2a^3}{3(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 9\lambda^2)}, \quad \mathbb{E}(Y_t^3) = \eta_3 \cdot \frac{(7a^2 + 9\lambda^2)\lambda}{3(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 9\lambda^2)}, \quad \mathbb{E}(Z_t^3) = \frac{\eta_3}{3\lambda}.$$

Unter obiger Annahme ergibt sich η_3 in (1.19) durch $\eta_3 = \mathbb{E}(L_1^3)$.

Falls abermals $\mu = 0$ und zusätzlich $\mathbb{E}(L_1^4) < \infty$, so gilt mit η_4 wie in (1.20):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^4) &= \eta_4 \cdot \frac{3a^4}{32\lambda(a^2 + 4\lambda^2)(a^2 + \lambda^2)} + V^2 \cdot \frac{a^4}{16\lambda^2(a^2 + \lambda^2)^2}, \\ \mathbb{E}(Y_t^4) &= \eta_4 \cdot \frac{3a^4 + 32a^2\lambda^2 + 32\lambda^4}{32\lambda(a^2 + 4\lambda^2)(a^2 + \lambda^2)} + V^2 \cdot \frac{a^4 + 4a^2\lambda^2 + 4\lambda^4}{16\lambda^2(a^2 + \lambda^2)^2}, \\ \mathbb{E}(Z_t^4) &= \frac{\eta_4}{4\lambda} + \frac{V^2}{4\lambda^2}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Ergebnisse ergeben sich unmittelbar aus (1.16), (1.18) sowie (1.19) und (1.20). \square

Wir nutzen nun die Formeln aus Korollar 1.2.10, um die Abhängigkeitsstrukturen in Form der Kovarianzen bzw. Autokovarianzen der Prozesse X , Y und Z untereinander zu untersuchen:

LEMMA 1.3.10. *Es seien X, Y Lévy-getriebene oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse im Sinne von Definition 1.3.1 und Z ein Lévy-getriebener Ornstein-Uhlenbeck Prozess wie in Bemerkung 1.3.2. Ferner besitze der treibende Lévy-Prozess L das erste Moment $\mu := E(L_1)$ und eine endlichen Varianz $V = \text{Var}(L_1)$. Dann gilt für $u > t$:*

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_u, Z_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{2\lambda \sin(a(u-t)) + a \cos(a(u-t))}{4\lambda^2 + a^2} \right), \\ \text{Cov}(Z_u, X_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{a}{4\lambda^2 + a^2} \right), \\ \text{Cov}(Y_u, Z_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{2\lambda \cos(a(u-t)) - a \sin(a(u-t))}{4\lambda^2 + a^2} \right), \\ \text{Cov}(Z_u, Y_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{2\lambda}{4\lambda^2 + a^2} \right).\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y_u, X_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{a\lambda \cos(a(u-t)) - a^2 \sin(a(u-t))}{4\lambda(\lambda^2 + a^2)} \right), \\ \text{Cov}(X_u, Y_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{a\lambda \cos(a(u-t)) + (2\lambda^2 + a^2) \sin(a(u-t))}{4\lambda(\lambda^2 + a^2)} \right), \\ \text{Cov}(X_u, X_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{a^2 \cos(a(u-t)) + a\lambda \sin(a(u-t))}{4\lambda(\lambda^2 + a^2)} \right), \\ \text{Cov}(Y_u, Y_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \left(\frac{(2\lambda^2 + a^2) \cos(a(u-t)) - a\lambda \sin(a(u-t))}{4\lambda(\lambda^2 + a^2)} \right), \\ \text{Cov}(Z_u, Z_t) &= V e^{-\lambda(u-t)} \frac{1}{2\lambda}.\end{aligned}$$

BEWEIS. Die Kovarianzen ergeben sich aus der Verwendung der Formel in Korollar 1.2.10. \square

Zwei mögliche Pfade der oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse werden durch Abbildung 1.1 illustriert. Hier zeigen sich einige typische Merkmale der Prozesse: Der Kosinus-OU-Prozess ist aktiver und scheint ein Sprungverhalten aufzuweisen, während sich beim Sinus-OU-Prozess lediglich Spikes beobachten lassen. Diese treten in der Regel auf, nachdem der Kosinus-OU-Prozess sehr hohe oder kleine Werte realisiert. Die

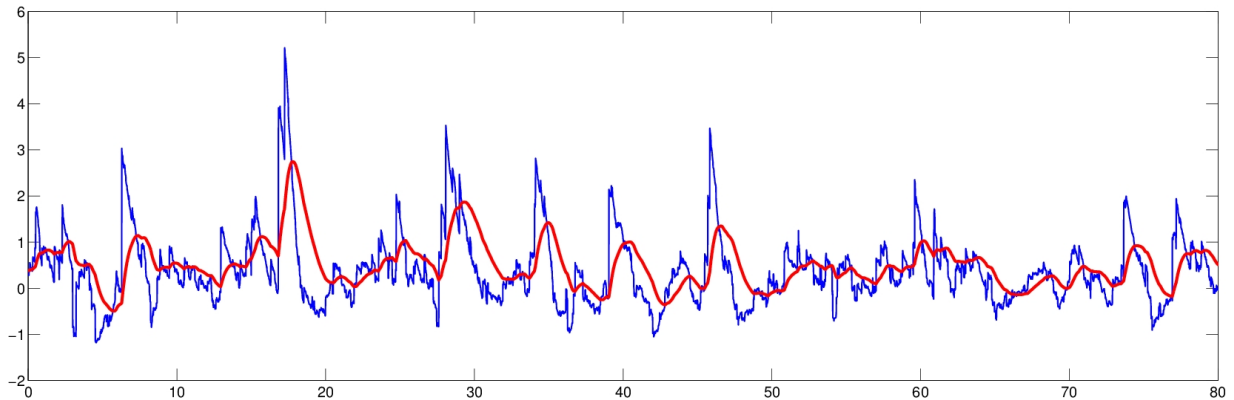


ABBILDUNG 1.1. Simulation des Sinus-OUU-Prozess (rot) und des Kosinus-OUU-Prozess (blau) mit Hilfe des Euler-Algorithmus (vgl. Kapitel 3.4). Hier wurden die Parameter $a = 1$, $\lambda = 0.8$ gewählt. Als treibender Prozess wurde ein NIG-Prozess mit $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1$, $\mu = 0$, $\delta = 1$ genutzt. (siehe Beispiel 1.1.6).

Reaktion auf einen Sprung des treibenden Prozesses erfolgt offenbar bei dem Sinus-OUU-Prozess zeitversetzt. Dennoch erkennt man, dass beide Prozesse dem gleichen oszillierenden Trend folgen. Hier zeigen sich der „mean-reverting-Effekt“ als auch die zuvor beobachteten Abhängigkeiten beider Prozesse.

KAPITEL 2

Spotpreismodellierung europäischer Strommärkte

In diesem Kapitel werden die Preisentwicklungen am deutschen Marktplatz für Elektrizität in Leipzig, der *European Energy Exchange AG* (kurz auch „*EEX*“ genannt), zunächst untersucht und anschließend modelliert. An der *EEX* wird der Strom zwischen deutschen Stromversorgern und Erzeugern am *EPEX-Spotmarkt* zu variierenden stündlichen Preisen gehandelt während am *EEX-Terminmarkt* Geschäfte über eine Stromlieferung zu einem späteren Zeitpunkt ausgehandelt werden. Der *EPEX-Spotmarkt*, der in dieser Arbeit modelliert werden soll, lässt sich in zwei Handelsplätze unterteilen: Während am *Intraday-Markt*, die Teilnehmer des Großhandels eine Stromlieferung am selbigen Tag an- oder verkaufen können, werden *Day-Ahead-Markt* Lieferungsverträge für den folgenden Tag ausgehandelt. Einen Überblick über den Aufbau des Marktes verschafft Abbildung 2.1.

Die Liberalisierung des deutschen Strommarktes wurde, geebnet durch das Energiewirtschaftsgesetz, ähnlich wie in anderen europäischen Ländern erst im Jahre 1998 vollzogen. Dabei sehen sich die neu entstandenen Stromanbieter im Vergleich zu vielen anderen Märkten zusätzlichen Schwierigkeiten gegenübergestellt (siehe *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis, 2007*). So ist es etwa bis heute nicht möglich, den erzeugten oder erworbenen Strom in einem wirtschaftlich relevanten Rahmen einzulagern oder sogar in andere Regionen bzw. Länder zu exportieren. Darüber hinaus beobachten Stromhändler starke Schwankungen in der Nachfrage nach Strom, welche zum einen während eines Tages, einer Woche oder auch jahreszeitlich auftreten. So ist etwa die Nachfrage im Winter deutlich höher als im Sommer. Aber auch Ereignisse wie ein plötzliches Unwetter können die Nachfrage stark beeinflussen. Diese Effekte beeinträchtigen aufgrund stark steigender Marginalkosten der Stromproduktion maßgeblich die Preisentwicklungen auf den Strommärkten. Die Fluktuation der Marginalkosten wird dabei zusätzlich durch die in Deutschland seit dem Jahr 2000 verabschiedeten „*Erneuerbaren-Energien-Gesetze*“ verschärft, welche im Wesentlichen einen Einspeisevorrang für erneuerbare Energieträger beinhalten. Der Verlauf aller Tagespreiskurven aus dem Jahr 2010 wird in Abbildung 2.2 visualisiert. Hier zeigen sich bereits typische Charakteristiken der Preisverläufe.

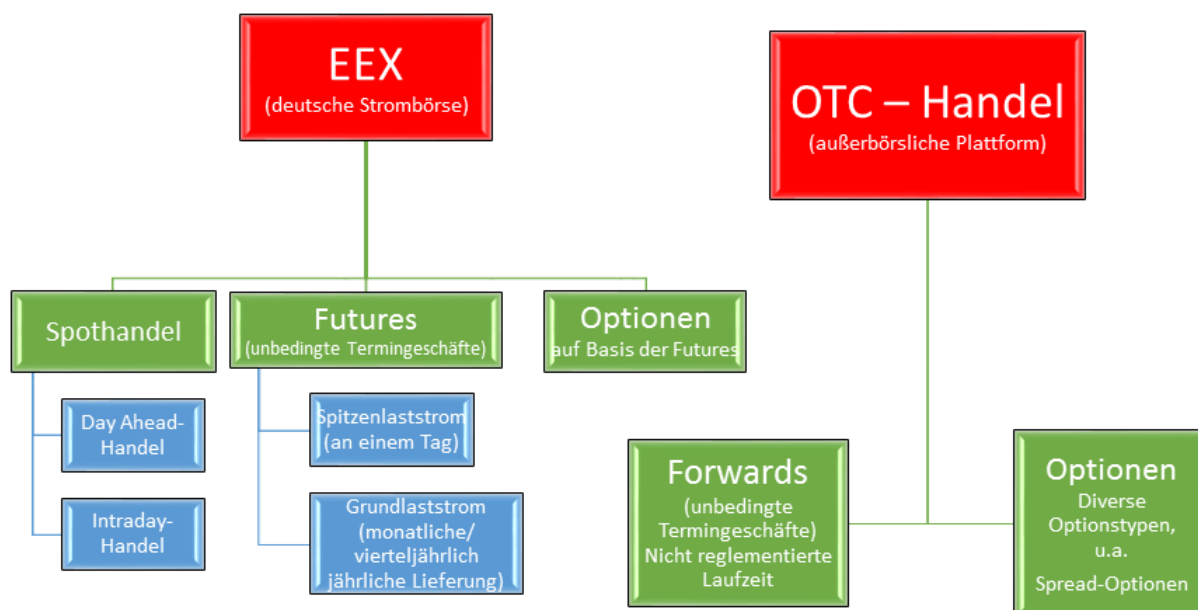


ABBILDUNG 2.1. Strommärkte in Deutschland.

Drei typische und aus den oben genannten Aspekten resultierende Merkmale der Preise sind (vgl. *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis, 2007* oder *Cartea und Figueroa (2005)* oder *Lucia und Schwartz, 2002*):

- Hohe Preissprünge von einer zur nächsten Periode mit anschließender,
- schneller Rückkehr zu einem durchschnittlichen Preis (dem sogenannten „*mean reversion-Effekt*“) sowie
- saisonale, das heißt wiederkehrende Verhaltensmuster abhängig von der betrachteten Stunde eines Handelstages, des Wochentages als auch der Jahreszeit.

2.1. Das Spotpreismodell

Im Folgenden werden die zuvor eingeführten verallgemeinerten oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse aus Kapitel 1.3 wie in *Kobe und Woerner (2015)* dazu genutzt, die Dynamiken von Spotpreisen auf den deutschen Elektrizitätsmärkten in Form eines sogenannten „arithmetischen Modells“ nachzubilden. Der Begriff beschreibt dabei die Herangehensweise den Preisprozess direkt durch eine Summe von stochastischen Prozessen (einer sogenannten *Superposition*) zu modellieren anstatt etwa logarithmierte Renditen abzubilden.

EEX - Intraday Handel 2010

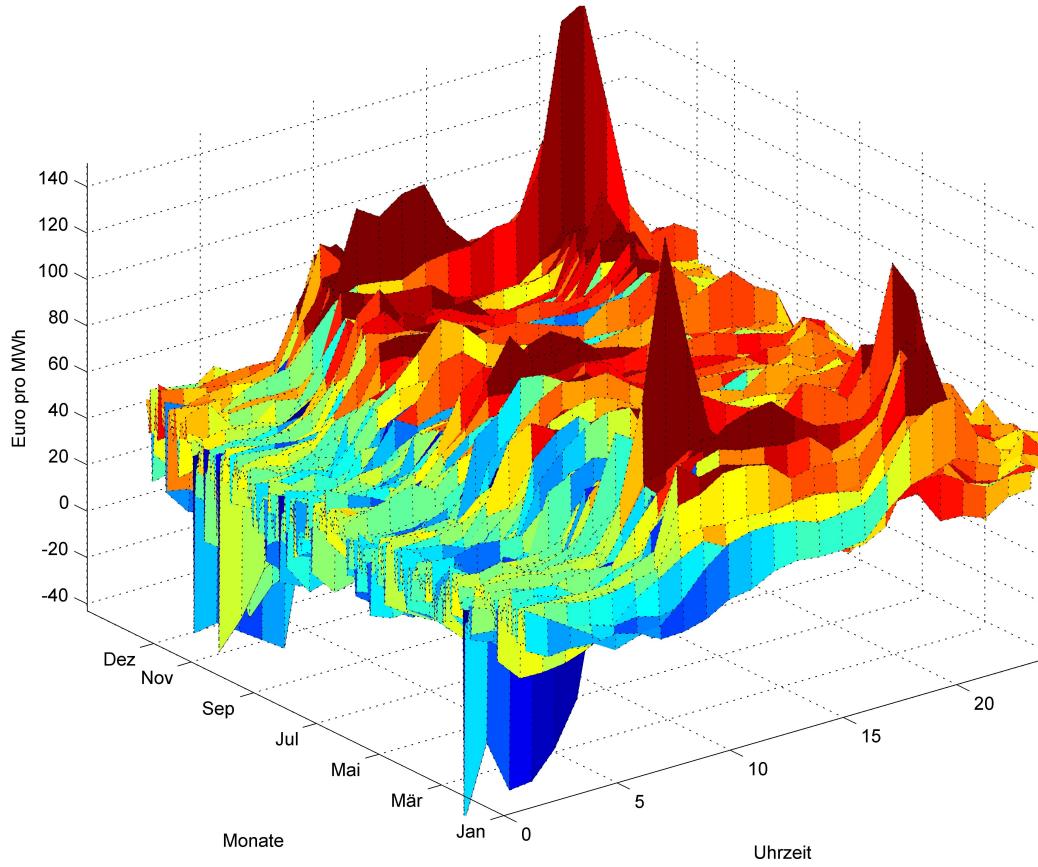


ABBILDUNG 2.2. Intraday-Preise aus dem Jahr 2010 auf Grundlage Daten der *EEX Leipzig*.

DEFINITION 2.1.1. (Spotpreisprozess).

Für $i = 1, \dots, n$ sei zunächst

$$\tilde{S}_i(t) := \omega_x^i X_i(t) + \omega_y^i Y_i(t) + \omega_z^i Z_i(t) \quad (2.1)$$

mit den durch $\omega_x^i, \omega_y^i, \omega_z^i \geq 0$ gewichteten stochastischen Prozessen

$$\begin{aligned} X_i(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_i(t-s)} \sin(a_i(t-s)) dA_i(s), \\ Y_i(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_i(t-s)} \cos(a_i(t-s)) dA_i(s) \quad \text{und} \\ Z_i(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\lambda_i(t-s)} dA_i(s) \end{aligned}$$

und den Konstanten $a_i, \lambda_i > 0$. Die Prozesse A_i seien dabei für jedes $i = 1, \dots, n$ zweiseitig-additive Prozesse wie in Kapitel 1.2, die zusätzlich stochastisch unabhängig seien. Der Spotpreisprozess $S := (S_t)_{t \geq 0}$ wird nun definiert als

$$S(t) := S_t := \sum_{i=1}^n c_i \tilde{S}_i(t) \quad (2.2)$$

mit den Gewichten $c_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. \diamond

BEMERKUNG 2.1.2. Verwendet man ausschließlich Subordinatoren A_i als treibende Prozesse und eine positive Kernfunktion, was hier etwa durch die Bedingung $\omega_z^i \geq \omega_x^i + \omega_y^i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gewährleistet ist, so ist der resultierende Spotpreisprozess S fast sicher positiv (vgl. *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis, 2007*). Da sich auf europäischen Elektrizitätsmärkten mitunter, wenn auch selten, negative Preise beobachten lassen, ist diese Restriktion nicht zwingend erforderlich. \diamond

Unter Hinzunahme von zusätzlichen Voraussetzungen ist es nun möglich, statistische Kennwerte der oszillierenden Ornstein Uhlenbeck Prozesse X, Y wie in *Definition 1.3.1* und dem Ornstein-Uhlenbeck Prozess $Z := (Z_t)_{t \geq 0}$ mit

$$Z_t := \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dL_s$$

analytisch zu bestimmen und daraus schließlich jene Größen auch für den Spotpreisprozess S abzuleiten. Eine Möglichkeit, diese Idee zu verwirklichen, ist die Einschränkung auf einen Spezialfall im Modell: Bis zum Ende dieses Kapitels wird angenommen, dass die betrachteten stochastischen Integrale in *Definition 1.3.1* durch unabhängige Lévy-Prozesse L_i für $i = 1, \dots, n$ angetrieben werden.

Um die statistischen Kennwerte wie das erste Moment, die Varianz, die Autokovarianz und schließlich die Autokorrelation eines Lévy-getriebenen Spotpreisprozesses S zu bestimmen, müssen zunächst einmal die Kennwerte und die Abhängigkeitsstruktur der einzelnen Prozesse \tilde{S}_i untersucht werden. Dies lenkt schließlich das Interesse auf die Prozesse X, Y und Z , deren statistische Kennwerte bereits in Lemma 1.3.9 sowie Lemma 1.3.10 untersucht wurden.

LEMMA 2.1.3. *Es sei L ein Lévy-Prozess mit $\text{Var}(L_1) < \infty$ und $\tilde{S} := \tilde{S}_i$ ein gewichteter Prozess der Form (2.1) für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \left(\tilde{S}_t \right) = \mu \frac{(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2}{\lambda(a^2 + \lambda^2)}. \quad (2.3)$$

Für $h > 0$ ist die Autokovarianzfunktion $\gamma_{\tilde{S}}(h) := \text{Cov}(\tilde{S}_0, \tilde{S}_h)$ von der Form

$$\gamma_{\tilde{S}}(h) = V e^{-\lambda h} (C_1 \sin(ah) + C_2 \cos(ah) + C_3) \quad (2.4)$$

mit

$$\begin{aligned} C_1 &:= \frac{1}{4(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 4\lambda^2)} \left(8\omega_x(\omega_y + \omega_z)\lambda^3 + 4(\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_y\omega_z)a\lambda^2 + 2\omega_x(\omega_y + 4\omega_z)a^2\lambda \right. \\ &\quad \left. + (\omega_x^2 - \omega_y^2 - 4\omega_y\omega_z)a^3 \right), \\ C_2 &:= \frac{1}{4\lambda(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 4\lambda^2)} \left(8\omega_y(\omega_y + \omega_z)\lambda^4 + 8\omega_x(\omega_y + \frac{1}{2}\omega_z)a\lambda^3 + 4(\omega_x^2 + \frac{3}{2}\omega_y^2 + 2\omega_y\omega_z)a^2\lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\omega_x(\omega_y + 2\omega_z)a^3\lambda + (\omega_x^2 + \omega_y^2)a^4 \right), \\ C_3 &:= \frac{1}{2\lambda(a^2 + 4\lambda^2)} \left(4\omega_z(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + 2\omega_x\omega_z a\lambda + \omega_z^2 a^2 \right). \end{aligned}$$

Zudem ergibt sich die Varianz von \tilde{S} durch

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{S}_t) &= \frac{V}{4(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 4\lambda^2)\lambda} \left(8(\omega_y + \omega_z)^2\lambda^4 + 8\omega_x(\omega_y + \omega_z)\lambda^3 a \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(\omega_x^2 + \frac{3}{2}\omega_y^2 + 4\omega_y\omega_z + \frac{5}{2}\omega_z^2 \right) \lambda^2 a^2 + 2\omega_x(\omega_y + 4\omega_z)\lambda a^3 + (\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_z^2)a^4 \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

BEWEIS. Mit Hilfe von Lemma 1.3.9 lässt sich das erste Moment von \tilde{S} aufgrund der Linearität von Erwartungswerten direkt ablesen. Die Autokovarianz des Prozesses \tilde{S} geht nun aufgrund der Bilinearität der Kovarianz aus der Summe der gewichteten Kovarianzen der Prozesse X , Y und Z gemäß Lemma 1.3.10 hervor. Es gilt für $u > t$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{S}_u, \tilde{S}_t) &= \omega_x^2 \text{Cov}(X_u, X_t) + \omega_y^2 \text{Cov}(Y_u, Y_t) + \omega_z^2 \text{Cov}(Z_u, Z_t) \\ &\quad + \omega_x\omega_y [\text{Cov}(X_u, Y_t) + \text{Cov}(Y_u, X_t)] \\ &\quad + \omega_x\omega_z [\text{Cov}(X_u, Z_t) + \text{Cov}(Z_u, X_t)] \\ &\quad + \omega_y\omega_z [\text{Cov}(Y_u, Z_t) + \text{Cov}(Z_u, Y_t)]. \end{aligned}$$

Zusammen mit ergibt sich die Kovarianzfunktion

$$\gamma_{\tilde{S}}(h) = V e^{-\lambda h} (C_1 \sin(ah) + C_2 \cos(ah) + C_3)$$

mit C_1, C_2 und C_3 wie gewünscht. Hieraus lässt sich auch direkt die Varianz aus der Beziehung $\text{Var}(\tilde{S}_t) = \gamma_{\tilde{S}}(0)$ berechnen. \square

Die erarbeiteten Resultate dienen nun unmittelbar zur Bestimmung des Erwartungswertes, der Autokovarianzfunktion und schließlich der Autokorrelationsfunktion des Spotpreisprozesses S .

KOROLLAR 2.1.4. Für $i = 1, \dots, n$ seien $\tilde{S}_i(u)$ und S wie in (2.1) und (2.2). Dann kann der Erwartungswert von S durch die Erwartungswerte $E(\tilde{S}_i)$ gemäß (2.3) bestimmt werden durch die Formel

$$E(S) = \sum_{i=1}^n c_i E(\tilde{S}_i).$$

Die Autokovarianzfunktion von S ergibt sich wegen der Unabhängigkeit der Lévy-Prozesse L_1, \dots, L_n für $u > t \geq 0$ durch

$$\text{Cov}(S(u), S(t)) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot \text{Cov}(\tilde{S}_i(u), \tilde{S}_i(t)),$$

sowie die Autokorrelation des Prozesses S für $u > t$ als

$$\text{Corr}(S_u, S_t) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot \text{Cov}(\tilde{S}_i(u), \tilde{S}_i(t))}{\sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot \text{Var}(\tilde{S}_i(u))},$$

wobei $\text{Cov}(\tilde{S}_i(u), \tilde{S}_i(t))$ bzw. $\text{Var}(\tilde{S}_i(u))$ gemäß (2.4) und (2.5) berechnet werden.

Die oben aufgeführten Eigenschaften der Struktur der Spotpreise auf den Elektrizitätsmärkten können nun mit dem vorgestellten Modell (2.2) verglichen werden. Geht man davon aus, dass die beobachteten Strompreise eine stationäre Zeitreihe bilden (wie zum Beispiel in Klüppelberg, Meyer-Brandis und Schmidt, 2010), zeigt sich, dass die verwendeten Prozesse eine geeignete Dynamik vorweisen: Der „mean-reversion“-Effekt wird durch den konventionellen Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess Z vererbt und kann zusätzlich durch die zuvor geschilderte Rückkehr der Prozesse X und Y zu einem „zufälligen, oszillierenden Trend“ abgebildet werden. Das Sprungverhalten der Spotpreise kann zum einen durch den Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess Z , aber auch durch den Prozess Y modelliert werden, welche das gleiche Sprungverhalten wie der verwendete Lévy-Prozess L aufweisen. Die empirische Autokorrelationsfunktion der *Intraday*- sowie *DayAhead-Preise* der EEX zeigen ebenso wie die Autokorrelationsfunktion von S aus Korollar 2.1.4 einen exponentiell abfallenden Verlauf. Ebenso auffällig sind die durch die Saisonalitäten verursachten periodischen Schwankungen innerhalb der empirischen Autokorrelationsfunktionen. Auch diese lassen sich im Gegensatz zu den bisher verwendeten Ornstein-Uhlenbeck-Modellen für die Spotpreismodellierung europäischer Elektrizitätsmärkte (wie zum Beispiel in Barndorff-Nielsen und Shephard,

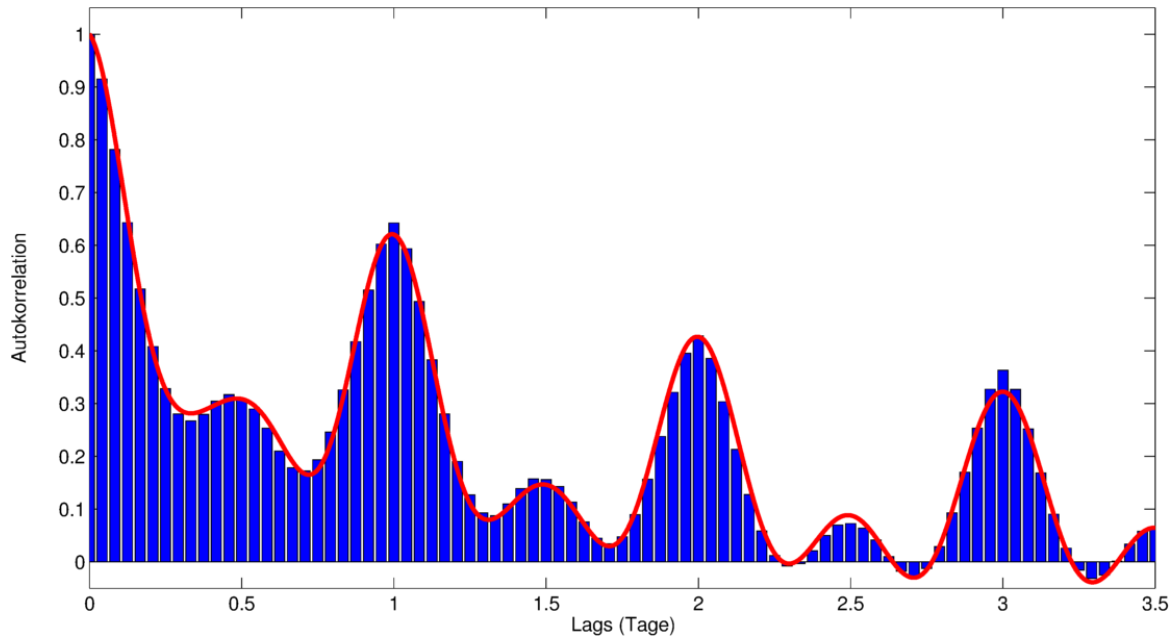


ABBILDUNG 2.3. Autokorrelationsfunktionen: EEX - Day Ahead-Handel 2012 (blau) und angepasste analytische Funktion (rot) auf Grundlage der Daten der *EEX Leipzig*. Hierzu wurden die Parameter der analytischen Autokorrelationsfunktion mit Hilfe der Methode kleinster Quadrate an die empirische Autokorrelationsfunktion angepasst. Zur Umsetzung wurde die MATLAB-Funktion `nlinfit.m` benutzt. Die resultierenden Parameter befinden sich im Anhang in Tabelle A.8 auf Seite 135. Ferner findet man in *Kobe und Woerner (2015)* eine Anpassung an die empirische Autokorrelationsfunktion eines anderen Jahres.

2001, *Barndorff-Nielsen, Benth und Veraart, 2010, Benth, Kallsen und Meyer-Brandis, 2007* oder *Klüppelberg, Meyer-Brandis und Schmidt, 2010*) durch den Spotpreisprozess S abbilden. Eine Illustration dieser Möglichkeit gewinnt man durch Abbildung 2.3. Hier zeigt sich im Balkendiagramm der oszillierende Verlauf der empirischen Autokorrelationsfunktion der Intraday-Kurse aus dem Jahr 2012. Der rote Graph illustriert eine mit Hilfe von *Korollar 2.1.4* an die empirische Autokorrelationsfunktion angepasste Kurve. Hierzu wurden vier Prozesse \tilde{S}_i der Form (2.1) zur Modellanpassung verwendet. Auf diese Weise gelingt es wie gewünscht, die Modellierung der Saisonalitäten implizit in den stochastischen Prozess einzubinden, sodass auf die Verwendung einer Trend-Funktion wie in den zuvor genannten Quellen verzichtet werden kann. Eine Übersicht über die Modelleigenschaften bietet darüber hinaus Tabelle 2.1 auf Seite 51.

2.2. Bewertung von Derivaten auf Basis des Spotpreismodells

In diesem Kapitel widmen wir uns der Bewertung von Terminkontrakten und Derivaten, welche auf Strommärkten gehandelt werden. Im ersten Schritt wird dabei die Berechnung von Preiskurven fester Termingeschäfte, sogenannter *Forwards* im Fokus stehen. Diese werden im „over-the counter“-Handel angeboten und gehandelt. Ohne Einschränkung beschäftigen wir uns in dieser Arbeit mit der Bewertung von *Forwards*. Eine Bewertung von standardisierten und börsennotierten *Futures* funktioniert vollständig analog.

Der hier vorgestellte Ansatz unterscheidet sich grundlegend von der Herangehensweise, die Forwardkurven direkt (wie beispielsweise in *Benth, Benth und Koekebakker, 2008*), statt wie in dieser Arbeit auf Grundlage des Spotpreismodells zu bewerten. Bei der direkten Modellierung einer Forwardkurve gestaltet sich die sinnvolle Bestimmung von Spotpreisen aus vielerlei Gründen als sehr schwierig (siehe *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis, 2007*). In dieser Arbeit wird es hingegen gelingen, die *Forwards* auf Basis des Spotpreismodells zu bewerten. Darüber hinaus sind Spotpreiskurven im Gegensatz zu Forwardkurven deutlich volatiler, was den Handel auf diesen Märkten risikoreicher und daher aus Sicht der Modellierung interessanter werden lässt. Dies rechtfertigt zusätzlich den hier gewählten Ansatz.

In Elektrizitätsmärkten erwirbt man durch den Kauf eines *Forwards* nicht eine bestimmte Menge Strom (etwa eine MWh) zu einem zukünftigen Zeitpunkt, sondern in der Regel das Anrecht auf eine Stromlieferung über einen längeren Zeitraum. Dieser kann sich über ein ganzes Jahr erstrecken, was die Preiskurven glättet, sodass kurzfristige Schwankungen wie bei Spotpreisen seltener auftreten. In den „over-the counter“-Märkten für Strom werden feste Termingeschäfte gehandelt, die eine Stromlieferung innerhalb eines zukünftigen Zeitraums $[T_1, T_2]$ garantieren. Im Folgenden wird der Preis eines solchen *Forwards* zum Zeitpunkt t für eine Lieferung einer bestimmten Menge Strom (etwa einer MWh) innerhalb eines zukünftigen Zeitraums $[T_1, T_2]$ mit $T_2 \geq T_1 > t \geq 0$ als $F(t, T_1, T_2)$ bezeichnet. Analog zu *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis (2007)* wird in diesem Kapitel der Forwardkurs eines solchen Derivats auf Grundlagen des zeitstetigen Spotpreismodells S wie in (2.2) mittels des bedingten Erwartungswertes

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \mathbb{E}_Q \left[\int_{T_1}^{T_2} S(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.6)$$

bestimmt. Die Formel kann dabei wie folgt gedeutet werden: Der Forwardpreis zum Zeitpunkt t für eine Lieferung einer Menge Strom während des Zeitraums $[T_1, T_2]$ ist der unter dem risikoneutralen Maß Q erwartete, durchschnittliche Spotpreis innerhalb des Intervalls $[T_1, T_2]$, bedingt auf die Menge aller Informationen \mathcal{F}_t , die einem zum Zeitpunkt t vorliegen. Bei der Wahl des zu P äquivalenten und risikoneutralen Maßes Q wird dem Anwender dabei im Zusammenhang mit Strommärkten außergewöhnlich viel Freiheit gelassen. Dies lässt sich wie folgt erklären: Zunächst ergänzt man das betrachtete Marktmodell mit dem Spotpreisprozess S wie üblich durch einen sogenannten *Bond* einer Bank, welcher zu einem festen Zinssatz $r \geq 0$ der deterministischen Dynamik $\exp(rt)$ für $t \geq 0$ folgt. Wir werden diesen zu Zwecken der Bewertung von Derivaten nutzen. Unter einem äquivalenten Martingalmaß Q versteht man in der Finanzstochastik ein Wahrscheinlichkeitsmaß, bezüglich dem alle diskontierten Prozesse des Marktmodells Martingale sind, sofern die zu den Prozessen assoziierte Anlageformen in ein Portfolio aufgenommen, gehalten und schließlich verkauft werden können. Da das Speichern von Strom in einem volkswirtschaftlich relevanten Sinne nicht möglich ist, kann der Spot selber nicht in ein Portfolio aufgenommen und gehalten werden. Dies hat zur Folge, dass der Spotmarkt von Spekulanten weitgehend nicht genutzt wird, da sie an einer physikalischen Lieferung des Stroms nicht interessiert sind. Wegen der Einlagerungsrestriktion von Strom gehört der diskontierte Spotpreisprozess S unseres Marktmodells folglich aus der Sicht der klassischen Finanzstochastik nicht zu den Anlageformen, welche unter dem neuen Maß Q eine Martingaleigenschaft besitzen sollen. Dahingegen ist die zweite Anlageform des Modells, der diskontierte Bond, unter jedem beliebigen äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß ein Q -Martingal, sodass jedes zu P äquivalente Maß Q für einen Maßwechsel in Frage kommt. Hierzu gehört mitunter auch das objektive Maß P . Obgleich ein Maßwechsel aus dem geschilderten Grund nicht notwendig ist, zeigt sich, dass im Hinblick auf die Modellierung von Risikoprämien die Wahl eines alternativen Bewertungsmaßes Q durchaus üblich und sinnvoll ist (siehe etwa *Barndorff-Nielsen, Benth und Veraart, 2010* oder *Benth und Sgarra, 2012*). Auf diesen Punkt werden wir zu einem späteren Zeitpunkt zurückkommen.

Der hier vorgeschlagene Maßwechsel zu einem zu P äquivalenten Maß Q beruht auf der Esscher-Transformation (siehe dazu *Barndorff-Nielsen, Benth und Veraart, 2010* oder *Benth und Sgarra, 2012*). Diese ermöglicht den Wechsel zu einem Maß Q , unter welchem der treibende additive Prozess weiterhin ein additiver Prozess bleibt und damit die wesentlichen Eigenschaften des Modells erhält.

SATZ 2.2.1. *Es seien A ein additiver Prozess mit Triplet $(\gamma_t, \sigma_t^2, \nu_t)$. Ferner existiere eine Konstante $c_T > 0$, sodass*

$$\int_0^T \int_{|z| \geq 1} (e^{cz} - 1) \nu(dz, du) < \infty$$

für alle $T > 0$ gilt. Es sei nun

$$Z_\theta(t) := \exp \left(\int_0^t \theta(u) dA_u - \Theta(t, \theta(\cdot)) \right) \quad (2.7)$$

ein Dichteprozess mit einer stetigen, beschränkten Funktion $\theta : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$\sup_{t \leq T} |\theta(t)| < c_T,$$

sowie der logarithmierten, momenterzeugenden Funktion $\Theta(t, \theta(\cdot)) := \psi_A(t, -i\theta(\cdot))$ mit

$$\begin{aligned} \psi_A(t, \theta(\cdot)) := & i \int_{-\infty}^t \theta(s) d\gamma(s) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \theta(s)^2 d\sigma^2(s) \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} (e^{iz\theta(s)} - 1 - iz\theta(s)\mathbb{1}_{|z| \leq 1}) \nu(ds, dz). \end{aligned}$$

Wir definieren das neue Maß Q mittels

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{F}_t} = Z_\theta(t). \quad (2.8)$$

Dann ist A unter dem neuen Maß Q weiterhin ein additiver Prozess mit dem charakteristischen Triplet $(\tilde{\gamma}_t, \sigma_t^2, \tilde{\nu}_t)$. Dieses ergibt sich durch

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_t &= \gamma_t + \int_0^t \int_{|z| < 1} z(e^{\theta(u)z} - 1) \nu(du, dz) + \int_0^t \theta(u) d\sigma^2(u) \quad \text{und} \\ \tilde{\nu}_t &= e^{\theta(t)z} \nu_t. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Unabhängigkeit der Zuwächse des Prozesses A unter dem Maß Q folgt aus *Benth und Sgarra (2012)*. Die Verteilungseigenschaft kann wie folgt hergeleitet werden: In Lemma 1.1.2 zeigt sich, dass sich die charakteristische Funktion des Prozesses $A(t) - A(s)$ für $0 \leq s < t \in \mathbb{R}$ als

$$\varphi_{A(t)-A(s)}(t, y) = \exp(\psi(s, t, y))$$

mit dem charakteristischen Exponenten

$$\psi(s, t, y) := iy(\gamma(t) - \gamma(s)) - \frac{1}{2}y^2(\sigma^2(t) - \sigma^2(s)) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{iyz} - 1 - iyz\mathbb{1}_{|z| \leq 1}) \nu(du, dz)$$

ergibt. Ferner definiert man für eine messbare Funktion $\theta : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi(s, t, \theta(\cdot)) &:= i \int_s^t \theta(s) d\gamma(s) - \frac{1}{2} \int_s^t \theta(s)^2 d\sigma^2(s) \\ &\quad + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{iz\theta(s)} - 1 - iz\theta(s)\mathbb{1}_{|z|\leq 1}) \nu(ds, dz). \end{aligned}$$

Für $T > 0$ sei nun $[0, T]$ ein Zeitintervall sowie P das objektive Maß und Q das zu P äquivalente Maß definiert durch (2.8). Dann gilt nach der Bayes-Formel (vgl. *Benth, Benth und Koekebakker, 2008*, Seite 38) unter Verwendung des Dichteprozesses Z_θ in (2.7) für $t \leq T$:

$$E_Q[X|\mathcal{F}_t] = Z_\theta^{-1}(t)E_P[XZ_\theta(T)|\mathcal{F}_t].$$

Mit Hilfe dieser Beziehung zwischen den bedingten Erwartungswerten und der Unabhängigkeit der Zuwächse des additiven Prozesses A (im Beweis durch $(*)$ gekennzeichnet) berechnet man:

$$\begin{aligned} &E_Q[\exp(iy(A(t) - A(s)))] \\ &\stackrel{(*)}{=} E_Q[\exp(iy(A(t) - A(s)))|\mathcal{F}_s] \\ &= E_P\left[\exp(iy(A(t) - A(s)))\frac{Z_\theta(t)}{Z_\theta(s)}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\ &= E_P\left[\exp\left(iy(A(t) - A(s)) + \int_s^t \theta(u)dA_u\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \exp(-\psi(s, t, -i\theta(\cdot))) \\ &\stackrel{(*)}{=} E_P\left[\exp\left(iy(A(t) - A(s)) + i \int_s^t (-i\theta(u))dA_u\right)\right] \exp(-\psi(s, t, -i\theta(\cdot))) \\ &= \exp(\psi(s, t, y - i\theta(\cdot)) - \psi(s, t, -i\theta(\cdot))) \\ &= \exp\left(i \int_s^t (y - i\theta(u))d\gamma(u) - \frac{1}{2} \int_s^t (y - i\theta(u))^2 d\sigma^2(u) \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{i(y-i\theta(u))z} - 1 - i(y - i\theta(u))z\mathbb{1}_{|z|\leq 1}) \nu(du, dz) \right. \\ &\quad \left. - (i \int_s^t (-i\theta(u))d\gamma(u) - \frac{1}{2} \int_s^t (-i\theta(u))^2 d\sigma^2(u) \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{i(-i\theta(u))z} - 1 - i(-i\theta(u))z\mathbb{1}_{|z|\leq 1}) \nu(du, dz))\right) \end{aligned}$$

Fasst man die gewonnene Darstellung weiter zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}
& E_Q [\exp (iy(A(t) - A(s)))] \\
&= \exp \left(iy(\gamma(t) - \gamma(s)) - \frac{1}{2} \int_s^t (y^2 - 2iy\theta(u)) d\sigma^2(u) \right. \\
&\quad \left. + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{iyz} e^{\theta(u)z} - e^{\theta(u)z} - iyz \mathbf{1}_{|z| \leq 1}) \nu(du, dz) \right) \\
&= \exp \left(iy(\gamma(t) - \gamma(s)) + \int_s^t \theta(u) d\sigma^2(u) + \int_s^t \int_{|z| \leq 1} z (e^{\theta(u)z} - 1) \nu(du, dz) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} y^2 (\sigma^2(t) - \sigma^2(s)) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{iyz} - 1 - iyz \mathbf{1}_{|z| \leq 1}) e^{\theta(u)z} \nu(du, dz) \Big).
\end{aligned}$$

□

Es gilt zu beachten, dass obiger Maßwechsel, angewendet auf die hier betrachteten zweiseitig-additiven Prozesse, das Maß lediglich für alle $t \geq 0$ verändert. Dies hat in erster Linie zur Folge, dass eine Berechnung der Risikoprämie für $t < 0$ nicht möglich ist, was sich in der Praxis jedoch nicht als Nachteil erweist. Schließlich ist es ohnehin möglich, die Risikoprämie der Vergangenheit zu beobachten.

Im Folgenden wird zunächst die Klasse der verwendeten Integratoren A auf einen Spezialfall eingeschränkt. Die Prozesse A_i für $i = 1, \dots, n$ seien nun zweiseitig-additive Sprungprozesse der Form

$$A_i(t) = \gamma t + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} z J_i(ds, dz) \quad (2.9)$$

mit den Sprungmaßen J_i im Sinne von (1.6) und einer konstanten Drift $\gamma \in \mathbb{R}$. Ferner bezeichnet man

$$\tilde{J}_i(ds, dz) := J_i(ds, dz) - \tilde{\nu}_i(ds, dz)$$

als das unter dem Maß Q im Sinne von Satz 2.2.1 kompenzierte Sprungmaß. Die Prozesse

$$\tilde{M}_i(t) := \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} z \tilde{J}_i(ds, dz) \quad (2.10)$$

werden kompenzierte Prozesse genannt und sind Q -Martingale (vgl. *Cont* und *Tankov*, 2004, Proposition 8.8). Die Forwardpreise $F(t, T_1, T_2)$ auf Grundlage des Spotpreisprozesses S können in dem vorgestellten Szenario bestimmt werden. In dieser Arbeit wird die

explizite Preisformel für $F(t, T_1, T_2)$ aus *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis (2007)* einerseits für oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse, andererseits für treibende Prozesses der Form (2.9) mit zusätzlicher Drift-Komponente verallgemeinert.

SATZ 2.2.2 (Forwardpreisberechnung).

Es sei S der Spotpreisprozess (2.2) mit den Prozessen \tilde{S}_i für $i = 1, \dots, n$ wie in (2.1). Ferner seien die Integratoren A_i der Form (2.9). Legt man ein risikoneutrales Maß Q (etwa durch Satz 2.2.1) zugrunde, erhält man den Forwardpreis zum Zeitpunkt $t > 0$ für eine Lieferung einer MWh Strom innerhalb des Zeitraums $[T_1, T_2]$ mit $T_2 > T_1 > t \geq 0$ durch:

$$F(t, T_1, T_2) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(t, T_1, T_2)$$

mit

$$\begin{aligned} F_i(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \Bigg[& X_i(t) \left(\omega_x^i D_i(t, T_1, T_2) - \omega_y^i E_i(t, T_1, T_2) \right) \\ & + Y_i(t) \left(\omega_x^i E_i(t, T_1, T_2) + \omega_y^i D_i(t, T_1, T_2) \right) \\ & + Z_i(t) \left(\omega_z^i G_i(t, T_1, T_2) \right) \\ & + U(t, T_1, T_2, \omega_x^i, \omega_y^i, \omega_z^i) \Bigg], \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} D_i(t, T_1, T_2) &:= \frac{1}{\lambda_i^2 + a_i^2} \left(e^{-\lambda_i(T_2-t)} (a_i \sin(a_i(T_2-t)) - \lambda_i \cos(a_i(T_2-t))) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\lambda_i(T_1-t)} (a_i \sin(a_i(T_1-t)) - \lambda_i \cos(a_i(T_1-t))) \right), \\ E_i(t, T_1, T_2) &:= \frac{1}{\lambda_i^2 + a_i^2} \left(e^{-\lambda_i(T_1-t)} (a_i \cos(a_i(T_1-t)) + \lambda_i \sin(a_i(T_1-t))) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\lambda_i(T_2-t)} (a_i \cos(a_i(T_2-t)) + \lambda_i \sin(a_i(T_2-t))) \right) \end{aligned}$$

sowie

$$G_i(t, T_1, T_2) := \frac{1}{\lambda_i} \left(e^{-\lambda_i(T_1-t)} - e^{-\lambda_i(T_2-t)} \right),$$

$$U(t, T_1, T_2, \omega_x^i, \omega_y^i, \omega_z^i) := \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \int_{\mathbb{R}} z \phi_i(u-r) \tilde{\nu}_i(dz, dr) \right) du$$

$$+ \gamma \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \phi_i(u-r) dr \right) du$$

mit den Funktionen $\phi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche sich durch

$$\phi_i(x) = e^{-\lambda_i x} \left(\omega_x^i \sin(a_i x) + \omega_y^i \cos(a_i x) + \omega_z^i \right) \mathbb{1}_{x \geq 0}(x)$$

ergeben.

BEWEIS. Der Beweis folgt weitgehend *Kobe* und *Woerner* (2015, Theorem 5.2). Für $i = 1$ widmet sich der Beweis dem Nachweis obiger Identitäten für den Prozess $F_1(t, T_1, T_2)$. Die Aussage für $i = 2, \dots, n$ folgt daraufhin aus analogen Rechnungen und schließlich der Linearität der bedingten Erwartung in (2.6).

Es sei nun $X := X_1, Y := Y_1, Z := Z_1, A := A_1$ sowie $a := a_1$ und $\lambda := \lambda_1$.

1. Schritt Im ersten Teil des Beweises richtet sich das Interesse auf die Bestimmung des Integrals

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [X(u) | \mathcal{F}_t] du. \quad (2.11)$$

Dazu beobachtet man mit Hilfe der Additionstheoreme (1.25) für $0 \leq t < u$:

$$\begin{aligned} X(u) &= \int_{-\infty}^t \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s + \int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s \\ &= \int_{-\infty}^t \sin(a(t-s+u-t)) e^{-\lambda(t-s+u-t)} dA_s + \int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s \\ &= e^{-\lambda(u-t)} \left[\cos(a(u-t)) \cdot X(t) + \sin(a(u-t)) \cdot Y(t) \right] \quad (*) \\ &\quad + \int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s. \quad (**) \end{aligned}$$

Wegen der gewonnenen Darstellungsweise des Prozesses $X(u) = (*) + (**)$ kann (2.11) mit Hilfe der Zerlegung

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [(*) | \mathcal{F}_t] du + \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [(**) | \mathcal{F}_t] du$$

bestimmt werden. Dazu berechnet man mit Hilfe der \mathcal{F}_t -Messbarkeit von (*):

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} E_Q [(*)|\mathcal{F}_t] du \\ &= X(t) \int_{T_1}^{T_2} \cos(a(u-t)) e^{-\lambda(u-t)} du + Y(t) \int_{T_1}^{T_2} \sin(a(u-t)) e^{-\lambda(u-t)} du \\ &= X(t) \cdot D_1(t, T_1, T_2) + Y(t) \cdot E_1(t, T_1, T_2). \end{aligned}$$

Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} E_Q [(**)|\mathcal{F}_t] du \\ &= \int_{T_1}^{T_2} E_Q \left[\int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s | \mathcal{F}_t \right] du \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \int_{\mathbb{R}} z \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} \tilde{\nu}(dz, ds) \right) du \\ &+ \int_{T_1}^{T_2} \left(E_Q \left[\int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} d\tilde{M}(s) | \mathcal{F}_t \right] \right) du \quad (2.12) \\ &+ \gamma \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} ds \right) du \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \int_{\mathbb{R}} z \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} \tilde{\nu}(dz, ds) \right) du \\ &+ \gamma \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} ds \right) du \\ &=: U_1^1(t, T_1, T_2). \quad (2.13) \end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass der Term in (2.12) wegen der Martingaleigenschaft des stochastischen Integrals im bedingten Erwartungswert verschwindet. Diese Eigenschaft zeigt sich, da der Integrand eine beschränkte, deterministische Funktion darstellt und \tilde{M} ein L^2 -Martingal unter dem Maß Q ist (vgl. *Cont und Tankov, 2004*, Proposition 8.8). Zusammen ergibt sich somit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [X(u)|\mathcal{F}_t] du \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left(X(t) \cdot D_1(t, T_1, T_2) + Y(t) \cdot E_1(t, T_1, T_2) + U_1^1(t, T_1, T_2) \right). \end{aligned}$$

2. Schritt: Wir richten unseren Blick auf den bedingten Erwartungswert

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [Y(u) | \mathcal{F}_t] du. \quad (2.14)$$

Auch hier wird Y eine neue Gestalt der Form

$$\begin{aligned} Y(u) &= \int_{-\infty}^t \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s + \int_t^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s \\ &= e^{-\lambda(u-t)} \left[\cos(a(u-t)) \cdot Y(t) - \sin(a(u-t)) \cdot X(t) \right] \end{aligned} \quad (*)$$

$$+ \int_t^u \cos(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA_s. \quad (**)$$

verliehen. Die Verfolgung der gleichen Idee wie oben führt nun zu

$$\int_{T_1}^{T_2} E_Q [(*) | \mathcal{F}_t] du = Y(t) \cdot D_1(t, T_1, T_2) - X(t) \cdot E_1(t, T_1, T_2)$$

sowie

$$\begin{aligned} &\int_{T_1}^{T_2} E_Q [(**) | \mathcal{F}_t] du \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \int_{\mathbb{R}} z \cos(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} \tilde{\nu}(dz, ds) \right) du \\ &\quad + \gamma \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \cos(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} ds \right) du \\ &=: U_2^1(t, T_1, T_2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [Y(u) | \mathcal{F}_t] du \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left(Y(t) \cdot D_1(t, T_1, T_2) - X(t) \cdot E_1(t, T_1, T_2) + U_2^1(t, T_1, T_2) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

3. Schritt: Im letzten Teil des Beweises verbleibt lediglich die Bestimmung des bedingten Erwartungswertes

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [Z(u) | \mathcal{F}_t] du,$$

welcher als Spezialfall von (2.14) mit $a = 0$ und damit unmittelbar aus obiger Gleichung (2.16) hervorgeht. Man folgert sofort

$$\begin{aligned} D_1(t, T_1, T_2)|_{a=0} &= (e^{-\lambda(T_1-t)} - e^{-\lambda(T_2-t)})/\lambda = G_1(t, T_1, T_2), \\ E_1(t, T_1, T_2)|_{a=0} &= 0 \\ U_2^1(t, T_1, T_2)|_{a=0} &=: U_3^1(t, T_1, T_2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

und damit

$$\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} E_Q [Z(u) | \mathcal{F}_t] du = \frac{1}{T_2 - T_1} \left(Z(t) \cdot G_1(t, T_1, T_2) + U_3^1(t, T_1, T_2) \right). \quad (2.18)$$

Zusammen mit

$$\omega_x^1 U_1^1(t, T_1, T_2) + \omega_y^1 U_2^1(t, T_1, T_2) + \omega_z^1 U_3^1(t, T_1, T_2) = U(t, T_1, T_2, \omega_x^1, \omega_y^1, \omega_z^1)$$

folgt schließlich die Behauptung. \square

Die hergeleitete Formel für $F(t, T_1, T_2)$ hängt nur von deterministischen Funktionen und den Prozessen X, Y und Z zum Zeitpunkt t ab, was eine explizite Bestimmung der Preise nach einer Anpassung des Modells möglich macht. Verwendet man im Prozess S lediglich den verallgemeinerten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess Z wie in *Benth, Kallsen* und *Meyer-Brandis* (2007), genügt es die Formel (2.18) herzuleiten. Diese entspricht auch der Identität für $F(t, T_1, T_2)$ in *Benth, Kallsen* und *Meyer-Brandis* (2007).

Wie bereits vor Satz 2.2.1 erwähnt, widmen wir uns nochmals der Motivation eines Maßwechsels im Sinne obigen Satzes. Hierbei steht die sogenannte *Risikoprämie*

$$\begin{aligned} RP(t, T) &:= \frac{1}{T_2 - T_1} \left(E_Q \left[\int_{T_1}^{T_2} S(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] - E_P \left[\int_{T_1}^{T_2} S(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= F(t, T_1, T_2) - \frac{1}{T_2 - T_1} E_P \left[\int_{T_1}^{T_2} S(u) du \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

im Blickpunkt (vgl. *Benth* und *Sgarra*, 2012). Wir hatten bereits festgestellt, dass aus mathematischer Sicht ein Maßwechsel von dem objektiven Maß P hin zu einem „risikoneutralen Maß“ Q nicht notwendig ist. Diese Sichtweise wird etwa durch die „Theorie rationaler Erwartungen“ aus der Makroökonomie unterstützt, in der davon ausgegangen wird, dass die Erwartungen der Akteure des betrachteten Marktes nie systematisch zu falschen Ergebnissen führen (vgl. *Muth*, 1961). Schon in dem Buch „*A treatise on money*“ von *Keynes* (1930) wurde diesem Ansatz widersprochen. In der Theorie zur „normalen Backwardation“ ging Keynes davon aus, dass etwa ein Produzent durch den Verkauf von

Forwards die eigenen Risiken „hedgen“ wolle und dadurch den Anlegern einen Preisnachlass gewähre, sodass stets negative Risikoprämien zu beobachten seien. Doch dieser Effekt tritt auf den Märkten auch mit umgekehrtem Vorzeichen auf und wird als „Contango“ bezeichnet: Bei sehr volatilen Preisen besteht auch ein Interesse der Käufer und Anleger, sich gegen Risiko abzusichern, sodass Risikoprämien auch positiv sein können. Speziell bei Elektrizitätsmärkten wie der EEX, zeigen sich in empirischen Studien sowohl positive als auch negative Risikoprämien (vgl. *Pavel, Lawford und Valerie, 2006*). Während Forwards mit einem Ausübungszeitpunkt in ferner Zukunft im Regelfall der „normalen Backwardation“ folgen, treten bei kurzen Laufzeiten auch positive Risikoprämien auf, die durch das volatile und sprunghafte Verhalten der Preiskurven erklärt werden. Aus mathematischer Sicht besteht daher ein Interesse, den beobachteten Vorzeichenwechsel der Risikoprämie durch das verwendete Modell nachzubilden. Wir wollen anhand eines Beispiels illustrieren, dass diesem Wunsch in unserem Spotpreismodell mit Hilfe von Satz 2.2.1 entsprochen werden kann:

BEISPIEL 2.2.3. Es sei nun S der Spotpreisprozess gemäß Definition 2.1.1 unter Verwendung einer Linearkombination der Prozesse X , Y und Z . Verwenden wir zusätzlich die Annahmen aus Bemerkung 2.1.2, so ist die Kernfunktion $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Spots S , welche sich durch

$$\phi(x) = e^{-\lambda x} (\omega_x \sin(ax) + \omega_y \cos(ax) + \omega_z) \mathbb{1}_{x \geq 0}(x)$$

ergibt, stets positiv. Verwenden wir einen Subordinator der Form

$$A(t) = \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} z J_i(ds, dz)$$

als treibenden Prozess mit Intensitätsmaß ν , so ergibt sich die Risikoprämie mit Hilfe von Satz 2.2.1 und Satz 2.2.2 durch

$$RP(t, T) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_t^u \int_0^{\infty} \phi(u - s) \cdot z \cdot (e^{\theta(s)z} - 1) \nu(ds, dz) \right) du.$$

Wegen der getroffenen Annahmen, zeigt sich, dass sich das Vorzeichen der Risikoprämie durch die Funktion θ des Maßwechsels steuern lässt. Zur Veranschaulichung betrachten wir zwei Fälle: Für $\theta(s) \equiv \theta > 0$ beobachten wir, dass $z(e^{\theta(s)z} - 1)$ positiv ist, während für $\theta(s) \equiv \theta < 0$ der Ausdruck $z(e^{\theta(s)z} - 1)$ ein negatives Vorzeichen aufweist. Der Vorzeichenwechsel lässt sich in diesem Szenario somit nachbilden. \diamond

Möchte man über den Forwardpreiskurven hinaus Derivate zu einer messbaren Auszahlungsfunktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ bewerten, muss eine weitere Darstellungsform der Forwards hergeleitet werden. Auch im Folgenden werden die in *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis*

(2007) verwendeten Techniken für oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse verallgemeinert.

LEMMA 2.2.4 (Darstellungslemma für Forwards).

Es sei S der Spotpreisprozess (2.2) mit den Prozessen \tilde{S}_i für $i = 1, \dots, n$ wie in (2.1) mit $a_i = b_i$. Ferner seien die Integratoren L_i der Form (2.9). Legt man ein risikoneutrales Maß wie in Satz 2.2.2 zugrunde, dann gilt mit Hilfe der Formel (2.6) für den Preis eines Forwards zum Zeitpunkt $t > 0$ für eine Lieferung einer MWh Strom innerhalb des Zeitraums $[T_1, T_2]$ mit $T_2 > T_1 > t \geq 0$:

$$F(t, T_1, T_2) = \sum_{i=1}^n c_i \left(U^i(T_1, T_2) + \int_{-\infty}^t \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\tilde{M}_i(s) \right)$$

mit den kompensierten Sprungprozessen \tilde{M}_i wie in (2.10) sowie

$$\Sigma_i(s, T_1, T_2) := \frac{1}{T_2 - T_1} (\omega_x^i E_i(t, T_1, T_2) + \omega_y^i D_i(t, T_1, T_2) + \omega_z^i G_i(t, T_1, T_2))$$

und

$$U^i(T_1, T_2) := \frac{1}{T_2 - T_1} (\omega_x^i U_1^i(T_1, T_2) + \omega_y^i U_2^i(T_1, T_2) + \omega_z^i U_2^i(T_1, T_2)).$$

Die Funktionen $D_i(t, T_1, T_2)$, $E_i(t, T_1, T_2)$ und $G_i(t, T_1, T_2)$ kennt man bereits aus Satz 2.2.2. Die Terme in $U^i(T_1, T_2)$ gehen in der Weise

$$U_j^i(T_1, T_2) := U_j^i(-\infty, T_1, T_2) \quad \text{für } j = 1, 2, 3$$

aus (2.13), (2.15) sowie (2.17) hervor.

BEWEIS. Wie im Beweis von Satz 2.2.2 wird die Identität für $i = 1$ gezeigt. Wegen der Linearität des bedingten Erwartungswertes kann daraus die Behauptung für eine von Prozessen der Form \tilde{S} geschlossen werden. Es können wie im erwähnten Beweis zunächst die bedingten Erwartungswerte der Prozesse $X := X_1$, $Y := Y_1$ und $Z := Z_1$ separat bestimmt und abermals wegen der Linearität der Erwartungswerte zur Aussage des Lemmas

zusammengeführt werden. Für den bedingten Erwartungswert (2.6) des Prozesses X gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathbb{E}_Q[X(u)|\mathcal{F}_t] du \\
&= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathbb{E}_Q \left[\int_{-\infty}^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} dA(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] du \\
&= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} z \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} \tilde{\nu}(dz, ds) \right) du \\
&\quad + \frac{\gamma}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_{-\infty}^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} ds \right) du \\
&\quad + \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathbb{E}_Q \left[\int_{-\infty}^u \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} d\tilde{M}(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] du \\
&= \frac{1}{T_2 - T_1} U_1(T_1, T_2) + \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \int_{-\infty}^t \sin(a(u-s)) e^{-\lambda(u-s)} d\tilde{M}(s) du \\
&= \frac{1}{T_2 - T_1} U_1(T_1, T_2) + \int_{-\infty}^t E_1(s, T_1, T_2) d\tilde{M}(s).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde das Fubini-Theorem für stochastische Integrale wie in *Barndorff-Nielsen* und *Basse-O'Connor* (2011, Theorem 3.1) verwendet. Für die Prozesse Y und Z führt schließlich die analoge Vorgehensweise zur Behauptung. \square

Wie im *over-the-counter-Handel* Optionen auf Forwards, werden auch im *EEX-Terminmarkt* Optionen auf Futures gehandelt. Es kann nun eine Formel zur Bewertung einer Put-Option auf Basis eines Forwards mit Auszahlungsfunktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ zu einem festen Ausübungszeitpunkt $T > 0$ entwickelt werden. Betrachtet man den Preis einer Put-Option $p(t, T, T_1, T_2)$ zu einem solchen Ausübungszeitpunkt $T > 0$ auf einen Forward $F(t, T_1, T_2)$ wie in (2.6) mit $0 \leq t < T < T_1 \leq T_2$, so wird der Preis in dieser Arbeit mit Hilfe der Formel

$$p(t, T, T_1, T_2) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q[g(F(T, T_1, T_2)) | \mathcal{F}_t] \quad (2.19)$$

ermittelt. Hierbei bezeichnet Q erneut ein riskoneutrales Maß, welches etwa durch Satz 2.2.1 gewonnen werden kann, sowie $r > 0$ den Zinssatz des zugrunde gelegten Bonds. Die Preisformel (2.19) kann daher als der diskontierte, unter dem riskoneutralen Maß Q erwartete Auszahlungsbetrag $g(F(T, T_1, T_2))$ interpretiert werden, wobei wir zur Berechnung des bedingten Erwartungswertes alle zum Zeitpunkt $t \geq 0$ zur Verfügung stehende Informationen \mathcal{F}_t verwenden.

Es wird sich zeigen, dass der bedingte Erwartungswert (2.19) tatsächlich eine explizite Lösung besitzt, die mittels numerischer Methoden bestimmt werden kann. Bevor man sich dieser widmen kann, definiert man die sogenannte *Kumulante* einer deterministischen Funktion $\theta(\cdot)$ bezüglich des Maßes Q für $0 \leq t < T$ als

$$\Psi_i^{t,T}(\theta(\cdot)) := \ln \left(\mathbb{E}_Q \left[\exp \left(i \int_t^T \theta(s) dA_i(s) \right) \right] \right). \quad (2.20)$$

Für $i = 1, \dots, n$ seien nun A_i additive Prozesse mit dem charakteristischen Triplet $(0, 0, \nu^i)$, sodass

$$\int_0^t \int_{|x| \leq 1} |x| \nu^i(ds, dx) < \infty \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (2.21)$$

erfülle, wobei ν^i das mit ν_t^i in Verbindung stehende Maß bezeichne. Nach der Lévy-Itô-Zerlegung 1.1.5 sind die Prozesse A_i dann von der Form

$$A_i(t) = \int_{-\infty}^t \int_0^\infty z J_i(ds, dz) \quad (2.22)$$

mit den Sprungmaßen J_i im Sinne von (1.6), wobei wir zusätzlich annehmen, dass das Sprungmaß auf der positiven Achse konzentriert sei. Ferner bezeichne

$$\tilde{J}_i(ds, dz) := J_i(ds, dz) - \tilde{\nu}_i(ds, dz)$$

als das unter dem Maß Q kompensierte Sprungmaß (2.9) und

$$\tilde{A}_i(t) = \int_{-\infty}^t \int_0^\infty z \tilde{J}_i(ds, dz) \quad (2.23)$$

den kompensierten additiven Prozess. Dabei definieren wir das Maß Q durch 2.2.1. Die Kumulante besitzt in dieser Situation die Gestalt

$$\Psi_i^{t,T}(\theta(\cdot)) = \int_t^T \int_0^\infty (e^{i\theta(s)z} - 1) \tilde{\nu}_i(ds, dz). \quad (2.24)$$

Für einen solchen treibenden Prozess A_i kann nun eine Put-Option mit Basiswert eines Forwards wie in *Benth, Kallsen und Meyer-Brandis (2007)* bewertet werden.

SATZ 2.2.5 (Put-Optionsbewertung). *Es sei $F(t, T_1, T_2)$ ein Forward auf den Spot im Sinne von (2.6). Ferner werde der assoziierte Spotpreisprozess S von additiven Prozess A_i der Form (2.22) angetrieben. Dann gehorcht der Preis einer Put-Option mit einer Auszahlungsfunktion g , sodass $g(F(T, T_1, T_2)) \in L^1(Q)$, für $0 \leq t < T < T_1 \leq T_2$ der Formel*

$$p(t, T, T_1, T_2) = e^{-r(T-t)} (g \star \Phi^{t,T})(F(t, T_1, T_2)).$$

Dabei bezeichnet \star die Faltung zweier Funktionen und $\Phi^{t,T}$ eine Funktion, welche implizit durch die Fouriertransformation

$$\widehat{\Phi}^{t,T}(y) := \exp \left(\sum_{i=1}^n \Psi_i^{t,T}(y \cdot c_i \cdot \Sigma_i(\cdot, T_1, T_2)) \right)$$

mit der Funktion Σ_i aus Lemma 2.2.4 gegeben ist. Die Funktionen $\Psi_i^{t,T}(\cdot)$ sind die Kumulanten gemäß der Definition (2.20), die sich in der hier vorliegenden Situation durch (2.24) berechnen lassen.

BEWEIS. Wir gehen vor wie in Kobe und Woerner (2015, Theorem 5.4) und verallgemeinern die Resultat von Benth, Kallsen und Meyer-Brandis (2007) für obiges Spotpreismodell. Zunächst bemerken wir, dass eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ aus der Inversionsformel

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) e^{iyx} dy \quad (2.25)$$

zurückgewonnen werden kann. Ferner besitzt die Preisformel eines Forwards nach Lemma 2.2.4 für $\gamma = 0$ und den kompensierten Prozessen $\widetilde{M}_i = \widetilde{A}_i$ wie in (2.23) die Gestalt:

$$F(t, T_1, T_2) = \sum_{i=1}^n c_i \left(U^i(T_1, T_2) + \int_{-\infty}^t \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\widetilde{A}_i(s) \right).$$

Mit Hilfe dieser Erkenntnis errechnet man:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_Q[g(F(T, T_1, T_2)) | \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) \mathbb{E}_Q [e^{iyF(T, T_1, T_2)} | \mathcal{F}_t] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) \exp \left(iy \sum_{i=1}^n c_i U^i(T_1, T_2) \right) \\ & \quad \cdot \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(iy \sum_{i=1}^n c_i \int_{-\infty}^t \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\widetilde{A}_i(s) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & \quad \cdot \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(iy \sum_{i=1}^n c_i \int_t^T \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\widetilde{A}_i(s) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) \exp \left(iy \sum_{i=1}^n c_i \left(U^i(T_1, T_2) + \int_{-\infty}^t \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\widetilde{A}_i(s) \right) \right) \\ & \quad \cdot \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(iy \sum_{i=1}^n c_i \int_t^T \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\widetilde{A}_i(s) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] dy \end{aligned}$$

Modelleigenschaft	Verweis
Unendlich teilbare Randverteilungen	Siehe Satz 1.2.6
Mean-Reverting Effekt	Verwendung eines OU-Prozesses wie in Bemerkung 1.3.2 und zeigt sich zudem in Lemma 1.3.5
Stationarität	Siehe Lemma 1.3.7, (iii)
Sprünge	Siehe Lemma 1.3.7, (ii)
Oszillierende Abhängigkeitsstruktur und oszillierender, zufälliger Trend	Siehe Lemma 2.1.3, Korollar 2.1.4, Abbildung 2.3 und Lemma 1.3.5
Semimartingaleigenschaft	Siehe Lemma 1.3.7, (i)
Bewertung eines Forwards	Siehe Satz 2.2.2
Bewertung einer Option	Siehe Satz 2.2.5
Vorzeichenwechsel der Risikoprämie	Siehe Beispiel 2.2.3

TABELLE 2.1. Eigenschaften des Spotpreismodells.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) \exp(iyF(t, T_1, T_2)) \\
&\quad \cdot \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(\left(iy \sum_{i=1}^n c_i \int_t^T \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\widetilde{A}_i(s) \right) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] dy.
\end{aligned}$$

Da die Prozesse \widetilde{A}_i unabhängige Zuwächse besitzen folgt daraus:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q[g(F(t, T_1, T_2)) | \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) \cdot \exp(iy F(t, T_1, T_2)) \\
&\quad \cdot \mathbb{E}_Q \left[\exp \left(iy \left(\sum_{i=1}^n c_i \int_t^T \Sigma_i(s, T_1, T_2) d\widetilde{A}_i(s) \right) \right) \right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) \cdot \exp \left(iy F(t, T_1, T_2) + \sum_{i=1}^n \Psi_i^{t,T}(y \cdot c_i \cdot \Sigma_i(\cdot, T_1, T_2)) \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}(y) \cdot \widehat{\Phi}^{t,T}(y) \cdot e^{iy F(t, T_1, T_2)} dy.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.25) folgt schließlich die Behauptung. □

Eine typische Auszahlungsfunktion ist die der europäischen Put-Option

$$g(x) := \begin{cases} \max(K - x, 0), & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit einem Ausübungspreis $K > 0$. Offenbar liegt g in diesem Fall in $L^1(\mathbb{R})$. Dies gilt jedoch nicht für die assoziierte Call Option, für welche obiger Satz somit nicht anwendbar ist. Mit einem Rückgriff auf die Put-Call-Parität bietet sich einem jedoch die Möglichkeit, auch den Preis eines solchen Calls zu bestimmen.

Eine Zusammenfassung der Modelleigenschaften findet man in Tabelle [2.1](#).

KAPITEL 3

Parameterschätzung in oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen

Im ersten Abschnitt richtet sich der Blick auf das Schätzen der Parameter der Kernfunktion von oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen. Dabei gehen wir davon aus, dass wir den Prozess zu diskreten Zeiten $t \in \mathbb{N}$ beobachten. Der zweite Teil des Kapitels widmet sich einem zentralen Grenzwertsatz für die geschätzten Parameter. Bevor im letzten Abschnitt einige Simulationsergebnisse präsentiert werden, parametrisieren wir den treibenden Lévy-Prozess und konstruieren Schätzer für die unbekannt Parameter auf Grundlage von niederfrequenten als auch hochfrequenten Beobachtungen des zugrunde gelegten Prozesses.

3.1. Momentenmethode

Die sogenannte *Momentenmethode* ist ein bewährtes Verfahren zur Gewinnung von Schätzern für die unbekannt Komponenten $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ eines parametrisierten Modells. Sie beruht auf dem Vergleich der analytischen, theoretischen Momente m_k einer Verteilung mit den empirischen Momenten \hat{m}_k , welche basierend auf einer Stichprobe berechnet werden. Dabei besteht oft die Hoffnung darin, dass die empirischen Momente \hat{m}_k für einen großen Stichprobenumfang tatsächlich eine gute Approximation für die theoretischen Momente liefern. Mathematisch ausgedrückt wünscht man sich beispielsweise eine geeignete Konvergenz, etwa stochastische, fast sichere oder aber auch eine Konvergenz im L^1 -Sinne der empirischen Momente gegen die tatsächlichen, analytisch zuvor berechneten Momente des Modells. Dabei erscheint zunächst das *klassische starke Gesetz der großen Zahlen* ein geeignetes Resultat, eine solche Konvergenz der empirischen Mittel nachzuweisen. Leider erweist sich das Gesetz in dem Kontext von oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen als nicht hilfreich, da eine wichtige Voraussetzung für die Anwendung des Satzes nicht erfüllt ist: Entnimmt man eine Stichprobe, etwa des Sinus-OUU-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, so ist die gewonnene Folge von Zufallsgrößen wie das vorherige Kapitel zeigt nicht unkorreliert oder gar unabhängig. Jedoch wird sich zeigen, dass die

beobachtete Stichprobe $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine langfristig betrachtet „hinreichend schnell abnehmende“ Abhängigkeitsstruktur aufweist, die den Nachweis einer etwas schwächeren Eigenschaft, der sogenannten *Ergodizität*, ermöglicht. Aufgrund dieses Attributs wird es gelingen, die gewünschte Konvergenz der empirischen Momente gegen die tatsächlichen Momente des Modells zu gewährleisten. Der Schlüssel liegt dabei im Birkhoff'schen Ergodensatz. Bevor dieser zitiert und für die hier benutzten Prozesse angewendet wird, werden zunächst einige grundlegende Begriffe der Ergodentheorie eingeführt. Wir werden die Ergodizität eines Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ aus der sogenannten „starken Mischungseigenschaft“ des Prozesses $(X_t)_{t \geq 0}$ schließen. Einen detaillierten Überblick zur verwendeten Theorie findet man beispielsweise in *Klenke (2008, Kapitel 20)*.

DEFINITION 3.1.1.

Es sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T: \Omega \rightarrow \Omega$ eine messbare Abbildung.

- (i) Die Abbildung T heißt *P-maßerhaltend*, falls

$$P(T^{-1}(A)) = P(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

- (ii) Es sei nun T eine maßerhaltende Abbildung. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt *T-invariant*, falls $T^{-1}(A) = A$. \diamond

Die nächste Definition beschäftigt sich mit Ergodizität und einer sogenannten Mischungseigenschaft stationärer stochastischer Prozesse:

DEFINITION 3.1.2.

1. Es sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathbb{R} -wertiger, stationärer stochastischer Prozess auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P}) := (\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}_0}, P_X)$. Ferner sei

$$T: \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \quad T((x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}) := (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$$

der sogenannte Forward-Operator.

- (i) Der Prozess X heißt *ergodisch*, falls

$$\tilde{P}(A) \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } T\text{-invarianten Mengen } A \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ gilt.}$$

- (ii) Der Prozess X heißt (*stark*) *mischend*, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}(A \cap T^{-n}(B)) = \tilde{P}(A)\tilde{P}(B) \quad \text{für alle } A, B \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ gilt.}$$

2. Es sei $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein \mathbb{R} -wertiger, stationärer stochastischer Prozess auf dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}}, P_X)$. Ferner sei

$(T^t)_{t \in \mathbb{R}}$ die Gruppe der Shift-Operatoren auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Das heißt für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$T^t : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad T^t((x_s)_{s \in \mathbb{R}}) := (x_{s+t})_{s \in \mathbb{R}}.$$

Dann heißt X nach *Rosinski* und *Zak* (1997) oder *Fuchs* und *Stelzer* (2013) (*stark*) *mischend*, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}(A \cap T^{-t}(B)) = \tilde{P}(A \cap B) \quad \text{für alle } A, B \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ gilt. } \diamond$$

Die Mischungseigenschaft in (ii) lässt sich zudem zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P((X_s)_{s \in \mathbb{R}} \in A, (X_{s+t})_{s \in \mathbb{R}} \in B) = P((X_s)_{s \in \mathbb{R}} \in A) \cdot P((X_s)_{s \in \mathbb{R}} \in B)$$

für $A, B \in \tilde{\mathcal{A}}$ umformulieren. Hierbei zeigt sich noch deutlicher, warum ein stationärer, mischender Prozess X auch als „asymptotisch unabhängig“ bezeichnet wird. Zudem beobachtet man eine sehr nützliche Eigenschaft, die im Laufe des Kapitels noch benutzt wird:

LEMMA 3.1.3.

- (i) *Es sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathbb{R} -wertiger, stationärer und stark mischender Prozess. Dann ist X auch ergodisch.*
- (ii) *Ist ein stationärer, stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ mischend, so ist auch der in X eingebettete Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ stationär und mischend im Sinne von Definition 3.1.2.*
- (iii) *Es sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stationärer und ergodischer Prozess und $g: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine messbare Abbildung. Dann ist auch der Prozess $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $Y := g(X)$ stationär und ergodisch.*

BEWEIS. Um (i) einzusehen, wählt man eine T -invariante Menge $A \in \mathcal{A}$ und stellt fest, dass

$$\tilde{P}(A) = \tilde{P}(A \cap A) = \tilde{P}(A \cap T^{-n}(A)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{P}(A)^2$$

gilt. Die Behauptung in (ii) folgt aus dem Vergleich der beiden obigen Definitionen 3.1.2. Die letzte Eigenschaft (iii) wird etwa in *Kallenberg* (2002) nachgewiesen. \square

Ist ein stationärer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ergodisch, so gilt für diesen unter gewissen Voraussetzungen ein „starkes Gesetz der großen Zahlen“, auch wenn die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nicht unabhängig ist. Dies folgt aus einem Spezialfall des Birkhoff’schen Ergodensatzes:

THEOREM 3.1.4 (Speziellfall des Birkhoff'schen Ergodensatzes).

Es sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stationärer, ergodischer Prozess mit $X_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \longrightarrow \mathbb{E}(X_1) \quad \text{fast sicher und im } L^1\text{-Sinne für } n \rightarrow \infty.$$

BEWEIS. Siehe etwa *Billingsley (1986)*. □

Das Resultat motiviert dazu, die hier eingeführten, stationären Prozesse auf Ergodizität zu untersuchen:

Nach Kapitel 1.2 sind die Randverteilungen der Prozesses $Z := (Z_t)_{t \geq 0}$ der Form

$$Z_t := \int_{-\infty}^t f(t-s) dL_s \quad (3.1)$$

mit einer geeigneten Kernfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie die des treibenden Lévy-Prozesses L unendlich teilbar. Speziell ergibt sich hier die Charakteristik $(\gamma_f, \sigma_f^2, \nu_f)$ in Abhängigkeit des charakteristischen Triplets (γ, σ^2, ν) des Lévy-Prozess L gemäß 1.12. Wie wir in Kapitel 1.2 gesehen haben, ist Z ein stationärer Prozess.

Wir fassen zunächst einige Ergebnisse zusammen, wie sich stationäre, stochastische Prozesse der Form Z auf die „starke Mischungseigenschaft“ und Ergodizität im Sinne von Definition 3.1.2 untersuchen lassen. Anschließend werden die Resultate in Theorem 3.1.9 für den Spotpreisprozess S genutzt:

Im Artikel „Infinitely divisible processes“ von *Maruyama (1970)* werden erstmals drei hinreichende Bedingungen hergeleitet, welche gewährleisten, dass ein stationärer Prozess mit unendlich teilbaren Randverteilungen mischend im Sinne von Definition 3.1.2 (ii) ist:

THEOREM 3.1.5. (*Maruyama, 1970*) Ein stationärer, unendlich teilbarer Prozess Z der Form (3.1) mit Charakteristik $(\gamma_f, \sigma_f^2, \nu_f)$ ist mischend genau dann, wenn folgende Bedingungen (C1) - (C3) erfüllt sind, wobei:

- (C1) Die Kovarianzfunktion $r(h)$ der Gaußschen Komponente des Lévy-Prozesses verschwindet für große h , das heißt $r(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow \infty$.
- (C2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_{\{0,t\}}^f(|xy| > \delta) = 0$ für alle $\delta > 0$,
- (C3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} xy \nu_{\{0,t\}}^f(dx, dy) = 0$,

wobei $\nu_{\{0,t\}}^f$ das gemeinsame Lévy-Maß des Vektors $(Z_0, Z_t)^\top$ beschreibe.

BEWEIS. Siehe *Maruyama (1970, Theorem 6)*. □

Während der Nachweis der Bedingungen (C2) und (C3) für einige treibende Lévy-Prozesse erst durch eine Umformulierung gelingen wird, kann die Bedingung (C1) oft sofort gezeigt werden. Dies zeigt sich später auch für den Spotpreisprozess S .

Im Hinblick auf geeignete Umformulierungen der Bedingungen (C2) und (C3) werden die von *Eliazar* und *Klafter* (2007) eingeführten „Korrelations-Kaskaden“ benutzt. In dieser Arbeit verwenden wir die Definition für allgemeine Kernfunktionen von *Weron* und *Magdziarz* (2010):

DEFINITION 3.1.6. (Korrelations-Kaskaden).

Es sei Z ein zeitstetiger Moving-Average Prozess der Form (3.1) und ν das Lévy-Maß des treibenden Lévy-Prozesses. Dann definiert man die *Korrelations-Kaskade* $C_\ell(t_1, t_2)$ für $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ und $\ell > 0$ durch

$$C_\ell(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^t \Lambda \left(\frac{\ell}{\min(|f(t_1 - s)|, |f(t_2 - s)|)} \right) ds,$$

wobei

$$\Lambda(\ell) := \int_{|x|>\ell} \nu(dx)$$

als *Tail-Funktion* des Lévy-Maßes ν bezeichnet wird. \diamond

Die folgende Proposition beschreibt den Zusammenhang zwischen der Korrelations-Kaskade $C_\ell(t_1, t_2)$ und dem gemeinsamen Lévy Maß des Vektors $(Z_{t_1}, Z_{t_2})^\top$:

PROPOSITION 3.1.7. (Magdziarz, 2009) *Es sei Z ein Prozess der Form (3.1) und $\nu_{\{t_1, t_2\}}^f$ das Lévy Maß des Vektors $(Z_{t_1}, Z_{t_2})^\top$. Dann gilt für $\ell > 0$:*

$$C_\ell(t_1, t_2) = \nu_{\{t_1, t_2\}}^f(\{(x, y) : \min(|x|, |y|) > \ell\})$$

BEWEIS. Dies folgt aus *Magdziarz* (2009, Proposition 1) unter Verwendung der Korrelations-Kaskade wie in Definition 3.1.6. \square

Betrachtet man einen Prozess Z der Form (3.1) mit einem Lévy-Prozess L ohne Brownsche Komponente σ^2 , so wird die Abhängigkeitsstruktur des Prozesses Z ausschließlich durch das Lévy-Maß des Prozesses charakterisiert: Falls $\sigma^2 = 0$, so sind die Prozesse Z_{t_1} und Z_{t_2} unabhängig, genau dann wenn das gemeinsame Lévy Maß $\nu_{\{t_1, t_2\}}^f$ des Vektors $(Z_{t_1}, Z_{t_2})^\top$ der Zerlegung

$$\nu_{\{t_1, t_2\}}^f(dx, dy) = \nu_{\{t_1\}}^f(dx) \otimes \delta_0(dy) + \delta_0(dx) \otimes \nu_{\{t_2\}}^f(dy)$$

genügt (vgl. Magdziarz, 2009). Die Prozesse Z_{t_1} und Z_{t_2} sind folglich unabhängig, wenn die Masse des gemeinsamen Lévy-Maßes ausschließlich auf den beiden Achsen konzentriert ist. Dies ermöglicht eine Interpretation der Korrelations-Kaskaden: Da $C_\ell(t_1, t_2)$ nach Proposition 3.1.7 gewissermaßen ein Maß dafür angibt, wie viel Masse des Lévy-Maßes außerhalb der Achsen aufzufinden ist, beschreibt $C_\ell(t_1, t_2)$ daher im Wesentlichen „wie abhängig“ die beiden Komponenten Z_{t_1} und Z_{t_2} sind. Hierbei gilt es besonders zu betonen, dass das Abhängigkeitsmaß $C_\ell(t_1, t_2)$ keinerlei Anforderung an die Momente des Prozesses stellt und daher Magdziarz (2009) zu einem neuen Korrelationsbegriff

$$\rho_\ell(t_1, t_2) := \frac{C_\ell(t_1, t_2)}{\sqrt{C_\ell(t_1, t_1)C_\ell(t_2, t_2)}}$$

motiviert. Wird etwa ein α -stabiler, treibender Prozesse L_α mit $0 < \alpha < 2$ für die Konstruktion des Prozess Z in (3.1) verwendet, so gibt ρ_ℓ ein Maß für die Abhängigkeit des Prozesses an, während die „klassische Korrelation“ in diesem Fall nicht existiert.

Denkt man zurück an die Interpretation der „starke Mischungseigenschaft“ als asymptotische Unabhängigkeit, so überrascht das folgende Resultat vor dem Hintergrund der Deutung der Korrelations-Kaskaden nicht:

THEOREM 3.1.8. (Magdziarz, 2009)

Der stationäre Prozess $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ der Form (3.1) ist mischend im Sinne von Definition 3.1.2 (ii), falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1) *Die Kovarianzfunktion $r(h)$ der Gaußschen Komponente des Prozesses verschwindet große h . Das heißt, dass $r(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow \infty$.*
- (B2) *Die Korrelations-Kaskade (siehe Definition 3.1.6) verschwindet langfristig, das heißt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_\ell(0, t) = 0 \quad \text{für alle } \ell > 0 \text{ gilt.}$$

BEWEIS. Dies folgt aus Magdziarz (2009, Theorem 1) unter Verwendung der Korrelations-Kaskade wie in Definition 3.1.6. □

Der Vergleich von Theorem 3.1.5 und Theorem 3.1.8 zeigt, dass die Bedingungen (C2) und (C3) an das gemeinsame Lévy-Maß nun durch die neue Bedingung (B2) an die Funktion $C_\ell(t_1, t_2)$ ersetzt werden kann.

Es wird nun mit Hilfe des obigen Theorems nachgewiesen, dass der Spotpreisprozess S (2.2) in vielerlei Situationen ein mischender Prozess im Sinne von Definition 3.1.2 ist. Wir gehen dabei zur Vereinfachung davon aus, dass wir nur einen Prozess \tilde{S} für unser

Spotpreismodell verwenden, das heißt wir wählen $n = 1$. Das Resultat für $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$ kann daraus unmittelbar abgeleitet werden. Zum Nachweis für den Fall $n = 1$ wird Gebrauch von Theorem 3.1.8 gemacht. Die Ausgangslage ist wie folgt:

Es seien $a, \lambda > 0$ und L ein zwei Lévy-Prozess mit Triplet (γ, σ^2, ν) . Dazu betrachten wir wie in den Kapiteln zuvor die Prozesse

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \sin(a(t-s)) dL_s, \\ Y(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} \cos(a(t-s)) dL_s \quad \text{und} \\ Z(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dL_s. \end{aligned}$$

Wir definieren ferner die Kernfunktion $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi(x) := e^{-\lambda x} (\omega_x \sin(ax) + \omega_y \cos(ax) + \omega_z) \mathbb{1}_{x \geq 0}(x).$$

mit $\omega_x, \omega_y, \omega_z \geq 0$ und $\omega_x + \omega_y + \omega_z > 0$ sowie den zugehörigen Spotpreisprozess $S := (S(t))_{t \geq 0}$ durch

$$S(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t-u) dL_u. \quad (3.2)$$

Das heißt, dass der Prozess S ebenso die Darstellung $S(t) = \omega_x X(t) + \omega_y Y(t) + \omega_z Z(t)$ besitzt. Hierbei sei daran erinnert, dass alle verwendeten Prozesse stets existieren (siehe 1.3.4 (iii)). Das Augenmerk richtet sich nun auf den Nachweis der Mischungseigenschaft des Spotpreisprozesses für eine Auswahl von möglichen Modellsituationen:

THEOREM 3.1.9.

Es sei S der Spotpreisprozess wie in (3.2) mit einem treibenden Lévy-Prozess mit Triplet (γ, σ^2, ν) . Dann ist S in den folgenden Modell-Situationen mischend im Sinne 3.1.2 (ii):

- (i) *Der Prozess L sei eine **Brownsche Bewegung B mit Drift** $\gamma \geq 0$ und $\sigma^2 \geq 0$, das heißt L hat die Bauart*

$$L_t = \gamma t + \sigma B_t.$$

- (ii) *Es sei L_α ein α **stabiler Lévy Prozess** mit $0 < \alpha < 2$, dann ist das Lévy-Maß ν für $c_1, c_2 > 0$ von der Form*

$$\nu(dx) = c_1 |x|^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{x < 0}(x) dx + c_2 x^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{x \geq 0}(x) dx.$$

(iii) Es sei L ein **temperierter α -stabiler Lévy-Prozess** mit $c_1, c_2, \lambda > 0$ und $0 < \alpha < 2$:

$$\nu(dx) = c_1 \cdot |x|^{-\alpha-1} e^{-\lambda|x|} \cdot \mathbb{1}_{x < 0}(x) dx + c_2 \cdot x^{-\alpha-1} e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}(x) dx.$$

Dieses Modell impliziert den **temperierten, α -stabilen Subordinator** mit

$$\nu(dx) = c_1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{x > 0}(x) dx.$$

(iv) Für $c, \alpha > 0$ sei L der sogenannte **Gamma Subordinator** mit

$$\nu(dx) = c \cdot \frac{1}{x} e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{1}_{x > 0}(x).$$

(v) Es sei L ein **Normal Inverse Gaussian Prozess** (NIG($\alpha, \beta, \mu, \delta$)) mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ und $\delta > 0$ und dem Lévy-Maß

$$\nu(dx) = \frac{\delta \alpha}{\pi} \cdot |x|^{-1} \cdot \exp(\beta x) \cdot \mathcal{K}_1(\alpha|x|) dx,$$

wobei $\mathcal{K}_1(x)$ die modifizierte Bessel-Funktion dritter Art mit Index 1 bezeichne (vgl. Beispiel 1.1.6).

Es sei L eine sogenannte „Sprung-Diffusion“. Für eine Brownsche Bewegung B und einen Poisson-Prozess N mit Intensität $\delta > 0$ hat L dann die Gestalt

$$L_t := \gamma t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_t,$$

wobei

(vi) im **Kou - Modell** das Lévy-Maß für $p \in [0, 1]$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ die Form

$$\nu(dx) = \delta \left(p \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x} \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}(x) dx + (1-p) \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2|x|} \mathbb{1}_{x < 0}(x) \right) dx$$

besitzt. Die zugrunde gelegte Verteilung des Prozesses X wird dabei als „Doppel-Exponential-Verteilung“ bezeichnet;

(vii) im **Merton - Modell** für $\rho^2 > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ das Lévy-Maß die Gestalt

$$\nu(dx) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi\rho^2}} e^{-\frac{x^2}{2\rho^2}} dx$$

besitzt.

BEWEIS. Zum Nachweis verwenden wir Theorem 3.1.8:

Die Bedingung (B1) kann stets in allen Fällen wie folgt nachgewiesen werden:

Die Funktion $r: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich nach Rosinski und Zak (1996, Theorem 4) durch

$$r(h) = \sigma^2 \int_0^\infty \phi(x)\phi(x+h) dx.$$

Für einen treibenden Lévy-Prozess ohne eine Gaußsche Komponente ($\sigma^2 = 0$) ist $r \equiv 0$ und (B1) daher offensichtlich erfüllt.

Es sei nun $\sigma^2 > 0$. Analog zu (2.4) erhält man:

$$r(h) = \sigma^2 e^{-\lambda h} (C_1 \sin(ah) + C_2 \cos(ah) + C_3)$$

mit

$$\begin{aligned} C_1 &:= \frac{1}{4(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 4\lambda^2)} (8\omega_x(\omega_y + \omega_z)\lambda^3 + 4(\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_y\omega_z)a\lambda^2 + 2\omega_x(\omega_y + 4\omega_z)a^2\lambda \\ &\quad + (\omega_x^2 - \omega_y^2 - 4\omega_y\omega_z)a^3), \\ C_2 &:= \frac{1}{4\lambda(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 4\lambda^2)} (8\omega_y(\omega_y + \omega_z)\lambda^4 + 8\omega_x(\omega_y + \frac{1}{2}\omega_z)a\lambda^3 + 4(\omega_x^2 + \frac{3}{2}\omega_y^2 + 2\omega_y\omega_z)a^2\lambda^2 \\ &\quad + 2\omega_x(\omega_y + 2\omega_z)a^3\lambda + (\omega_x^2 + \omega_y^2)a^4), \\ C_3 &:= \frac{1}{2\lambda(a^2 + 4\lambda^2)} (4\omega_z(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + 2\omega_x\omega_z a\lambda + \omega_z^2 a^2). \end{aligned}$$

Offenbar resultiert somit

$$\lim_{h \rightarrow \infty} r(h) = 0.$$

Es verbleibt folglich der Nachweis von (B2) in den unterschiedlichen Modellsituationen.

Es ist hilfreich vorab festzustellen, dass sich die Kernfunktion ϕ des Spotpreisprozesses mit Hilfe der Konstanten $c := \omega_x + \omega_y + \omega_z$ in der Form

$$|\phi(x)| \leq c \cdot \exp(-\lambda x) \tag{3.3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ abschätzen lässt.

Zu (i): Hier ist ν das Nullmaß und (B2) unmittelbar erfüllt.

Zu (ii): Für $\ell > 0$ ergibt sich die Tail-Funktion Λ des Lévy-Maßes hier durch

$$\begin{aligned} \Lambda(\ell) &= \int_{|x|>\ell} \nu(dx) \\ &= c_1 \left[-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x} \right)^\alpha \right]_{-\infty}^{-\ell} + c_2 \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x} \right)^\alpha \right]_{\ell}^{\infty} \\ &= \tilde{c} \cdot \ell^{-\alpha} \quad \text{mit } \tilde{c} = \frac{c_1 + c_2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Demnach erhält man $C_\ell(0, t)$ für ein $\ell > 0$ und $t \geq 0$ mittels

$$\begin{aligned} C_\ell(0, t) &= \tilde{c} \cdot \ell^{-\alpha} \int_{-\infty}^t (\min\{|\phi(-x)|, |\phi(t-x)|\})^\alpha dx \\ &= \tilde{c} \cdot \ell^{-\alpha} \int_0^\infty (\min\{|\phi(y-t)|, |\phi(y)|\})^\alpha dy \\ &\stackrel{*}{\leq} \tilde{c} \cdot c \cdot \ell^{-\alpha} \int_t^\infty (\min\{e^{-\lambda(y-t)}, e^{-\lambda y}\})^\alpha dy \\ &= \tilde{c} \cdot c \cdot \ell^{-\alpha} \int_t^\infty e^{-\lambda\alpha y} dy, \end{aligned}$$

wobei zur Abschätzung (*) neben (3.3) auch berücksichtigt wurde, dass

$$\phi(y-t) = 0 \quad \text{für } 0 \leq y \leq t \text{ gilt.}$$

Für die letzte Identität obiger Überlegungen wurde zudem ausgenutzt, dass $y \mapsto e^{-\lambda y}$ monoton fällt für $y > 0$. Aus obiger Rechnung resultiert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_\ell(0, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{c} \cdot c \cdot \ell^{-\alpha} \cdot \frac{e^{-\lambda\alpha t}}{\lambda\alpha} = 0.$$

Zu (iii): Die exponentielle Glättung des Lévy-Maßes eines α -stabilen Lévy-Prozesses durch die Funktion $e^{-\lambda|x|} \leq 1$ im Vergleich zum Lévy-Maß in (ii) ermöglicht unmittelbar die Abschätzung

$$\Lambda(\ell) \leq c_1 \cdot \tilde{c} \cdot \ell^{-\alpha}$$

für eine geeignete Konstante $c_1 > 0$ und alle $\ell > 0$. Folglich erhält man hier unter Verwendung von (ii):

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} C_\ell(0, t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \cdot \tilde{c} \cdot c \cdot \frac{e^{-\lambda\alpha t}}{\lambda\alpha} = 0.$$

Zu (iv) und (v): Die Beweise werden nach dem Nachweis von (vi) erbracht.

Zu (vi): Es sei ohne Einschränkung $\delta = 1$. Für die Tail-Funktion des Lévy-Maßes ν ergibt sich hier dann für $\ell > 0$:

$$\Lambda(\ell) = (1-p) \cdot e^{-\lambda_2 \ell} + p \cdot e^{-\lambda_1 \ell}.$$

Ohne Einschränkung sei $p = 1$. Für $p \in [0, 1]$ verläuft nachfolgende Überlegung analog: Zum Beweis beobachtet man vorab, dass die Funktion $|\phi(x)|$ unter gewissen Konstellationen der Parameter in abzählbar vielen Stellen den Wert null annehmen kann, so dass $C_\ell(0, t)$ nicht immer wohldefiniert ist. Um dieses Problem zu umgehen definiert man

zunächst für ein $\epsilon > 0$ die Hilfsfunktionen $\phi_\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi_\epsilon(x) := \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } |\phi(x)| \leq \epsilon, \\ |\phi(x)|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie

$$f_\epsilon(x) := \begin{cases} \epsilon, & \text{falls } x < 0, \\ c \cdot e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

mit $c = \omega_x + \omega_y + \omega_z$. Dann gilt:

- (1.) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ ist $|\phi(x)| \leq \phi_\epsilon$.
- (2.) Für alle Folgen $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\epsilon_k \downarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{\epsilon_k}(x) = |\phi(x)| \quad \text{punktweise für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- (3.) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ gilt: $|\phi_\epsilon(x)| \leq f_\epsilon(x)$.
- (4.) Wegen (3.) gilt für alle $\ell > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$:

$$\frac{\ell}{\min\{|\phi_\epsilon(x-t)|, |\phi_\epsilon(x)|\}} \geq \frac{\ell}{\min\{|f_\epsilon(x-t)|, |f_\epsilon(x)|\}}$$

und daher für $\alpha > 0$

$$\exp\left(-\alpha \cdot \frac{\ell}{\min\{|\phi_\epsilon(x-t)|, |\phi_\epsilon(x)|\}}\right) \leq \exp\left(-\alpha \cdot \frac{\ell}{\min\{|f_\epsilon(x-t)|, |f_\epsilon(x)|\}}\right).$$

- (5.) Zusammen mit der bekannten Ungleichung $1 + \lambda x \leq \exp(\lambda x)$ für $\lambda > 0$ und $x \geq 0$ sowie der Beobachtung, dass $y \mapsto \exp(-\alpha y)$ monoton fällt für $\alpha > 0$ zeigt sich:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{c} \cdot e^{\lambda x}\right) dx \\ &\leq \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\alpha}{c} \cdot (1 + \lambda x)\right) dx < \infty. \end{aligned}$$

Folglich beobachtet man für die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \exp\left(-\frac{\alpha}{c} \cdot (1 + \lambda x)\right),$$

dass

$$g \in L^1(\mathbb{R}_+) \tag{3.4}$$

gilt.

Es sei nun $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen, sodass $\epsilon_k \downarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ hinreichend schnell konvergiert. Diese Annahme kann in obigen Überlegungen stets getroffen werden. Dann gilt für $\ell > 0$:

$$C_\ell(0, t) = \int_0^\infty \lim_{k \rightarrow \infty} \exp \left(-\alpha \cdot \ell \cdot (\min \{ \phi_{\epsilon_k}(x-t), \phi_{\epsilon_k}(x) \})^{-1} \right) dx \quad (3.5)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \exp \left(-\alpha \cdot \ell \cdot (\min \{ \phi_{\epsilon_k}(x-t), \phi_{\epsilon_k}(x) \})^{-1} \right) dx \quad (3.6)$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \exp \left(-\alpha \cdot \ell \cdot (\min \{ f_{\epsilon_k}(x-t), f_{\epsilon_k}(x) \})^{-1} \right) dx \quad (3.7)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \exp \left(-\frac{\alpha \cdot \ell}{\epsilon_k} \right) dx + \int_t^\infty \exp \left(-\alpha \cdot \ell \cdot \left(\frac{e^{\lambda x}}{c} \right) \right) dx$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(t \cdot \exp \left(-\frac{\alpha \cdot \ell}{\epsilon_k} \right) \right) + \int_t^\infty \exp \left(-\alpha \cdot \ell \cdot \left(\frac{1 + \lambda x}{c} \right) \right) dx. \quad (3.8)$$

Die obigen Identitäten erklären sich dabei wie folgt: In (3.5) wird die Stetigkeit der Minimum-Funktion, der Abbildung $x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und der Exponentialfunktion ausgenutzt. Die Gleichheit innerhalb des Integrals gilt folglich nach obigen Überlegungen fast überall bezüglich des Lebesgue-Maßes. Anschließend wird in (3.6) der Satz der majorisierten Konvergenz angewendet, welcher wegen der Überlegungen (3.) und (5.) benutzt werden kann. In (3.7) wird die Ungleichung in (4.) verwendet. Die beobachtete Ungleichung in (5.) ermöglicht die Abschätzung in (3.8). Der Blick zurück auf den ersten Term in (3.8) zeigt, dass das gewünschte Grenzverhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(t \cdot \exp \left(-\frac{\alpha \cdot \ell}{\epsilon_k} \right) \right) = 0$$

vorliegt, sofern die Folge $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\epsilon_k \downarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ hinreichend schnell konvergiert. Diese wurde oben angenommen. Zudem kommt man unter Verwendung von (3.4) sowie mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz nun zu dem Schluss, dass für alle $\ell > 0$ für den zweiten Term in (3.8)

$$\int_0^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[t, \infty[} \cdot \exp \left(-\alpha \cdot \ell \cdot \left(\frac{1 + \lambda x}{c} \right) \right) dx = 0$$

resultiert. Beide Argumente zusammen liefern abschließend die Behauptung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_\ell(0, t) = 0.$$

Zu (iv): In diesem Fall ergibt sich für die Tail-Funktion des Lévy-Maßes für alle $\ell > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\Lambda(\ell) &= \tilde{c} \int_{\ell}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-\alpha x} dx \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{\ell} \int_{\ell}^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{\tilde{c}}{\ell \alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \ell}.\end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass wie in (vi) ein Problem im Hinblick auf die Wohldefiniertheit von $C_{\ell}(0, t)$ auftritt, sodass abermals die Hilfsfunktionen ϕ_{ϵ} und f_{ϵ} verwendet werden. Darüber hinaus lässt sich verbunden mit (3.3) beobachten, dass für $\lambda > 0$, $x \geq 0$ und $t \geq 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\min\{|\phi(x-t)|, |\phi(x)|\} &= \min\{|\phi(x-t)|, |\phi(x)|\} \cdot \mathbb{1}_{[t, \infty[}(x) \\ &\leq \mathbb{1}_{[t, \infty[}(x) \cdot c \cdot e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

für die Konstante $c > 0$ aus (3.3) genutzt werden kann. Daraus und wie im Beweis zum Modell (iv) schließt man mit Hilfe einer Folge $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ positiver Zahlen, sodass $\epsilon_k \downarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, dass sich die Korrelations-Kaskade $C_{\ell}(0, t)$ in diesem Modell durch

$$C_{\ell}(0, t) \tag{3.9}$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{c}}{\alpha \ell} \int_0^{\infty} \min\{|\phi(x-t)|, |\phi(x)|\} \cdot \exp\left(-\alpha \cdot \ell \cdot (\min\{\phi_{\epsilon_k}(x-t), \phi_{\epsilon_k}(x)\})^{-1}\right) dx.$$

$$\leq \frac{c \cdot \tilde{c}}{\alpha \ell} \int_t^{\infty} \exp(-\lambda x) \cdot \exp\left(-\alpha \cdot \ell \cdot \left(\frac{1 + \lambda x}{c}\right)\right) dx \tag{3.10}$$

$$\leq \frac{c \cdot \tilde{c}}{\alpha \ell} \cdot \exp(-\lambda \ell) \int_t^{\infty} \exp\left(-\alpha \cdot \ell \cdot \left(\frac{1 + \lambda x}{c}\right)\right) dx \tag{3.11}$$

abschätzen lässt. Man folgert wie in zum Nachweis in Modell (iv) für $\ell > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{\ell}(0, t) = 0.$$

Zu (v): Wir verwenden die Darstellung

$$\mathcal{K}_1(x) = x \int_1^{\infty} e^{-xy} \sqrt{y^2 - 1} dy$$

der Bessel-Funktion dritter Art mit Index 1 (vgl. *Glasser et al.*, 2012, Theorem 3.1) und nutzen anschließend die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(\alpha|x|) &\leq \alpha|x| \int_1^\infty e^{-\alpha|x|y} \cdot y \, dy \\ &= \alpha|x| \cdot \left(\frac{\alpha|x| + 1}{\alpha^2 x^2} \right) \cdot e^{-\alpha|x|}.\end{aligned}$$

Es sei $\tilde{c} := \frac{\delta\alpha}{\pi}$, $\kappa_1 = \alpha - \beta$ und $\kappa_2 = \alpha + \beta$. Wir beobachten, dass wegen der Voraussetzungen $\alpha > 0$ und $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ die Konstanten κ_1 und κ_2 stets positiv sind. Mittels obiger Ungleichung ergibt sich eine Abschätzung der Tail-Funktion für alle $\ell > 0$ durch:

$$\begin{aligned}\Lambda(\ell) &\leq \tilde{c}\alpha \int_{-\infty}^{-\ell} e^{(\beta+\alpha)x} \cdot \left(\frac{1-\alpha x}{\alpha^2 x^2} \right) dx + \tilde{c}\alpha \int_{\ell}^{\infty} e^{(\beta-\alpha)x} \cdot \left(\frac{1+\alpha x}{\alpha^2 x^2} \right) dx \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{\ell^2 \alpha} \int_{-\infty}^{-\ell} e^{\kappa_2 x} \cdot (1-\alpha x) dx + \frac{\tilde{c}}{\ell^2 \alpha} \int_{\ell}^{\infty} e^{-\kappa_1 x} \cdot (1+\alpha x) dx \\ &= \left(\frac{\tilde{c}}{\ell \cdot \kappa_2} + \frac{(\alpha + \kappa_2)\tilde{c}}{\ell^2 \cdot \alpha \kappa_2} \right) e^{-\kappa_2 \ell} + \left(\frac{\tilde{c}}{\ell \cdot \kappa_1} + \frac{(\alpha + \kappa_1)\tilde{c}}{\ell^2 \cdot \alpha \kappa_1} \right) e^{-\kappa_1 \ell}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Ähnlich wie im Nachweis (iv) lässt sich verbunden mit (3.3) beobachten, dass für $\lambda > 0$, $x \geq 0$ und $t \geq 0$ neben der Ungleichung

$$\begin{aligned}\min\{|\phi(x-t)|, |\phi(x)|\} &= \min\{|\phi(x-t)|, |\phi(x)|\} \cdot \mathbb{1}_{[t, \infty[}(x) \\ &\leq \mathbb{1}_{[t, \infty[}(x) \cdot c \cdot e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

auch die Abschätzung

$$\min\{|\phi(x-t)|, |\phi(x)|\}^2 \leq \mathbb{1}_{[t, \infty[}(x) \cdot c^2 \cdot e^{-2\lambda x}$$

für die Konstante $c > 0$ aus (3.3) genutzt werden kann. Unter Verwendung beider Ungleichungen und selbiger Überlegung wie in (3.10) für die vier Summanden der Abschätzung von $\Lambda(\ell)$ in (3.12), lässt sich auch hier die Behauptung folgern.

Zu (vii): Wir nehmen abermals ohne Einschränkung an, dass $\delta = 1$ sei. Wie in den Beweisen zuvor, wird auch im Merton-Modell die Tail-Funktion

$$\Lambda(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^2}} \left(\int_{-\infty}^{-\ell} e^{-\frac{x^2}{2\rho^2}} dx + \int_{\ell}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\rho^2}} dx \right)$$

zunächst abgeschätzt. Bei dem zweiten Integral sorgt die Substitution

$$y := \frac{x}{\rho} \quad \text{und resultierender neuer Grenze } \ell_1 = \frac{\ell}{\rho}$$

für etwas mehr Überblick. Anschließend wird das Integral mit Hilfe einer Konstanten $c_1 > 0$ abgeschätzt durch:

$$\begin{aligned} \int_{\ell}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\rho^2}\right) dx &= c_1 \int_{\ell_1}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &\leq c_1 \int_{\ell_1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\ell_1 y}{2}\right) dx = \frac{2c_1}{\ell_1} \exp\left(-\frac{\ell_1^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Funktion gilt schließlich ebenso

$$\int_{-\infty}^{-\ell} \exp\left(-\frac{x^2}{2\rho^2}\right) dx \leq \frac{2c_1}{\ell_1} \exp\left(-\frac{\ell_1^2}{2}\right)$$

und daher insgesamt

$$\Lambda(\ell) \leq \frac{4c_1}{\ell_1} \exp\left(-\frac{\ell_1^2}{2}\right) \quad \text{für alle } \ell = \rho \cdot \ell_1 > 0.$$

Es sei daher nun ohne Einschränkung $\rho = 1$. Auch hier verwendet man die Hilfsfunktionen ϕ_ϵ und f_ϵ und eine hinreichend schnell konvergierende Folge $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ positiver Zahlen, sodass $\epsilon_k \downarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ wie im Beweis in (iv) und erhält

$$\begin{aligned} C_\ell(0, t) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4c_1}{\ell} \int_0^\infty \min\{|\phi(x-t)|, |\phi(x)|\} \cdot \exp\left(-\frac{\ell \cdot (\min\{\phi_{\epsilon_k}(x-t), \phi_{\epsilon_k}(x)\})^{-2}}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Analog zum Nachweis zum Modell (iv) kommt man hier zu dem gewünschten Resultat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_\ell(0, t) = 0.$$

□

Damit ist gezeigt, dass der Spotpreisprozess $S = (S(t))_{t \geq 0}$ unter Verwendung vielerlei Modelle für den treibenden Lévy-Prozess ein mischender Prozess ist. Zusammen mit Lemma 3.1.3 (i) und (ii) ist daher auch der eingebettete Prozess $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein mischender und folglich ergodischer Prozess. Benutzt man darüber hinaus Lemma 3.1.3 (iii) und den Spezialfall des Birkhoff'schen Ergodensatzes 3.1.4, lässt sich die angestrebte Konvergenz der empirischen Mittel und schließlich auch folgender Satz ableiten:

SATZ 3.1.10. *Es seien $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diskrete Beobachtungen des Spotpreisprozesses S wie in (3.2). Ferner sei L ein Lévy-Prozess wie in Theorem 3.1.9 mit $E(L_1^n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\bar{S}_N^n := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^n \longrightarrow E(S_1^n) \quad \text{fast sicher und im } L^1\text{-Sinne für } N \rightarrow \infty.$$

Falls $E(L_1^2) < \infty$, so gilt darüber hinaus unter Verwendung des Mittelwertschätzers $\bar{S}_N := \bar{S}_N^1$:

$$\widehat{\sigma}_N^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S}_N)^2 \longrightarrow \text{Var}(S_1) \quad \text{fast sicher und im } L^1\text{-Sinne für } N \rightarrow \infty$$

sowie

$$\widehat{\gamma}_N(h) := \frac{1}{N-h} \sum_{i=1}^{N-h} (S_i - \bar{S}_N)(S_{i+h} - \bar{S}_N) \longrightarrow \gamma_S(h) \quad \text{fast sicher und im } L^1\text{-Sinne}$$

für $N \rightarrow \infty$ und $h \in \{1, \dots, N-1\}$.

BEWEIS. Siehe etwa *Billingsley (1986)*. □

Damit sind \bar{S}_N^n , $\widehat{\sigma}_n^2$ und $\widehat{\gamma}_N(h)$ stark konsistente Schätzer für die Momente, die Varianz und Autokovarianz von S . Stellt man nun die empirischen Schätzer der analytischen berechneten Kennwerten, etwa

$$\begin{aligned} E(S_t) &= \mu \frac{(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2}{\lambda(a^2 + \lambda^2)}, \\ \text{Var}(S_t) &= V \cdot (C_2 + C_3), \\ \gamma_S(h) &= V \cdot e^{-\lambda h} \cdot (C_1 \sin(ah) + C_2 \cos(ah) + C_3) \end{aligned}$$

mit C_1, C_2 und C_3 wie in (2.4) in einem Gleichungssystem gegenüber, lassen sich durch die Lösung des Systems stark konsistente Schätzer für die Parameter a und λ sowie einen weiteren Parameter der Prozesse ableiten. Darüber hinaus können zum Beispiel die empirischen dritten und vierten Momente zur Schätzung der Gewichte ω_x, ω_y und ω_z unter Verwendung der Formeln in Lemma 1.3.9 genutzt werden. Ein solches Vorgehen wird als „Momentenmethode“ bezeichnet. Einige Schätzer, die sich durch diese Idee in einigen speziellen Situationen explizit ergeben, liefert das folgende Beispiel. In allgemeineren Situationen können die Lösungen der Gleichungen numerisch genähert werden.

BEISPIELE 3.1.11. (Momentenmethode)

Es seien $\mu := E(L_1) \neq 0$ und $V := \text{Var}(L_1) < \infty$ bekannt. Mit Hilfe von Satz 3.1.10 ergeben sich basierend auf den diskreten Beobachtungen $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die folgenden stark konsistenten Schätzer für die Parameter a und λ :

- a) Es seien $\omega_x = 1, \omega_y = 0, \omega_z = 0$ und damit $S(t) = X(t)$. Hieraus ergeben sich schließlich die Schätzer:

$$\hat{a}_N = \frac{16\mu^3(\widehat{\sigma}_N^2)^2}{\bar{X}_N(V^2\bar{X}_N^2 + 16\mu^2(\widehat{\sigma}_N^2)^2)}, \quad \hat{\lambda}_N = \frac{4V\mu^2\widehat{\sigma}_N^2}{V^2\bar{X}_N^2 + 16\mu^2(\widehat{\sigma}_N^2)^2}.$$

- b) Es sei $\omega_x = 0, \omega_y = 1, \omega_z = 0$, das heißt $S(t) = Y(t)$. Dann folgt (soweit wohldefiniert)

$$\hat{a}_N = \frac{\mu}{V\bar{Y}_N - 4\mu\widehat{\sigma}_N^2} \sqrt{\frac{4V\mu\widehat{\sigma}_N^2 - 2V^2\bar{Y}_N}{\bar{Y}_N}}, \quad \hat{\lambda}_N = \frac{V\mu}{V\bar{Y}_N - 4\mu\widehat{\sigma}_N^2}.$$

- c) Es sei $\omega_x = a, \omega_y = \lambda, \omega_z = a$, sodass $S(t) = a(X(t) + Y(t)) + \lambda Z(t)$ eine Linearkombination aus den Prozessen X, Y und Z ist. Der Erwartungswert und die Varianz sind in diesem Fall:

$$E(S_t) = \mu \cdot \frac{\lambda + a}{\lambda} \quad \text{und} \quad \text{Var}(S_t) = V \cdot \frac{3a^4 + 8a^3\lambda + 14a^2\lambda^2 + 16a\lambda^3 + 8\lambda^4}{4\lambda(a^2 + 4\lambda^2)}.$$

Auch hier lassen sich durch das Lösen des Gleichungssystems stark konsistente Schätzer für a und λ herleiten. Diese sind von der Form

$$\hat{a}_N = \frac{4\widehat{\sigma}_N^2 \cdot \mu \cdot (\bar{S}_N - \mu) \cdot (5\mu^2 - 2\mu\bar{S}_N + \bar{S}_N^2)}{V \cdot (\mu^4 + 8\mu^2\bar{S}_N^2 - 4\mu\bar{S}_N^3 + 3\bar{S}_N^4)},$$

$$\hat{\lambda}_N = \frac{4\widehat{\sigma}_N^2 \cdot \mu^2 \cdot (5\mu^2 - 2\mu\bar{S}_N + \bar{S}_N^2)}{V \cdot (\mu^4 + 8\mu^2\bar{S}_N^2 - 4\mu\bar{S}_N^3 + 3\bar{S}_N^4)}.$$

◇

3.2. Zentraler Grenzwertsatz

Um die Güte der oben konstruierten Schätzer $(\hat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ und $(\hat{\lambda}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ zu überprüfen, sind zentrale Grenzwertsätze der Form

$$\sqrt{N} \cdot (\hat{a}_N - a) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_a) \quad \text{für } N \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

sowie

$$\sqrt{N} \cdot (\hat{\lambda}_N - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_\lambda) \quad \text{für } N \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

mit geeigneten asymptotischen Varianzen v_a und v_λ hilfreich, aus denen sich beispielsweise Konfidenzintervalle für die Parameter herleiten lassen. Um die gewünschten Grenzwertsätze zu beweisen, bedarf es noch einiger Vorbereitungen.

Der Fokus richtet sich hierzu zunächst auf die Konstruktion eines gemeinsamen zentralen Grenzwertsatzes für die Schätzfolgen $(\bar{S}_N)_{N \in \mathbb{N}}$, $(\widehat{\sigma}_N^2)_{N \in \mathbb{N}}$ sowie $(\widehat{\gamma}_N(h))_{N \in \mathbb{N}}$ nach dem Vorbild des Artikels „A central limit theorem for the sample autocorrelations of a Lévy driven continuous time moving average process“ von *Cohen* und *Lindner* (2013) für einen zweiseitigen, Lévy-getriebenen Moving-Average Prozess „ X “ (in diesem Abschnitt nicht mit dem „Sinus-Ornstein-Uhlenbeck-Prozess“ zu verwechseln, vgl. Definition 1.2.4). Ein solcher hat die Gestalt

$$X(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t-s) dL_s$$

mit einer geeigneten Kernfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einem Lévy-Prozess L . Wenngleich ein gemeinsamer Grenzwertsatz für $(\bar{X}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{\sigma}_N^2)_{N \in \mathbb{N}}$ in obigen Beispielen für die zentralen Grenzwertsätze der Bauart (3.13) oder (3.14) bereits genügen würde, wird im Hinblick auf die mögliche Verwendung von der empirischen Kovarianz $\widehat{\gamma}_N(h)$ bei einer erweiterten Momentenmethode auch dieser Schätzer berücksichtigt.

Die benötigten Voraussetzungen an die Kernfunktionen f und an den Lévy-Prozess L für den Beweis des zentralen Grenzwertsatzes werden vorab zusammengefasst. Am Ende des Kapitels gilt es schließlich die Voraussetzungen für den Spotpreis-Prozess S nachzuweisen und das gewünschte Resultat abzuleiten.

VORAUSSETZUNGEN 3.2.1. Wir betrachten den Prozess $X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) dL_s$ mit einem treibenden Lévy-Prozess L , welcher ein endliches viertes Moment $E(L_1^4) < \infty$ besitze sowie einer Kernfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche für ein zuvor gewähltes $h > 0$ und $h = 0$ die folgenden Voraussetzungen erfülle:

- (i) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^3(\mathbb{R}) \cap L^4(\mathbb{R})$,
- (ii) $\int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(u+k)| \right)^2 du < \infty$,
- (iii) $\int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(u+k))^2 \right)^2 du < \infty$,
- (iv) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)f(u+k)| du \right)^2 < \infty$,
- (v) $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f(u)f(u+k)f(u+k+h)| du \right) < \infty$.

◇

Es gilt hierbei zu bemerken, dass der zweiseitige, Lévy-getriebene Moving-Average Prozess

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) dL_s$$

im Sinne des Satzes 1.2.5 existiert, falls $E(L_1^2) < \infty$ und $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, was unter obigen Voraussetzungen gewährleistet ist (siehe etwa Beispiel 1.3.4). Bevor das Hauptresultat formuliert wird, werden einige Notationen für den treibenden Lévy-Prozess vorangestellt:

DEFINITION 3.2.2.

Für einen Lévy-Prozess L mit dem Lévy-Maß ν mit endlichem 4. Moment $E(L_1^4)$ bezeichne

$$\begin{aligned} \mu &= E(L_1), & V &:= \text{Var}(L_1), \\ \kappa_3 &:= E(L_1^3), & \eta_4 &:= \int x^4 \nu(dx). \end{aligned}$$

◇

THEOREM 3.2.3. *Es seien $X(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) dL_s$ ein zeitstetiger Moving-Average Prozess, welcher die Voraussetzungen 3.2.1 für ein zuvor gewähltes $h \in \mathbb{N}$ erfülle. Dann gilt für dieses $h \in \mathbb{N}$:*

$$\sqrt{N} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_N & - & E(X_1) \\ \widehat{\sigma}_N^2 & - & \text{Var}(X_1) \\ \widehat{\gamma}_N(h) & - & \gamma_X(h) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma_h)$$

mit der symmetrischen Kovarianzmatrix

$$\Sigma := \Sigma_h = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} & \Sigma_{23} & \Sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

wobei sich die Einträge durch

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} &= V \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(u+k) \right)^2 du, \\ \Sigma_{22} &= \eta_4 \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(u+k)^2 \right)^2 du + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\gamma_X(k))^2, \\ \Sigma_{33} &= \eta_4 \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(u+k+h)^2 \right)^2 du + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(\gamma_X(k))^2 + \gamma_X(k-h)\gamma_X(k+h)], \\ \Sigma_{12} &= \kappa_3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u+k)^2 du, \\ \Sigma_{13} &= \kappa_3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u+k)f(u+k+h) du, \\ \Sigma_{23} &= \eta_4 \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(u+k) \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(u+k+h) \right) du + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\gamma_X(k)\gamma_X(k+h)]\end{aligned}$$

ergeben.

Die Kovarianzmatrix Σ_h hängt von dem zuvor gewählten $h > 0$ ab. Dennoch verzichten im Folgenden auf die Erwähnung und schreiben lediglich Σ .

Zwei ähnliche zentrale Grenzwertsätze für einen zeitstetigen Moving-Average Prozess X findet man in *Cohen und Lindner (2013)*. Im diesem Artikel wird in Theorem 2.1 zum einen ein zentraler Grenzwertsatz für das empirische Mittel \bar{X}_N

$$\sqrt{N} \cdot (\bar{X}_N - \mathbb{E}(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v) \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

mit passender Varianz $v > 0$ hergeleitet, zum anderen liefert *Cohen und Lindner (2013, Theorem 3.5)*, dass unter obigen Voraussetzungen der zentrale Grenzwertsatz

$$\sqrt{N} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_N(0) & - & \gamma_X(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{\gamma}_N(h) & - & \gamma_X(h) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \tilde{V}_h) \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

gilt, wobei \tilde{V} eine geeignete Kovarianzmatrix beschreibt.

Ein Vergleich der beiden Aussagen mit dem vorliegenden Theorem 3.2.3 zeigt, dass neben der Schätzer $\widehat{\sigma}_N^2 = \widehat{\gamma}_N(0)$ und $\widehat{\gamma}_N(h)$ zusätzlich das empirische Mittel \bar{X}_N in den gemeinsamen Grenzwertsatz eingebunden wurde. Der Grund für die Erweiterung zeigt sich in der Gestalt der Schätzer für die Parameter a und λ in Beispiel 3.1.11. So beobachtet man, dass

diese sowohl von dem empirische Mittel \bar{S}_N als auch dem empirischen Varianzschätzer $\widehat{\sigma}_N^2$ abhängen. Im Hinblick auf die Konstruktion der Grenzwertsätze (3.13) und (3.14) ist die Herleitung eines gemeinsamen Grenzwertsatzes für \bar{S}_N und $\widehat{\sigma}_N^2$ daher erforderlich. Während ein Teil des Beweises von Theorem 3.2.3 daher unmittelbar aus *Cohen* und *Lindner* (2013, Theorem 2.1 und Theorem 3.5) abgeleitet werden kann, muss darüber hinaus gezeigt werden, dass der Grenzwertsatz trotz dieser Neuerung seine Gültigkeit erhält. Dazu wird in folgenden Beweisen Gebrauch von einigen Resultaten aus dem Buch *Time Series: Theory and Methods* und von *Brockwell* und *Davis* (1986, Kapitel 6) und *Van der Vaart* (1998) gemacht. Eine kleine Zusammenstellung der dort entnommenen Ergebnisse liefert:

LEMMA 3.2.4.

(i) Lemma von Slutsky:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X \mathbb{R} -wertige Zufallsvariablen mit

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, \quad a_n \xrightarrow{\mathcal{P}} a, \quad b_n \xrightarrow{\mathcal{P}} b \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt:

$$a_n X_n + b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} aX + b \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(ii) Cramer - Wold - Theorem:

Für die \mathbb{R}^k -wertige Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, \quad \text{genau dann wenn } v^\top X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} v^\top X \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^k.$$

(iii) Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Y_{nj})_{n,j \in \mathbb{N}}$, $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sowie Y \mathbb{R} -wertige Zufallsvariablen mit

a) $Y_{nj} \xrightarrow{\mathcal{D}} Y_j \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$

b) $Y_j \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \quad \text{für } j \rightarrow \infty$ und

c) $\lim_{j \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - Y_{nj}| > \epsilon) = 0$ für alle $\epsilon > 0$.

Dann gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(iv) Zentraler Grenzwertsatz für stationäre, m -abhängige Folgen:

Für $m \in \mathbb{N}$ heißt die Folge stationärer Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ m -abhängig, falls $(X_j)_{j \leq t}$ und $(X_j)_{j \geq t+m+1}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ unabhängig sind.

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine stationäre, m -abhängige Folge von Zufallsvariablen mit

$E(X_1) = 0, E(X_1^2) < \infty$ und Autokovarianzfunktion γ .

Dann gilt für den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$:

$$\sqrt{N} \cdot \bar{X}_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_m), \text{ wobei } v_m = \gamma(0) + 2 \sum_{j=1}^m \gamma(j) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{Var}(\bar{X}_N).$$

BEWEIS. Brockwell und Davis (1986, Proposition 6.3.1, Proposition 6.3.3, Proposition 6.3.9 und Theorem 6.4.2) und Van der Vaart (1998, Lemma 2.8). \square

Der Blick richtet sich nun auf die Bestimmungen der im Vergleich zum Resultat von Cohen und Lindner (2013) mit dem hier vorliegenden Theorem 3.2.3 „neuen“ asymptotischen Kovarianzen V_{12} und V_{13} , die in der aktuellen Literatur noch nicht untersucht wurden. Während die grundsätzliche Vorgehensweise jener im Beweis von Proposition 3.1 in Cohen und Lindner (2013) ähnelt, werden in dem angesprochenen Artikel einige Ergebnisse aus Brockwell und Davis (1986) verwendet, welche für die hier zu untersuchende $\text{Cov}(\bar{X}_N, \gamma_N^*(h))$ noch nicht vorliegen und daher zunächst hergeleitet werden.

LEMMA 3.2.5. Es sei ein X ein zeitstetiger Moving-Average Prozess mit einem zentrierten, treibenden Lévy-Prozess L , welcher die Voraussetzungen 3.2.1 für ein $h \in \mathbb{N}_0$ erfülle. Ferner sei für das gewählte $h \in \mathbb{N}_0$

$$\bar{X}_N := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t \quad \text{das empirische Mittel sowie} \quad \gamma_N^*(h) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t X_{t+h}$$

die sogenannte modifizierte, empirische Kovarianz.

Dann gilt unter Verwendung von Definition 3.2.2 für das gewählte $h \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{Cov}(\bar{X}_N, \gamma_N^*(h)) = \kappa_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x+k) f(x+k+h) dx < \infty.$$

BEWEIS. Der Beweis wird in drei Schritte unterteilt. Im ersten Schritt des Beweises beginnen wir zunächst mit der Bestimmung der noch unbekanntenen $\text{Cov}(\bar{X}_N, \gamma_N^*(h))$ für einen zeitdiskreten Moving-Average Prozess, der sich für eine spezielle Wahl der Funktion f ergibt. Anschließend wird das Resultat für einen Prozess X verallgemeinert, um letztlich im dritten Beweisschritt das Grenzwertverhalten abzuleiten.

1. Schritt: Für $n \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathbb{N}$ sei

$$-T := t_0 < t_1 < \dots < t_n := T$$

eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[-T, T]$. Ferner gelte für $i = 1, \dots, n$

$$|t_i - t_{i-1}| = \Delta \quad \text{für ein } \Delta > 0, \text{ welches } \Delta^{-1} \in \mathbb{N} \text{ erfülle.}$$

Zu der konstruierten Zerlegung betrachten wir die Treppenfunktion $f = f_{T,\Delta}(s)$ von der Form

$$f_{T,\Delta}(s) = \sum_{i=1}^n \psi_{t_i} \cdot \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i[}(s) \quad (3.16)$$

mit den Koeffizienten $\psi_{t_i} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$. Zu der Treppenfunktion $f_{T,\Delta}(s)$ definiert man den Prozess

$$X_t^{(T,\Delta)} := \int_{-\infty}^{\infty} f_{T,\Delta}(t-s) dL_s.$$

Dieser besitzt für ein $t \in \mathbb{Z}$ damit die Gestalt

$$\begin{aligned} X_t^{(T,\Delta)} &= \sum_{i=1}^n \psi_{t_i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{]t-t_i, t-t_{i-1}]}(s) dL_s \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_{t_i} (L_{t-t_{i-1}} - L_{t-t_i}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$= \sum_{i=1}^n \psi_{t_i} (L_{t-t_i+\Delta} - L_{t-t_i}) = \sum_{i=1}^n \psi_{t_i} Z_{t-t_i}^{\Delta} \quad (3.18)$$

wobei

$$Z_t^{\Delta} := L_{t+\Delta} - L_t$$

einen Δ -Zuwachs des Lévy-Prozesses bezeichne. Die Identität (3.17) zeigt sich etwa durch Integralkonstruktion 1.2.3 und mit Hilfe von (1.10). Betrachtet man die Folge $(Z_t^{\Delta})_{t \in I}$ mit $I = \{k \cdot \Delta \mid k \in \mathbb{Z}\}$, so ist diese per Definition zentriert, unabhängig und identisch verteilt. Mit Hilfe der Darstellung (3.18) erkennt man, dass sich der Prozess $(X_t^{(T,\Delta)})_{t \in \mathbb{Z}}$ der Klasse der zeitdiskreten Moving-Average Prozessen zuordnen lässt (vgl. Brockwell und Davis, 1986). Zudem folgt aus den oben genannten Eigenschaften der Folge $(Z_t)_{t \in I}$, dass für beliebige $t, s, u \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}(Z_t^{\Delta} Z_s^{\Delta} Z_u^{\Delta}) = \begin{cases} \kappa_3 \Delta, & \text{falls } t = s = u, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.19)$$

gilt, was sich etwa in Lemma 1.2.10 zeigt. Hieraus schließt man für $t, s \in \mathbb{Z}$ und das gewählte $h \in \mathbb{N}_0$, dass sich der Erwartungswert als

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(X_t^{(T,\Delta)} X_s^{(T,\Delta)} X_{s+h}^{(T,\Delta)} \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \psi_{t_i} \psi_{t_j} \psi_{t_l} \mathbb{E} \left(Z_{t-t_i}^\Delta Z_{s-t_j}^\Delta Z_{s+h-t_l}^\Delta \right) \\ &= \kappa_3 \Delta \sum_{l=1}^n \psi_{t_i} \psi_{t_i+s-t} \psi_{t_i+s-t+h} \\ &= \kappa_3 \Delta \sum_{l=1}^n \psi_{t_i} \psi_{t_i+k} \psi_{t_i+k+h} \end{aligned}$$

ergibt. Die Gültigkeit obiger Identitäten erkennt man schließlich nach der Substitution $k := s - t$ und (3.19) sowie der Überlegung

$$t - t_i = s - t_j \Leftrightarrow t_j = t_i + k.$$

Zudem erfordert dies zusätzlich die Definition der Koeffizienten $\psi_i = 0$ für alle $i \notin \{t_1, \dots, t_n\}$. Andererseits beobachten wir für die Funktion $f = f_{T,\Delta}$, dass für $k \in \mathbb{Z}$ und $h \in \mathbb{N}_0$ das Integral die Darstellung

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f_{T,\Delta}(x) f_{T,\Delta}(x+k) f_{T,\Delta}(x+k+h) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \psi_{t_i} \psi_{t_j} \psi_{t_l} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i[} \cdot \mathbb{1}_{[t_{j-1}-k, t_j-k[} \cdot \mathbb{1}_{[t_{l-1}-k-h, t_l-k-h[}(x) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \psi_{t_i} \psi_{t_i+k} \psi_{t_i+k+h} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i[}(x) dx \\ &= \Delta \sum_{i=1}^n \psi_{t_i} \psi_{t_i+k} \psi_{t_i+k+h} \end{aligned}$$

besitzt, wobei $\psi_i = 0$ ist, falls $i \notin \{t_1, \dots, t_n\}$. Um die Identität (*) einzusehen, stellen wir fest, dass sich etwa $t_j - k$ als

$$t_j - k = t_0 + j\Delta - k = t_i + (j-i)\Delta - k$$

darstellen lässt. Unter Berücksichtigung einer analogen Darstellungsweise für t_l und dem Voraussetzungen $\Delta^{-1} \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ sowie $h \in \mathbb{N}_0$, erkennt man mit Hilfe einer Koeffizientenverschiebung die Gültigkeit von (*). Zusammen erhalten wir durch die obigen Argumente

$$\mathbb{E} \left(X_t^{(T,\Delta)} X_s^{(T,\Delta)} X_{s+h}^{(T,\Delta)} \right) = \kappa_3 \int_{-\infty}^{\infty} f_{T,\Delta}(x) f_{T,\Delta}(x+k) f_{T,\Delta}(x+k+h) dx < \infty$$

mit $k := s - t$. Unser Interesse richtet sich nun auf die gesuchte Kovarianz. Diese ergibt sich für das empirische Mittel \bar{X}_N und die modifizierte, empirische Kovarianz $\gamma_N^*(h)$ des Prozesses $X^{(T,\Delta)}$ unter Verwendung vorheriger Ergebnisse schließlich durch

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\bar{X}_N, \gamma_N^*(h)) &= \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N \mathbb{E} \left(X_t^{(T,\Delta)} X_s^{(T,\Delta)} X_{s+h}^{(T,\Delta)} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=-N+1}^{N-1} (N - |k|) \cdot a_{k,h} \end{aligned} \quad (3.20)$$

mit

$$a_{k,h} = \kappa_3 \int_{-\infty}^{\infty} f_{T,\Delta}(x) f_{T,\Delta}(x+k) f_{T,\Delta}(x+k+h) dx.$$

2. Schritt: Es sei nun f eine Kernfunktion wie in Voraussetzung 3.2.1 und der X der zugehörige Prozess. Da Treppenfunktionen dicht in $L^p(\mathbb{R})$ für $p > 1$ liegen (vgl. *Bogachev, 2006*, Lemma 4.2.1) und wir eine Funktion $f \in L^3(\mathbb{R})$ betrachten, gibt es zu dieser eine Treppenfunktion $f_{T,\Delta}$ der Gestalt (3.16), sodass eine Folge $(T_m, \Delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ existiert mit

$$(f_{T_m, \Delta_m})_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{L^3} f \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Daraus ergibt sich für die Treppenfunktionen

$$f_m(u) := f_{T_m, \Delta_m}(u), \quad g_m(u) := f_{T_m, \Delta_m}(u+k), \quad h_m(u) := f_{T_m, \Delta_m}(u+k+h),$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ und $h \in \mathbb{N}_0$, dass

$$(f_m \cdot g_m \cdot h_m)_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{L^1} f \cdot g \cdot h \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

gilt mit

$$g(u) := f(u+k) \quad \text{und} \quad h(u) := f(u+k+h).$$

Dies zeigt sich etwa mit Hilfe der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung (vgl. *Elstrodt, 1996*, Kapitel IV, 1.10) aus der sich

$$\begin{aligned} &\|f_m g_m h_m - f g h\|_{L^1} \\ &= \|(f_m - f) g_m h_m - f(g - g_m) h + f g_m (h_m - h)\|_{L^1} \\ &\leq \|f_m - f\|_{L^3} \|g_m\|_{L^3} \|h\|_{L^3} + \|f\|_{L^3} \|g - g_m\|_{L^3} \|h\|_{L^3} + \|f\|_{L^3} \|g_m\|_{L^3} \|h - h_m\|_{L^3} \end{aligned} \quad (3.22)$$

folgern lässt. Andererseits ergibt sich das vierte Moment des Prozesses X nach (1.20) für einen zeitstetigen, Lévy-getriebenen Moving-Average Prozess X mit $E(L_1) = 0$ durch

$$E(X_t^4) = \eta_4 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^4 dx + (E(X_t^2))^2.$$

Daher gibt es eine positive Konstante c mit

$$\|X\|_{L^4(P)} \leq c \cdot \|f\|_{L^4(\mathbb{R})}, \quad (3.23)$$

wobei P das zugrunde gelegte Wahrscheinlichkeitsmaß P bezeichnet. Da wir eine Funktion $f \in L^4(\mathbb{R})$ betrachten, existiert wiederum eine Folge von Treppenfunktionen $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \in L^4(\mathbb{R})$, sodass

$$(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{L^4} f \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit der Abschätzung (3.23) kommt man zu dem Schluss, dass die Folge $(X_t^{(T_m, \Delta_m)})_{m \in \mathbb{N}}$ auch in $L^4(P)$ und damit auch in $L^3(P)$ gegen X_t konvergiert. Wiederholt man obige Argumentation (3.22), erhält man insgesamt

$$\left\| X_t^{(T_m, \Delta_m)} X_s^{(T_m, \Delta_m)} X_{s+h}^{(T_m, \Delta_m)} - X_t X_s X_{s+h} \right\|_{L^1(P)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Damit gilt auch für den einen zeitstetigen Moving-Average Prozess X mit einer Kernfunktion f , welche Voraussetzung 3.2.1 erfüllt, dass sich die gesuchte Kovarianz durch die Formel

$$\text{Cov}(\bar{X}_N, \gamma_N^*(h)) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \cdot a_{k,h}$$

mit

$$a_{k,h} = \kappa_3 \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u+k) f(u+k+h) du$$

bestimmen lässt.

3. Schritt: Abschließend blicken wir auf das gesuchte Langzeitverhalten des Terms $N \cdot \text{Cov}(\bar{X}_N, \gamma_N^*(h))$. Hierzu stellt man zunächst fest, dass wegen der getroffenen Voraussetzung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x) f(x+k) f(x+k+h)| \in L^1(\mathbb{R})$$

die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{k,h}|$ endlich ist. Ferner beobachtet man für eine absolut summierbare Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,h}$ die Konvergenz

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \cdot a_{k,h} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,h},$$

was sich etwa in *Brockwell* und *Davis* (1986, Kapitel 6) zeigt. In dem hier untersuchten Szenario erhält man somit

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{Cov}(\bar{X}_N, \gamma_N^*(h)) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,h} \\ &= \kappa_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x+k) f(x+k+h) dx. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x) f(x+k) f(x+k+h)| \in L^1(\mathbb{R})$$

gewährleistet, dass der Grenzwert endlich ist. \square

Die gewonnenen Ergebnisse können nun zum Beweis des zentralen Grenzwertsatzes genutzt werden:

BEWEIS (THEOREM 3.2.3). Es sei X ein zeitstetiger Moving-Average Prozess mit Autokovarianzfunktion γ_X , welcher die Voraussetzungen 3.2.1 erfülle. Zudem seien $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ Beobachtungen des Prozesses X .

Der Beweis wird abermals in mehrere Schritte unterteilt. Im ersten Schritt wird dabei ein zentraler Grenzwertsatz für eine spezielle Kernfunktion gezeigt, dessen Beobachtungen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine stationäre, $2m$ -abhängige Folge bilden. Dieser kann wegen der Erweiterung des Grenzwertsatzes nicht aus der Literatur übernommen werden. Anschließend wird der zentrale Grenzwertsatz in zwei Schritten verallgemeinert, in denen insbesondere die Untersuchung der neuen Komponenten Σ_{12} und Σ_{13} im Fokus stehen.

1. Schritt: Zunächst sei der treibende Lévy-Prozess zentriert, das heißt $\mu = 0$. Zu der „abgeschnittenen Version“ der Kernfunktion

$$f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_m(s) := f \cdot \mathbb{1}_{[-m,m]}(s) \tag{3.24}$$

für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir den Prozess

$$X^{(m)}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t-s) dL_s = \int_{t-m}^{t+m} f(t-s) dL_s.$$

Basierend auf den Beobachtungen $(X_t^{(m)})_{t \in \mathbb{Z}}$ und für

$$\bar{X}_{N,(m)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^{(m)}, \quad \gamma_{N,(m)}^*(h) := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^{(m)} X_{t+h}^{(m)}, \quad \widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}} := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(X_t^{(m)} \right)^2,$$

wird in diesem Schritt die Verteilungskonvergenz

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \bar{X}_{N,(m)} & - & \mathbb{E} \left(X_1^{(m)} \right) \\ \widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}} & - & \text{Var} \left(X_1^{(m)} \right) \\ \gamma_{N,(m)}^*(h) & - & \gamma_{X^{(m)}}(h) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma^{(m)}) \quad \text{für } N \rightarrow \infty \quad (3.25)$$

nachgewiesen. Hierbei beschreibt $\Sigma^{(m)}$ die 3×3 -Matrix, welche aus der Kovarianzmatrix Σ aus Theorem 3.2.3 unter Verwendung der Funktion $f = f_m$ und der abgeschnitten Kernfunktion f_m wie in (3.24) hervorgeht. Offenbar ist $(X_t^{(m)})_{t \in \mathbb{Z}}$ per Definition $2m$ -abhängig im Sinne von Lemma 3.2.4 (iv). Konstruiert man das Tupel

$$Y_t := \begin{pmatrix} X_t^{(m)} \\ (X_t^{(m)})^2 \\ X_t^{(m)} X_{t+h}^{(m)} \end{pmatrix}$$

so lässt sich beobachten, dass

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t = \begin{pmatrix} \bar{X}_{N,(m)} \\ \widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}} \\ \gamma_{N,(m)}^*(h) \end{pmatrix}$$

gilt. Ferner ist für alle $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ und $h \in \mathbb{N}$ der Prozess

$$(Z_{t,x} := x^\top \cdot Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$$

eine $(2m + h)$ -abhängige Folge von Zufallsvariablen. Nach dem zentralen Grenzwertsatz für m -abhängige Folgen (vgl. Lemma 3.2.4, (iii)) gilt somit für $N \rightarrow \infty$

$$\sqrt{N} \cdot \bar{Z}_{N,x} := \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x^\top Y_t \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_x), \quad \text{wobei } v_x = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{Var}(\bar{Z}_{N,x}).$$

Weitere Umformungen liefern, dass

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{Var}(\overline{Z}_{N,x}) & (3.26) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \text{Var} \left(x_1 \overline{X}_{N,(m)} + x_2 \widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}} + x_3 \gamma_{N,(m)}^*(h) \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \left(x_1^2 \text{Var}(\overline{X}_{N,(m)}) + x_2^2 \text{Var}(\widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}}) + x_3^2 \text{Var}(\gamma_{N,(m)}^*(h)) \right. \\
&\quad + 2x_1 x_2 \text{Cov}(\overline{X}_{N,(m)}, \widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}}) + 2x_1 x_3 \text{Cov}(\overline{X}_{N,(m)}, \gamma_{N,(m)}^*(h)) \\
&\quad \left. + 2x_2 x_3 \text{Cov}(\widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}}, \gamma_{N,(m)}^*(h)) \right) \\
&= \text{Var} \left(x^\top \cdot \Sigma^{(m)} \cdot x \right).
\end{aligned}$$

Hierbei beschreibt $\Sigma^{(m)}$ die gewünschte 3×3 -Matrix wie oben beschrieben, welche sich zum einen mit Hilfe von Lemma 3.2.5 als auch *Cohen* und *Lindner* (2013, Proposition 3.1) ergibt. Die Resultate dürfen angewendet werden, da alle getroffenen Voraussetzungen auch für alle Funktionen f_m mit $m \in \mathbb{N}$ erfüllt sind. Dies sieht man ein, da sich die Funktionen $f_m(x)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch die Funktion $f(x)$ in der Form

$$|f_m(x)| \leq |f(x)| \quad (3.27)$$

abschätzen lassen.

Da der Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung (3.25) mit Hilfe des Cramer-Wold-Theorems (vgl. Lemma 3.2.4 (ii)) für den „abgeschnittenen Prozess“ $X_t^{(m)}$.

2. Schritt: Der treibende Lévy-Prozess sei weiterhin zentriert. Wir verzichten jedoch in diesem Teil auf die Restriktion einer abgeschnittenen Funktion f_m und betrachten stattdessen den Prozess X mit Kernfunktion f , welche die geforderten Voraussetzungen erfüllt und zeigen

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \overline{X}_N & - & \text{E}(X_1) \\ \widehat{\sigma_N^{2,*}} & - & \text{Var}(X_1) \\ \gamma_N^*(h) & - & \gamma_X(h) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{für } N \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Die Strategie ist es dabei, Lemma 3.2.4 (iii) zu verwenden. Wir beweisen daher zunächst, dass die in *Cohen* und *Lindner* (2013, Theorem 3.5) nicht nachgewiesenen Konvergenzen

$$\begin{aligned}
\Sigma_{12}^{(m)} &\longrightarrow \Sigma_{12} \quad \text{für } m \rightarrow \infty \\
\Sigma_{13}^{(m)} &\longrightarrow \Sigma_{13} \quad \text{für } m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

vorliegen. Hierzu stellt man zunächst fest, dass wegen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x)f(x+k)f(x+k+h)| \in L^1(\mathbb{R})$$

für das gewählte $h \in \mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x)f(x+k)f(x+k+h)|$ fast überall endlich bezüglich des Lebesgue-Maßes ist (vgl. *Bauer*, 1992, Satz 13.6). Dies erlaubt es, mittels (3.27) und des Satzes der majorisierten Konvergenz

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_m(x)f_m(x+k)f_m(x+k+h) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x)f(x+k)f(x+k+h) \quad \text{fast überall}$$

bezüglich des Lebesgue-Maßes zu folgern. Es verbleibt der Nachweis der benötigten L^1 -Konvergenz. Hierzu beobachten wir

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_m(x)f_m(x+k)f_m(x+k+h) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x)f(x+k)f(x+k+h)| \in L^1(\mathbb{R})$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle zu $m \in \mathbb{N}$ gehörenden Kernfunktionen f_m der Form (3.24), sodass die erneute Anwendung der Satzes der majorisierten Konvergenz

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_m(x)f_m(x+k)f_m(x+k+h) \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x)f(x+k)f(x+k+h) \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

liefert. Da obige Argumentation analog für $h = 0$ wie das gewählte $h \in \mathbb{N}$ funktioniert, zeigt sich

$$\Sigma_{12}^{(m)} \longrightarrow \Sigma_{12} \quad \text{und} \quad \Sigma_{13}^{(m)} \longrightarrow \Sigma_{13} \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Die restlichen Konvergenzen folgen unmittelbar aus *Cohen* und *Lindner* (2013, Theorem 2.1 und Theorem 3.5). Ebenso wird dort bereits

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_{N,(m)} - \bar{X}_N| > \epsilon) = 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0$$

und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\left(\widehat{\sigma_{N,(m)}^{2,*}} - \text{Var}(X_1^{(m)})\right) - \left(\widehat{\sigma_N^{2,*}} - \text{Var}(X_1)\right)\right| > \epsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0$$

sowie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\left(\gamma_{N,(m)}^*(h) - \gamma_{X^{(m)}}(h)\right) - \left(\gamma_N^*(h) - \gamma_X(h)\right)\right| > \epsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0$$

gezeigt, woraus sich die Behauptung (3.28) mittels Lemma 3.2.4 (iii) ableiten lässt.

3. Schritt: Um abschließend den zentralen Grenzwertsatz in der Form von Theorem 3.2.3 zu beweisen, verwendet man zuerst *Brockwell* und *Davis* (1986, Proposition 7.3.4). Hier

zeigt sich mit Hilfe des Lemmas von Slutsky (vgl. Lemma 3.2.4), dass sich an der Grenzverteilung im 2. Schritt nichts ändert, wenn die Schätzer

$$\widehat{\sigma}_N^2 \text{ statt } \widehat{\sigma}_N^{2,*} \quad \text{und} \quad \widehat{\gamma}_N(h) \text{ statt } \gamma_N^*(h)$$

benutzt werden.

Verzichtet man nun noch auf die Annahme eines zentrierten, treibenden Lévy-Prozesses L , das heißt $\mu = \mathbb{E}(L_1) \neq 0$, so erhält der hergeleitete Grenzwertsatz ebenso seine Gültigkeit. Um dies einzusehen konstruiert man einen neuen Lévy-Prozess durch

$$\widetilde{L}(t) := L(t) - t \cdot \mathbb{E}(L_1),$$

welcher Erwartungswert 0 und die gleiche Varianz wie L besitzt. Da $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kann nun X in der Form

$$X_t := \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) d\widetilde{L}(s)$$

geschrieben werden (vgl. *Cohen und Lindner, 2013*, Remark 2.2). Obere Lemmata und Beweisschritte können daraufhin für den Prozess

$$\left(\widetilde{X}_t := X_t - \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds \right)_{t \geq 0}$$

mit $\mathbb{E}(\widetilde{X}_t) = 0$ und $\text{Var}(\widetilde{X}_t) = \text{Var}(X_t)$ angewendet, durchgeführt und schließlich auch für X_t gefolgert werden (siehe dazu auch *Brockwell und Davis, 1986*, 7.3 Remark 1). \square

Wir zeigen nun, dass die Kernfunktion ϕ des Spotpreisprozesses S die Voraussetzungen 3.2.1 erfüllt und damit Theorem 3.2.3 für diesen anwendbar ist, sofern der genutzte treibende Lévy-Prozess ein endliches viertes Moment besitzt.

BEISPIEL 3.2.6. Es sei $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$\phi(x) := e^{-\lambda x} (\omega_x \sin(ax) + \omega_y \cos(ax) + \omega_z) \mathbb{1}_{x \geq 0}(x)$$

mit $a, \lambda > 0$ und $\omega_x, \omega_y, \omega_z \geq 0$ mit $\omega_x + \omega_y + \omega_z > 0$. Es ist hilfreich vorab festzustellen, dass sich durch $c = \omega_x + \omega_y + \omega_z$ die Kernfunktion ϕ in der Form

$$|\phi(x)| \leq c \cdot \exp(-\lambda x) \tag{3.29}$$

abschätzen lässt. Die Funktion ϕ erfüllt die Voraussetzungen 3.2.1, denn:

Zu (i): Es ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^n dx \leq \int_0^{\infty} c^n e^{-\lambda n x} dx = \frac{c^n}{\lambda n} < \infty$$

und damit insbesondere

$$\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^3(\mathbb{R}) \cap L^4(\mathbb{R}).$$

Zu (ii) Nach (3.29) gilt

$$|\phi(x+k)| \leq ce^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda k} \cdot \mathbb{1}_{[-x, \infty[}(k)$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(x+k)| &\leq ce^{-\lambda x} \cdot \left(\sum_{k=-\lceil x \rceil}^{-1} (e^{-\lambda})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda})^k \right) \\ &\leq ce^{-\lambda x} \cdot \left(\lceil x \rceil + \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Hierbei wurden in beiden Summanden $e^{-\lambda} < 1$ ausgenutzt. Wegen $\lceil x \rceil = 1$ für $x \in (0, 1)$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(x+k)| \right)^2 dx &\leq c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \right)^2 \int_0^1 e^{-2\lambda x} dx \\ &\leq c^2 \cdot \left(\frac{(e^{-\lambda} - 2)^2 \cdot (1 - e^{-2\lambda})}{2\lambda(1 - e^{-\lambda})} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Zu (iii): Wie in (ii) ergibt sich mit (3.29)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(x+k)|^2 \leq c^2 e^{-2\lambda x} \cdot \left(\lceil x \rceil + \frac{1}{1-e^{-2\lambda}} \right)$$

und analog

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(x+k)|^2 \right) dx \leq c^4 \cdot \left(\frac{(e^{-2\lambda} - 2)^2 \cdot (1 - e^{-4\lambda})}{4\lambda(1 - e^{-2\lambda})^2} \right) < \infty.$$

Zu (iv): Es gilt abermals wegen (3.29):

$$|\phi(x)\phi(x+k)| \leq \begin{cases} c^2 e^{-\lambda(2x+k)} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x), & \text{falls } k \geq 0, \\ c^2 e^{-\lambda(2x+k)} \cdot \mathbb{1}_{[-k, \infty[}(x), & \text{falls } k < 0. \end{cases}$$

Daraus erhält man

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)\phi(x+k)| dx \right)^2 \leq \frac{c^4}{4\lambda^2} (e^{-2\lambda})^k \cdot \mathbb{1}_{k \geq 0}(k) + \frac{c^4}{4\lambda^2} (e^{2\lambda})^k \cdot \mathbb{1}_{k < 0}(k).$$

und schließlich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)\phi(x+k)| dx \right)^2 \leq \frac{c^4}{2\lambda^2 \cdot (1 - e^{-2\lambda})} < \infty.$$

Zu (v): Wie oben gilt für $h = 0$ und analog $h > 0$ die Abschätzung

$$|\phi(x)\phi(x+k)\phi(x+k+h)| \leq c^3 e^{-\lambda(3x+h)} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \cdot ((e^{-2\lambda})^k \cdot \mathbb{1}_{[-x,\infty)}(k))$$

und nutzen diese aus:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(x)\phi(x+k)\phi(x+k+h)| \leq c^3 e^{-\lambda(3x+h)} \cdot \left(\lceil x \rceil + \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}} \right) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Unter Verwendung der Ungleichung $\lceil x \rceil \leq x + 1$ für $x \in \mathbb{R}$ erhält man insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\phi(x)\phi(x+k)\phi(x+k+h)| dx \leq c^3 e^{-\lambda h} \cdot \left(\frac{6\lambda e^{2\lambda} + e^{2\lambda} - 3\lambda - 1}{9\lambda^2 \cdot (e^{2\lambda} - 1)} \right) < \infty.$$

◇

BEMERKUNG 3.2.7. Das obige Beispiel zeigt, dass der zentrale Grenzwertsatz für den Spotpreisprozess angewendet werden darf, falls der treibende Lévy-Prozess ein viertes Moment $E(L_1^4) < \infty$ besitzt. Hieraus lässt sich darüber hinaus eine schwache Konsistenz des Mittelwertschätzers \bar{X}_N , der empirischen Varianz $\widehat{\sigma}_N^2$ sowie der empirischen Kovarianz $\widehat{\gamma}_N(h)$ für die zugehörigen Kennwerte ableiten. Unter den alternativen Voraussetzungen von Theorem 3.1.9 zeigt sich im Vergleich zur schwachen Konsistenz der Schätzer jedoch durch Satz 3.1.10 darüber hinaus eine starke Konsistenz (und eine L^1 -Konsistenz) für obige Schätzer. Zusätzlich liefert Satz 3.1.10 die starke Konsistenz für alle empirischen Momente, sodass der Nachweis der Mischungseigenschaft des Prozesses S in 3.1.9 sowohl umfangreiche als auch „stärkere“ Ergebnisse als der zentrale Grenzwertsatz 3.2.3 im Hinblick auf die Konsistenz der kanonischen Schätzer liefert.

Verwendet man nun Theorem 3.2.3 für das empirische Mittel, die empirische Varianz sowie die empirische Kovarianz des Spotpreisprozess S mit der Kernfunktion ϕ , so können die gewonnenen Schranken aus obigem Beispiel 3.2.6 auch zur Abschätzung der auftretenden asymptotischen Varianzen und Kovarianzen in der Matrix Σ genutzt werden.

Ein wichtiges Instrument zur abschließenden Konstruktion der gewünschten Grenzwertsätze der Form (3.13) und (3.14) für die Folgen der Schätzer $(\widehat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{\lambda}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ dient die „Delta-Methode“:

LEMMA 3.2.8 (Delta-Methode). *Es seien $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Folge \mathbb{R}^k -wertiger Zufallsvariablen sowie $\mu \in \mathbb{R}^k$, sodass*

$$\sqrt{N} \cdot (X_N - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

wobei Σ eine symmetrische, positiv-semidefinite Kovarianzmatrix beschreibe. Ferner sei $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit existierender, stetiger partieller Ableitung in $U \subset \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\sqrt{N} \cdot (g(X_N) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \nabla g(\mu)^\top \cdot \Sigma \cdot \nabla g(\mu)\right) \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

wobei $\nabla g(\mu)$ den Gradienten von g im Punkt μ bezeichnet.

BEWEIS. Siehe etwa *Bickel und Doksum (2001, Lemma 5.3.3)*. □

Liegen uns Schätzer für die Parameter des Spotpreisprozesses S in Abhängigkeit von \bar{X}_N , $\widehat{\sigma}_N^2$ oder $\gamma_N^*(h)$ vor, so wie etwa in Beispiel 3.1.11, können nun mit Hilfe von Theorem 3.2.3 und der Delta-Methode die gewünschten Grenzwertsätze hergeleitet werden. Dies soll anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht werden:

BEISPIEL 3.2.9. Es seien $\mu := E(L_1) \neq 0$ und $V := \text{Var}(L_1) < \infty$ bekannt, $\omega_x = 1, \omega_y = 0, \omega_z = 0$, und somit $S(t) = X(t)$. Ferner seien

$$\widehat{a}_N = \frac{16\mu^3(\widehat{\sigma}_N^2)^2}{\bar{X}_N(V^2\bar{X}_N^2 + 16\mu^2(\widehat{\sigma}_N^2)^2)}, \quad \widehat{\lambda}_N = \frac{4V\mu^2(\widehat{\sigma}_N^2)^2}{V^2\bar{X}_N^2 + 16\mu^2(\widehat{\sigma}_N^2)^2}$$

die stark konsistenten Schätzer für die Parameter a und λ wie in Beispiel 3.1.11. Für $i = 1, 2$ bezeichne nun $g_i: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ die stetig differenzierbaren Abbildungen

$$g_1(x, y, z) := \frac{c_1 \cdot y^2}{x(dx^2 + ey^2)}, \quad g_2(x, y, z) := \frac{c_2 \cdot y^2}{dx^2 + ey^2},$$

wobei

$$c_1 := 16\mu^3, \quad c_2 := 4V\mu^2, \quad d := V^2 \quad \text{und} \quad e := 16\mu^2.$$

Offenbar sind die Abbildungen g_i so gewählt, dass

$$\begin{aligned} g_1\left(\bar{X}_N, \widehat{\sigma}_N^2, 0\right) &= \widehat{a}_N, & g_1\left(E(X_1), \text{Var}(X_1), 0\right) &= a, \\ g_2\left(\bar{X}_N, \widehat{\sigma}_N^2, 0\right) &= \widehat{\lambda}_N, & g_2\left(E(X_1), \text{Var}(X_1), 0\right) &= \lambda. \end{aligned}$$

Aus der Definition ergeben sich die Gradienten der Funktionen g_i durch

$$\nabla g_1(x, y, z)^\top = \left(-\frac{c_1 y^2 (3dx^2 + ey^2)}{x^2 (dx^2 + ey^2)^2}, -\frac{2dc_1 xy}{(dx^2 + ey^2)^2}, 0 \right)$$

sowie

$$\nabla g_2(x, y, z)^\top = \left(-\frac{2dc_2xy^2}{(dx^2 + ey^2)^2}, \frac{2dc_2x^2y}{(dx^2 + ey^2)^2}, 0 \right).$$

Wählt man $x := E(X_1)$ und $y := \text{Var}(S_1)$ so lassen sich aus Theorem 3.2.3 zusammen mit Beispiel 3.2.6 sowie der Delta-Methode 3.2.8 die zentralen Grenzwertsätze

$$\sqrt{N} \cdot (\widehat{a}_N - a) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_1)$$

und

$$\sqrt{N} \cdot (\widehat{\lambda}_N - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_2)$$

für $N \rightarrow \infty$ ableiten. Die asymptotischen Varianzen ergeben sich nach obigen Resultaten durch:

$$v_1 := \nabla g_1(x, y, z)^\top \cdot \Sigma \cdot \nabla g_1(x, y, z) \quad \text{und} \quad v_2 := \nabla g_2(x, y, z)^\top \cdot \Sigma \cdot \nabla g_2(x, y, z),$$

wobei Σ die Kovarianzmatrix in (3.15) beschreibt mit den Einträgen $(\Sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$, welche sich durch die spezielle Kernfunktion

$$f(u) := \sin(au) \cdot e^{-\lambda u} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(u)$$

bestimmen lässt. Man erhält schließlich

$$v_1 = \frac{c_1^2 y^2}{x^4 (dx^2 + ey^2)^4} \cdot \left((9d^2 x^4 y^2 + 6dex^2 y^4 + e^2 y^6) \cdot \Sigma_{11} + (4d^2 x^6) \cdot \Sigma_{22} \right. \\ \left. - (12d^2 x^5 y + 4dex^3 y^3) \cdot \Sigma_{12} \right)$$

und

$$v_2 = \frac{(2c_2 dxy)^2}{(dx + ey^2)^4} \cdot (y^2 \cdot \Sigma_{11} + x^2 \cdot \Sigma_{22} - 2xy \cdot \Sigma_{12}).$$

Es gilt zu beachten, dass die asymptotische Varianz geschätzt werden kann, indem die unbekannt Parameter $E(X_1)$, $\text{Var}(X_1)$, a und λ durch stark konsistente Schätzer \overline{X}_N , $\widehat{\sigma}_N^2$, \widehat{a}_N als auch $\widehat{\lambda}_N$ ersetzt werden (vgl. hierzu etwa *Van der Vaart, 1998*, Kapitel 3.1). \diamond

3.3. Statistik für den treibenden Lévy-Prozess

In diesem Kapitel gilt die Aufmerksamkeit dem treibenden Lévy-Prozess L des Spotpreisprozesses. Wie im vorherigen Abschnitt sieht man sich der folgenden Ausgangssituation gegenüber gestellt:

Es seien $a, \lambda > 0$ und L ein Lévy-Prozess mit $E(L_1^4) < \infty$. Zudem betrachten wir den

„Sinus-OOU-Prozess“ X , den „Kosinus-OOU-Prozess“ Y und den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess Z wie in Definition 1.3.1 und Bemerkung 1.3.2, welche von obigem Lévy-Prozess L angetrieben werden. Ferner sei abermals $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(x) := e^{-\lambda x} (\omega_x \sin(ax) + \omega_y \cos(ax) + \omega_z) \mathbb{1}_{x \geq 0}(x)$$

mit $\omega_x, \omega_y, \omega_z \geq 0$ und $\omega_y + \omega_z > 0$ die Kernfunktion des zugehörigen Spotpreisprozesses $S := (S(t))_{t \geq 0}$ mit

$$S(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t-u) dL_u \quad (3.30)$$

bzw.

$$S(t) = \omega_x X(t) + \omega_y Y(t) + \omega_z Z(t).$$

Darüber hinaus gehen wir davon aus, dass der treibende Lévy-Prozess einer parametrischen Klasse mit unbekanntem Parametern angehört. Wir werden im Folgenden auf Grundlage von Beobachtungen der Prozesse X , Y oder auch S den Lévy-Prozess L „näherungsweise“ zurückgewinnen und anschließend wie im vorherigen Abschnitt mit Hilfe der Momentenmethode eine Schätzung für die unbekanntem Parameter ableiten. Lemma 1.2.8 kann dazu genutzt werden, um den treibenden Lévy-Prozess des Spotpreisprozesses S zu „recovern“:

SATZ 3.3.1. (*Zurückgewinnung des treibenden Lévy-Prozesses*)

Es sei $S := (S(t))_{t \geq 0}$ der Spotpreisprozess wie in (3.30). Falls $\omega_y + \omega_z \neq 0$, lässt sich der treibende Lévy-Prozess L für alle $t > 0$ zurückgewinnen mittels:

$$L(t) = \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S(t) - S(0) + \lambda \int_0^t S(u) du + a \int_0^t (\omega_y X(u) - \omega_x Y(u)) du \right).$$

BEWEIS. Da offensichtlich alle Voraussetzungen von Lemma 1.2.8 erfüllt sind, ergibt sich

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \left(\int_{-\infty}^u \phi'(u-s) dL(s) \right) du + \phi(0)L(t),$$

wobei $\phi'(t-s)$ die assoziierte Dichte gemäß 1.2.8 bezeichnet. Definiert man die Kernfunktionen des „Sinus-OOU-Prozess“ X sowie des „Kosinus-OOU-Prozess“ Y durch

$$f(x) := \sin(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}(x), \quad g(x) := \cos(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}(x)$$

so führt schließlich die Überlegung

$$\phi'(t-s) = a \cdot (\omega_x g(t-s) - \omega_y f(t-s)) - \lambda \cdot \phi(t-s)$$

zum Ziel. □

Es ist folglich möglich mittels zeitstetiger Beobachtungen des Prozesses S zusammen mit zeitstetigen Beobachtungen der Prozesse X und Y , den treibenden Lévy-Prozess vollständig zurückzugewinnen. Verwendet man die Prozesse, etwa zur Modellierung von Spotpreisprozessen auf Elektrizitätsmärkten, liegen solche Beobachtungen zur Modellanpassung jedoch nicht vor. In diesen Fällen muss der Lévy-Prozess basierend auf einem Beobachtungsschema zuerst geschätzt werden. Damit beschäftigen sich die nächsten beiden Abschnitte der Arbeit. Vorab sind die folgenden Anmerkungen hilfreich, wenn eine speziellere Modellsituation für die Gewichte $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ gewählt wird:

BEMERKUNGEN 3.3.2. In einem Modell, in welchem man sich auf die Verwendung des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses Z bzw. den „Kosinus-OOU-Prozess“ Y beschränkt, kann mittels Satz 3.3.1 der Lévy-Prozess L_Z bzw. L_Y zurückgewonnen werden. In diesen Situationen berechnet man sofort:

$$\begin{aligned} L_Z(t) &= Z(t) - Z(0) + \lambda \int_0^t Z(u) \, du, \\ L_Y(t) &= Y(t) - Y(0) + \lambda \int_0^t Y(u) \, du + a \int_0^t X(u) \, du. \end{aligned}$$

Der Satz kann jedoch nicht angewendet werden, wenn das Modell ausschließlich aus einem „Sinus-OOU-Prozess“ X besteht. In diesem Fall gilt $\omega_y + \omega_z = 0$. \diamond

3.3.1. Schätzungen im niederfrequenten Beobachtungsschema. In diesem Teil der Arbeit wird der Fall näher beleuchtet, in dem der Prozess S bzw. die Prozesse X und Y zu den Zeitpunkten $t \in \{0, 1, \dots, N\}$ für $N \in \mathbb{N}$ beobachtet werden können. Ferner gehen wir davon aus, dass N erhöht werden kann und letztlich $N \rightarrow \infty$ konvergiert. Dabei wird stets angenommen, dass die Gewichte $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ mit $\omega_y + \omega_z \neq 0$ bekannt seien. Das Augenmerk richtet sich dabei auf die Schätzungen der Zuwächse

$$\begin{aligned} \Delta L_k &= L(k) - L(k-1) \\ &= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S(k) - S(k-1) + \lambda \int_{k-1}^k S(u) \, du + a \int_{k-1}^k (\omega_y X(u) - \omega_x Y(u)) \, du \right) \end{aligned}$$

des Lévy-Prozesses L . Der von *Brockwell, Davis und Yang (2007)* für den Fall eines Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck Prozesses vorgeschlagene Schätzer für die Zuwächse des treibenden Prozesses, wird in *Abdelrazeq, Ivanoff und Kulik (2014)* ausschließlich für den Spezialfall L_Z (siehe Bemerkung 3.3.2) untersucht. Die Ausgangssituation in dem hier vorliegenden Gleichung ΔL_k ist dahingegen deutlich umfangreicher. Neben dem Prozess S tauchen zusätzlich die Prozesse X und Y auf. Wir werden zunächst einen einfachen Schätzer $\widehat{\Delta L_{k,1}}$ nach dem Vorbild von *Brockwell, Davis und Yang (2007)* konstruieren

und untersuchen inwieweit sich die neuen, zusätzlichen Komponenten der Gleichung auf die Gütekriterien der Schätzer auswirken. Anschließend widmen wir uns einem weiteren, hier auftretenden Problem, welches in der angesprochenen Literatur nicht vorliegt: Beobachtet man ausschließlich den Prozess S , so beinhaltet die Gleichung für ΔL_k einen Prozess, den wir nicht beobachten können und zusätzlich geschätzt werden muss. Abschließend verallgemeinern wir die Schätzer abermals, indem wir davon ausgehen, dass die Parameter a und λ unbekannt sind, jedoch konsistent geschätzt werden können. Auch eine Untersuchung von Schätzern in einem solchen Szenario wurde in der aktuellen Literatur im hier vorliegenden Kontext nicht vorgenommen.

Wir konstruieren die folgenden Schätzer in den geschilderten

BEOBSACHTUNGSSITUATIONEN 3.3.3.

1. Fall: Die Parameter $a, \lambda > 0$ seien bekannt.

1.1 Fall: Es liegen die Beobachtungen S_1, \dots, S_N des Prozesses S , sowie Beobachtungen X_1, \dots, X_N des Prozesses X und Y_1, \dots, Y_N des Prozesses Y vor. In diesem Fall nutzen wir, inspiriert durch *Brockwell, Davis und Yang (2007)*, die Trapezregel zur Näherung der auftretenden Integrale. Wir schätzen damit einen Zuwachs des Lévy-Prozesses durch

$$\widehat{\Delta L_{k,1}} = \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_k - S_{k-1} + \lambda \cdot \frac{S_k + S_{k-1}}{2} + a \cdot \omega_y \cdot \frac{X_k + X_{k-1}}{2} - a \cdot \omega_x \cdot \frac{Y_k + Y_{k-1}}{2} \right). \quad (3.31)$$

1.2 Fall: Es liegen ausschließlich Beobachtungen S_1, \dots, S_N des Prozesses S vor. Vor diesem Hintergrund ist der in (3.31) eingebettete Prozess

$$U(k) := \frac{1}{2} (a \cdot \omega_y \cdot X(k) - a \cdot \omega_x \cdot Y(k)) \quad (3.32)$$

nicht beobachtbar. Zusätzlich wird die Annahme getroffen, dass die Erwartungswerte $E(U_1)$ und $E(S_1)$ der Prozesse bekannt seien. Wenngleich sich diese Prämisse in der Praxis möglicherweise als nicht realisierbar erweist, motiviert sie zu der folgenden Idee:

Im Hinblick auf die untersuchten Abhängigkeiten der Prozesse S mit X oder Y liegt ein näherungsweise linearer Zusammenhang zwischen dem Prozess S und dem versteckten Prozess U nahe. Wir schätzen den Wert des Prozesses U zum Zeitpunkt k basierend auf einer Beobachtung des Prozesses S daher durch

$$\widehat{U}_k = \beta_1 \cdot S_k + \beta_0 \quad \text{für } k = 0, \dots, N.$$

Benutzt man diese gewonnene Approximation in (3.31), so erhält man in diesem Szenario die geschätzten Lévy-Inkremente mittels:

$$\widehat{\Delta L_{k,2}} = \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_k - S_{k-1} + \left(\frac{\lambda}{2} + \beta_1 \right) \cdot (S_k + S_{k-1}) + 2 \cdot \beta_0 \right). \quad (3.33)$$

Für die beste lineare Vorhersage von U ergeben sich β_0 und β_1 im Sinne der Methode kleinster Quadrate durch

$$(\beta_0, \beta_1) = \arg \min_{\beta_0, \beta_1} \mathbb{E} \left((S_1 - (\beta_0 + \beta_1 U_1))^2 \right).$$

Man erhält schließlich

$$\beta_1 = \frac{\text{Cov}(S_1, U_1)}{\text{Var}(S_1)} \quad \text{und} \quad \beta_0 = \mathbb{E}(U_1) - \beta_1 \cdot \mathbb{E}(S_1).$$

Zur Bestimmung der gesuchten Kovarianz $\text{Cov}(S_1, U_1)$ wird die Formel (vgl. Korollar 1.2.10)

$$\text{Cov}(S_1, U_1) = \int_0^\infty \phi(x) u(x) dx$$

mit der Kernfunktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Prozesses U

$$u(x) := \frac{a}{2} \cdot (\omega_y \sin(ax) - \omega_x \cos(ax)) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}(x)$$

genutzt. Nach elementaren, jedoch sehr mühsamen Rechnungen erhält man

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_1, U_1) = & - \frac{a}{8(a^2 + \lambda^2)(a^2 + 4\lambda^2)} \cdot \left((\omega_x^2 - \omega_y(\omega_y + 4\omega_z))a^3 \right. \\ & \left. + 2\omega_x(\omega_y + 4\omega_z)a^2\lambda + 4(\omega_x^2 - \omega_y(\omega_y + \omega_z))a\lambda^2 + 8\omega_x(\omega_y + \omega_z)\lambda^3 \right), \end{aligned}$$

was zusammen mit (2.5) zu

$$\beta_1 = -\lambda \cdot a \cdot \frac{B_1}{2B_2},$$

mit

$$\begin{aligned} B_1 = & (\omega_x^2 - \omega_y^2 - 4\omega_y\omega_z)a^3 + 2\omega_x(\omega_y + 4\omega_z)a^2\lambda + 4(\omega_x^2 - \omega_y^2 - \omega_y\omega_z)a\lambda^2 \\ & + 8\omega_x(\omega_y + \omega_z)\lambda^3 a, \\ B_2 = & 8(\omega_x + \omega_z)^2\lambda^4 + 8\omega_x(\omega_y + \omega_z)a\lambda^3 + 4 \left(\omega_x^2 + \frac{3}{2}\omega_y^2 + 4\omega_y\omega_z + \frac{5}{2}\omega_z^2 \right)^2 \lambda^2 \\ & + 2\omega_x(\omega_y + 4\omega_z)a^3\lambda + (\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_z^2)a^4 \end{aligned}$$

führt. Abschließend kann β_0 gemäß $\beta_0 = E(U_1) - \beta_1 \cdot E(S_1)$ mit Hilfe von

$$E(U_1) = \mu \cdot \frac{a^2\omega_y - a\lambda\omega_x}{2(a^2 + \lambda^2)} \quad (3.34)$$

sowie (2.3) bestimmt werden.

1.3 Fall: Wie in Fall 1.2 liegen ausschließlich Beobachtungen S_1, \dots, S_N des Prozesses S vor. Jedoch wird auf die Annahme verzichtet, dass wir Kenntnisse über die Erwartungswerte $E(U_1)$ des nicht zu beobachtenden Prozesses U (3.32) und $E(S_1)$ ausnutzen können. Es gilt dabei zu beachten, dass $E(U_1)$ nicht mittels von Beobachtungen geschätzt werden kann. In diesem Fall gehen wir wegen der Probleme der Identifizierbarkeit von β_0 von einem proportionalen Zusammenhang von S und U der Form

$$\widehat{U}_k = \beta_1 \cdot S_k \quad \text{für } k = 0, \dots, N$$

aus und bestimmen β_1 wie in Fall 1.2 zuvor etwa durch

$$\beta_1 = \frac{\text{Cov}(S_1, U_1)}{\text{Var}(S_1)} \quad (\text{mehr dazu findet man in anschließender Bemerkung 3.3.4}).$$

Abschließend erhält die Approximation der Zuwächse ΔL_k des Lévy-Prozesses die Gestalt

$$\widehat{\Delta L_{k,3}} = \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_k - S_{k-1} + \left(\frac{\lambda}{2} + \beta_1 \right) \cdot (S_k + S_{k-1}) \right). \quad (3.35)$$

Wenngleich eine gewisse „Verzerrtheit“ des Schätzers zu erwarten ist, erweist sich dieser in der Praxis durchaus als hilfreich. Darauf werden wir im späteren Verlauf der Arbeit noch genauer eingehen.

2. Fall: Die Parameter $a, \lambda > 0$ seien zwar unbekannt, jedoch liegen stark konsistente Folgen von Schätzern $(\widehat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{\lambda}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ vor, das heißt

$$\begin{aligned} \widehat{a}_N &\rightarrow a && \text{fast sicher für } N \rightarrow \infty \text{ und} \\ \widehat{\lambda}_N &\rightarrow \lambda && \text{fast sicher für } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

In diesem Szenario ersetzen wir a und λ in den sich analog ergebenden Fällen 1.1 bis 1.3 in (3.31), (3.33) und (3.35) durch die Schätzer \widehat{a}_N und $\widehat{\lambda}_N$ und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta L_{k,1}^{a,\lambda}} &:= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_k - S_{k-1} + \widehat{\lambda}_k \cdot \frac{S_k + S_{k-1}}{2} \right. \\ &\quad \left. + \widehat{a}_k \cdot \omega_y \cdot \frac{X_k + X_{k-1}}{2} - \widehat{a}_k \cdot \omega_x \cdot \frac{Y_k + Y_{k-1}}{2} \right), \\ \widehat{\Delta L_{k,2}^{a,\lambda}} &:= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_k - S_{k-1} + \left(\frac{\widehat{\lambda}_k}{2} + \widehat{\beta}_{1,k} \right) \cdot (S_k + S_{k-1}) + 2 \cdot \widehat{\beta}_{0,k} \right), \\ \widehat{\Delta L_{k,3}^{a,\lambda}} &:= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_k - S_{k-1} + \left(\frac{\widehat{\lambda}_k}{2} + \widehat{\beta}_{1,k} \right) \cdot (S_k + S_{k-1}) \right),\end{aligned}\tag{3.36}$$

wobei $\widehat{\beta}_{0,k}$ und $\widehat{\beta}_{1,k}$ die durch \widehat{a}_k und $\widehat{\lambda}_k$ geschätzten Parameter β_0 und β_1 bezeichnen. \diamond

BEMERKUNG 3.3.4. Eine natürliche Wahl der Konstanten β_1 in Fall 1.3 wäre, etwa inspiriert durch Fall 1.2, die beste lineare Vorhersage von U_t durch S_t in Sinne der Lösung des Minimierungsproblems

$$\beta_1 = \arg \min_{\beta_1} \mathbb{E} \left((S_1 - \beta_1 U_1)^2 \right),$$

welches zu dem Ergebnis

$$\beta_1 = \frac{\mathbb{E}(S_1 U_1)}{\mathbb{E}(S_1^2)}$$

führt. In diesem Fall hängt β_1 von dem unbekanntem ersten Moment $\mu = \mathbb{E}(L_1)$ sowie der möglicherweise unbekanntem $V = \text{Var}(L_1)$ des Lévy-Prozesses ab. Aus diesem Grund wurde im obigen Fall eine alternative Wahl von β_1 vorgeschlagen. Die spezielle Wahl von β_1 ist jedoch keine Einschränkung für die folgenden Ergebnisse und Überlegungen und kann gegebenenfalls durch einen alternativen Schätzer für β_1 ersetzt werden. \diamond

Es wird nun untersucht, inwieweit die sechs konstruierten Schätzer der Lévy-Inkremente genutzt werden können. Ferner wird der Frage nachgegangen, welche „Gütekriterien“ sie erfüllen. Einen Einstieg dazu liefert:

SATZ 3.3.5.

Es seien $\widehat{\Delta L_{k,1}}$, $\widehat{\Delta L_{k,2}}$ und $\widehat{\Delta L_{k,3}}$ die Schätzer (3.31), (3.33) und (3.35) für $k \in \mathbb{N}$ und $\mu = \mathbb{E}(L_1)$ wie in Definition 3.2.2. Dann gilt:

- (i) Die Prozesse $(\widehat{\Delta L_{k,1}})_{k \in \mathbb{N}}$, $(\widehat{\Delta L_{k,2}})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{\Delta L_{k,3}})_{k \in \mathbb{N}}$ sind stationär.

(ii) Die Erwartungswerte ergeben sich durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\Delta L_{k,1}}) &= \mu, & \mathbb{E}(\widehat{\Delta L_{k,2}}) &= \mu, \\ \mathbb{E}(\widehat{\Delta L_{k,3}}) &= \left(\frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \right) \cdot \mathbb{E}(S_1) \\ &= \mu \cdot \frac{(\lambda + 2\beta_1) ((\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2)}{(\omega_y + \omega_z)\lambda(a^2 + \lambda^2)}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Stationarität folgt unmittelbar aus der Stationarität der Prozesse S , X und Y (vgl. Lemma 1.3.7). Für die Berechnung der Erwartungswerte verwendet man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_1) &= \mu \cdot \frac{(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2}{\lambda(a^2 + \lambda^2)}, \\ \mathbb{E}(X_1) &= \mu \cdot \frac{a}{a^2 + \lambda^2}, \\ \mathbb{E}(Y_1) &= \mu \cdot \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\mathbb{E}(\widehat{\Delta L_{k,1}}) = \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \cdot (\lambda \mathbb{E}(S_1) + a \omega_y \mathbb{E}(X_1) - a \omega_x \mathbb{E}(Y_1)) = \mu.$$

Zur Berechnung von $\mathbb{E}(\widehat{\Delta L_{k,2}})$ benötigt man den Erwartungswert des nicht beobachtbaren Prozesses U (siehe 3.32). Man errechnet:

$$\mathbb{E}(U_1) = \mu \cdot \frac{a(\omega_y a + \omega_x \lambda)}{2(a^2 + \lambda^2)}.$$

Daraus resultiert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\Delta L_{k,2}}) &= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \cdot \left((\lambda + 2\beta_1) \cdot \mathbb{E}(S_1) + 2 \cdot (\mathbb{E}(U_1) - \beta_1 \mathbb{E}(S_1)) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \cdot \left(\lambda \mathbb{E}(S_1) + 2\mathbb{E}(U_1) \right) = \mu. \end{aligned}$$

Zuletzt zeigt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\Delta L_{k,3}}) &= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \cdot \left((\lambda + 2\beta_1) \cdot \mathbb{E}(S_1) \right) \\ &= \mu \cdot \frac{(\lambda + 2\beta_1) ((\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2)}{(\omega_y + \omega_z)\lambda(a^2 + \lambda^2)}. \end{aligned}$$

□

Obige Resultate lassen sich im 2. Fall nicht mehr herleiten. Jedoch sind auch diese Approximationen sinnvoll, etwa zur Konstruktion eines stark konsistenten Schätzers für den Erwartungswert μ des Lévy-Prozesses L . Hierzu betrachtet man das empirische Mittel der gewonnenen Schätzungen der Lévy-Inkremente:

DEFINITION 3.3.6.

Zu den N Approximationen der Zuwächse des treibenden Lévy-Prozess

$$\Delta L_{1,i}, \dots, \Delta L_{N,i} \quad \text{in Fall 1 für } i = 1, 2, 3$$

und

$$\Delta L_{1,i}^{a,\lambda}, \dots, \Delta L_{N,i}^{a,\lambda} \quad \text{in Fall 2 für } i = 1, 2, 3$$

definieren wir die empirischen Mittel

$$\overline{\Delta L_{N,i}} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \widehat{\Delta L_{k,i}} \quad \text{und} \quad \overline{\Delta L_{N,i}^{a,\lambda}} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \widehat{\Delta L_{k,i}^{a,\lambda}} \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

◇

Die Eigenschaften der gewonnenen Schätzer für das unbekannte Mittel μ werden im Folgenden in Satz 3.3.7 für den 1. Fall und in Satz 3.3.8 für den 2. Fall zusammengefasst:

SATZ 3.3.7 (Eigenschaften des empirischen Mittels in Fall 1).

Es seien

$$\Delta L_{1,i}, \dots, \Delta L_{N,i} \quad \text{in Fall 1 für } i = 1, 2, 3 \text{ und } N \in \mathbb{N}$$

Approximationen der Zuwächse des treibenden Lévy-Prozess L , welcher aus den Modellklassen (i)-(vii) wie in Theorem 3.1.9 stamme und $V = \text{Var}(L_1) < \infty$ erfülle. Ferner sei $\overline{\Delta L_{N,i}}$ das empirische Mittel für $i = 1, 2, 3$ wie in Definition 3.3.6 sowie $\mu = \mathbb{E}(L_1)$ und $V = \text{Var}(L_1)$. Dann gilt:

- a) Die empirischen Mittel $\overline{\Delta L_{N,1}}$ und $\overline{\Delta L_{N,2}}$ sind erwartungstreue Schätzungen für den Erwartungswert μ des Lévy-Prozess L , das heißt

$$\mathbb{E}(\overline{\Delta L_{N,1}}) = \mu \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(\overline{\Delta L_{N,2}}) = \mu.$$

Falls $\lambda \neq -2\beta_1$ (vgl. Fall 1.3), so ist darüber hinaus das modifizierte empirische Moment

$$c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}} \quad \text{mit} \quad c := \left(\frac{\omega_y + \omega_z}{\lambda + 2\beta_1} \right) \cdot \left(\frac{\lambda(a^2 + \lambda^2)}{(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2} \right)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für μ , das heißt:

$$\mathbb{E}(c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}}) = \mu.$$

b) Die Schätzer $\overline{\Delta L_{N,1}}$, $\overline{\Delta L_{N,2}}$ sowie das modifizierte empirische Moment $c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}}$ mit c wie in Teil a) sind stark konsistente Schätzer für μ , das heißt

$$\begin{aligned}\overline{\Delta L_{N,1}} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher,} \\ \overline{\Delta L_{N,2}} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher,} \\ c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher.}\end{aligned}$$

c) Es gelten die folgenden zentralen Grenzwertsätze

$$\begin{aligned}\sqrt{N} \cdot (\overline{\Delta L_{N,1}} - \mu) &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_1) \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \\ \sqrt{N} \cdot (\overline{\Delta L_{N,2}} - \mu) &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_2) \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \\ \sqrt{N} \cdot (c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}} - \mu) &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_3) \quad \text{für } N \rightarrow \infty\end{aligned}$$

mit den asymptotischen Varianzen

$$\begin{aligned}v_1 &= V \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(u+k) \right)^2 du, \\ v_2 &= \tilde{c}_1^2 \cdot V \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(u+k) \right)^2 du, \\ v_3 &= \tilde{c}_2^2 \cdot V \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(u+k) \right)^2 du.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Hierbei beschreibt ϕ die Kernfunktion des Spotpreisprozesses (3.30) sowie $\tilde{\phi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine modifizierte Kernfunktion der Form

$$\tilde{\phi}(x) := e^{-\lambda x} (\tilde{\omega}_x \sin(ax) + \tilde{\omega}_y \cos(ax) + \tilde{\omega}_z) \mathbb{1}_{x \geq 0}(x),$$

mit den Gewichten

$$\tilde{\omega}_x = \frac{\lambda \omega_x + a \omega_y}{\omega_y + \omega_z}, \quad \tilde{\omega}_y = \frac{\lambda \omega_y - a \omega_x}{\omega_y + \omega_z}, \quad \tilde{\omega}_z = \frac{\lambda \omega_z}{\omega_y + \omega_z}.\tag{3.38}$$

Die Konstanten \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 ergeben sich durch

$$\tilde{c}_1 = \frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \quad \text{sowie} \quad \tilde{c}_2 = \frac{\lambda(a^2 + \lambda^2)}{(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2}.$$

BEWEIS.

Zu a): Die Erwartungstreue der Schätzer (das heißt die Teilaussage a) folgt unmittelbar aus Satz 3.3.5.

Zu b): Zum Nachweis der starken Konsistenz bestimmt man zunächst

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \widehat{\Delta L_{k,1}} &= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \sum_{k=1}^N \left(S_k - S_{k-1} + \lambda \cdot \frac{S_k + S_{k-1}}{2} \right. \\
&\quad \left. + a \cdot \omega_y \cdot \frac{X_k + X_{k-1}}{2} - a \cdot \omega_x \cdot \frac{Y_k + Y_{k-1}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_N - S_0 + \lambda \sum_{k=1}^N S_k - \frac{\lambda}{2} \cdot S_N + \frac{\lambda}{2} \cdot S_0 \right. \\
&\quad \left. + a\omega_y \sum_{k=1}^N X_k - \frac{a\omega_y}{2} \cdot X_N + \frac{a\omega_y}{2} \cdot X_0 \right. \\
&\quad \left. - a\omega_x \sum_{k=1}^N Y_k + \frac{a\omega_x}{2} \cdot Y_N - \frac{a\omega_x}{2} \cdot Y_0 \right) \\
&= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\lambda \sum_{k=1}^N S_k + a\omega_y \sum_{k=1}^N X_k - a\omega_x \sum_{k=1}^N Y_k \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) (S_N - S_0) - \frac{a\omega_y}{2} (X_N - X_0) + \frac{a\omega_x}{2} (Y_N - Y_0) \right) \tag{3.39} \\
&= \sum_{k=1}^N \tilde{S}_k + \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) (S_N - S_0) - \frac{a\omega_y}{2} (X_N - X_0) + \frac{a\omega_x}{2} (Y_N - Y_0) \right) \tag{3.40}
\end{aligned}$$

mit $\tilde{S}_k = \tilde{\omega}_x X_k + \tilde{\omega}_y Y_k + \tilde{\omega}_z Z_k$, wobei sich die Gewichte wie in (3.38) ergeben. Da der unbekannte Lévy-Prozess L nach Voraussetzungen aus einer der Modellklasse in Theorem 3.1.9 stammt, folgt aus eben jenem Resultat die Ergodizität des Prozesses \tilde{S} , woraus sich

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{S}_k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\tilde{S}_1) \quad \text{fast sicher}$$

ableiten lässt. Der gesuchte Erwartungswert $\mathbb{E}(\tilde{S}_1)$ kann mittels (2.3) bestimmt werden, sodass sich

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_1) = \mu \cdot \frac{(\tilde{\omega}_y + \tilde{\omega}_z)\lambda^2 + \tilde{\omega}_x a \lambda + \tilde{\omega}_z a^2}{\lambda(a^2 + \lambda^2)} = \mu. \tag{3.41}$$

zeigt. Es verbleibt der Nachweis von

$$\begin{aligned} \frac{S_N - S_0}{N} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher,} \\ \frac{X_N - X_0}{N} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher,} \\ \frac{Y_N - Y_0}{N} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher.} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Wegen der Stationarität von S gilt offenbar

$$\mathbb{E} \left(\frac{S_N - S_0}{N} \right) = 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung der Tschebyscheff-Ungleichung gewinnt man die Abschätzung

$$P \left(\left| \frac{S_N - S_0}{N} \right| > \epsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(S_N - S_0)}{(N\epsilon)^2} = \frac{2\text{Var}(S_0) - 2\text{Cov}(S_N, S_0)}{(N\epsilon)^2} \leq \frac{C_1}{(N\epsilon)^2}$$

für eine hinreichend große Konstante $C_1 > 0$ und alle $\epsilon > 0$. Die Existenz einer solchen Konstanten C_1 zeigt sich mit Blick auf die Darstellung (2.4) von $\text{Cov}(S_N, S_0)$. Aus der gewonnenen Ungleichung resultiert

$$\sum_{N=1}^{\infty} P \left(\left| \frac{S_N - S_0}{N} \right| > \epsilon \right) \leq \frac{C_1}{\epsilon^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty,$$

für alle $\epsilon > 0$, was zusammen mit dem Lemma von Borel-Cantelli die gewünschte Konvergenz (3.42) liefert. Die übrigen Konvergenzen folgen anschließend unmittelbar für spezielle Wahlen der Gewichte ω_x, ω_y und ω_z . Abschließend können alle soeben erarbeiteten Ergebnisse mit Hilfe von (3.40) zu

$$\overline{\Delta L_{N,1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher}$$

zusammengefasst werden.

Für die Konvergenz von $\overline{\Delta L_{N,2}}$ berechnet mit Hilfe von (3.33), dass

$$\sum_{k=1}^N \widehat{\Delta L_{k,2}} = \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_N - S_0 + 2 \left(\frac{\lambda}{2} + \beta_1 \right) \sum_{k=1}^N S_k - \left(\frac{\lambda}{2} + \beta \right) (S_N - S_0) + 2 \cdot N \cdot \beta_0 \right).$$

Daraus folgt

$$\overline{\Delta L_{N,2}} = \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k + 2\beta_0 + \left(1 - \frac{\lambda}{2} - \beta_1 \right) \left(\frac{S_N - S_0}{N} \right) \right). \quad (3.43)$$

Abermals unter der Verwendung der Ergodizität von S , welche sich aus Theorem 3.1.9 ergibt sowie von

$$\beta_0 = \mathbb{E}(U_1) - \beta_1 \cdot \mathbb{E}(S_1)$$

erhält man für $N \rightarrow \infty$ schließlich

$$\frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k + 2\beta_0 \right) \xrightarrow{\text{f.s.}} \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\lambda \mathbb{E}(S_1) + 2\mathbb{E}(U_1) \right) = \mu$$

wobei die letzte Identität aus (2.3) und (3.34) resultiert. Aufgrund von (3.42) folgert man auch hier

$$\overline{\Delta L_{N,2}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher.}$$

Zuletzt richtet sich das Augenmerk auf das Langzeitverhalten von $\overline{\Delta L_{N,3}}$. Eine analoge Vorgehensweise zum Fall davor führt zu

$$\overline{\Delta L_{N,3}} = \frac{c}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k + \left(1 - \frac{\lambda}{2} - \beta_1 \right) \left(\frac{S_N - S_0}{N} \right) \right). \quad (3.44)$$

Da wiederum Theorem 3.1.9 angewendet werden darf, erhält man auch hier nach Einsetzen der Konstante c und unter Zuhilfenahme von (3.42)

$$\overline{\Delta L_{N,3}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher.}$$

Zu c): Aus (3.40) und (3.41), das heißt $\mathbb{E}(\tilde{S}_1) = \mu$, schließt man

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (\overline{\Delta L_{N,1}} - \mu) &= \sqrt{N} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{S}_k - \mathbb{E}(\tilde{S}_1) \right) + \frac{1}{(\omega_y + \omega_z)} \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \left(\frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a\omega_y}{2} \left(\frac{X_N - X_0}{\sqrt{N}} \right) + \frac{a\omega_x}{2} \left(\frac{Y_N - Y_0}{\sqrt{N}} \right) \right). \end{aligned}$$

Aus dem zentralen Grenzwertsatz 3.2.3, dessen Voraussetzungen für den Spotpreisprozess S nach Beispiel 3.2.6 erfüllt sind, sowie der Delta-Methode 3.2.8 folgt

$$\sqrt{N} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{S}_k - \mathbb{E}(\tilde{S}_1) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_1)$$

mit

$$v_1 = V \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(u+k) \right)^2 du,$$

wobei $V := \text{Var}(L_1)$ und

$$\tilde{\phi}(x) := e^{-\lambda x} (\tilde{\omega}_x \sin(ax) + \tilde{\omega}_y \cos(ax) + \tilde{\omega}_z) \mathbb{1}_{x \geq 0}(x)$$

die Kernfunktion $\tilde{\phi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Gewichten wie in (3.38) beschreibt. Ähnlich zu (3.42) verbleibt hier der Nachweis von

$$\begin{aligned} \frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}} &\xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \\ \frac{X_N - X_0}{\sqrt{N}} &\xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \\ \frac{Y_N - Y_0}{\sqrt{N}} &\xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{3.45}$$

woraus mit Hilfe des Lemmas von Slutsky (siehe 3.2.4, (i)) die Behauptung ergäbe. Die stochastischen Konvergenzen erhält man nun abermals mittels der Tschebyscheff-Ungleichung, welche die Abschätzung für eine hinreichend große Konstante $C_1 > 0$ sowie das gewünschte Grenzverhalten

$$P\left(\left|\frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}}\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(S_N - S_0)}{N\epsilon^2} = \frac{2\text{Var}(S_1) - 2\text{Cov}(S_N, S_0)}{N\epsilon^2} \leq \frac{C_1}{N\epsilon^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

liefert. Alle weiteren Konvergenzen folgert man durch die spezielle Wahl der Gewichte. Insgesamt resultiert

$$\sqrt{N} (\overline{\Delta L_{N,1}} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_1)$$

mit der asymptotischen Varianz v_1 wie gewünscht.

Für den zweiten zentralen Grenzwertsatz beobachtet man mit Hilfe von (3.43) zuerst

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (\overline{\Delta L_{N,2}} - \mu) &= \sqrt{N} \left(\frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k + 2\beta_0 \right) - \mu \right) \\ &\quad + \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(1 - \frac{\lambda}{2} - \beta_1 \right) \left(\frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}} \right). \end{aligned}$$

Während der zweite, untere Term wie zuvor wegen (3.45) vernachlässigt werden kann, führt folgende Umformung des oberen Ausdrucks unter Verwendung von

$\beta_0 = \mathbb{E}(U_1) - \beta_1 \mathbb{E}(S_1)$ zu:

$$\begin{aligned} & \sqrt{N} \left(\frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k + 2\beta_0 \right) - \mu \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k - \mathbb{E}(S_1) \right) + 2\beta_0 + (\lambda + 2\beta_1) \mathbb{E}(S_1) \right) - \mu \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\left(\frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k - \mathbb{E}(S_1) \right) + \frac{\lambda \mathbb{E}(S_1) + 2\mathbb{E}(U_1)}{\omega_y + \omega_z} - \mu \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\left(\frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k - \mathbb{E}(S_1) \right) \right). \end{aligned}$$

Wie im Beweisschritt zuvor erhält man den zentralen Grenzwertsatz für $N \rightarrow \infty$ zusammen mit Theorem 3.2.3, Beispiel 3.2.6 sowie der Delta-Methode (3.2.8) und es gilt:

$$\sqrt{N} \left(\left(\frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k - \mathbb{E}(S_1) \right) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_2).$$

Die asymptotische Varianz ergibt sich dabei als

$$v_2 = \tilde{c}_1^2 \cdot V \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(u+k) \right)^2 du$$

mit der Kernfunktion ϕ des Spotpreisprozesses (3.30), $V = \text{Var}(L_1)$ und

$$\tilde{c}_1 = \frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z}.$$

Den dritten zentralen Grenzwertsatz sieht man wie folgt ein: Abermals bestimmt man zunächst

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (\overline{\Delta L_{N,3}} - \mu) &= \sqrt{N} \left(\frac{c}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \right) - \mu \right) \\ &\quad + \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(1 - \frac{\lambda}{2} - \beta_1 \right) \left(\frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}} \right). \end{aligned}$$

Der untere Term kann dank (3.45) wiederum vernachlässigt werden. Der Schlüssel zur Umformung des oberen Ausdrucks liegt zunächst in der Beobachtung

$$c \cdot \frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \cdot \mathbb{E}(S_1) = \mu,$$

woraus sich unmittelbar

$$\sqrt{N} \left(\frac{c}{\omega_y + \omega_z} \left((\lambda + 2\beta_1) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \right) - \mu \right) = \sqrt{N} \left(c \cdot \frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k - \mathbb{E}(S_1) \right) \right)$$

ableiten lässt. Folglich gelangt man wieder mit Theorem 3.2.3, Beispiel 3.2.6 sowie der Delta-Methode (3.2.8) für $N \rightarrow \infty$ zur Verteilungskonvergenz

$$\sqrt{N} \left(c \cdot \frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k - \mathbb{E}(S_1) \right) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_3),$$

wobei sich die asymptotische Varianz durch

$$v_3 = \tilde{c}_2^2 \cdot V \cdot \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(u+k) \right)^2 du$$

mit der Kernfunktion ϕ des Spotpreisprozess (3.30) sowie

$$\tilde{c}_2 = c \cdot \frac{\lambda + 2\beta_1}{\omega_y + \omega_z} = \frac{\lambda(a^2 + \lambda^2)}{(\omega_y + \omega_z)\lambda^2 + \omega_x a \lambda + \omega_z a^2}$$

ergibt. □

Wir widmen uns dem 2. Fall, bei welchem die Parameter a und λ zunächst geschätzt werden müssen.

SATZ 3.3.8 (Eigenschaften des empirischen Mittels in Fall 2).

Es seien $(\hat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ und $(\hat{\lambda}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ stark konsistente Schätzer für die Parameter a und λ sowie

$$\Delta L_{1,i}^{a,\lambda}, \dots, \Delta L_{N,i}^{a,\lambda} \quad \text{in Fall 2 (vgl. 3.3.3) für } i = 1, 2, 3 \text{ und } N \in \mathbb{N}$$

Approximationen der Zuwächse des treibenden Lévy-Prozess L , welcher aus den Modellklassen (i)-(vii) wie in Theorem 3.1.9 stamme. Ferner sei $V = \text{Var}(L_1)$ und $\overline{\Delta L_{N,i}^{a,\lambda}}$ das empirische Mittel für $i = 1, 2, 3$ wie in Definition 3.3.6 sowie $\mu = \mathbb{E}(L_1)$. Dann gilt:

- a) *Die Schätzer $\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}}$, $\overline{\Delta L_{N,2}^{a,\lambda}}$ sowie das modifizierte empirische Moment $\hat{c}_N \cdot \overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}}$ mit der durch \hat{a}_N und $\hat{\lambda}_N$ geschätzten Modifikationskonstanten \hat{c}_N wie in Satz 3.3.7 sind stark konsistente Schätzer für μ . Das heißt, es gilt:*

$$\begin{aligned} \overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher,} \\ \overline{\Delta L_{N,2}^{a,\lambda}} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher,} \\ \hat{c}_N \cdot \overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}} &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu \quad \text{fast sicher.} \end{aligned}$$

b) Es gelten die folgenden zentralen Grenzwertsätze:

$$\begin{aligned}\sqrt{N} \cdot \left(\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} - \mu \right) &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_1) \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \\ \sqrt{N} \cdot \left(\widehat{c}_N \cdot \overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}} - \mu \right) &\xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_3) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

mit den asymptotischen Varianzen wie in (3.37). Sind darüber hinaus $(\widehat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{\lambda}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ Schätzfolgen für die Parameter a und λ , sodass

$$\sqrt{N} \left(\widehat{\beta}_{0,N} - \beta_0 \right) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad (3.46)$$

für $N \rightarrow \infty$, so gilt auch

$$\sqrt{N} \cdot \left(\overline{\Delta L_{N,2}^{a,\lambda}} - \mu \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_2) \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

mit den asymptotischen Varianz v_3 wie in (3.37).

BEWEIS.

Zu a): Die Strategie ist der Nachweis der Konvergenzen

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,1}} \right) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher,} \\ \left(\overline{\Delta L_{N,2}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,2}} \right) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher,} \\ \left(\overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,3}} \right) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher,}\end{aligned}$$

woraus sich zusammen mit Satz 3.3.7 die Behauptung folgern lässt. Das Augenmerk richtet sich zunächst auf die erste Grenzwertaussage. Nach (3.40) gilt

$$\begin{aligned}\overline{\Delta L_{N,1}} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \widetilde{S}_k \\ &+ \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \left(\frac{S_N - S_0}{N} \right) - \frac{a\omega_y}{2} \left(\frac{X_N - X_0}{N} \right) + \frac{a\omega_x}{2} \left(\frac{Y_N - Y_0}{N} \right) \right).\end{aligned}$$

Die Gewichte des modifizierten Spotpreisprozesses \widetilde{S} ergaben sich dabei durch

$$\widetilde{\omega}_x = \frac{\lambda\omega_x + a\omega_y}{\omega_y + \omega_z}, \quad \widetilde{\omega}_y = \frac{\lambda\omega_y - a\omega_x}{\omega_y + \omega_z}, \quad \widetilde{\omega}_z = \frac{\lambda\omega_z}{\omega_y + \omega_z}.$$

Für das empirische Mittel $\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}}$ ersetzen wir die Parameter a und λ gemäß Definition 3.3.6 durch die Schätzer \widehat{a}_N und $\widehat{\lambda}_N$. Für die Gewichte $\widetilde{\omega}_x$, $\widetilde{\omega}_y$ und $\widetilde{\omega}_z$ erhalten wir dadurch

die stark konsistenten Schätzfolgen

$$\left(\widehat{\tilde{\omega}_{x,N}}\right)_{N \in \mathbb{N}}, \quad \left(\widehat{\tilde{\omega}_{y,N}}\right)_{N \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\widehat{\tilde{\omega}_{z,N}}\right)_{N \in \mathbb{N}}.$$

Hieraus ergibt sich die Differenz

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,1}}\right) = & \\ & \left(\widehat{\tilde{\omega}_{x,N}} - \tilde{\omega}_x\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k\right) + \left(\widehat{\tilde{\omega}_{y,N}} - \tilde{\omega}_y\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k\right) + \left(\widehat{\tilde{\omega}_{z,N}} - \tilde{\omega}_z\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_k\right) \\ & + \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\left(\frac{\hat{\lambda}_N - \lambda}{2}\right) \left(\frac{S_N - S_0}{N}\right) - \left(\frac{(\hat{a}_N - a)\omega_y}{2}\right) \left(\frac{X_N - X_0}{N}\right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{(\hat{a}_N - a)\omega_x}{2}\right) \left(\frac{Y_N - Y_0}{N}\right) \right). \end{aligned}$$

Da S und daher insbesondere X , Y und Z nach Voraussetzungen die Annahmen von Theorem 3.1.9 erfüllen, sind die Prozesse ergodisch und es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k &\longrightarrow \mathbb{E}(X_1) < \infty \quad \text{fast sicher,} \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k &\longrightarrow \mathbb{E}(Y_1) < \infty \quad \text{fast sicher,} \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Z_k &\longrightarrow \mathbb{E}(Z_1) < \infty \quad \text{fast sicher} \end{aligned}$$

für $N \rightarrow \infty$. Daher resultiert offensichtlich mittels (3.42):

$$\left(\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,1}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Ebenso bestimmt man mit Hilfe von (3.43)

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Delta L_{N,2}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,2}}\right) = & \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\left(\hat{\lambda}_N - \lambda\right) + 2(\hat{\beta}_{1,N} - \beta_1) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k\right) \\ & + 2(\hat{\beta}_{0,N} - \beta_0) - \left(\frac{\hat{\lambda}_N - \lambda}{2} + (\hat{\beta}_{1,N} - \beta_1)\right) \left(\frac{S_N - S_0}{N}\right) \end{aligned}$$

und (3.44)

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,3}} \right) &= \frac{(\widehat{c}_N - c)}{\omega_y + \omega_z} \left(\left((\widehat{\lambda}_N - \lambda) + 2(\widehat{\beta}_{1,N} - \beta_1) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(\widehat{\lambda}_N - \lambda)}{2} + (\widehat{\beta}_{1,N} - \beta_1) \right) \left(\frac{S_N - S_0}{N} \right) \right), \end{aligned}$$

woraus sich wiederum analog wie im ersten Szenario und der zusätzlichen Beobachtung

$$(\widehat{c}_N - c) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{fast sicher}$$

die Behauptung folgern lässt.

Zu b): Für die zentralen Grenzwertsätze zeigt man

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left(\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,1}} \right) &\xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \\ \sqrt{N} \left(\overline{\Delta L_{N,2}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,2}} \right) &\xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \\ \sqrt{N} \left(\overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,3}} \right) &\xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

und folgert die Behauptung mit Hilfe des Lemmas von Slutsky (vgl. Lemma 3.2.4). Nach (3.39) gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left(\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,1}} \right) &= \\ &\frac{\sqrt{N}}{\omega_y + \omega_z} \cdot \left(\left((\widehat{\lambda}_N - \lambda) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \right) + (\widehat{a}_N - a) \omega_y \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\widehat{a}_N - a) \omega_x \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k \right) \right) \right) \\ &+ \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \cdot \left(\left(\left(\frac{\widehat{\lambda}_N - \lambda}{2} \right) \left(\frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}} \right) - \left(\frac{(\widehat{a}_N - a) \omega_y}{2} \right) \left(\frac{X_N - X_0}{\sqrt{N}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{(\widehat{a}_N - a) \omega_x}{2} \right) \left(\frac{Y_N - Y_0}{\sqrt{N}} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Der Blick richtet sich zunächst auf

$$\left(\widehat{\lambda}_N - \lambda \right) \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \right).$$

Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt im Grenzwert für $N \rightarrow \infty$

$$\left(\widehat{\lambda}_N - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\widetilde{\mu}, \widetilde{\sigma}^2)$$

mit geeignetem Erwartungswert $\widetilde{\mu} \in \mathbb{R}$ und Varianz $\widetilde{\sigma}^2 > 0$. Für die Verteilungskonvergenz wurde wie im Beweis zuvor Theorem 3.2.3, Beispiel 3.2.6 sowie die Delta-Methode 3.2.8 verwendet. Das Lemma von Slutsky 3.2.4 liefert daher

$$\left(\widehat{\lambda}_N - \lambda\right) \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \delta_0$$

für $N \rightarrow \infty$, wobei δ_0 das Punktmaß in 0 beschreibt. Daraus resultiert wie gewünscht

$$\left(\widehat{\lambda}_N - \lambda\right) \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k\right) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Die gleiche Argumentationsweise führt zu

$$\left(\widehat{a}_N - a\right) \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k\right) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{und} \quad \left(\widehat{a}_N - a\right) \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k\right) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$$

für $N \rightarrow \infty$. Gemeinsam mit (3.45) und der speziellen Wahl von den Gewichten ω_x, ω_y und ω_z erhält man

$$\sqrt{N} \left(\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,1}}\right) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Darüber hinaus berechnet man die Differenzen

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left(\overline{\Delta L_{N,2}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,2}}\right) &= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\left(\widehat{\lambda}_N - \lambda \right) + 2(\widehat{\beta}_{1,N} - \beta_1) \right) \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \right) \\ &\quad + 2\sqrt{N}(\widehat{\beta}_{0,N} - \beta_0) - \left(\frac{\widehat{\lambda}_N - \lambda}{2} + (\widehat{\beta}_{1,N} - \beta_1) \right) \left(\frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \left(\overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}} - \overline{\Delta L_{N,3}}\right) &= \frac{\widehat{c}_N - c}{\omega_y + \omega_z} \left(\left(\widehat{\lambda}_N - \lambda \right) + 2(\widehat{\beta}_{1,N} - \beta_1) \right) \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \right) \\ &\quad - \left(\frac{\widehat{\lambda}_N - \lambda}{2} + (\widehat{\beta}_{1,N} - \beta_1) \right) \left(\frac{S_N - S_0}{\sqrt{N}} \right) \end{aligned}$$

und erhält zusammen mit Voraussetzung (3.46) und der gleichen Strategie wie im Schritt zuvor die Behauptung. \square

Es wurde somit gezeigt, dass auf Basis der gewonnenen Approximationen der Lévy-Inkremente ΔL_k Schätzer in unterschiedlichen Beobachtungsschemata für das erste Moment μ des Lévy-Prozesses konstruiert werden können. Hierbei bestand die essentielle Beobachtung darin, dass die Approximationen $\widehat{\Delta L_{k,1}}$ und $\widehat{\Delta L_{k,2}}$ den Erwartungswert μ des tatsächlichen Zuwachses ΔL_k besitzen. Im Hinblick auf die Konstruktion weiterer Schätzer, etwa für die Varianz des Lévy-Prozesses, besteht die Hoffnung zunächst darin, dass sich $\text{Var}(\widehat{\Delta L_{k,1}})$ und $V = \text{Var}(L_1)$ ebenso gleichen. Folgendes Beispiel illustriert jedoch, dass dies schon bei einfachen Parameterkonstellationen für die Gewichte $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ nicht mehr der Fall ist und zudem die Rechnungen sehr aufwändig werden. Ebenso beschäftigt sich das Beispiel mit den Kovarianzen der approximierten Zuwächse.

BEISPIELE 3.3.9.

1. Es sei $\omega = (0, 1, 0)$ und somit $S(t) = Y(t)$. In diesem Fall ergibt sich ein Zuwachs ΔL_k gemäß der Formel in Bemerkung 3.3.2. Basierend darauf wird der approximierte Zuwachs $\widehat{\Delta L_{k,1}}$ in (3.31) des treibenden Lévy-Prozesses L bestimmt durch

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta L_{k,1}} &= Y_k - Y_{k-1} + \lambda \frac{Y_k + Y_{k-1}}{2} + a \frac{X_k + X_{k-1}}{2} \\ &= \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) Y_k + \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) Y_{k-1} + \frac{a}{2} (X_k + X_{k-1}) \\ &= S_k^1 + S_{k-1}^2,\end{aligned}$$

wobei

$$S_t^1 = \omega_x^1 X(t) + \omega_y^1 Y(t) \quad \text{und} \quad S_t^2 = \omega_x^2 X(t) + \omega_y^2 Y(t)$$

als spezielle Spotpreisprozesse mit den Gewichten

$$\omega_x^1 = \frac{a}{2}, \quad \omega_y^1 = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \quad \text{und} \quad \omega_x^2 = \frac{a}{2}, \quad \omega_y^2 = \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)$$

aufgefasst werden können. Hieraus lässt sich die Varianz der Prozesse mittels

$$\text{Var}(\widehat{\Delta L_{k,1}}) = \text{Var}(S_k^1) + \text{Var}(S_{k-1}^2) + 2 \cdot \text{Cov}(S_k^1, S_{k-1}^2)$$

bestimmen. Zur Berechnung wird zum einen die Varianz des Spotpreises (2.5) verwendet, zum anderen von der Formel für die Kovarianzen zweier zeitstetiger Moving-Average Prozesse (1.21) Gebrauch gemacht. Man erhält

$$\text{Var}(\widehat{\Delta L_{k,1}}) = \frac{V}{16\lambda(a^2 + \lambda^2)} \cdot (A_1 \cdot \sin(a) + A_2 \cdot \cos(a) + A_3)$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 &= e^{-\lambda} \cdot (a((\lambda - 4)a^2 + \lambda(\lambda - 2)^2)) - e^\lambda \cdot (a(a^2(4 + \lambda) + \lambda(2 + \lambda)^2)), \\ A_1 &= e^{-\lambda} \cdot ((a^2 + 2\lambda^2)(a^2 + \lambda^2 - 4)) + e^\lambda \cdot ((a^2 + 2\lambda^2)(a^2 + \lambda^2 - 4)), \\ A_3 &= 2 \cdot ((a^2 + 2\lambda^2)(a^2 + \lambda^2 + 4)). \end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt somit $\text{Var}(\widehat{\Delta L_{k,1}}) \neq V$.

2. In *Abdelrazeq, Ivanoff und Kulik (2014)* wird die Kovarianz

$$\text{Cov}(\widehat{\Delta L_{1,1}}, \widehat{\Delta L_{h+1,1}})$$

zweier approximierter Zuwächse für $h \in \mathbb{N}_0$ im Fall eines Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bestimmt. Im obigen Kontext spiegelt dies den Fall $\omega = (0, 0, 1)$ wider. Für die hier eingeführten Prozesse mit $a, \lambda > 0$ ergibt sich in dem hier betrachteten Szenario:

$$\text{Cov}(\widehat{\Delta L_{1,1}}, \widehat{\Delta L_{h+1,1}}) = \frac{V}{8\lambda} \cdot ((\lambda^2 - 4)(e^{-\lambda(1+h)} + e^{-\lambda(h-1)}) + (2\lambda^2 + 8)e^{-\lambda h}).$$

◇

Während aufgrund der unabhängigen Zuwächse des Lévy-Prozesses

$$\text{Cov}(\Delta L_1, \Delta L_{h+1}) = 0$$

für $h \in \mathbb{N}_0$ gilt, zeigt obiges Beispiel, dass sich aufgrund des Approximationsfehlers eine Korrelation zwischen den Schätzungen beobachten lässt, welche im diskreten Beobachtungsschema auch nicht verschwindet. Schätzt man nun etwa die Kovarianzen durch

$$\widehat{\gamma_{\Delta L_1}}(h) := \frac{1}{N-h} \sum_{k=1}^{N-h} (\widehat{\Delta L_{k+h,1}} - \overline{\Delta L_{N,1}}) (\widehat{\Delta L_{k,1}} - \overline{\Delta L_{N,1}}) \quad \text{für } h \in \{1, \dots, N-1\},$$

so ließe sich ein zentraler Grenzwertsatz der Form

$$\sqrt{N} \left(\widehat{\gamma_{\Delta L_1}}(h) - \text{Cov}(\widehat{\Delta L_{1,1}}, \widehat{\Delta L_{h,1}}) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_\gamma) \quad \text{für } N \rightarrow \infty$$

mit geeigneter Varianz v_γ zeigen. Für den Spezialfall wie in Beispiel 3.3.9 wird dieser in *Abdelrazeq, Ivanoff und Kulik (2014, Proposition 3.3)* bewiesen. Möchte man von dem Satz im Hinblick auf die Konstruktion eines Tests auf die Modellannahme unkorrelierter Zuwächse des treibenden Prozesses Gebrauch machen, erweist sich jedoch ein solches Resultat aufgrund des Approximationsfehlers als nicht hilfreich. Aus diesem Grund wird auf den Beweis eines solchen zentralen Grenzwertsatzes verzichtet und stattdessen der Fall hochfrequenter Beobachtungen des Prozesses S näher untersucht. Es wird sich schließlich

zeigen, dass in diesem Szenario die in Beispiel 3.3.9 geschilderte Verzerrtheit der Varianz sowie der Approximationsfehler der Kovarianzen beseitigt werden.

3.3.2. Schätzungen im hochfrequenten Beobachtungsschema. In diesem Abschnitt werden die folgenden Annahmen getroffen:

VORAUSSETZUNGEN 3.3.10. Wir gehen davon, dass $n \in \mathbb{N}$ Beobachtungen der Prozesse X, Y sowie des Spotpreisprozesses S (3.30) aus dem Zeitintervall $[0, N]$ mit $N \in \mathbb{N}$ zu den äquidistanten Zeitpunkten

$$h < 2h < \dots < nh = N,$$

mit $h > 0$ und $h^{-1} \in \mathbb{N}$ vorliegen. Ferner nehmen wir an, dass sowohl der Zeithorizont beliebig groß gewählt als auch die Abtastfrequenz beliebig verfeinert werden kann. Mathematisch formuliert bedeutet dies, dass die Größen $N \rightarrow \infty$ und $h \rightarrow 0$ konvergieren. Wie im gesamten Abschnitt nehmen wir auch hier an, dass der unbekannte Lévy-Prozess L ein endliches viertes Moment besitzt. Ferner gehöre der treibende Lévy-Prozess abermals einer bekannten Modellklasse mit unbekanntem Parametern an. Jedoch treffen wir die Annahme, dass alle Parameter der Kernfunktion ϕ bekannt sind. \diamond

Im vorliegenden Beobachtungsszenario werden der unbekannte Lévy-Prozess L sowie die Zuwächse ΔL des Prozesses wie folgt approximiert:

DEFINITION 3.3.11.

Zu dem obigen Beobachtungsschema der Prozesse X, Y und S und dem treibenden Lévy-Prozess L definiere für $k = 2, \dots, n$:

1. den Zuwachs des Lévy-Prozesses zwischen den Zeitpunkten $(k-1)h$ zu kh durch

$$\begin{aligned} \Delta L_k^{(h)} &:= L(kh) - L((k-1)h) \\ &= \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S(kh) - S((k-1)h) + \lambda \int_{(k-1)h}^{kh} S(u) \, du \right. \\ &\quad \left. + a\omega_y \int_{(k-1)h}^{kh} X(u) \, du - a\omega_x \int_{(k-1)h}^{kh} Y(u) \, du \right). \end{aligned}$$

Die letzte Identität ergibt sich dabei direkt aus Satz 3.3.1.

2. den approximierten Zuwachs des Lévy-Prozesses $\widehat{\Delta L_k^{(h)}}$ zwischen den Zeitpunkten $(k-1)h$ zu kh durch

$$\widehat{\Delta L_k^{(h)}} := \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(S_{kh} - S_{(k-1)h} + \frac{\lambda h}{2} \cdot (S_{kh} + S_{(k-1)h}) + \frac{a\omega_y h}{2} \cdot (X_{kh} + X_{(k-1)h}) - \frac{a\omega_x h}{2} (Y_{kh} + Y_{(k-1)h}) \right),$$

3. den approximierten Wert des Lévy-Prozesses zum Zeitpunkt $nh \in \mathbb{N}$ durch

$$\widehat{L^h(nh)} := \sum_{k=1}^n \widehat{\Delta L_k^{(h)}}$$

4. den approximierten Wert eines Zuwachses des Lévy-Prozesses der Länge 1 zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t für $t \in \{1, 2, \dots, N\}$ durch

$$\widehat{\Delta_1 L_t^h} := \widehat{L^h(t)} - \widehat{L^h(t-1)}. \quad \diamond$$

Offenbar sind wegen der Stationarität der Prozesse X , Y sowie S auch die approximierten Zuwächse $(\widehat{\Delta L_k^h})_{k \in \mathbb{N}}$ sowie $(\widehat{\Delta_1 L_t^h})_{t \in \mathbb{N}}$ stationäre Prozesse (vgl. Lemma 1.3.7). Im Folgenden werden die Ergebnisse für einen Lévy-getriebenen Ornstein-Uhlenbeck Prozess von *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik* (2014, Chapter 3) für oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse bzw. den Spotpreisprozess S verallgemeinert. Während im ersten Abschnitt 3.3.1 das Verhalten der Partialsummen der gewonnenen Approximationen untersucht wurde, liegt der Schlüssel folgender Ergebnisse in einer „ L^2 -Abschätzung“ des Fehlers, welcher sich bei den vorgestellten Approximationen beobachten lässt. Das folgende Konvergenzresultat beweisen *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik* (2014) ausschließlich für einen klassischen Ornstein-Uhlenbeck Prozess. In dem hier betrachteten Kontext entspricht dies dem Spezialfall $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 0, 1)$. Dabei basiert der Beweis im Wesentlichen auf der speziellen Gestalt der zurückgewonnen Gleichung des Lévy-Prozesses L sowie der Form der Varianz und Kovarianz eines klassischen Ornstein-Uhlenbeck Prozesses. Die hier betrachtete Gleichung für L (vgl. Satz 3.3.1) als auch die Gestalt der Varianz und Kovarianz des hier betrachteten Prozesses S (vgl. (2.5) und (2.4)) sind weitaus reichhaltiger, sodass eine Verallgemeinerung des Resultats benötigt wird. Dies liefert

THEOREM 3.3.12.

- (i) Es sei $L^h(nh)$ der approximierte Wert des Lévy-Prozesses L zum Zeitpunkt $nh \in \mathbb{N}$ im Sinne von Definition 3.3.11. Dann gilt unter den Voraussetzungen 3.3.10:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\widehat{L^h(nh)} - L(nh) \right) \right\|_{L^2(P)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ und } h \rightarrow 0$$

mit $nh \rightarrow \infty$ und $nh^2 \rightarrow 0$.

- (ii) Es sei $\widehat{\Delta_1 L_t^h}$ der approximierte Zuwachs von $\Delta L_t = L(t) - L(t-1)$ im Sinne von Definition 3.3.11. Dann gilt für alle $t \in \{1, \dots, N\}$ mit $N = nh \in \mathbb{N}$ unter den Voraussetzungen 3.3.10:

$$\left\| \widehat{\Delta_1 L_t^h} - \Delta L_t \right\|_{L^2(P)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

BEWEIS.

Zu (i): Der Beweis wird in drei Schritte unterteilt.

1. Schritt: Nach Satz 3.3.1 und Definition 3.3.11 beobachtet man zunächst

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\widehat{L^h(nh)} - L(nh) \right) \right\|_{L^2(P)} \\ &= \frac{1}{(\omega_y + \omega_z)\sqrt{nh}} \left\| \lambda h \sum_{k=1}^n S_{kh} + a\omega_y h \sum_{k=1}^n X_{kh} - a\omega_x h \sum_{k=1}^n Y_{kh} \right. \\ & \quad + \left(1 - \frac{\lambda h}{2} \right) (S_{nh} - S_0) + \frac{a\omega_y h}{2} (X_{nh} - X_0) - \frac{a\omega_x h}{2} (Y_{nh} - Y_0) \\ & \quad \left. - \left(S(nh) - S(0) + \lambda \int_0^{nh} S(u) du + a \int_0^{nh} (\omega_y X(u) - \omega_x Y(u)) du \right) \right\|_{L^2(P)} \\ &\leq \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\lambda \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\int_0^{nh} S(u) du - h \sum_{k=1}^n S_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)} \right. \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$+ a\omega_y \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\int_0^{nh} X(u) du - h \sum_{k=1}^n X_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)} \quad (3.48)$$

$$+ a\omega_x \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\int_0^{nh} Y(u) du - h \sum_{k=1}^n Y_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)} \quad (3.49)$$

$$+ \frac{\lambda h}{2\sqrt{nh}} \|S_{nh} - S_0\|_{L^2(P)} + \frac{a\omega_y h}{2\sqrt{nh}} \|X_{nh} - X_0\|_{L^2(P)} \quad (3.50)$$

$$+ \frac{a\omega_x h}{2\sqrt{nh}} \|Y_{nh} - Y_0\|_{L^2(P)} \Bigg). \quad (3.51)$$

2. Schritt: Wir widmen uns zunächst der Ausdrücke (3.47) bis (3.49). Zunächst benutzen wir *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik* (2014, Lemma 3.5), um die Abschätzung

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\int_0^{nh} S(u) du - h \sum_{k=1}^n S_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)}^2 \leq 2n \int_0^h (\text{Var}(S_1) - \gamma_S(x)) dx$$

zu erhalten, wobei $\gamma_S: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma_S(x) := \text{Cov}(S_0, S_x)$ die Autokovarianzfunktion von S bezeichne. Nach (2.4) ist die Autokovarianzfunktion $\gamma_S(x)$ des Prozesses S von der Form

$$\gamma_S(x) = V \cdot \exp(-\lambda x) \cdot (C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3) \quad (3.52)$$

mit C_1, C_2 und C_3 wie in Lemma 2.1.3 beschrieben. Wir stellen fest, dass die Konstanten C_2 und C_3 nach den Voraussetzungen an die verwendeten Parameter stets positiv sind, während das Vorzeichen von C_1 abhängig von der Wahl der Parameter sowohl positiv als auch negativ sein kann. Für ein x aus dem Intervall $[0, h]$ und ein hinreichend kleines $h > 0$ beobachtet man für $a, \lambda > 0$:

$$\begin{aligned} x \mapsto \sin(ax) & \text{ ist monoton wachsend auf } [0, h], \\ x \mapsto \cos(ax) & \text{ ist monoton fallend auf } [0, h], \\ x \mapsto \exp(-\lambda x) & \text{ ist monoton fallend auf } [0, h]. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass C_1 positiv ist sowie für ein hinreichend kleines $h > 0$ dienen die obigen Argumente zur Abschätzung

$$\begin{aligned} \gamma_S(x) & \geq V \cdot e^{-\lambda h} (C_1 \sin(0) + C_2 \cos(ah) + C_3) \\ & = V \cdot e^{-\lambda h} (C_2 \cos(ah) + C_3). \end{aligned} \quad (3.53)$$

für alle $x \in [0, h]$ und $h > 0$ hinreichend klein. Zudem verwendet man $\text{Var}(S_1) = C_2 + C_3$ und folgert zusammen mit der Taylorformel

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\int_0^{nh} S(u) \, du - h \sum_{k=1}^n S_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)}^2 \\ & \leq 2n \int_0^h (\text{Var}(S_1) - \gamma_S(x)) \, dx \\ & \leq 2nh \cdot V \cdot (C_2 + C_3 - e^{-\lambda h} [C_2 \cos(ah) + C_3]) \\ & = 2nh \cdot V \cdot \left(C_2 + C_3 - \left(1 - \lambda h + o(h) \right) \left[C_2 \left(1 - \frac{a^2 h^2}{2} + o(h^2) \right) + C_3 \right] \right) \\ & = \mathcal{O}(nh^2) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, \text{ sodass } nh^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Im Fall $C_1 < 0$ behilft basierend auf obigen Beobachtungen die Abschätzung

$$\gamma_S(x) \geq V \cdot e^{-\lambda h} (C_1 \sin(ah) + C_2 \cos(ah) + C_3).$$

für $x \in [0, h]$ und $h > 0$ hinreichend klein. Auch hier resultiert mit den gleichen Argumenten sowie mit Hilfe der Taylorentwicklung

$$\sin(ah) = ah - \frac{a^3 h^3}{6} + o(h^3)$$

wie zuvor:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\sqrt{nh}} \left(\int_0^{nh} S(u) \, du - h \sum_{k=1}^n S_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)}^2 \\ & \leq 2nh \cdot V \cdot (C_2 + C_3 - e^{-\lambda h} (C_1 \sin(ah) + C_2 \cos(ah) + C_3)) \\ & = \mathcal{O}(nh^2) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, h \rightarrow 0, \text{ sodass } nh^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für die Terme (3.48) und (3.49) führt die gleiche Argumentation für eine spezielle Wahl der Gewichte zum Ziel.

3 Schritt: Der Blick richtet sich auf die Konvergenz der Terme (3.50) und (3.51). Man benutzt hierzu

$$\begin{aligned} \|S_{nh} - S_0\|_{L^2(P)} &= \mathbb{E} [(S_{nh} - S_0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbb{E}(S_{nh}^2) - 2\mathbb{E}(S_{nh} \cdot S_0) + \mathbb{E}(S_0^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= (2\text{Var}(S_0) - 2\gamma_S(nh))^{\frac{1}{2}} < C < \infty, \end{aligned}$$

wobei $\gamma_S(nh)$ wiederum die Autokovarianzfunktion von S und C eine von nh unabhängige Konstante beschreibe. Die Endlichkeit folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen sowie

Lemma 2.1.3. Hieraus resultiert schließlich wie verlangt

$$\begin{aligned}\frac{\lambda h}{2\sqrt{nh}} \|S_{nh} - S_0\|_{L^2(P)} &\longrightarrow 0, \\ \frac{a\omega_y h}{2\sqrt{nh}} \|X_{nh} - X_0\|_{L^2(P)} &\longrightarrow 0, \\ \frac{a\omega_x h}{2\sqrt{nh}} \|Y_{nh} - Y_0\|_{L^2(P)} &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, sodass $nh \rightarrow \infty$. Man schließt zusammen, dass sich die gewünschte Konvergenz für

$$n \rightarrow \infty \text{ und } h \rightarrow 0, \text{ sodass } nh \rightarrow \infty \text{ und } nh^2 \rightarrow 0$$

ergibt.

Zu (ii): Für den Zuwachs

$$\Delta L_t = S(t) - S(t-1) + \lambda \int_{t-1}^t S(u) du + a \int_{t-1}^t (\omega_y X(u) - \omega_x Y(u)) du$$

für $t \in \{1, 2, \dots, N\}$ mit $N = nh$ und Verwendung der Definition 3.3.11 erhält man hier analog zum Beweis von (i) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left\| \widehat{\Delta_1 L_t^h} - \Delta L_t \right\|_{L^2(P)} \\ \leq \frac{1}{\omega_y + \omega_z} \left(\lambda \cdot \left\| \left(\int_{t-1}^t S(u) du - h \sum_{k=((t-1)/h)+1}^{t/h} S_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)} \right.\end{aligned}\tag{3.54}$$

$$\left. + a\omega_y \cdot \left\| \left(\int_{t-1}^t X(u) du - h \sum_{k=((t-1)/h)+1}^{t/h} X_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)} \right.\tag{3.55}$$

$$\left. + a\omega_x \cdot \left\| \left(\int_{t-1}^t Y(u) du - h \sum_{k=((t-1)/h)+1}^{t/h} Y_{kh} \right) \right\|_{L^2(P)} \right.\tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{\lambda h}{2} \|S_t - S_{t-1}\|_{L^2(P)} + \frac{a\omega_y h}{2} \|X_t - X_{t-1}\|_{L^2(P)} \\ &+ \frac{a\omega_x h}{2} \|Y_t - Y_{t-1}\|_{L^2(P)} \Bigg).\end{aligned}$$

Wiederholt man die Rechnung aus dem Beweis von (i) für $\|S_t - S_{t-1}\|_{L^2(P)}$, so leitet man abermals

$$\begin{aligned}\frac{\lambda h}{2} \|S_t - S_{t-1}\|_{L^2(P)} &\longrightarrow 0, \\ \frac{a\omega_y h}{2} \|X_t - X_{t-1}\|_{L^2(P)} &\longrightarrow 0, \\ \frac{a\omega_x h}{2} \|Y_t - Y_{t-1}\|_{L^2(P)} &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$ ab und erhält die gewünschte Konvergenz. Ferner liefert *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik* (2014, Lemma 3.9) für $t \in \{1, 2, \dots, N\}$ die Abschätzung

$$\left\| \int_{t-1}^t S(u) du - h \sum_{k=((t-1)/h)+1}^{t/h} S_{kh} \right\|_{L^2(P)}^2 \leq \frac{2}{h} \int_0^h (\text{Var}(S_1) - \gamma_S(x)) dx.$$

Falls C_1 eine positive Konstante in (3.52) ist, behilft abermals die Abschätzung (3.53) und liefert für den Term (3.54):

$$\frac{2}{h} \int_0^h (\text{Var}(S_1) - \gamma_S(x)) dx \leq 2V \cdot (C_2 + C_3 - e^{-\lambda h} [C_2 \cos(ah) + C_3]) \longrightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$. Die gleiche Argumentationsweise liefert die Behauptung für $C_1 < 0$. Zudem führt die selbe Idee mit einer speziellen Wahl der Gewichte ebenso zu den gewünschten Konvergenzen der Ausdrücke (3.55) sowie (3.56). □

Das Theorem 3.3.12 zeigt, dass die Approximationsfehler im hochfrequenten Beobachtungsschema in dem dort formulierten „ L^2 -Sinne“ verschwinden, wenn neben der Vergrößerung der Beobachtungslänge zudem die Beobachtungsfrequenz hinreichend schnell verfeinert wird. Es gilt dabei zu beachten, dass die Fehler für ein festes $h > 0$ stets auftreten und nicht vermieden werden können. Die im Folgenden vorgestellten Ergebnisse können somit im niederfrequenten Beobachtungsschema nicht benutzt werden.

Basierend auf *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik* (2014, Theorem 3.4 und Lemma 3.9) beweisen *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik* (2014) eine Reihe weiterer nützlicher Konvergenzaussagen, von denen im Hinblick auf die Konstruktion von Schätzern für den unbekanntem Mittelwert μ sowie die unbekanntem Varianz V des Lévy-Prozesses Gebrauch gemacht werden kann. So zeigt sich etwa in *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik* (2014, Corollary 3.12), dass der approximierter Zuwachs $\widehat{\Delta}_1 L_t^h$ nicht nur den gleichen Erwartungswert wie

ΔL_t für ein $t \in \mathbb{N}$ besitzt, sondern zudem auch die zu beobachtenden Approximationsfehler in der Varianz und Kovarianz verschwinden, wenn die Abtastfrequenz der Beobachtungen erhöht wird. Die dort verfassten Ergebnisse werden nun kurz zusammengefasst, welche auf Grundlage von dem hier hergeleiteten Theorem 3.3.12 weitgehend ohne weiteren Aufwand wie im erwähnten Artikel bewiesen werden können. Vorab widmen wir uns der Definition einiger kanonischer Schätzer:

DEFINITION 3.3.13.

Es sei $\widehat{\Delta_1 L_t^h}$ der approximierte Zuwachs des Lévy-Prozesses $\Delta L_t = L(t) - L(t-1)$ für ein $t \in \mathbb{N}$ im Sinne von Definition 3.3.11. Dann definieren wir für $N = nh \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der approximierten Zuwächse $\widehat{\Delta_1 L_1^h}, \widehat{\Delta_1 L_2^h}, \dots, \widehat{\Delta_1 L_{nh}^h}$:

- (i) Das empirische Mittel $\overline{\Delta_1 L_{nh}^h}$ durch

$$\overline{\Delta_1 L_{nh}^h} := \frac{1}{nh} \sum_{t=1}^{nh} \widehat{\Delta_1 L_t^h}.$$

- (ii) Den Varianzschätzer \widehat{V}_{nh}^h durch

$$\widehat{V}_{nh}^h := \frac{1}{nh} \sum_{t=1}^{nh} \left(\widehat{\Delta_1 L_t^h} - \overline{\Delta_1 L_{nh}^h} \right)^2.$$

- (iii) Den Kovarianzschätzer $\widehat{\gamma}_{\Delta_1 L_{nh}^h}(k)$ „zum Lag k “ durch

$$\widehat{\gamma}_{\Delta_1 L_{nh}^h}(k) := \frac{1}{nh-k} \sum_{t=1}^{nh-k} \left(\widehat{\Delta_1 L_{t+k}^h} - \overline{\Delta_1 L_{nh}^h} \right) \left(\widehat{\Delta_1 L_t^h} - \overline{\Delta_1 L_{nh}^h} \right)$$

für $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ mit $N = nh \in \mathbb{N}$. ◇

Das folgende Korollar fasst die Ergebnisse zusammen:

KOROLLAR 3.3.14. *Es seien $\mu = \mathbb{E}(L_1)$ und $V = \text{Var}(L_1) < \infty$ sowie $\overline{\Delta_1 L_{nh}^h}$ und \widehat{V}_{nh}^h und $\widehat{\gamma}_{\Delta_1 L_{nh}^h}(h)$ die Schätzer wie in Definition 3.3.13. Dann gilt unter den Voraussetzungen 3.3.10:*

- (i) $\overline{\Delta_1 L_{nh}^h} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu$ für $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, sodass $nh \rightarrow \infty$,
- (ii) $\sqrt{nh} \left(\overline{\Delta_1 L_{nh}^h} - \mu \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V)$ für $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, sodass $nh \rightarrow \infty$ und $nh^2 \rightarrow 0$.

Ferner gilt nun auch für Schätzer zweiter Ordnung:

- (iii) $\widehat{V}_{nh}^h \xrightarrow{\mathcal{P}} V$ für $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, sodass $nh \rightarrow \infty$ und $nh^2 \rightarrow 0$
- (iv) $\widehat{\gamma_{\Delta_1 L_{nh}^h}}(k) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ für $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, sodass $nh \rightarrow \infty$,
- (v) $\sqrt{nh} \cdot \widehat{\gamma_{\Delta_1 L_{nh}^h}}(k) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V^2)$ für $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, sodass $nh \rightarrow \infty$ und $nh^2 \rightarrow 0$
und alle $k \geq 1$.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus Theorem 3.3.12 in Verbindung mit *Abdelrazeq, Ivanoff und Kulik* (2014, Corollary 3.13 und Theorem 3.14). \square

3.4. Simulationsergebnisse

Einige der konstruierten Schätzer sollen nun anhand einer Simulation der Prozesse getestet werden. Dazu wurden zwei Simulationsmethoden implementiert. Eine Möglichkeit der Simulation Lévy-getriebener Moving-Average Prozesse der Form

$$X_t = \int_{-\infty}^t f(t-s) dL_s$$

mit einer geeigneten Kernfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einem Lévy-Prozesses L findet sich etwa in den Artikeln von *Benth, Eyjolfsson und Veraart* (2014) und *Benth und Eyjolfsson* (2013). Diese bieten eine Alternative zu dem klassischen Euler-Verfahren, in dem die Existenz einer Funktion $\delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vorausgesetzt wird, welche die Gleichung

$$X_{t+h} = \delta(h)X_t + \int_t^{t+h} f(t-s)dL_s. \quad (3.57)$$

für $h > 0$ und $t \geq 0$ erfüllt. Dabei gewährleistet die Identität, die vorherigen Ergebnisse X_t der Simulation direkt zur Simulation von X_{t+h} wiederverwenden zu können. In der vorherigen Kapiteln zeigte sich bereits, dass eine solche Funktion bei oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen

$$\begin{aligned} X_t &= \int_{-\infty}^t \sin(a(t-s)) e^{-\lambda(t-s)} dL_s, \\ Y_t &= \int_{-\infty}^t \cos(a(t-s)) e^{-\lambda(t-s)} dL_s, \end{aligned}$$

nicht existiert, sodass eine separate Simulation dieser Methode der Prozesse X bzw. Y allenfalls durch eine Approximation der Funktion δ erfolgen kann. Ein möglicher Weg diesem Problem zu begegnen, liefern *Benth, Eyjolfsson und Veraart* (2014) mit Hilfe einer Methode, welche auf der Fourier-Transformation basiert. Das Verfahren wird hier

kurz vorgestellt. Zudem werden die benötigten Rechnungen durchführen, um die Methode zur Simulation von oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen anwenden zu können. Hierzu definieren wir zu einer geeigneten Kernfunktion f zunächst eine Funktion f_α mit

$$f_\alpha(x) := f(x)e^{\alpha x},$$

sodass $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$ für ein geeignetes $\alpha > 0$ erfüllt ist. Bei der Betrachtung oszillierender Ornstein-Uhlenbeck Prozesse kann etwa α mit $0 < \alpha < \lambda$ gewählt werden, sodass die geforderte Bedingung erfüllt ist. Die Fourier-Transformation dieser Funktion bezeichnen wir dann als

$$\widehat{f}_\alpha(y) = \int f_\alpha(x)e^{-ixy} dx$$

und treffen die Annahme, dass

$$\widehat{f}_\alpha \in L^1(\mathbb{R}) \tag{3.58}$$

gilt. Unter dieser Prämisse gewinnen wir die Funktion f selber durch die Identität

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}_\alpha(y)e^{(-\alpha+iy)x} dy$$

zurück. Unter Verwendung des Fubini-Theorems für stochastische Prozesse (vgl. *Basse und Pedersen, 2009*, Lemma 4.9) erhält man zudem für

$$\widehat{X}_\alpha(t, y) = \int_{-\infty}^t e^{(-\alpha+iy)(t-s)} dL_s$$

den Prozess X zurück durch die Formel

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}_\alpha(y) \widehat{X}_\alpha(t, y) dy. \tag{3.59}$$

Zur Existenz von Lévy-getriebenen Moving-Average Prozessen mit komplexwertigen Kernfunktionen verweisen wir abermals auf *Benth, Eyjolfsson und Veraart (2014)*.

Um den Prozess \widehat{X}_α zu simulieren, existiert nun wie gewünscht eine Funktion δ im Sinne von (3.57) und man erhält

$$\widehat{X}_\alpha(t+h, y) = e^{(iy-\alpha)h} \widehat{X}_\alpha(t, y) + e^{(iy-\alpha)h} \int_t^{t+h} e^{(iy-\alpha)(t-s)} dL_s.$$

Das Simulationsverfahren von *Benth und Eyjolfsson (2013)* hat nun den folgenden Aufbau:

- (i) Diskretisiere den Definitionsraum mittels geeigneter Punkte y_i mit $i = 1, \dots, N$ für $N \in \mathbb{N}$.
- (ii) Simuliere einen Zuwachs des verwendeten Lévy-Prozesses $L(t+h) - L(t)$.

- (iii) Für alle $i = 1, \dots, N$ simuliere $\widehat{X}_\alpha(t+h, y_i)$ mit Hilfe von $\widehat{X}_\alpha(t, y_i)$ und zur Simulation von $\int_t^{t+h} e^{(iy-\alpha)(t-s)} dL_s$ verwende

$$\int_t^{t+h} e^{(iy-\alpha)(t-s)} dL_s \approx L(t+h) - L(t).$$

- (iv) Bestimme $X(t)$ mit Hilfe der Inversionsformel (3.59).

Eine Analyse der Fehler des Verfahrens findet man ebenso im Artikel von *Benth, Eyjolfsson* und *Veraart* (2014). Wollen wir das vorgestellte Verfahren für die Kernfunktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sin(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \quad \text{und} \\ g(x) &:= \cos(ax) e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \end{aligned}$$

der oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozesse verwenden, stellen wir zunächst fest, dass die Bedingung (3.58) für die assoziierten Funktionen f_α und g_α verletzt sind.

Im Allgemeinen zeigt sich die folgende hinreichende Bedingung an eine Funktion h , damit diese (3.58) erfüllt: Ist die Funktion h zweimal-stetig differenzierbar mit

$$h', h'' \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

derart, dass zusätzlich die Funktionen h sowie h', h'' im Unendlichen verschwinden, so erfüllt die Funktion h die Bedingung $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ (vgl. *Folland*, 1999). Die Idee ist nun die Funktion f_α bzw. g_α auf der negativen Achse so zu einer Funktion \widetilde{f}_α bzw. \widetilde{g}_α zu modifizieren, dass obige Bedingungen erfüllt sind (vgl. *Benth* und *Eyjolfsson*, 2013). Hierbei gilt es zu bemerken, dass sich ein zeitstetiger Moving-Average Prozess der Form

$$X_t = \int_{-\infty}^t f(t-s) dL_s$$

selber nicht verändert, wenn die Kernfunktionen auf der negativen Achse abgeändert werden.

Hierzu definiere

$$\widetilde{f}_\alpha(x) := \begin{cases} f_\alpha(x) & x > 0 \\ p_\alpha(x) & x \in [-M, 0] \\ 0 & x < -M \end{cases}$$

für $M > 0$ mit einem Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^5 a_n x^n$ mit den Eigenschaften

$$p_\alpha(-M) = p'_\alpha(-M) = p''_\alpha(-M) = 0$$

und

$$p_\alpha(0) = f_\alpha(0), \quad p'_\alpha(0) = f'_\alpha(0), \quad p''_\alpha(0) = f''_\alpha(0)$$

sowie die Funktion \tilde{g}_α in analoger Weise. Für den Sinus-OUU-Prozess X ergibt sich das Polynom $\sum_{i=0}^5 b_i x^i$ mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \quad b_1 = a, \quad b_2 = a(\alpha - \lambda), \quad b_3 = \frac{3a(M(\alpha - \lambda) - 2)}{M^2}, \\ b_4 &= \frac{a(3M(\alpha - \lambda) - 8)}{M^3}, \quad b_5 = \frac{a(M(\alpha - \lambda) - 3)}{M^4}. \end{aligned}$$

Für den Kosinus-OUU-Prozess Y erhält man die Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \quad b_1 = -\lambda, \quad b_2 = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \lambda\alpha + \frac{1}{2}\lambda^2, \\ b_3 &= -\frac{3M^2(a^2 - \alpha^2 + 2\alpha\lambda - \lambda^2) + 12M(\alpha - \lambda) - 20}{2M^3}, \\ b_4 &= -\frac{3M^2(a^2 - \alpha^2 + 2\alpha\lambda - \lambda^2) + 16M(\alpha - \lambda) - 30}{2M^4}, \\ b_5 &= -\frac{M^2(a^2 - \alpha^2 + 2\alpha\lambda - \lambda^2) + 6M(\alpha - \lambda) - 12}{2M^5}, \end{aligned}$$

woraus sich für den Spezialfall $a = 0$ auch die Koeffizienten des Polynoms für den Ornstein-Uhlenbeck Prozess Z ergeben.

Ein zweite Möglichkeit der Simulation der Prozesse X und Y , welche ebenso dem Problem einer fehlenden Funktion δ in (3.57) begegnet, beruht auf dem Beispiel 1.3.8. Nach diesem gehört der Vektorprozess $(X, Y)^\top$ der Klasse zweidimensionaler Ornstein-Uhlenbeck Prozesse an, sodass sich eine simultane Simulation der Prozesse X und Y mit einem klassischen Euler-Verfahren anbietet. Wir berechnen wie in Beispiel 1.3.8 hierzu zunächst die Zerlegung und anschließend die Approximation unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme (1.25):

$$\begin{aligned} X_{t+h} &= f(h) \cdot Y_t + g(h) \cdot X_t + g(t+h) \int_t^{t+h} f(-s) dL_s + f(t+h) \int_t^{t+h} g(-s) dL_s \\ &\approx f(h) \cdot Y_t + g(h) \cdot X_t + (g(t+h)f(-t) + f(t+h)g(-t)) \cdot \Delta L_{t+h} \\ &= f(h) \cdot Y_t + g(h) \cdot X_t + f(h) \cdot \Delta L_{t+h}. \end{aligned}$$

Zur Näherung wurde dabei die Integralapproximation von *Protter* und *Talay* (1997) ausgenutzt, welche im Artikel „The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations“ zusätzlich eine Analyse des Fehlers liefern. Analog erhält man

$$Y_{t+h} \approx g(h) \cdot Y_t - f(h) \cdot X_t + g(h) \cdot \Delta L_{t+h}.$$

Die Prozesse X_{t+h} und Y_{t+h} können damit simultan mit Hilfe des Euler-Verfahrens auf Grundlage einer Simulation des Lévy-Zuwachses ΔL_{t+h} genähert werden.

In der Praxis zeigt sich, dass die simulierten Pfade der OOU-Prozesse im Vergleich beider Algorithmen ein nahezu deckungsgleiches Verhalten aufweisen, weshalb beide Verfahren wahlweise verwendet wurden. Eine detaillierte Analyse zum Vergleich beider Verfahren, bei denen nicht von der Existenz einer Funktion δ in (3.57) ausgegangen wird, findet sich in *Benth* und *Eyolfsson* (2013). Dieser Punkt wird an dieser Stelle daher nicht weiter vertieft.

Im Hinblick auf die Simulation einer großen Anzahl von Pfaden bietet das „Euler-Verfahren“ jedoch in der Praxis den Vorteil deutlich kürzerer Durchlaufzeiten. Die konstruierten Schätzer dieses Kapitels wurden in den folgenden Situation getestet:

BEISPIELE 3.4.1. (Simulationen)

Es seien $\mu := E(L_1)$ und $V := \text{Var}(L_1)$. Wir betrachten in diesem Beispiel sechs unterschiedliche Fälle bzw. Situationen. Anschließend werden die Ergebnisse der Simulation kurz zusammengefasst.

1. In dem ersten Testproblem wurden die Parameter a und λ des Sinus-OOU-Prozesses geschätzt. Hierzu verwenden wir die Schätzer aus Beispiel 3.1.11. Als treibender Prozess wurde ein NIG-Prozess mit den Parametern $\alpha = 1, \beta = 0, \mu_{NIG} = 1$ und $\delta = 1$ gewählt (vgl. *Barndorff-Nielsen*, 1997b bzw. Beispiel 1.1.6). Hierzu wurden jeweils $N = 2500$ Beobachtungen des Prozesses zu den Zeitpunkten $\{1, 2, \dots, 2500\}$ (das heißt mit einem Beobachtungsabstand $h = 1$) für eine Schätzung der Parameter a und λ der Kernfunktion genutzt. Zur Simulation wählen wir $a = 0.5$ und $\lambda = 0.014$.

Insgesamt wurden 10000 Pfade simuliert und daraus jeweils Schätzungen berechnet, um aus diesen anschließend den empirischen Mittelwert (MW), den Median (MED), die empirische Standardabweichung vom tatsächlichen Wert (STD) sowie das beobachtete 90%- Konfidenzintervall (90% - Int) zu bestimmen.

Die berechneten Kennwerte findet man in der Tabelle A.1 auf Seite 133 sowie das zugehörige Histogramm in Abbildung 3.1.

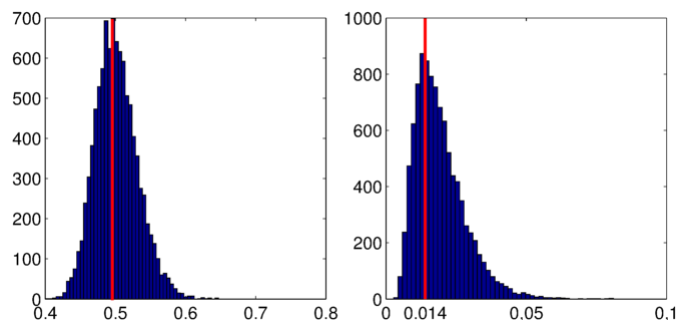


ABBILDUNG 3.1. Histogramm der Schätzungen aus Fall 1 mit $a = 0.5$ und $\lambda = 0.014$.

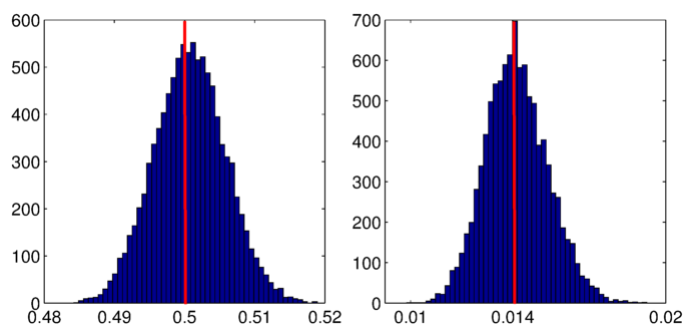


ABBILDUNG 3.2. Histogramm der Schätzungen aus Beispiel 2. (i) mit $a = 0.5$ und $\lambda = 0.014$.

2. Im zweiten Beispiel wurden alle drei Schätzer aus Beispiel 3.1.11 mit dem gleichen treibenden NIG-Prozess wie in Fall 1 getestet. In diesem Fall wurde die Beobachtungslänge jedoch auf $N = 10000$ erhöht.
 - (i) Für den Sinus-OOU-Prozess X wurden $a = 0.5$ und $\lambda = 0.014$ gewählt. Die Ergebnisse findet man in der Tabelle A.2 auf Seite 133 sowie ein Histogramm der Schätzungen in Abbildung 3.2.
 - (ii) Für den Kosinus-OOU-Prozess Y wurden $a = 1.5$ und $\lambda = 1$ gewählt. Die Ergebnisse findet man in der Tabelle A.3 auf Seite 133.
 - (iii) Für die Linearkombination $S(t) = a(X(t) + Y(t)) + \lambda Z(t)$ wurden $a = 0.5$ und $\lambda = 0.5$ gewählt. Die Ergebnisse findet man in der Tabelle A.4 auf Seite 134.

Die Bezeichnungen in den Ergebnistabellen sind wie in Fall 1.

3. Es wurde ein Pfad des Prozesses Y mit $a = 1$ und $\lambda = 1$ und einem treibenden NIG-Prozess und den Parametern $\alpha = 1, \beta = 0, \mu_{NIG} = 1$ und $\delta = 1$ simuliert.

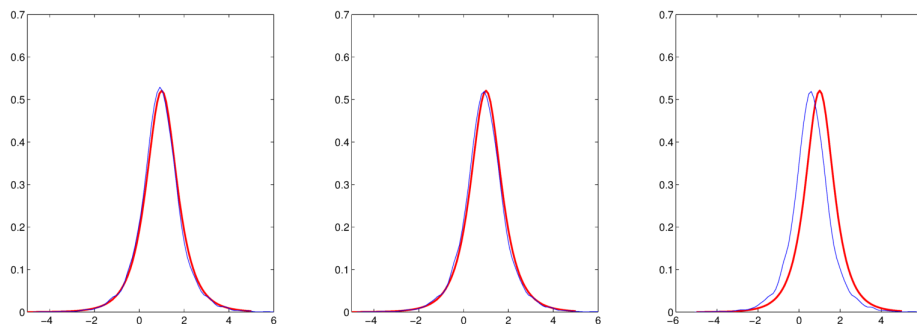


ABBILDUNG 3.3. Empirische Dichten (blau) und tatsächliche Dichte (rot) in drei Fällen (vgl. Beispiel 3.4.1).

Anschließend wurden auf der Grundlage von Beobachtungen des Prozesses Y zu den Zeitpunkten $\{1, 2, \dots, 10000\}$ die Schätzer $\widehat{\Delta L_{k,1}}$, $\widehat{\Delta L_{k,2}}$ und $\widehat{\Delta L_{k,3}}$ für $k = 2, \dots, 10000$ ausgewertet (vgl. 3.3.3). In diesem Fall ergeben sich die Parameter β_0 und β_1 der besten linearen Approximation durch:

$$\beta_1 = \frac{a^2 \lambda}{2(a^2 + 2\lambda^2)}, \quad \beta_0 = \mu \cdot \frac{a^2}{2(a^2 + \lambda^2)} - \beta_1 \cdot \left(\mu \cdot \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2} \right).$$

Es gilt dabei zu beachten, dass wir in Fall 1.2 für die Schätzung $\widehat{\Delta L_{k,2}}$ in 3.3.3 davon ausgehen, dass wir β_0 bestimmen können. Erst in Fall 1.3 zum Schätzer $\widehat{\Delta L_{k,3}}$ verzichten wir auf die Größe β_0 . Die Abbildung 3.3 zeigt jeweils die Dichte der zugehörigen NIG-Verteilung (rot) zusammen mit der empirischen Dichte (blau) der berechneten Schätzwerte (links: $\widehat{\Delta L_{k,1}}$, mittig: $\widehat{\Delta L_{k,2}}$, rechts: $\widehat{\Delta L_{k,3}}$).

4. Es wurden 10000 Schätzungen der Mittelwerte $\overline{\Delta L_{N,1}}$ und $c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}}$ (vgl. Definition 3.3.6) auf Grundlage von 10000 simulierten Pfaden wie im dritten Fall zuvor bestimmt. Allerdings wurde in diesem Fall ein treibender NIG-Prozess mit den Parametern $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\delta = 4$ und $\mu_{NIG} = 1$ verwendet. In diesem Fall ergibt sich der Erwartungswert des Lévy-Prozess durch $\mu = 3.309$. Die Tabelle A.5 auf Seite 134 zeigt die Kennwerte (mit den Bezeichnung wie im 1. Fall) der berechneten Schätzungen. Ferner findet man ein Histogramm der Ergebnisse in Abbildung 3.4.
5. Im gleichen Szenario wie in Fall 4 wurde der Versuch unternommen, die Varianz $V = 1.5396$ mit Hilfe des Schätzers \widehat{V}_{nh}^h zu bestimmen (vgl. Definition 3.3.13). Hierzu wurde im Vergleich zum Fall 4 die „Beobachtungsgitter“ zu $h = 0.1$ verfeinert. Die Tabelle A.6 zeigt die Ergebnisse.

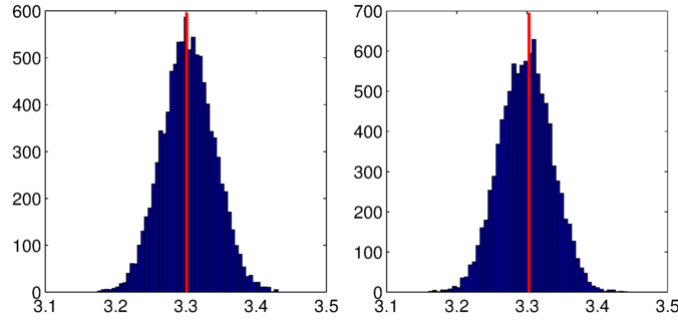


ABBILDUNG 3.4. Histogramm der Schätzungen $\overline{\Delta L_{N,1}}$ (links) und $c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}}$ (rechts) aus Beispiel 3.4.1, Fall 4.

6. In der letzten Simulation wurden die Schätzer aus Beispiel 3.1.11 für die Parameter $a = 1$ und $\lambda = 1$ der Kernfunktion eines Kosinus-Ornstein-Uhlenbeck Prozesses Y und der Schätzer $\overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}}$ aus Definition 3.3.6 für das erste Moment $\mu = 1$ des treibenden Lévy-Prozesses kombiniert. Wir gehen ferner davon aus, dass die Varianz V des treibenden NIG-Prozesses mit den Parametern $\alpha = 1, \beta = 0, \mu_{NIG} = 1$ und $\delta = 1$ bekannt sei. Die Grundlage hierzu bieten abermals Beobachtungen Y_1, Y_2, \dots, Y_N mit $N = 10000$ des Prozesses Y . Hierzu betrachten wir unter Verwendung von Satz 3.1.10 und Definition 3.3.6 zunächst die Schätzer

$$\overline{Y_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i, \quad \widehat{\sigma_N^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \overline{Y_N})^2, \quad \overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \widehat{\Delta L_{k,3}^{a,\lambda}}.$$

Anschließend lösen wir gemäß Lemma 1.3.9 und (3.44) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \overline{Y_N} &= \mu \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}, \\ \widehat{\sigma_N^2} &= V \frac{2\lambda^2 + a^2}{4\lambda(\lambda^2 + a^2)}, \\ \mu &= c(\lambda + 2\beta_1) \overline{Y_N} \end{aligned}$$

mit den von a und λ abhängigen Parametern

$$\beta_1 = \frac{a^2 \lambda}{2(a^2 + 2\lambda^2)} \quad \text{und} \quad c = \left(\frac{1}{\lambda + 2\beta_1} \right) \left(\frac{a^2 + \lambda^2}{\lambda} \right) \quad (\text{vgl. Satz 3.3.7 und Fall 3})$$

numerisch. Auf diese Weise gewinnen wir eine Näherung der Schätzwerte für die Parameter a, λ sowie μ . Wegen des hohen Rechenaufwands wurden in diesem Fall nur 5000 Schätzungen bestimmt. Die Ergebnisse findet man in Tabelle A.7 (mit den gleichen Bezeichnungen wie in Fall 1) auf Seite 134 sowie ein Histogramm in Abbildung 3.5.

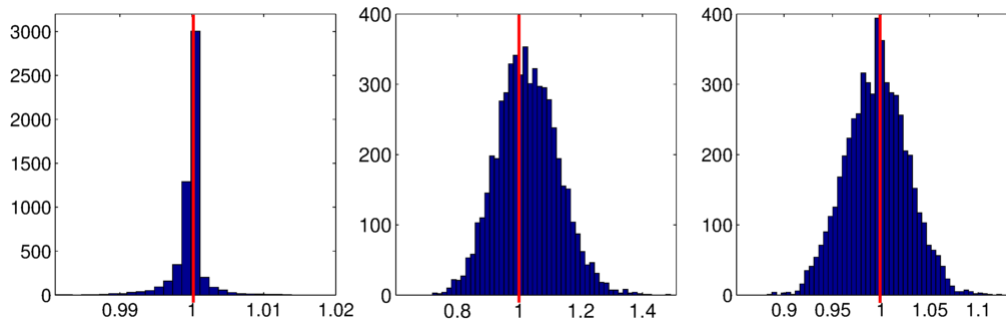


ABBILDUNG 3.5. Histogramm der Schätzungen für a (links), λ mittig, μ (rechts) aus Beispiel 3.4.1, Fall 6.

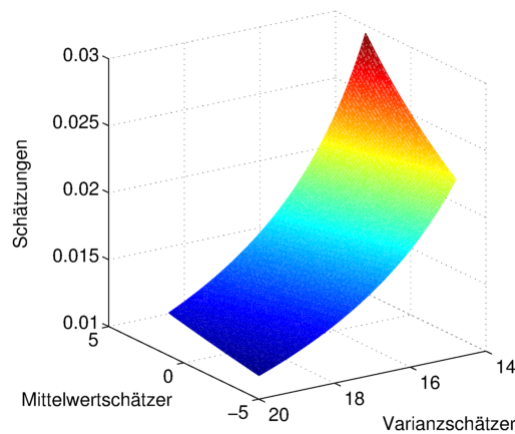


ABBILDUNG 3.6. Schätzfunktion $\hat{\lambda}$ für $\lambda = 0.014$ in Abhängigkeit des Mittelwertschätzers \bar{X}_N und des Varianzschatzers $\hat{\sigma}_N^2$ aus Fall 1 (i) und Fall 2.

Zum Abschluss werden die Ergebnisse kurz zusammengefasst:

Im ersten Fall zeigt sich, dass insbesondere der Parameter $\lambda = 0.014$ teilweise überschätzt wird. Die größeren Ausreißer erkennt man etwa im Histogramm der Abbildung 3.1. Das Auftreten sehr großer Schätzwerte für den Parameter λ erklärt sich etwa mit einem Blick auf die Abbildung 3.6. In dem vorgestellten Szenario ergeben sich der Mittelwert und die Varianz des Sinus-OOU-Prozesses durch

$$E(X_1) \approx 0.056, \quad \text{Var}(X_1) \approx 17.871$$

und führen durch Einsetzen in Beispiel 3.1.11 zum richtigen Schätzergebnis $\lambda = 0.014$. Das Bild zeigt, dass insbesondere eine unterschätzte Varianz zusammen mit einem überschätzten Mittelwert zu großen Veränderungen des Schätzwertes führt, während in allen anderen

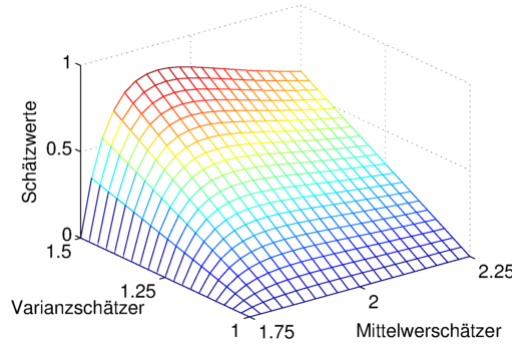


ABBILDUNG 3.7. Schätzfunktion \hat{a} für $a = 0.5$ in Abhängigkeit des Mittelwertschätzers \bar{S}_N und des Varianzschätzers $\widehat{\sigma}_N^2$ aus Fall 2 (iii).

Situationen der Graph „flach“ verläuft und die Schätzungen geringfügiger von dem richtigen Wert $\lambda = 0.014$ abweichen. Dies erklärt einige größere Abweichungen rechts des tatsächlichen Wertes λ im Histogramm 3.1. Dieser Effekt scheint bei einer größeren Beobachtungslänge $N = 10000$ wie in Fall 2. (i) nicht mehr aufzutreten. Das Histogramm 3.2 zeigt bereits eine Gestalt, die einer Normalverteilungsdichte ähnelt.

In Fall 2 wurde daher N in allen drei Testproblemen auf 10000 erhöht. In den ersten beiden Testproblemen von Beispiel 3.1.11 gelingt es daraufhin die Parameter a und λ in einem kleinen Intervall um die tatsächlichen Werte herum zu schätzen. Einige Probleme treten dabei in Fall (iii) bei der Linearkombination des Spotpreisprozesses auf, sodass hier der Mittelwert jeweils vom tatsächlichen Wert minimal abweicht. Auch hier liefert ein Blick auf die Schätzfunktion von \hat{a} für $a = 0.5$ in Abhängigkeit des Mittelwertschätzers \bar{S}_N und des Varianzschätzers $\widehat{\sigma}_N^2$ eine mögliche Erklärung (siehe Abbildung 3.7). In Fall 2 (iii) ergeben sich das tatsächliche erste Moment und die Varianz des Modells durch

$$E(S_1) = 2 \quad \text{und} \quad \text{Var}(S_1) = 1.225.$$

In Abbildung 3.7 zeigt sich, dass ein zu gering geschätzter Mittelwert in allen Fällen zu einem stark unterschätzten Parameter a führt, sodass das Problem in der Praxis in dieser Hinsicht „schlecht konditioniert“ scheint. Im Fall 2 (i) zur Schätzung des Parameter des Sinus-OOU-Prozesses werden nun die besten Ergebnisse erzielt (vgl. Tabelle A.2 und Abbildung 3.2). Den Problemen bei den Schätzungen kann somit mit einer höheren Beobachtungsanzahl begegnet werden.

In Fall 3 richtet sich das Interesse auf die Schätzer $\widehat{\Delta L_{k,1}}$, $\widehat{\Delta L_{k,2}}$ und $\widehat{\Delta L_{k,3}}$ aus 3.3.3. Dabei zeigen die empirischen Dichten der Schätzungen in Abbildung 3.3 wie die Theorie in Satz 3.3.7 zuvor, dass der dritte Schätzer $\widehat{\Delta L_{k,3}}$ systematisch von der tatsächlichen Dichte abzuweichen scheint, während die beiden anderen Schätzer die tatsächliche Dichte sehr gut abbilden.

In Fall 4 beschäftigten wir uns mit den Schätzern $\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}}$ und $c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}}$, welche in dem geschilderten Szenario sehr gute Ergebnisse erzielen (vgl. Tabelle A.5 und Abbildung 3.4). Insbesondere fällt dabei auf, dass auch der modifizierte Schätzer $c \cdot \overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}}$ sehr gut funktioniert und ähnliche gute Näherungen wie der natürliche Schätzer $\overline{\Delta L_{N,1}^{a,\lambda}}$ liefert. Die Beobachtung auf Grundlage der Gleichung $\widehat{\Delta L_{k,3}}$ statt $\widehat{\Delta L_{k,1}}$ (und damit die Schätzung des nicht zu beobachtenden Prozesses) sowie die Modifikation des Schätzers durch die Konstante c scheint sich somit in der Praxis auszuzahlen.

In Fall 5 wurde der Varianzschätzer \widehat{V}_{nh}^h aus Definition 3.3.13 untersucht. Hierbei zeigte sich in einem ersten Versuch, dass eine Verfeinerung des Beobachtungsabstandes zu $h = 0.1$ benötigt wurde, um gute Ergebnisse zu erzielen. Diese findet man in Tabelle A.6. Es gilt bei der Begutachtung der Kennwerte zu beachten, dass hier der Ausdruck $nh^2 = 1000$ noch sehr groß gewählt wurde und der Schätzer dennoch gute Schätzwerte liefert, obgleich der Nachweis der schwachen Konsistenz des Schätzers erst für den Fall $nh^2 \rightarrow 0$ gelungen ist (vgl. Korollar 3.3.14).

In Fall 6 wurden die Schätzer auf Grundlage von Satz 3.1.10 für die Parameter a und λ und der Schätzer $\overline{\Delta L_{N,3}^{a,\lambda}}$ aus Definition 3.3.6 für das erste Moment μ des treibenden Lévy-Prozesses kombiniert. Da es nicht gelingt für das assoziierte Gleichungssystem eine explizite Lösungsformel herzuleiten, wurde das System numerisch gelöst. Dies bedeutet, dass in der Praxis ein deutlich höherer numerischen Aufwand in Kauf genommen werden muss. Hierzu war es darüber hinaus notwendig, für das numerische Verfahren einen Startvektor (a_0, λ_0, μ_0) für den Algorithmus anzugeben. Dieser wurde für die drei Parameter bei jeweils jeder Realisierung einer Schätzung zufällig aus dem Intervall $[0, 2]$ gewählt. Hierbei beobachtet man in der Praxis, dass „schlecht gewählte“ Startwerte das Verfahren zum einen verlangsamen, zum anderen die Ergebnisse verschlechtern. Die Schätzungen in diesem Fall werden im Histogramm 3.5 illustriert. Hier zeigte sich ein bemerkenswert gutes Ergebnis für die Schätzungen des Parameters a , was unter Umständen auf das spezielle

numerische Verfahren in Zusammenhang mit der betrachteten Gleichung zurückzuführen ist. Aber auch die Parameter λ und μ werden gut geschätzt, wenngleich eine zu den anderen Fällen größere Streuung um den tatsächlichen Werten zu beobachten ist.

◇

KAPITEL 4

Zusammenfassung und Ausblick

Wir wollen die vorgestellten Ergebnisse kurz zusammenfassen. In dieser Arbeit wird ein neues Spotpreismodell auf Basis oszillierender Ornstein-Uhlenbeck Prozesse für Elektrizitätsmärkte vorgestellt. Hierzu definieren wir zwei zeitstetige Moving-Average Prozesse: Einen sogenannten Sinus- sowie Kosinus-Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Es zeigt sich, dass die Prozesse im Sinne von *Rajput* und *Rosinski* (1989) existieren. Sie weisen unendlich teilbare Randverteilungen auf und sind unter den getroffenen Voraussetzungen stets stationär. Ferner sind die Prozesse Semimartingale, wenn sie von einem natürlichen additiven Prozess angetrieben werden.

Im zweiten Kapitel der Arbeit nutzen wir die erarbeiteten Eigenschaften der Prozesse und konstruieren ein arithmetisches Spotpreismodell für Strommärkte. Hierzu betrachten wir eine Linearkombination von oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen und ermöglichen die Verwendung einer Superposition. Es zeigt sich, dass die typischen Charakteristiken der beobachteten Preiskurven in Elektrizitätsmärkten durch das entworfene Modell nachgebildet werden können. So weisen die Preise ein sehr volatiles Verhalten auf, welches sich etwa durch einige Sprünge in den Preisentwicklungen zeigt. Diese Eigenschaft wird etwa durch den verwendeten Kosinus-Ornstein-Uhlenbeck Prozess abgebildet, durch den Sprünge modelliert werden können. Ausgesprochen hohe oder niedrige Preise treten auf den Spotmärkten oft nur sehr kurz auf. Die schnelle Rückkehr zu einem durchschnittlichen Niveau wird in der Fachliteratur als „mean reverting-Effekt“ bezeichnet. Bei Elektrizitätspreisen tritt dieser Effekt insofern auf, dass die Preise schnell zu einem oszillierenden, saisonalen Trend zurückkehren. In der bisherigen Fachliteratur werden die Preisdaten daher vor der stochastischen Modellierung durch eine deterministische Trend-Funktion bereinigt. Ein Ziel dieser Arbeit war es, dem Problem der eindeutigen Identifizierbarkeit dieser Trend-Funktion zu begegnen und auf die Verwendung einer solchen zu verzichten. Die Dynamiken von oszillierenden Ornstein-Uhlenbeck Prozessen zeigen, dass sich der gewünschte „mean-reverting-Effekt“ modellieren lässt. So zeigt sich, dass der „Trend“ in den Dynamiken eines klassischen Ornstein-Uhlenbeck Prozesses nun als

zufälliger, oszillierender Prozess interpretiert werden kann. Aber auch das periodische, abklingende Verhalten der Abhängigkeitsstruktur der Spotpreise in Form der empirischen Autokorrelationsfunktion kann durch die analytische Autokorrelationsfunktion des Modells reproduziert werden. Zum Abschluss des Kapitels zeigen wir, dass sich für zwei mögliche Derivate eine explizite Preisformel zur Bewertung auf Basis des Modells herleiten lässt. Auch der in empirischen Studien nachgewiesene Effekt eines Vorzeichenwechsels in den Risikoprämien kann durch das vorgestellte Modell nachgebildet werden.

Im letzten Kapitel der Arbeit richtet sich unser Interesse auf die statistische Kalibrierung von Modellen, in denen oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse verwendet werden. Um eine Momentenmethode zur Konstruktion von Schätzern der Parameter der Kernfunktion solcher Prozesse nutzen zu können, müssen wir zunächst zeigen, dass die stationären Prozesse ergodisch sind. Um den Nachweis zu erbringen, verwenden wir sogenannte Korrelations-Kaskaden (vgl. *Magdziarz, 2009*). Die daraufhin konstruierten Schätzer motivieren uns darüber hinaus zu einer Verallgemeinerung der zentralen Grenzwertsätze von *Cohen* und *Lindner (2013)*. Nach dem Beweis des neuen Grenzwertsatzes sind wir im Stande, asymptotische Verteilungsaussagen zu den zuvor konstruierten Parameterschätzern zu treffen. Anschließend approximieren wir auf Grundlage von Beobachtungen der Prozesse den treibenden Lévy-Prozess. Hierzu betrachten wir unterschiedliche Beobachtungssituationen und untersuchen jeweils einen Schätzer für den Erwartungswert des Lévy-Prozesses. Es stellt sich heraus, dass dieser erwartungstreu, stark konsistent und asymptotisch normal ist. Unter hochfrequenten Beobachtungen gelingt es darüber hinaus, eine Approximation des Lévy-Prozesses zu gewinnen, die in einem gewissen L^2 -Sinne gegen den tatsächlichen Lévy-Prozess konvergiert, wenn das Beobachtungsintervall vergrößert und die Beobachtungsabstände verfeinert werden. Auf Grundlage des Resultats lässt sich mit Hilfe von *Abdelrazeq, Ivanoff* und *Kulik (2014)* zeigen, dass auch die empirische Varianz der Approximationen einen schwach konsistenten Schätzer für die Varianz des Lévy-Prozesses darstellt. Abschließend zeigt eine Simulationsstudie, dass die vorgestellten Schätzer in unterschiedlichen Situationen sehr gute Ergebnisse liefern.

In dieser Arbeit werden oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse im Kontext der Spotpreismodellierung von Elektrizitätsmärkten benutzt. Einige Erweiterungen des hier vorgestellte Modells wären denkbar. So könnte etwa ein multivariates Modell zusätzlich Wetterprognosen oder auch Einflussgrößen wie Kohle- und Gaspreise erfassen. Ebenso

wären darüber hinaus Prognosen für Kraftwerkseinsatzpläne von Interesse, die auf Grundlage von Transparenzdaten von Strombörsen erstellt werden könnten. Multivariate Verallgemeinerung von einigen in der Einleitung erwähnten Modelle finden sich bereits in der Fachliteratur. Exemplarisch erwähnen wir dazu einen Artikel von *Veraart* und *Veraart* aus dem Buch *Benth, Kholodnyi und Laurence* (2013, Seite 157-187), in dem ein multivariates Modell auf Basis von „semistationären Lévy-Prozessen“ betrachtet wird. Aber auch eine Anwendung oszillierender Ornstein-Uhlenbeck Prozesse zur Modellierung von stationären Daten in anderen Bereichen mit ähnlichen, oszillierenden Strukturen sind vorstellbar. Zur statistischen Kalibrierung des Spotpreismodells testen wir über diese Arbeit hinaus „Bayes-Methoden“. Hierzu kooperieren wir mit der Arbeitsgruppe von Gernot Müller von der Universität Augsburg. Die ersten Versuche lieferten bereits sehr vielversprechende Ergebnisse.

ANHANG A

Testergebnisse

Parameter	$a = 0.5, N = 2500, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.50140	0.49927	0.03029	0.45559, 0.55501]
Parameter	$\lambda = 0.014, N = 2500, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.01917	0.01744	0.00888	[0.00806, 0.03589]

TABELLE A.1. Testergebnisse der Schätzungen aus Beispiel 3.4.1 auf Seite 121 im Fall 1: Der Sinus-OOU-Prozess.

Parameter	$a = 0.5, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.50079	0.50077	0.00508	[0.49236, 0.50919]
Parameter	$\lambda = 0.014, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.01416	0.01410	0.00122	[0.01223, 0.01628]

TABELLE A.2. Testergebnisse der Schätzungen aus Beispiel 3.4.1 auf Seite 121 im Fall 2.(i): Der Sinus-OOU-Prozess.

Parameter	$a = 1.5, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	1.49561	1.49476	0.04123	[1.42854, 1.56453]
Parameter	$\lambda = 1, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	1.01057	1.00417	0.09515	[0.86230, 1.17481]

TABELLE A.3. Testergebnisse der Schätzungen aus Beispiel 3.4.1 auf Seite 121 im Fall 2. (ii): Der Kosinus-OOU-Prozess.

Parameter	$a = 0.5, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.48465	0.48323	0.03818	[0.42426, 0.54934]
Parameter	$\lambda = 0.5, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.51393	0.51993	0.05584	[0.42926, 0.61134]

TABELLE A.4. Testergebnisse der Schätzungen aus Beispiel 3.4.1 auf Seite 121 im Fall 2. (iii): Der Spotpreisprozess.

Parameter	$\mu = 3.309, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	3.30363	3.30298	0.03721	[3.24254, 3.36501]
Parameter	$\mu = 3.309, N = 10000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	3.29822	3.29864	0.03698	[3.23796, 3.35921]

TABELLE A.5. Testergebnisse der Schätzungen aus Beispiel 3.4.1 auf Seite 121 im Fall 4: Die Mittelwerte $\overline{\Delta L_{N,1}}$ (oben) und $\overline{\Delta L_{N,3}}$ (unten).

Parameter	$V = 1.5396, N = 10000, h = 0.1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	1.53429	1.53417	0.03535	[1.47657, 1.59370]

TABELLE A.6. Testergebnisse der Schätzungen aus Beispiel 3.4.1 auf Seite 121 im Fall 5: Die Varianz \hat{V} .

Parameter	$a = 1, N = 5000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.99959	0.99999	0.00264	[0.99566, 1.00073]
Parameter	$\lambda = 1, N = 5000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	1.02786	1.02385	0.09938	[0.86616, 1.15307]
Parameter	$\mu = 1, N = 5000, h = 1$			
Kennwerte	MW	MED	STD	90%-Int
Ergebnisse	0.99569	0.99612	0.03175	[0.94180, 1.03512]

TABELLE A.7. Testergebnisse der Schätzungen aus Beispiel 3.4.1 auf Seite 121 im Fall 6: Simultane Schätzung von a , λ und μ .

Parameter	ω_x^1	ω_y^1	ω_z^1	a_1	λ_1
Werte	0.01184	1.1960	1.3245	10.5789	0.4317
Parameter	ω_x^2	ω_y^2	ω_z^2	a_2	λ_2
Werte	2.0729	1.9951	1.3252	12.5562	0.1267
Parameter	ω_x^3	ω_y^3	ω_z^3	a_3	λ_3
Werte	4.4888	1.5394	0.0514	6.2807	0.2257
Parameter	ω_x^4	ω_y^4	ω_z^4	a_4	λ_4
Werte	0.78012	2.9556	9.2179	18.5497	0.8429

TABELLE A.8. Wahl der Parameter zur Anpassung der analytischen Autokorrelationsfunktion in Abbildung 2.3 auf Seite 35. Hierbei wurden die Varianzen V_i des i -ten Lévy-Prozess sowie die Gewichte c_i in (2.2) des Spotpreismodells für $i = 1, 2, 3, 4$ vorab 1 gesetzt.

ANHANG B

Matlab - Quellcode

Euler - Verfahren (vgl. Kapitel 3.4)

```
function [S] = SimEuler(a,lambda,wx,wy,wz,tMin,tMax,dt)

% Eingabeparameter:
% a, lambda, wx, wy, wz : Parameter der Kernfunktion
% tmin, tmax, dt       : Intergrationsintervall und Schrittweite
% Ausgabeparameter:
% S : Simulierter Pfad des Spotpreisprozesses

t = tMin:dt:tMax; T = length(t);

% Kern - Funktionen

f=@(y) (sin(a.*y).*exp(-lambda.*y));
g=@(y) (cos(a.*y).*exp(-lambda.*y));
h=@(y) (exp(-lambda.*y));

% Treibender NIG - Prozess

alpha = 1; beta = 0; mu = 1; delta = 1;
dL = nigrnd(alpha,beta,mu*dt,delta*dt,1,T);

% Euler - Verfahren

X = zeros(1,T); Y = zeros(1,T); Z = zeros(1,T); S = zeros(1,T);

for j=2:T
    X(j) = g(dt)*X(j-1) + f(dt)*Y(j-1) + f(dt)*dL(j-1);
    Y(j) = g(dt)*Y(j-1) - f(dt)*X(j-1) + g(dt)*dL(j-1);
    Z(j) = h(dt)*Z(j-1) + h(dt)*dL(j-1);
end

S = wx.*X + wy.*Y + wz.*Z;
```

Fourier - Verfahren (vgl. Kapitel 3.4)

```

function[Prozess]=SimFourier(a,lambda,Fkt,tMax,dt)

% Algorithmus von F.E. Benth und H. Eyjolfsson (2011)
% angewendet zur Simulation oszillierende Ornstein-Uhlenbeck Prozesse
%
% Eingabeparameter:
% a, lambda      : Parameter der Kernfunktion
% Fkt            : Simulation des
%                1- Sinus - OOU - Prozesses
%                2- Kosinus - OOU - Prozesses
%                3- klassischer OU-Prozess
% tmin, tmax, dt : Integrationsintervall und Schrittweite
%
% Ausgabeparameter:
% Prozess        : Simulierter Pfad des Prozesses 1,2 oder 3

% Parameter für numerische Simulation
tMin    = 0;
t       = tMin:dt:tMax;
T       = length(t);
alpha   = 0.9*lambda;
i       = sqrt(-1);
M       = 25;

% Hilftskoeffizienten:
b = lambda - alpha;
c = M*(alpha - lambda);
d = (a^2-alpha^2+2*alpha*lambda-lambda^2);
e = (2*alpha*lambda-alpha^2-lambda^2);

% Koeffizienten der Polynome:
switch Fkt
    case 1

% Sinus - OOU - Prozess
% Fourier Trafo von f_alpha
fF=@(y) a./(a^2+b^2-y.^2-2*i*b.*y);
% Polynom - Koeffizienten
a5= a*(c-3)/M^3;      a4= a*(3*c-8)/M^3;  a3= 3*a*(c-2)/M^2;
a2= a*(alpha-lambda); a1= a;             a0= 0;

```

```

case 2
% Kosinus - OOU - Prozess
% Fourier - Transformation von g_alpha
fF=@(y) (i.*y+b)./(a^2+b^2-y.^2-2*i*b.*y);
% Polynom - Koeffizienten
a5 = -(M^2*d+6*c-12)/(2*M^5);      a4 = -(3*M^2*d +16*c-30)/(2*M^4);
a3 = -(3*M^2*d +12*c-20)/(2*M^3);  a2 = -1/2*d^2;
a1 = -lambda;                      a0 = 1;

case 3
% Ornstein - Uhlenbeck - Prozess
% Fourier - Transformation von h_alpha
fF=@(y) 1./(i.*y+b);
% Polynom - Koeffizienten
a5 = -(M^2*e+6*c-12)/(2*M^5);      a4 = -(3*M^2*e +16*c-30)/(2*M^4);
a3 = -(3*M^2*e +12*c-20)/(2*M^3);  a2 = -1/2*e^2;
a1 = -lambda;                      a0 = 1;
end

% Ableitungen des Polynoms:
p = @(u) a0 + a1*u + a2*u.^2 + a3*u.^3 + a4*u.^4 + a5*u.^5;
p1 = @(u) a1 + 2*a2*u + 3*a3*u.^2 + 4*a4*u.^3 + 5*a5*u.^4;
p2 = @(u) 2*a2 + 6*a3*u + 12*a4*u.^2 + 20*a5*u.^3;
p3 = @(u) 6*a3 + 24*a4*u + 60*a5*u.^2;
p4 = @(u) 24*a4 + 120*a5*u;
p5 = @(u) 120*a5;

% Fourier - Transformation des Polynoms:
pF = @(y) (a0 - exp(-M*(alpha -i.*y)).*p(-M))./(alpha -i.*y)...
-(a1 - exp(-M*(alpha -i.*y)).*p1(-M))./(alpha -i.*y).^2 ...
+(2*a2 - exp(-M*(alpha -i.*y)).*p2(-M))./(alpha -i.*y).^3 ...
-(6*a3 - exp(-M*(alpha -i.*y)).*p3(-M))./(alpha -i.*y).^4 ...
+(24*a4 - exp(-M*(alpha -i.*y)).*p4(-M))./(alpha -i.*y).^5 ...
-(120*a5 - exp(-M*(alpha -i.*y)).*p5(-M))./(alpha -i.*y).^6;

% Gesamte Fourier - Transformation der Kernfunktion_alpha
% mit zugehörigem Polynom
FktFourier = @(y) pF(y) + fF(y);

```

```
% Treibender NIG - Prozess
alpha1 = 1; beta = 0; mu = 1; delta = 1;
dL = nigrnd(alpha1,beta,mu*dt,delta*dt,1,T);

% Fourier Definitionsbereich:
dy = 0.25;
y = -M:dy:M;
FktFourierWerte = FktFourier(y);

% Simulation:
XDach = zeros(length(y),T);
for j=2:T
    XDach(:,j) = exp((i*y - alpha)*dt).*(XDach(:,j-1)' + dL(j-1));
end
Prozess = real(1/(2*pi)*dy*FktFourierWerte*XDach);
```

Literatur

- Abdelrazeq, I., B. Ivanoff und R. Kulik (2014). „Model verification for Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes“. In: *Electron. J. Stat.* 8.1, S. 1029–1062.
- Barlow, M. T. (2002). „A diffusion model for electricity prices“. In: *Mathematical Finance* 12.4, S. 287–298.
- Barndorff-Nielsen, O. E. und A. Basse-O’Connor (2011). „Quasi Ornstein-Uhlenbeck processes“. In: *Bernoulli* 17.3, S. 916–941.
- Barndorff-Nielsen, O. E. und N. Shephard (2001). „Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics“. In: *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 63.2, S. 167–241.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997a). „Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling“. In: *Scandinavian Journal of Statistics* 24.1, S. 1–13.
- (1997b). „Processes of normal inverse Gaussian type“. In: *Finance and Stochastics* 2.1, S. 41–68.
- Barndorff-Nielsen, O. E., F. E. Benth und A. Veraart (2010). „Modelling energy spot prices by Lévy semistationary processes“. In: *CREATES Research Paper* 2010.18.
- Basse, A. und J. Pedersen (2009). „Lévy driven moving averages and semimartingales“. In: *Stochastic Processes and their Applications* 119.9, S. 2970–2991.
- Bauer, H. (1992). *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter Lehrbuch. Bod Third Party Titles.
- (2002). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. De Gruyter Lehrbuch. de Gruyter.
- Benth, F. E., J. Benth und S. Koekebakker (2008). *Stochastic Modeling Of Electricity And Related Markets*. Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. 11. World Scientific, Singapore.
- Benth, F. E., H. Eyjolfsson und A. Veraart (2014). „Approximating Lévy Semistationary Processes via Fourier Methods in the Context of Power Markets“. In: *SIAM Journal on Financial Mathematics* 5, S. 71–98.
- Benth, F. E., V. A. Kholodnyi und P. Laurence (2013). *Quantitative Energy Finance: Modeling, Pricing, and Hedging in Energy and Commodity Markets*. Springer New York.

- Benth, F. E. und H. Eyjolfsson (2013). „Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VII: Centro Stefano Franscini, Ascona, May 2011“. In: Basel: Springer Basel. Kap. Stochastic Modeling of Power Markets Using Stationary Processes, S. 261–284.
- Benth, F. E., J. Kallsen und T. Meyer-Brandis (2007). „A Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Process for Electricity Spot Price Modeling and Derivatives Pricing“. In: *Applied Mathematical Finance* 14.2, S. 153–169.
- Benth, F. E., C. Klüppelberg, G. Müller und L. Vos (2014). „Futures pricing in electricity markets based on stable CARMA spot models“. In: *Energy Economics* 44.C, S. 392–406.
- Benth, F. E. und C. Sgarra (2012). „The Risk Premium and the Esscher Transform in Power Markets“. In: *Stochastic Processes and Applications* 30.1, S. 20–43.
- Bickel, P. und K. Doksum (2001). *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. Holden-Day series in probability and statistics Bd. 1. Prentice Hall.
- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. New York, NY: Wiley.
- Bogachev, V. (2006). *Measure Theory*. Springer Berlin Heidelberg.
- Brockwell, P. J. (2001). „Lévy-Driven Carma Processes“. In: *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 53.1, S. 113–124.
- Brockwell, P. J., R. A. Davis und Y. Yang (2007). „Estimation for non-negative Lévy driven Ornstein-Uhlenbeck processes“. In: *Journal of Applied Probability* 44.4, S. 977–989.
- Brockwell, P. J. und R. A. Davis (1986). *Time Series: Theory and Methods*. New York, USA: Springer-Verlag, Inc.
- Cartea, Á. und M. Figueroa (2005). „Pricing in Electricity Markets: A Mean Reverting Jump Diffusion Model with Seasonality“. In: *Applied Mathematical Finance* 12.4, S. 313–335.
- Cohen, S. und A. Lindner (2013). „A central limit theorem for the sample autocorrelations of a Lévy driven continuous time moving average process“. In: *Journal of Statistical Planning and Inference* 143.8, S. 1295–1306.
- Cont, R. und P. Tankov (2004). *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC financial mathematics series. Boca Raton (Fla.), London, New York: Chapman & Hall/CRC.
- Eliazar, I. und J. Klafter (2007). „Correlation cascades of Lévy-driven random processes“. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 376, S. 1–26.
- Elstrodt, J. (1996). *Maß- und Integrationstheorie*. Springer New York.

- Folland, G. B. (1999). *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Fuchs F, . und R. Stelzer (2013). „Mixing conditions for multivariate infinitely divisible processes with an application to mixed moving averages and the supOU stochastic volatility model“. In: *ESAIM: Probability and Statistics* 17, S. 455–471.
- Garcia, I., C. Klüppelberg und G. Müller (2011). „Estimation of stable CARMA models with an application to electricity spot prices“. In: *Statistical Modelling* 11.5, S. 447–470.
- Geman, H. und A. Roncoroni (2006). „Understanding the Fine Structure of Electricity Prices“. In: *The Journal of Business* 79.3, S. 1225–1262.
- Glasser, L. et al. (2012). „The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 22: Bessel- K functions.“ English. In: *Sci., Ser. A, Math. Sci. (N.S.)* 22, S. 129–151.
- Jacod, J. und A. Shiryaev (1987). *Limit theorems for stochastic processes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin, New York: Springer.
- Kallenberg, O. (2002). *Foundations of modern probability*. Probability and its applications. New York, Berlin,, Paris: Springer.
- Keynes, J. M. (1930). *A treatise on money*. Macmillan London.
- Klenke, A. (2008). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg.
- Klüppelberg, C., T. Meyer-Brandis und A. Schmidt (2010). „Electricity spot price modelling with a view towards extreme spike risk“. In: *Quantitative Finance* 10.9, S. 963–974.
- Kobe, D. und J. Woerner (2015). „Oscillating Ornstein-Uhlenbeck processes and modelling of electricity prices“. In: *Discussion papers 37/15 SFB 823 (Preprint)*.
- Lucia, J. und E. Schwartz (2002). „Electricity Prices and Power Derivates: Evidence from the Nordic Power Exchange“. In: *Review of Derivates Research* 5, S. 5–50.
- Magdziarz, M. (2009). „Correlation cascades, ergodic properties and long memory of infinitely divisible processes“. In: *Stochastic Processes and their Applications* 119.10, S. 3416–3434.
- Marquard, T. (2006). „Fractional Lévy processes with an application to long memory moving average processes“. In: *Bernoulli* 12.6, S. 1099–1126.
- Maruyama, G. (1970). „Infinitely divisible processes“. In: *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 15.1, S. 1–2.
- Masuda, H. (2004). „On multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes driven by a general Lévy process“. In: *Bernoulli* 10.1, S. 97–120.

- Misiorek, A., S. Trueck und R. Weron (2006). „Point and Interval Forecasting of Spot Electricity Prices: Linear vs. Non-Linear Time Series Models“. In: *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 10.3, S. 1–36.
- Muth, J. A. (1961). „Rational Expectations and the Theory of Price Movements“. In: *Econometrica* 29.6, S. 315–335.
- Pavel, D., S. Lawford und L. Valerie (2006). „Risk Premia in Electricity Forward Prices“. In: *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 10.3, S. 1–24.
- Protter, P. und D. Talay (1997). „The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations“. In: *Ann. Probab.* 25.1, S. 393–423.
- Protter, P. E. (2004). *Stochastic integration and differential equations*. Applications of mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Rajput, B. und J. Rosinski (1989). „Spectral representations of infinitely divisible processes“. In: *Probability Theory and Related Fields* 82, S. 451–487.
- Rosinski, J. und T. Zak (1996). „Simple conditions for mixing of infinitely divisible processes“. In: *Stochastic Processes and their Applications* 61.2, S. 277–288.
- (1997). „The Equivalence of Ergodicity and Weak Mixing for Infinitely Divisible Processes“. In: *Journal of Theoretical Probability* 10.1, S. 73–86.
- Sato, K.-I. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press.
- (2004). „Stochastic integrals in additive processes and application to semi-Lévy processes“. In: *Osaka Journal of Mathematics* 41.1, S. 211–236.
- (2006). „Additive processes and stochastic integrals“. In: *Illinois J. Math.* 50.1-4, S. 825–851.
- Schlemm, E. und R. Stelzer (2012). „Multivariate CARMA processes, continuous-time state space models and complete regularity of the innovations of the sampled processes“. In: *Bernoulli* 18.1, S. 46–63.
- Schnurr, A. und J. Woerner (2011). „Well-balanced Lévy driven Ornstein-Uhlenbeck processes“. In: *Statistics & Risk Modeling* 28.4, S. 343–357.
- Schwartz, E. S. (1997). „The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging“. In: *The Journal of Finance* 52.3, S. 923–973.
- Van der Vaart, A. W. (1998). *Asymptotic statistics*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press.
- Weron, A. und M. Magdziarz (2010). „Generalization of the Khinchin Theorem to Lévy Flights“. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (26).

Weron, R. (2014). „Electricity price forecasting: A review of the state-of-the-art with a look into the future“. In: *International Journal of Forecasting* 30.4, S. 1030 –1081.