ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 35.2 (2017): 89-107
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

# Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas

## Linear transformation scheme: construction of abstract objects from the internalisation of concrete actions

Doris Evila González Rojas, Solange Roa Fuentes
*Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia*
dorisgon@matematicas.uis.edu.co, sroa@matematicas.uis.edu.co

RESUMEN • En este artículo se expone un modelo cognitivo denominado por la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) *descomposición genética*, que describe las estructuras y mecanismos mentales que un individuo debe desarrollar para comprender el concepto de transformación lineal. Se analiza cómo la definición funcional de la transformación lineal, su representación matricial y geométrica se relacionan a través del concepto de base ordenada. El esquema descrito a través de las diferentes relaciones entre estructuras y mecanismos mentales señala la importancia de realizar acciones sobre objetos concretos (representaciones gráficas de funciones del plano en él mismo) para lograr objetos abstractos. Este modelo permite la construcción de un esquema que puede evolucionar gracias a las diferentes experiencias de un individuo con situaciones matemáticas más sofisticadas.

PALABRAS CLAVE: transformación lineal; base; representación matricial; teoría APOE; esquema.

ABSTRACT • This article show a cognitive model called by the APOS theory (acronym for Action, Process, Object, Scheme) *genetic decomposition*, which describes the mental structures and mechanisms that a person must develop to understand the concept of linear transformation. We discussed how the functional definition of linear transformation and its matrix and geometric representation are related through the ordered basis concept. Scheme described through the different relationships between mental structures and mechanisms show the importance of actions on concrete objects (graphic representations of plane functions in itself) to achieve abstract objects. This model allows the construction of a scheme that can evolve thanks to the different experiences of an individual with more sophisticated mathematical situations.

KEYWORDS: linear transformation; base; matrix representation; APOS theory; scheme.

Recepción: julio 2016 • Aceptación: febrero 2017 • Publicación: junio 2017

## INTRODUCCIÓN

Estudiantes de programas de Ingeniería, Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas, entre otros, se enfrentan por primera vez con un curso de álgebra lineal en el primer año de universidad. Algunas investigaciones muestran que esta experiencia puede ser frustrante. Al respecto Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) plantean que: «es muy claro que muchos estudiantes tienen la sensación de haber aterrizado en un planeta nuevo y no son capaces de encontrar su camino en ese nuevo mundo» (p. 86).

En Francia, entre 1987 y 1994, se desarrollaron un conjunto de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Dorier (1997), Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (1997), y Sfard (1994) mostraron las serias y profundas dificultades que presentan los estudiantes al intentar comprender conceptos básicos de álgebra lineal, principalmente por la naturaleza abstracta y formal de esta área de las matemáticas. De allí surgen constructos teóricos como *Obstacle of Formalism* y *Meta Lever*; el primero, de orden cognitivo, explica el tipo de dificultades asociadas con el lenguaje del álgebra lineal, y el segundo plantea estrategias sobre el tipo de actividades que debe abordar un estudiante.

Jean Dorier y Anna Sierpinska publican en 2001 una recopilación de los trabajos que hasta el momento se venían desarrollando sobre la didáctica del álgebra lineal. Allí se propone la existencia de dos problemáticas principales: dificultades conceptuales (asociadas con la naturaleza del álgebra lineal: generalizadora y unificadora) y dificultades cognitivas (por la clase de pensamiento que se requiere para entender el álgebra lineal). Estas investigaciones toman problemáticas específicas, por ejemplo de orden epistemológico (Dorier 2000*a*; 2000*b*), otras asociadas con el lenguaje geométrico, algebraico y abstracto del álgebra lineal (Hillel, 2000; Sierpinska, 2000; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999) o con los registros gráfico, tabular y simbólico a través de los cuales es posible representar conceptos allí tratados (Artigue, Chatier y Dorier, 2002).

Por otra parte y más recientemente, en Chile, México y Colombia se han desarrollado diferentes investigaciones desde perspectivas particulares que han buscado determinar no solo el origen de las dificultades de los estudiantes, sino, además, formas de superarlas. En particular Ed Dubinsky y miembros del *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés) han elaborado y consolidado lo que hoy conocemos como teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Actualmente contamos con una lista de conceptos de álgebra lineal que han sido analizados desde esta perspectiva, por ejemplo: la representación matricial de la transformación lineal (Maturana y Parraguez, 2013; Maturana, Parraguez y Rodríguez, 2014); el concepto de espacio vectorial (Parraguez y Oktaç, 2010), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, 2012); conjunto generador y espacio generado (Kú, 2012); Base (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008); sistemas de ecuaciones lineales (Ramírez, 2008); matriz cambio de base (Mendoza, Rodríguez y Roa-Fuentes, 2015; Mendoza, 2015); valores y vectores propios (Salgado y Trigueros 2015); entre otros. Sin embargo, no se tiene un consenso sobre cuáles son los temas más importantes ni el enfoque con que deben realizarse los cursos básicos de álgebra lineal. Algunas universidades cuentan con un contenido específico para esta materia, pero las formas de desarrollarla son diversas y en muchos casos tienen un acercamiento básico al trabajar solo con vectores en $\mathbb{R}^n$ y matrices para estudiantes de ingeniería.

En lo que respecta a la transformación lineal, es de destacar su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, ya que le permite a un estudiante, por ejemplo, ampliar el esquema de función que ha logrado previamente en cursos de cálculo, coordinar las diferentes representaciones de un objeto matemático (funcional, geométrica, matricial), entre otros. Aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la transformación lineal han sido estudiados desde la Matemática Educativa; en la siguiente sección se destacan algunos que fundamentan los resultados presentados en este escrito.

Con este panorama buscamos estudiar la construcción del esquema de transformación lineal tomando como elemento principal de relación el concepto de base ordenada. A partir de él se analizan las estructuras y los mecanismos que forman parte del esquema y que pueden dar lugar a la construcción de la representación matricial y geométrica de la transformación lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir cada una de las representaciones mencionadas permite establecer la evolución del esquema de este concepto a través de la descripción de los niveles intra, inter y trans.

## EL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

La transformación lineal ha sido un tema ampliamente estudiado desde diferentes perspectivas en Matemática Educativa. Por ejemplo, Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) investigaron cómo introducir los conceptos de vector, transformación y transformación lineal a través de la implementación del software Cabri-Géomètre II. Sierpinska *et al.* (1999) muestran que los estudiantes usaron el término transformación al considerar la relación dinámica que se establece en la pantalla del computador entre el vector $v$ y $Tv$. Este dinamismo fue interpretado por los estudiantes como: la dilatación del vector libre, acompañada por una dilatación proporcional del vector dependiente. Los estudiantes llamaron transformación lineal a la dilatación o compresión de los vectores, quedando oculta la suma vectorial.

Siguiendo con este trabajo, Uicab y Oktaç (2006) abordan el problema de extensión lineal que consiste en determinar una trasformación lineal (en el plano) a partir de las imágenes de dos vectores no colineales; este problema establece conexiones entre los conceptos de transformación lineal y base, conexiones que difícilmente los estudiantes logran identificar. Los principales resultados de esta investigación muestran que los estudiantes tuvieron problemas al encontrar la transformación lineal $T$, ya que no lograron expresar $v$ como combinación lineal de los vectores dados $v_1$ y $v_2$ (Uicab y Oktaç, 2006). En este caso los estudiantes no logran conectar los conceptos de base y transformación lineal, «es como si pensaran sólo en el concepto de transformación lineal y todas sus estrategias giraran en torno a dicha noción» (Uicab y Oktaç, 2006: 481). Otro resultado interesante en esta investigación es que algunos estudiantes trataron de encontrar la transformación lineal a partir de la combinación de dos movimientos simples como rotación y dilatación, sin obtener resultados favorables. En este caso se puede pensar que la construcción del concepto se asocia con aquello que constituye un cambio y que puede ser descrito a partir de transformaciones conocidas.

En la literatura es posible encontrar trabajos que aluden a la representación geométrica de transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ a partir de su representación matricial. Por ejemplo, Klasa (2001) usa dicha representación en el problema de extensión lineal empleando los software Derive y Maple. Klasa (2001) presenta a los estudiantes un conjunto de matrices $2\times 2$ junto con una matriz $2\times n$ que representa un polígono cerrado con $n$ vértices, incluido el origen . La actividad consiste en describir el polígono inicial, transformarlo a partir de la matriz dada y posteriormente describir el polígono final (la imagen del polígono inicial). Al repetir más de una vez la misma tarea, los estudiantes observan que al aplicar las diferentes transformaciones lineales (matrices) al polígono se preserva el paralelismo entre sus segmentos y la imagen del origen (siempre igual al origen); entre otras características de carácter geométrico. En el trabajo de Klasa la representación geométrica jugó un papel importante para mostrar que la transformación lineal no consiste solo en dilatar, comprimir o rotar vectores en el plano. En este caso la relación entre la representación matricial y geométrica de la transformación permite el análisis de características propias de la función.

La construcción del concepto de transformación lineal, en muchos casos, es afectada por ideas intuitivas que los individuos desarrollan en contextos no escolares. Molina y Oktaç (2007), por ejemplo, muestran que los estudiantes, al trabajar con representaciones geométricas de dicho concepto, lo relacionan específicamente con el «movimiento de vectores». El trabajo realizado por estos autores muestra que para los estudiantes las transformaciones lineales representan: expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones entre estas, excluyendo cualquier otro tipo de transformación lineal, por ejemplo, las proyecciones.

Las ideas expuestas señalan la necesidad de investigar sobre las diferentes formas de representar la transformación lineal y cómo estas propician la comprensión que un individuo logra de este concepto. Ramírez, Romero y Oktaç (2014), por ejemplo, analizan la transformación lineal tomando cuatro registros de representación: gráfico sintético, gráfico cartesiano, algebraico y matricial. Los autores concluyen que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente frente a una situación matemática buscan el registro más apropiado, el que permite desarrollar mejores estrategias.

Cada una de las investigaciones descritas se centra en encontrar las dificultades de los estudiantes al abordar situaciones que involucran el estudio de transformaciones lineales, dando un lugar importante a su representación geométrica y su relación con la representación matricial. Esto da paso a la formulación del objetivo de la investigación que se reporta en este escrito: construir un modelo cognitivo del concepto transformación lineal que tome como elementos fundamentales su forma funcional, matricial y geométrica y estudie las relaciones entre ellas gracias al concepto de base ordenada.

Para esto se describe, en términos de la teoría APOE, un esquema de la transformación lineal que parte de la forma funcional para dar paso a la construcción de la representación matricial. Además, dicho esquema incluye la representación geométrica de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ como un subesquema.

A continuación se describen los principales constructos de dicha teoría para dar paso a la descripción del esquema.

## UN BOSQUEJO DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE es una teoría constructivista que toma como fundamento el concepto de *abstracción reflexiva*, que fue usado por Piaget para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños (Dubinsky, 1991). Esta teoría contempla seis tipos de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión y tematización, que son denominados en dicha como mecanismos mentales. Estos mecanismos propician la construcción de las diferentes estructuras (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) que sobre un concepto y/o noción matemática puede lograr un individuo.

Para la teoría APOE, la construcción de conocimiento matemático está condicionada por el «paso» que un individuo puede dar entre las acciones, los procesos y los objetos para lograr una organización general de su conocimiento matemático en esquemas. La coherencia de los esquemas de un individuo le permite decidir cómo abordar una determinada situación matemática. Por tanto esta teoría es especialmente útil para describir la forma como los estudiantes pueden construir un concepto o noción matemática exitosamente a partir de las relaciones que logren establecer entre las «viejas» y nuevas estructuras (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

La herramienta que permite describir la manera como se construye el conocimiento es la *descomposición genética*, ya que describe aspectos favorables de una porción de conocimiento matemático, que además se espera determine aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de las matemáticas (Arnon *et al.*, 2014; Asiala *et al.*, 1996). La descomposición genética es un modelo cognitivo que explica las relaciones que se deben generar entre las estructuras y los mecanismos mentales para que un individuo logre construir un concepto y/o noción matemática.

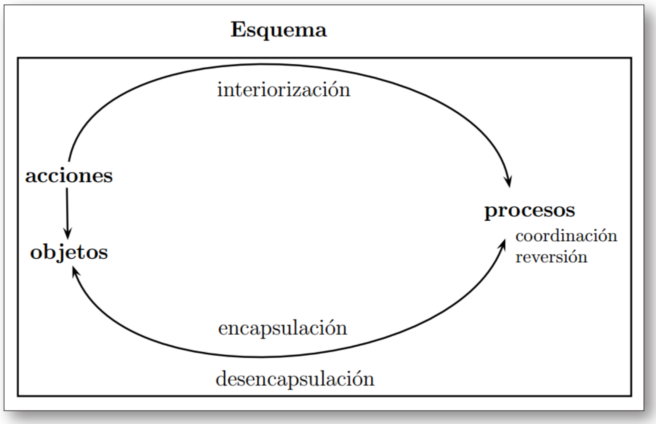


Fig. 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático (Arnon *et al.*, 2014: 18).

Como puede verse en la figura 1, cuando un individuo inicia la construcción de un concepto o noción matemática realiza transformaciones (acciones y procesos) sobre objetos preexistentes. Para la teoría una acción es la transformación de un objeto, que es el resultado de un estímulo externo y, por lo general, es realizada paso a paso por el individuo (en algunas descomposiciones genéticas, esta estructura se asocia con la aplicación de algoritmos). Cuando el individuo puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él, ha empezado a interiorizar dichas acciones en procesos; las acciones que antes realizaba de manera externa, ahora forman parte de sus estructuras mentales, por tanto puede reflexionar sobre los elementos que pone en juego en una situación sin actuar directamente sobre ellos. Entonces el individuo podrá, por ejemplo, conocer un resultado sin tener que realizar la totalidad de los cálculos; además, será capaz de invertir los pasos de una determinada transformación; esto, como puede verse en la figura 1, gracias al mecanismo de desencapsulación. Por otro lado, los procesos también pueden ser el resultado de la coordinación de dos o más procesos; este mecanismo es fundamental en la construcción de muchos conceptos y nociones matemáticas ya que permite la construcción de un único proceso que puede ser encapsulado en un objeto.

Un proceso se define como una estructura dinámica en oposición al objeto, que se define como una estructura estática. Dado que sobre el objeto es posible realizar nuevas acciones o desencapsularlo para coordinarlo con otros procesos. Una vez se logra un objeto puede iniciarse la construcción de un nuevo esquema, o el objeto puede ser asimilado por un esquema preexistente.

Arnon *et al.* (2014) describen el esquema como una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están articulados por algunos principios o relaciones generales que forman una estructura en la mente de un individuo; esta nueva estructura puede ser usada por él o ella para afrontar un problema matemático relacionado con el nuevo concepto.

Los esquemas son estructuras dinámicas que, según Dubinsky (1991), se caracterizan por su reconstrucción continua y son determinados por la actividad matemática del individuo. Una característica importante de estas estructuras es su coherencia. Esta se define como la capacidad del individuo para decidir qué esquema(s) le permiten abordar de manera exitosa un problema matemático.

La evolución de los esquemas la describe Piaget en términos de los niveles intra, inter y trans. El nivel intra permite a un individuo identificar las acciones, los procesos, los objetos y/o otros esquemas relacionados con un concepto matemático; en el nivel inter el individuo puede establecer relaciones entre todas las estructuras que ha identificado en el nivel intra, y finalmente en el nivel trans él o ella pueden usar el esquema en un contexto diferente al que dio origen a la construcción inicial. Este uso lo define Parraguez (2014) como un «medio de construcción conceptual».

## Un modelo de la transformación lineal desde lo funcional

Para la construcción del esquema, se tiene como referente el análisis teórico presentado por Roa-Fuentes y Oktaç (2010), que toma la definición funcional de la transformación lineal para describir su construcción. Los autores describen dos posibles modelos de construcción de este concepto. El primero requiere la construcción del concepto de transformación (función definida entre espacios vectoriales) y el segundo parte de la aplicación de una función sobre vectores específicos de un espacio vectorial. Cualquiera de estos dos caminos permiten la construcción de dos procesos independientes: la preservación de la suma vectorial y el producto escalar. A partir del cuantificador «y» estos dos procesos se coordinan en uno, que pone juntas las dos propiedades; así, un individuo puede lograr una concepción proceso de la transformación lineal como una función que preserva combinaciones lineales.

Cuando surge la necesidad de realizar acciones sobre el proceso construido, este se encapsula para dar lugar al objeto transformación lineal. Las características del objeto están asociadas, por ejemplo, con la construcción del espacio vectorial de transformaciones lineales de un espacio vectorial en él mismo, de tal manera que una transformación lineal puede ser vista como un vector de un espacio vectorial. Los modelos descritos toman como única referencia la construcción de la transformación lineal a partir de su definición funcional (para más detalles sobre este modelo revisar Arnon *et al.*, 2014).

## La construcción de objetos abstractos a partir de acciones concretas

En Arnon *et al.* (2014) se propone el uso de la teoría APOE para la enseñanza de matemáticas en la escuela básica. Los conceptos que se desarrollan en la universidad generalmente se construyen a partir de acciones específicas sobre objetos abstractos, tal como señalamos en la figura 1. Ahora, como se muestra en la figura 2, en la escuela básica la construcción de objetos matemáticos se inicia mediante la aplicación de acciones sobre objetos concretos.

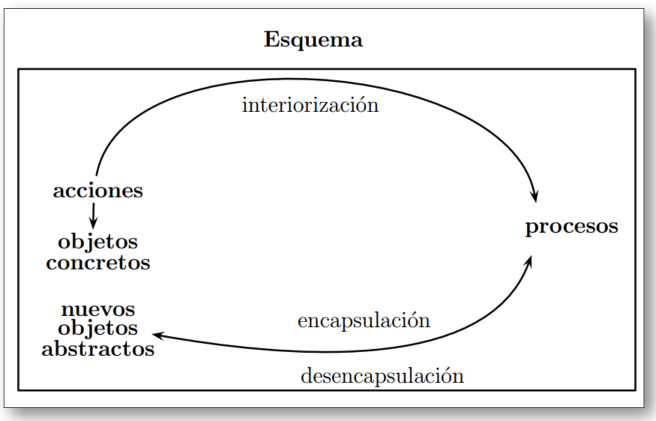


Fig. 2. Construcción de objetos abstractos a partir de acciones sobre objetos concretos (tomado de Arnon *et al.*, 2014: 154).

Estos objetos se interiorizan en procesos que son finalmente encapsulados en objetos abstractos. En la construcción del esquema de transformación lineal ha tenido gran importancia la representación geométrica. Esta representación del objeto matemático puede en un momento dado darle elementos a un individuo para comprender una situación aun cuando esta esté definida en términos funcionales y/o matriciales. Gracias a las características concretas, entendido esto como aquello que involucra el uso de objetos físicos reales o imaginarios (Arnon *et al.*, 2014) de la representación geométrica de transformaciones lineales, un estudiante puede inferir las características funcionales y/o matriciales que están más relacionadas con la construcción de objetos abstractos.

Como se discutió en la sección anterior, el acercamiento exclusivo a la representación geométrica de la transformación lineal puede obstaculizar la construcción del objeto matemático, ya que los individuos tienden a centrarse solo en aquello que es observable. Consideremos la siguiente situación:

Dibuje cómo queda la casita de la figura al aplicarle cada una de las transformaciones representadas por las matrices:

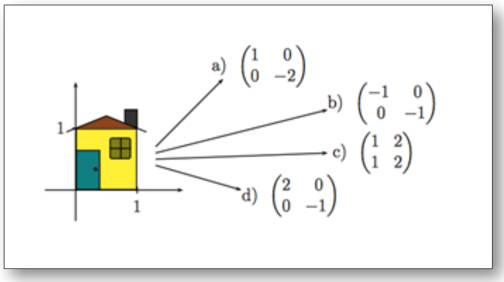


Fig. 3. Transformaciones lineales y matrices (Isaacs y Sabogal, 2009: 86).

En este caso los estudiantes pueden centrarse en identificar «puntos principales de la casita» (véase figura 3) que, al multiplicarse por las matrices, determinen la figura correspondiente. No se plantea una reflexión previa sobre la importancia de calcular las imágenes de los vectores (1,0) y (0,1) (base canónica) que determinan todas las características de la imagen total por ser estos una base de $\mathbb{R}^2$. O una reflexión sobre lo que cada representación matricial implica sobre la transformación del objeto.

Lo importante aquí es considerar, como plantean Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996), la coordinación entre estrategias visuales y analíticas que converjan en la construcción del esquema de transformación lineal.

En el análisis que se presenta se busca mostrar las profundas relaciones entre los conceptos de vector, combinación lineal, base, matriz y transformación lineal. La construcción de estos objetos así como el estudio de las relaciones entre sus diferentes estructuras será la base para desarrollar un modelo de clase que propicie el análisis de los estudiantes sobre dichas relaciones.

## ANÁLISIS TEÓRICO: PRIMERA COMPONENTE DEL CICLO DE INVESTIGACIÓN DE APOE

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación que contempla el desarrollo de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de un modelo de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos. Como puede verse en la figura 4 estas componentes se relacionan entre sí y se retroalimentan para generar una *descomposición genética*, que como mencionan Arnon *et al.* (2014) es considerada el corazón de la teoría APOE.

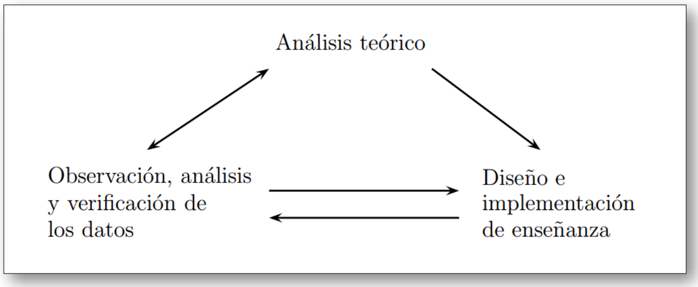


Fig. 4. Ciclo de investigación (Arnon *et al.*, 2014: 94).

En este escrito nos centraremos en el desarrollo de la primera componente, el análisis teórico. Principalmente en describir su desarrollo para lograr una descomposición genética hipotética del concepto transformación lineal que contemple la construcción del esquema.

El análisis teórico que se presenta se basa en estudiar el concepto de transformación lineal y determinar cómo está relacionado con el concepto de base en términos de las relaciones que deben establecerse entre las diferentes estructuras. Además se busca establecer cuál es el rol que juegan en dicha relación la representación matricial y la representación geométrica (en el caso de transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$).

Todo esto, sumado a la experiencia de las investigadoras como profesoras y estudiantes, permite establecer de manera hipotética las relaciones que se destacan en la construcción del esquema de transformación lineal.

## Elementos iniciales del análisis teórico

Una transformación lineal $T$ puede definirse como una función entre espacios vectoriales ($T: V \to W$) que preserva combinaciones lineales. Además, si consideramos que todo vector $v \in V$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de una base ordenada de $V$, entonces sabemos que basta con conocer el efecto de $T$ sobre los vectores de dicha base para determinar la imagen de cualquier vector en $V$.

Por otro lado, una transformación lineal donde los espacios vectoriales $V$ y $W$ son de dimensión $n$ y $m$ respectivamente puede representarse por medio de una matriz $A_T$ en $M_{m\times n}$ cuyas columnas están definidas por las imágenes de los vectores de una base para el espacio $V$ tal como se propone en el siguiente teorema:

> *Teorema:* Sean $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$, $W$ un espacio vectorial de dimensión $m$ y $T{:}V \to W$ una transformación lineal. Sea $\beta_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para $V$ y sea $\beta_W = \{w, w_2, \ldots, w_m\}$ una base para $W$. Entonces existe una matriz única $A_T$ de $m \times n$ tal que: $[T(v)]_{\beta_W} = A_T[v]_{\beta_V}$ (Hoffman, 1971: 88).

De esta manera es posible encontrar la transformación de cualquier vector $v \in V$ por medio de la matriz de la transformación. Este resultado establece un isomorfismo en donde la matriz de la transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita se puede expresar como una matriz y toda matriz puede representar una transformación lineal entre dichos espacios, jugando un papel importante la base.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "\beta_V"'] & W \arrow[d, leftrightarrow, "\beta_W"] \\ F^n \arrow[r, "A_T"'] & F^m \end{tikzcd}$$

Fig. 5. Transformaciones lineales y matrices.

En la figura 5, como se plantea en Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon y Dubinsky (2002), las flechas verticales indican el isomorfismo entre el espacio vectorial $V$ y el espacio vectorial $F^n$, así como el isomorfismo entre los espacios vectoriales $W$ y $F^m$, resaltando la importancia de las bases ordenadas fijadas.

La flecha horizontal $T$ indica la transformación lineal de $V$ en $W$, mientras que la flecha $A_T$ muestra la representación matricial de $T$ con respecto a las bases ordenadas $\beta_v$ y $\beta_w$. Esta relación entre las transformaciones lineales y las matrices permite, para el caso particular de transformaciones del plano en el plano, o del espacio, describir el efecto geométrico de la transformación lineal.

En el desarrollo de este documento, se analizan diferentes situaciones que pueden generar la reflexión de los individuos sobre el rol de las diferentes representaciones de un concepto en una situación matemática. En particular haciendo énfasis en las representaciones de una transformación lineal y la importancia del concepto de base. Para esto comenzamos con la presentación de un análisis teórico.

## Un modelo de construcción de la transformación lineal

Los resultados expuestos referentes a las definiciones de transformación lineal en libros de texto, la problemática de la comprensión de la transformación lineal y sus implicaciones en la manera como un estudiante universitario construye dicho concepto fundamentan el análisis que se presenta a continuación. Además de las descomposiciones genéticas de la transformación lineal como función (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; 2012) y el concepto de base (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008).

Un individuo que inicia la construcción de su esquema de transformación lineal debe relacionar básicamente tres estructuras; dos estructuras proceso, una de base y de transformación lineal, y una estructura objeto de vector.

Se entiende la base como proceso cuando un individuo logra verla como un conjunto de vectores $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linealmente independientes, que le permite expresar cualquier vector de un espacio vectorial como una combinación lineal de ellos (Kú *et al.*, 2008). Una estructura dinámica de transformación lineal permite que el individuo piense en ella como una función definida entre espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales. Tal como plantea Roa-Fuentes y Oktaç (2012) un individuo tiene una estructura objeto de vector cuando lo concibe como un elemento de un espacio vectorial.

La primera estructura que se busca establecer en este análisis es la construcción de la representación matricial a partir del establecimiento de relaciones entre las estructuras mencionadas. Con estas la experiencia de un individuo con diferentes situaciones que involucran la transformación lineal puede comenzar con la construcción de una concepción dinámica de un vector $v$ en $V$ al expresarlo como combinación lineal de los vectores de la base $\beta_V$, esto es con la construcción del vector de coordenadas (Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016). Así, el vector $v$ inicialmente percibido por el individuo en términos de sus componentes ahora es visto a partir de los escalares que permiten construir la combinación lineal:

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n \text{ . (*)}$$

El mecanismo a través del cual el individuo logra esta nueva estructura es la coordinación; este mecanismo le permite caracterizar el nuevo proceso a partir de la unicidad de los escalares $c_i$ y el orden de la base. Entonces, en la expresión (*), tenemos en el lado izquierdo una estructura estática y en el derecho una dinámica del mismo objeto matemático. La construcción del vector de coordenadas es fundamental para determinar la representación matricial de una transformación lineal. Sobre la base de lo descrito, se da paso a la construcción de este nuevo objeto.

Un individuo con una concepción proceso de transformación lineal debe manifestar que la función $T$ le permite transformar combinaciones lineales. En algunos casos esto se aplica de manera mecánica, como un algoritmo dado para resolver ciertos ejercicios. Sin embargo, en este punto, para la construcción del esquema es necesario que el individuo manifieste su coherencia ya sea de manera verbal o escrita, para aplicar la transformación sobre la igualdad (*), esto es:

$$\begin{aligned} Tv &= T\left(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n\right) \\ Tv &= T\left(c_1v_1\right) + T\left(c_2v_2\right) + \ldots + T\left(c_nv_n\right) \\ Tv &= c_1Tv_1 + c_2Tv_2 + \ldots + c_nTv_n. \text{ (**)} \end{aligned}$$

Las acciones específicas que logra aplicar para transformar la primera expresión en (**) requieren una concepción proceso de la transformación lineal en términos de la preservación en primer lugar de la suma vectorial y en segundo del producto por un escalar. Esto entre otras cosas le permite a él o ella establecer que una transformación lineal queda definida a partir de las imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial del dominio.

Resultado de la aplicación de las transformaciones descritas se tiene la expresión (**), que puede ser vista como un objeto igualado a un proceso, una forma dinámica del vector $Tv$ que está totalmente definida por los escalares de la combinación lineal. Este proceso, visto como un vector de coordenadas de $Tv$ en términos de las imágenes de la base, puede ser encapsulado en un objeto cuando dicho vector es construido como un objeto del espacio vectorial $W$. Así, el individuo logra ver el vector $Tv$ como una énupla de la forma $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$, un vector definido de manera única por los escalares en $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ en $F$ (campo sobre el cual se definen los espacios vectoriales $V$ y $W$).

La construcción de este objeto requiere que el individuo trabaje con diferentes situaciones que enfaticen en la unicidad de este vector dada una base.

Ahora, la construcción de la matriz que representa la transformación lineal $A_T$ implica realizar las acciones descritas para todos los vectores de $\beta_V$ . Sabemos que cada uno de los nuevos vectores $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$ en términos de $W$, $\left[T_{v_i}\right]_{\beta_W}$ para $i$=1,..., $n$, determinan las columnas de la matriz $A_T$ que representa la transformación lineal. Una vez un individuo logra construir dichos vectores está capacitado para iniciar con la construcción de la matriz $A_T$ .

La representación geométrica de una transformación lineal la consideramos como un subesquema de este, enfocándonos en transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. En este caso, las transformaciones lineales (matrices) que vamos a considerar representarán giros, cambio de escala, reflexiones, cortes con respecto a los ejes de coordenadas y la composición entre ellos, siempre y cuando la matriz de la transformación sea invertible.

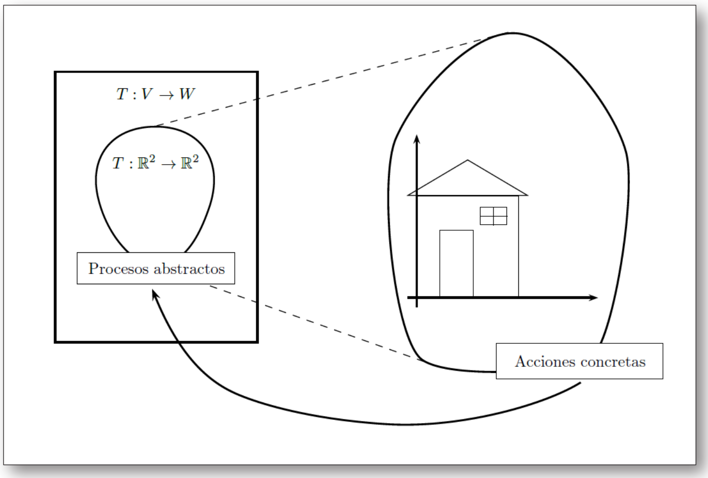


Fig. 6. La representación geométrica de transformaciones lineales como un subesquema.

En este sentido vamos a entender la representación geométrica de este tipo de funciones como objetos concretos en términos de Arnon *et al.* (2014). La representación geométrica permite que el estudiante vea características de los objetos «físicos» un punto, una flecha o un polígono como representantes de los vectores de un espacio vectorial. Es decir, la representación geométrica le permite realizar acciones concretas sobre objetos concretos que pueden ser interiorizadas en procesos que permiten la construcción de objetos abstractos (véase figura 6). Dado que previamente el individuo ha iniciado la construcción del esquema de transformación lineal a partir de su definición funcional y su representación matricial, esta interiorización estará caracterizada por el establecimiento de una transformación, una función que está determinada por las imágenes de los elementos de una base que definen la imagen de cualquier vector en $\mathbb{R}^2$.

A continuación describimos un camino que puede dar paso a la construcción de dichas estructuras.

– *Concepción acción:* Diremos que un individuo tiene una concepción acción de la representación matricial de la transformación lineal $T(A_T)$ ( cuando puede «organizar» la matriz a partir de las columnas logradas en las acciones descritas anteriormente. En esta concepción, puede «usar» dicha matriz para determinar la imagen de uno o más vectores. Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $T : R^3 \to R^2$ una transformación lineal, suponga que:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\ \text{y}\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}.\ \text{Calcular}\ T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}.$$

En este ejemplo es posible que un individuo construya la matriz $A_T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\3 & 4 & -3\end{bmatrix}$ y realice el producto $\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\3 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-4\\5\end{bmatrix}$ para determinar la imagen del vector dado. Esto es evidencia de que ha logrado una concepción acción de la matriz que representa la transformación lineal. Pero por otra parte, gracias a las relaciones que ha logrado entre la transformación lineal y la base, es posible que escriba el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, para determinar finalmente la imagen bajo $T$ de $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Con esto queremos señalar que la construcción de una concepción acción de $A_T$ no puede ser independiente de las estructuras previas que él o ella ya ha logrado.

Las acciones descritas de construcción y uso de la matriz $A_T$ pueden interiorizarse en un proceso. Para esto el mecanismo de interiorización puede lograrse por la experiencia del individuo con diferentes situaciones relacionadas con dicha matriz, en donde inicie su reflexión sobre las características de la matriz sin estar condicionado solo para calcularla de manera mecánica.

Esta estructura acción de la representación matricial de la transformación lineal y su concepción proceso del mismo objeto como función pueden potenciar en el individuo una concepción acción de la representación geométrica, cuando él o ella realiza acciones específicas sobre cada uno de los vectores representativos del conjunto sobre el cual está trabajando. Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $f$ una transformación lineal $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix}$.

a. Describa cómo queda transformado el conjunto presentado en la siguiente figura.

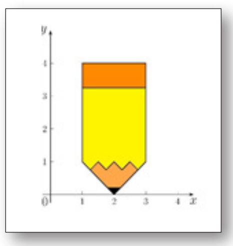

Fig. 7. Representación de un conjunto de puntos en el plano.

b. Determine la matriz $A_f$.

Un individuo puede transformar «puntos representativos», por ejemplo, calcular las imágenes de (1,1), (2,0), (3,1), (3,4) y (1,4). Estas acciones sobre cualquier conjunto de vectores pueden interiorizarse en un proceso gracias a la relación con la base ordenada, de tal manera que el individuo ya no transforme los vectores que considere importantes dentro del conjunto, sino que pueda definir una base en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo $\beta = \{(1,1);(2,0)\}$. En esta concepción se conjugan la representación matricial y geométrica de la transformación lineal junto con una concepción proceso de la representación funcional. Es importante resaltar en este punto que, aunque las descomposiciones genéticas en muchos casos se presenten de forma lineal, responden solo a una forma de describir cómo se estructura un concepto y/o noción matemática. En nuestro caso, dado que tomamos las tres representaciones del objeto, estamos estableciendo relaciones entre ellas haciendo un ir y venir entre las diferentes estructuras de cada representación que buscamos conectar a través de la base ordenada como un proceso. Este ir y venir se determina por el tipo de problemas que un estudiante puede abordar en un curso básico de álgebra lineal. Independiente de la forma (funcional, matricial, geométrica), la relación que logre establecer con la base como proceso le permitirá identificar aquellas características que pueden propiciar la evolución de sus estructuras.

*Concepción proceso:* Un individuo con una concepción proceso de la matriz $A_T$ puede reflexionar sobre ella sin tener que calcular de manera específica sus columnas. Para esto ha de enfrentarse a situaciones en donde la tarea implique algo más que el cálculo de la matriz. Por ejemplo, dada una matriz $M = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$ que representa una transformación lineal $T: V \to W$, pude determinar las dimensiones de los espacios *V* y *W*. Esta concepción está asociada entonces con una estructura dinámica, dado que el individuo puede caracterizar la transformación lineal a partir de las propiedades de la matriz, asociadas a su representación funcional.

La estructura dinámica de la matriz $A_T$ puede verse como una estática a partir del mecanismo de encapsulación; este permite la construcción del objeto.

En este punto el esquema de transformación lineal evoluciona gracias a la relación que se establece entre el conjunto de funciones lineales y el conjunto de matrices a través de la fijación de una base.

Consideramos que un individuo evidencia una concepción proceso de la representación geométrica de la transformación lineal cuando logra comprender que, para encontrar la imagen de un conjunto en el plano, puede encontrar la imagen de dos vectores no colineales, que en este caso representan dos vectores linealmente independientes, teniendo en cuenta que, al aplicar la transformación lineal las rectas paralelas se mantienen, al igual que los ángulos y el número de lados se conservan. Así, la relación directa entre la representación geométrica se relaciona con la funcional a través de la base como proceso; las características que identifica en términos geométricos (concretos) tienen implicaciones sobre la transformación que esta define; la preservación de dichas características es gracias a la linealidad de la función. Esto es en términos funcionales, gracias a la preservación de combinaciones lineales de *T*.

Es aquí donde las características de las acciones concretas se transforman en procesos que pueden dar lugar a un objeto abstracto. La relación entre lo que es observable en la representación geométrica y las propiedades funcionales de la transformación lineal permite la evolución de las estructuras hasta ahora descritas. El individuo puede concluir que al aplicar la transformación lineal a los vectores de la base se conoce la transformación lineal para todos los vectores del conjunto de salida. Consideremos la siguiente situación:

> ¿Qué le sucede al tren que aparece en la siguiente figura, cuando se le aplica la transformación lineal dada por la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$?

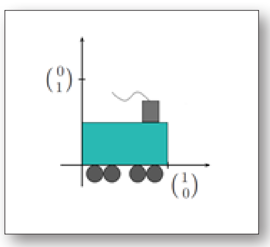


Fig. 8. Representación de transformaciones lineales y matrices (Tomado de Isaacs y Sabogal, 2009: 86).

A diferencia del problema del «lápiz», en la figura 8 se presentan de manera específica los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, por tanto, en esta concepción, sin realizar ningún cálculo, el individuo podría establecer que la matriz dada constituye una transformación lineal $T$ tal que: $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Y por tanto determinar la imagen del tren al aplicar $T$.

Esta descripción de cómo la representación matricial y la geométrica evolucionan gracias a la relación con las características funcionales de la transformación lineal puede determinar la construcción del proceso que da lugar al objeto; un objeto que mantiene las características particulares de cada representación pero que juega un rol diferente en el contexto en donde es posible que emerja en una situación matemática. A continuación analizaremos esta estructura.

– *Concepción objeto:* Diremos que un individuo tiene una concepción objeto de la matriz que representa una transformación lineal y de su representación geométrica cuando puede aplicar acciones para hallar nuevas transformaciones lineales. A continuación hacemos una descripción del tipo de acciones que puede aplicar sobre dicho objeto.

- Determinar si una transformación lineal es o no invertible. Una vez el individuo conoce la representación matricial $A_T$ de una transformación lineal, podrá establecer criterios sobre la matriz para determinar si la función $T$ es o no invertible. Por ejemplo, consideremos la siguiente tarea:
  Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Encuentre si es posible $T^{-1}$.
  En este caso él o ella puede determinar si $A_T$ es o no invertible. Esto le permitirá inferir las características funcionales de $T$ y en este contexto decidir si $T^{-1}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está o no definida.
- Componer dos transformaciones lineales a partir del producto de sus representaciones matriciales. La construcción del objeto matriz de la transformación implica la comprensión del comportamiento del producto matricial y su relación con la forma funcional de las transformaciones lineales que representan. Así, componer funciones resulta equivalente a multiplicar matrices. Consideremos la siguiente situación:
  Sean $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ dos transformaciones lineales. Determine, si es posible, $T \circ S$ y $S \circ T$.
  Problemas de este tipo implican la construcción de relaciones entre las diferentes formas de ver la transformación lineal. En este caso el individuo puede determinar la forma funcional de las transformaciones $S$ y $T$ para componerlas, transformando los vectores de una base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Pero, por otra parte, puede explorar la relación entre la operación producto entre las transformaciones lineales $A_T$ y $A_S$; este resultado es planteado en algunos textos como un teorema.

La experiencia de los individuos con situaciones similares a las presentadas y una reflexión constante sobre las diferentes relaciones descritas motivan la evolución del esquema de transformación lineal en la medida en que su coherencia le permite resolver o no un problema específico. A continuación describimos cómo las relaciones descritas a través de las diferentes estructuras pueden determinar la evolución del esquema a partir del desarrollo de los niveles.

*Niveles del esquema de transformación lineal*: De acuerdo con el modelo de construcción descrito, el concepto de transformación lineal está constituido por la relación entre sus diferentes representaciones (funcional, matricial y geométrica), jugando un papel importante la base ordenada como proceso. A continuación describimos un primer acercamiento a los niveles de evolución del esquema.

*Nivel intra:* En este estudio se considera que un estudiante se encuentra en un nivel intra cuando es capaz de establecer relaciones entre acciones, procesos y objetos con las diferentes representaciones de la transformación lineal; por ejemplo, dada la transformación lineal puede encontrar la matriz de la transformación y viceversa. Cuando al conocer la matriz de la trasformación, o la transformación lineal, aplica transformaciones sobre puntos, flechas o polígonos (que representan vectores de un espacio vectorial) y logra encontrar la imagen de dichos vectores bajo la transformación dada.

*Nivel inter:* Un individuo se encuentra en un nivel inter cuando en sus argumentaciones considera la base como concepto fundamental en las diferentes representaciones de la transformación lineal. Por ejemplo, dada la matriz de la transformación puede dar información sobre la dimensión del espacio de salida y la dimensión del espacio de llegada. O cuando, al tener un polígono, reconoce dos vectores linealmente independientes y sus respectivas imágenes bajo la transformación lineal dada (en su representación funcional y/o matricial) y a partir de ellas logra establecer la imagen del polígono sin necesidad de hallar la imagen de cada uno de los vectores que la conforman.

*Nivel trans:* Un individuo se encuentra en un nivel trans cuando puede reconocer las diferentes representaciones de la transformación lineal, funcional, matricial y geométrica y la importancia de la base ordenada y escoger la representación más adecuada para resolver una situación dada. Esto se evidencia cuando, al construir nuevas transformaciones lineales, por ejemplo, la composición entre dos funciones, puede encontrar la composición a través de la multiplicación de sus representaciones matriciales. O en el caso de la suma de funciones, sumando sus representaciones matriciales. Ahora, si la transformación lineal es invertible, podrá encontrar la inversa empleando la matriz inversa de la transformación. O el núcleo y la imagen de la transformación conociendo el núcleo o la imagen de la matriz de la transformación.

El desarrollo de estos niveles está íntimamente relacionado con la experiencia de cada individuo; si bien las situaciones planteadas son básicas y se desarrollan generalmente en los primeros cursos de álgebra lineal, lo que muestra la investigación en didáctica en álgebra lineal es que los individuos no lo logran reflexionar sobre las relaciones que hemos descrito y sus procedimientos frente a este tipo de situaciones son de tipo dinámico. Esta reflexión la ampliaremos en la siguiente sección.

## REFLEXIONES FINALES

En este escrito se propone una descomposición genética del concepto trasformación lineal a partir de su definición funcional. En ella, tomando como conector el concepto de base ordenada (estructura proceso), se analizan las relaciones que un estudiante puede lograr para construir la forma matricial y geométrica de la transformación lineal. Además, se señala la importancia de conocer cada forma de este objeto matemático, de tal manera que un estudiante universitario no esté limitado por las características particulares que cada uno ofrece. La descomposición genética describe, en términos generales, que dada la matriz $A_f \in M_{m\times n}$, que representa una transformación lineal *f*, es posible que un estudiante puntualice la dimensión de los espacios sobre los cuales se define *f* esto, $f : K^n \to K^m$; es decir, la transformación lineal en su forma funcional. O que desde la representación de la transformación lineal de un objeto de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ el estudiante fije las imágenes de una base (vectores no colineales) para calcular la matriz y/o función que la representa.

En la tabla 1 se define una caracterización hipotética del esquema que será validado en el desarrollo de la segunda componente del ciclo de investigación: diseño e implementación de enseñanza; los resultados de la aplicación de esta componente serán presentados en un próximo escrito.

Tabla 1.
Caracterización de los niveles del esquema de transformación lineal

| *Niveles* | *Esquema de transformación lineal* |
|---|---|
| *Intra* | El estudiante logra un nivel intra cuando identifica diferentes estructuras que se relacionan con la transformación lineal como función, como matriz o como una región del plano que puede transformar. Aquí el concepto de base aparece como un proceso que puede coordinarse con cada forma de ver la transformación lineal. |
| *Inter* | El nivel inter se caracteriza por las transformaciones que el estudiante realiza de una forma de la transformación lineal (funcional, matricial o geométrica) a otra tomando como referente fundamental la base como proceso. Por ejemplo, dada la representación matricial de la transformación lineal, un estudiante puede determinar la dimensión de los espacios de salida y llegada. |
| *Trans* | Un estudiante evidencia un nivel trans cuando puede establecer las características invariantes de la transformación lineal. Por ejemplo, cuando determina que si una función lineal es invertible entonces la matriz que la representa también lo es. |

La tabla 1 caracteriza cada nivel describiendo las relaciones, transformaciones e invariantes como indicadores que determinan la evolución del esquema (Parraguez, 2015) y que están totalmente definidos por el concepto de base.

De la misma manera, se destaca el rol que puede jugar la forma geométrica de una transformación del plano en él mismo, en la construcción del esquema. Particularmente, aquellos elementos que típicamente se representan en el plano, una vez se tiene construida la representación funcional, pueden contribuir a la construcción de objetos abstractos a partir de acciones sobre objetos concretos.

El análisis teórico desarrollado en este escrito se constituye como un modelo cognitivo que puede ser seguido por estudiantes de primer año de universidad para lograr un primer esquema del concepto transformación lineal. Por tanto el análisis puede ser fundamental en el diseño de la clase de álgebra lineal y guiar el proceso de evaluación de un curso particular. Luego la descripción del esquema así como las relaciones descritas allí, son una herramienta fundamental para el profesor de matemáticas, que puede visualizar el alcance de cada situación que trabaja con sus estudiantes y las implicaciones sobre el tipo de estructuras o mecanismos que puede promover a través de su discurso.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Programa de Movilidad 2015 y el Proyecto 5752 de la *Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander*, VIE-UIS (Colombia).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Artigue, M., Chartier, G. y Dorier, J. L. (2002). Presentation of other Research Works. En M. James (Ed.), Mathematics Education Library Series: Vol. 23. *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 247-264).
https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_9

Asiala, M., Anne, B., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, H. Shoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education,* 6 (pp. 1-32). Michigan: American Mathematical Society.
https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Dorier, J. L. (2000*a*). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces En J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Volumen 23 (pp. 1-81). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (1997). L'algèbre linéaire: l'obstacle de formalisme à travers diverses recherches de 1987 a 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en questions* (pp. 105-147). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

— (2000*b*). The obstacle of formalism. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Volumen 23 (pp. 85-124). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En Derek Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at universitary level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Países Bajos.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2008). *Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics, en Semiotic perspectives in the teaching and learning of mathematics series.* En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education, Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 39-63). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra* (pp. 191-207). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). Álgebra lineal. México: Prentince-Hall.

Isaacs, R. y Sabogal, S. (2009). *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico*. Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Klasa, J., (2001). Linear Transformations with Cabri II via Maple V, A friendly Reply to Anna Sierpinska. Talk presented at Cabriworld, Montreal.

Kú, D. (2012). *Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE* (Tesis de doctorado) CINVESTA-IPN, México.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

Maturana, I. y Parraguez, M. (2013). *Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica*. En SEMUR (Ed), Acta VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 193-200). Uruguay.

Maturana, I., Parraguez, M. y Rodríguez, M. (2014). *Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 771-778). México, DF.

Mendoza, E. (2015). *Construcción de la Matriz de Cambio de Base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE* (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Mendoza, E., Rodríguez, F. M. y Roa-Fuentes, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 371- 379). Alicante: SEIEM.

Molina, J. y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la Transformación lineal en un Ambiente Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.

Parraguez, M. (2014). *Mental constructions and mechanisms for the use of the basic concepts of linear algebra.* Proyecto Fondecyt No. 1140801, Chile.

— (2015). *Construcciones y mecanismos mentales para el uso de los conceptos básicos del álgebra lineal*. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX (pp. 48-56). Villarica: SOCHIEM.

Parraguez, M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio de base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 129-150.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the Vector Space Concept from the Viewpoint of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112-2124.
https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.034

Ramírez, M. (2008). *Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV-IPN.

Ramírez, O., Romero, C. y Oktaç, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de Transformaciones Lineales en el plano. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 225-250.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

— (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120.
https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Sfard, A. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
https://doi.org/10.1007/BF01273663

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.) *On the teaching of linear algebra.* pp. 209-246. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1), 7-40.

Trigueros, M. (2005). La noción de Esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

Uicab, R. y Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (3), 459-490.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, Julie, Cottrill, J., Trigueros, M. y Arnon, I. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Disponible en línea: <http://pc75666.math.cwu.edu/Montgomery/scholar/2002/0731-b-IIawi.pdf>.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group . *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.
https://doi.org/10.2307/749876

# Linear transformation scheme: construction of abstract objects from the internalisation of concrete actions

Doris Evila González Rojas, Solange Roa Fuentes
Escuela de Matemáticas.Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia
dorisgon@matematicas.uis.edu.co, sroa@matematicas.uis.edu.co

This paper presents a cognitive model called the APOS Theory *genetic decomposition*, which describes the structures (Actions, Processes, Objects, Schemas) and the mental mechanisms (internalisation, coordination, encapsulation, assimilation) that a university student can follow to build the linear transformation concept. This model derives from the functional definition of linear transformation as a function defined between vector spaces that preserves linear combinations, to establish relations with its matrix and geometric representations through the ordered base concept.

The linear transformation Scheme basically seeks to relate three structures: base as Process, linear transformation (functional) as Process and vector as Object. From these, the construction of the coordinate vector is described as a fundamental element for the matrix representation. The matrix representing a linear transformation is defined by a space with an ordered base for which the transformation is defined. In the genetic decomposition, the structures and necessary mechanisms for a student to achieve an Action conception of the geometric representation of the linear transformation and its internalisation in a Process, is showed in detail.

The geometric representation of linear transformation is considered as a sub-scheme that focuses mainly on defined transformations of in . The linear transformations (matrices) that are considered represent turns, changes of scale, reflections, cuts with respect to the axes of coordinates and the composition (product) between them. In this sense, these matrices are considered as Concrete Objects, since the geometric representation allows students to see characteristics of «physical» objects i.e., a point, an arrow, a polygon, as vectors representatives of a vector space. Thus, geometric representation enables students to perform Concrete Actions on Concrete Objects and yield the construction of Abstract Objects.

The described elements support the evolution of the Scheme by describing the Inter, Intra and Trans levels. This article describes these levels, as well as different situations that are analysed as type problem examples that allow for the construction and evolution of the linear transformation scheme.

The analysis presented in this paper constitutes a detailed and robust cognitive model that can be followed by first year university students. The model can be fundamental in the design of the Linear Algebra class, in addition to guiding the evaluation process of a particular course.