

Министерство образования и науки РФ
Федерального государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт физики, технологии и экономики
Кафедра технологии и экономики

Витюнин М.А., Чикова О.А.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Екатеринбург 2014

УДК 539.3/.6(075.8)

ББК Ж121я73-5

В 54

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уральский государственный педагогический университет» в качестве учебного издания (Решение № 326 от 10.12.2014 г.)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р.техн. наук, профессор кафедры литейного производства и упрочняющих технологий Института материаловедения и металлургии Уральского федерального университета *А.Б. Финкельштейн*

к.хим. наук, старший преподаватель кафедры технологии и экономики Уральского государственного педагогического университета *А.С. Пайвин*

В 54 Витюнин М.А., Чикова О.А.

Сопротивление материалов: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Технология») / Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург, 2014. – 136 с.

Комплекс заданий и упражнений по сопротивлению материалов.

Предназначается для студентов, обучающихся по направлению: «Педагогическое образование» (профиль «Технология»).

УДК 539.3/.6(075.8)

ББК Ж121я73-5

ISBN 978-5-7186-0623-2

© Витюнин М.А., Чикова О.А., 2014

© ФГБОУ ВПО «УрГПУ», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ	5
1.1. Основные положения.....	5
1.2. Нагрузки внешние и внутренние, метод сечений.....	7
2. НАПРЯЖЕНИЕ. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ЗАКОН ГУКА. МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ ОБРАЗЦОВ	11
2.1. Напряжение.....	11
2.2. Растяжение и сжатие (центральное).....	17
2.3. Закон Гука.....	17
2.4. Механические испытания образцов.....	19
2.5. Примеры решения задач.....	23
2.6. Контрольные задания.....	25
3. СДВИГ (СРЕЗ), ЗАКОН ГУКА ПРИ СДВИГЕ. СМЯТИЕ	29
3.1. Сдвиг (срез), закон Гука при сдвиге.....	29
3.2. Смятие.....	31
3.3. Примеры решения задач.....	35
3.4. Контрольные задания.....	38
4. КРУЧЕНИЕ. КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ.....	47
4.1. Напряжения и деформации при кручении (круглый брус).....	47
4.2. Расчеты на прочность и жесткость при кручении.....	49
4.3. Кручение стержня некруглого профиля.....	50
4.4. Примеры решения задач.....	52
4.5. Контрольные задания.....	59
5. ПРЯМОЙ ИЗГИБ БАЛКИ. ПОПЕРЕЧНАЯ СИЛА И ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ.....	65
5.1. Основные определения.....	65
5.2. Зависимость между поперечной силой, изгибающим моментом и нагрузкой для построения эпюр.....	67
5.3. Дифференциальные зависимости при изгибе.....	67
5.4. Нормальные напряжения при изгибе.....	67
5.5. Расчет на прочность при изгибе.....	69
5.6. Касательные напряжения при изгибе.....	70
5.7. Примеры решения задач.....	71

5.8. Контрольные задания.....	74
6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ....	78
6.1. Статические моменты сечения. Центр тяжести.....	78
6.2. Моменты инерции площади поперечного сечения.....	79
6.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.....	81
6.4. Примеры решения задач.....	83
6.5. Контрольные задания.....	90
7. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ	96
8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	101
8.1. Формула Эйлера.....	101
8.2. Определение критической силы $F_{кр}$	104
8.3. Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера...	105
8.4. Расчеты на устойчивость.....	107
8.5. Примеры решения задач.....	110
8.6. Контрольные задания.....	111
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	113
Приложение 1. Сортамент прокатной стали.....	115
Приложение 2. Стандартные значения диаметров, ГОСТ 6636-69. Модули упругости (E , G) и коэффициенты Пуассона (μ) для некоторых материалов.....	126
Приложение 3. Геометрические характеристики плоских сечений.....	127
Приложение 4. Опорные реакции и эпюры изгибающих моментов для некоторых видов балок при различных нагрузках.....	129

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

1.1. Основные положения

Сопротивление материалов – это раздел «Технической механики». Основной задачей сопротивления материалов является изучение методов расчета простейших элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – это способность элемента конструкции сопротивляться действию приложенных к нему внешних сил не разрушаясь.

Жесткость – это способность элемента конструкции не изменять размеры и форму, т.е. не деформироваться под действием внешних сил или деформироваться в пределах установленных норм (малые упругие деформации).

Устойчивость – это способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием приложенных сил.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми, поэтому под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную форму и размеры, т.е. деформируются.

Если после снятия нагрузки тело полностью восстановило свою форму и размеры, то деформацию называют **упругой**.

Если деформация частично остается, то она называется **пластической** или **остаточной**.

Виды расчетов:

1. **Расчет на прочность** – обеспечивает неразрушение конструкции.
2. **Расчет на жесткость** – обеспечивает деформации конструкции под нагрузкой в пределах допустимых норм.
3. **Расчет на устойчивость** – обеспечивает сохранение необходимой формы равновесия и предотвращает искривление длинных стержней.

Расчетная схема – это освобождение реального объекта от несущественных особенностей, которые не влияют на работу системы в целом.

Для перехода от реального объекта к расчетной схеме необходимо провести основные допущения свойств материала, системы приложенных сил, геометрии реального объекта, типов опорных реакций и т.д.

Основные допущения свойств материала:

1. Материал считается однородным и непрерывным, все физико-механические свойства во всех направлениях одинаковы.

2. Материал представляет сплошную среду – заполняет весь объем тела без пустот.

3. Материал считается изотропным – обладает одинаковыми упругими свойствами во всех направлениях.

4. Материал обладает идеальной упругостью – полностью восстанавливает форму и размеры после снятия нагрузки.

5. Материалы подчиняются закону Гука – форма и размеры упругого тела меняются прямо пропорционально изменению нагрузок.

6. Считается, что в материале до его нагружения нет никаких напряжений.

Виды конструктивных элементов:

1. **Брус** – тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим (стержни, стойки, балки, валы). По форме поперечного сечения брус может быть: прямоугольным, круглым, двутавровым, кольцевым и т.д.

2. **Пластина** – тело, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими.

3. **Массив** – тело, у которого три размера одинаковые.

Классификация нагрузок

По способу приложения:

1. **Объемные** – приложены ко всем внутренним точкам тела (сила тяжести, сила инерции) и измеряется в [Н/м³].

2. **Поверхностные** – приложены к поверхности тела (давление жидкости, газа) и измеряется в [Н/м²]:

а. Сосредоточенная сила, измеряется в [Н].

- b. Линейно распределенная нагрузка – это сила распределенная по некоторой линии, измеряется в [Н/м].
- c. Распределенная по площади, измеряется в [Н/м²].
- d. Сосредоточенный момент, измеряется в [Н · м].
- e. Момент распределенный по линии, измеряется в [Н · м/м].
- f. Распределенный по площади момент, измеряется в [Н · м/м²].

По времени действия:

- 1. Постоянные (вес стены).
- 2. Временные (ветровая, снеговая нагрузка), регламентируется СНиП и ТУ.

По характеру воздействия:

- 1. Статические – нагрузка, возрастающая плавно от 0 до некоторой заданной величины и в дальнейшем остающаяся постоянной.
- 2. Динамическая – изменяет свою величину за весьма малые промежутки времени или приложена к конструкции сразу всей своей величиной.
- 3. Повторно-переменная – изменяется по величине и по направлению за весьма малые промежутки времени.

Некоторые аксиомы теоретической механики не могут быть приняты в сопротивлении материалов:

- 1. Перенос силы вдоль линии действия.
- 2. Перенос момента в плоскости действия.
- 3. Замена системы сил их равнодействующей.

1.2. Нагрузки внешние и внутренние, метод сечений

Элементы конструкции во время работы подвергаются внешнему воздействию. Под действием внешних сил в деталях происходит изменение расстояний между частицами и сил взаимодействия между ними.

Внешние силы определяются методами теоретической механики, а внутренние – основным методом сопротивления материалов – методом сечений.

Например, рассмотрим брус, находящийся в равновесии на который действуют силы $F_1 \dots F_4$ (рис. 1.1).

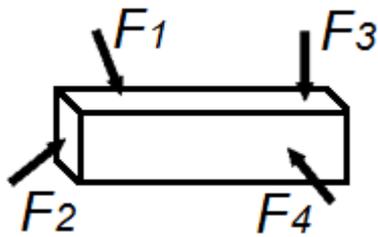


Рис. 1.1

Для данного бруса можно записать следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 & \sum M_{xi} &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & \sum M_{yi} &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 & \sum M_{zi} &= 0 \end{aligned}$$

Рассечем брус пополам (рис. 1.2).

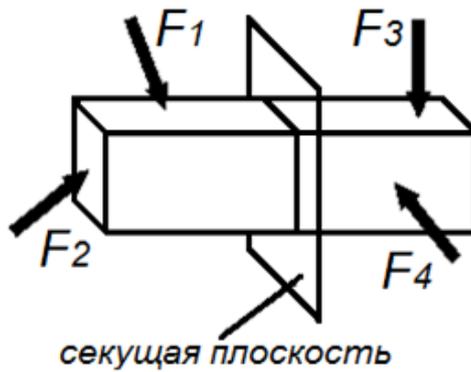


Рис. 1.2

Отбросим, например левую часть (рис. 1.3).

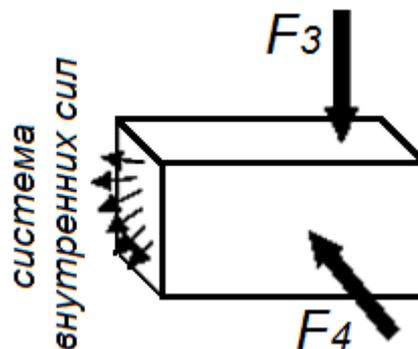


Рис. 1.3

Полученную систему внутренних сил приводим к главному вектору R и главному моменту M_0 , которые поместим в центр тяжести сечения (рис. 1.4).

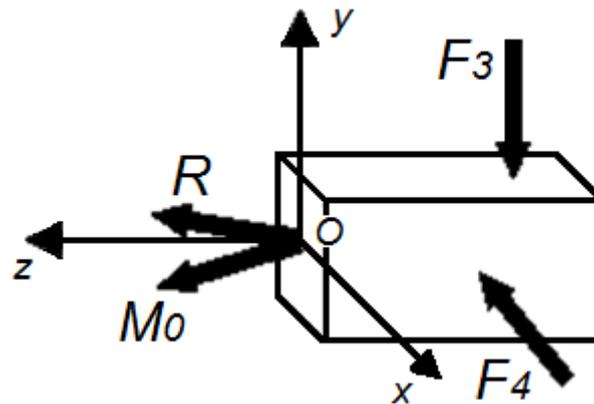


Рис. 1.4

Главный вектор и главный момент раскладываем на составляющие по осям x, y, z : $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$ (рис. 1.5а).

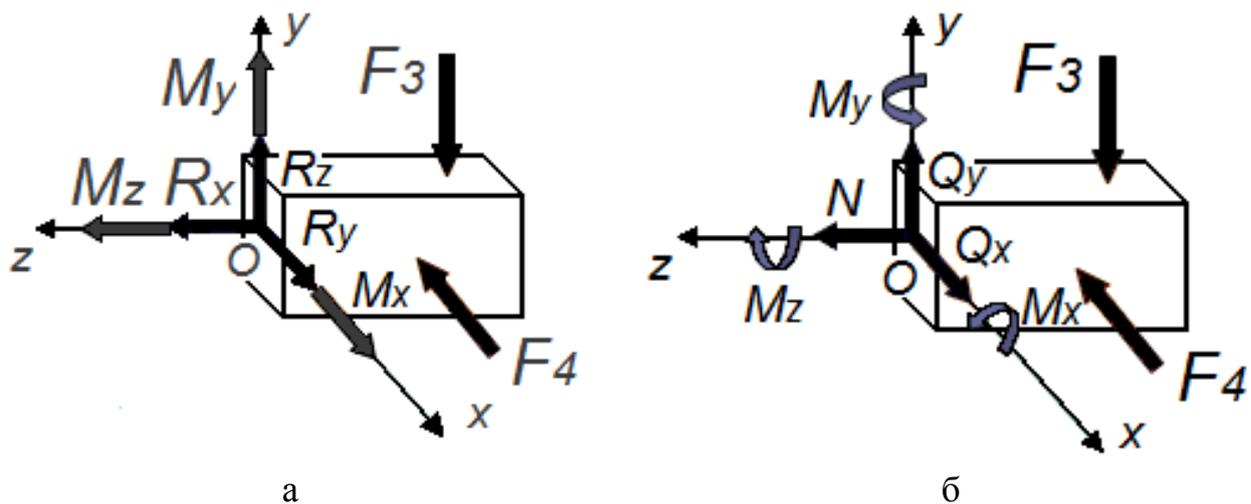


Рис. 1.5

Где (рис. 1.5б):

$R_x = Q_x, R_y = Q_y$ – поперечные силы.

$R_z = N$ – нормальная сила.

M_x, M_y – изгибающие моменты.

M_z – крутящий момент.

Эти величины называют внутренними силовыми факторами в сечении и им соответствуют следующие виды деформации:

1. **Растяжение или сжатие**, при котором в поперечных сечениях возникает только продольная сила N .

2. **Сдвиг**, при котором в поперечных сечениях возникает только поперечная сила Q_x или Q_y .

3. **Изгиб**, при котором в поперечных сечениях возникает только M_x или M_y (чистый изгиб). Если в поперечных сечениях возникает и поперечная сила Q , то такой вид изгиба называется **поперечным**.

4. **Кручение**, при котором в поперечных сечениях возникает только крутящий момент $M_z = M_{кр}$.

Внутренние силовые факторы уравнивают приложенные к этому брусу внешние силы. Используя уравнения равновесия (N , Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_z) можно получить величину внутренних силовых факторов:

$$\begin{aligned} N_z &= \sum_0^n F_{kz} & M_z &= \sum_0^n M_z(F_k) \\ Q_x &= \sum_0^n F_{kx} & M_x &= \sum_0^n M_x(F_k) \\ Q_y &= \sum_0^n F_{ky} & M_y &= \sum_0^n M_y(F_k) \end{aligned}$$

2. НАПРЯЖЕНИЕ. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ЗАКОН ГУКА. МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ ОБРАЗЦОВ

2.1. Напряжение

Напряжение – это мера внутренних сил, которые возникают в деформируемом теле под влиянием различных факторов. Напряжение в точке тела определяется как отношение внутренней силы к единице площади в данной точке рассматриваемого сечения.

Рассмотрим брус, к которому приложена внешняя нагрузка (рис. 2.1).

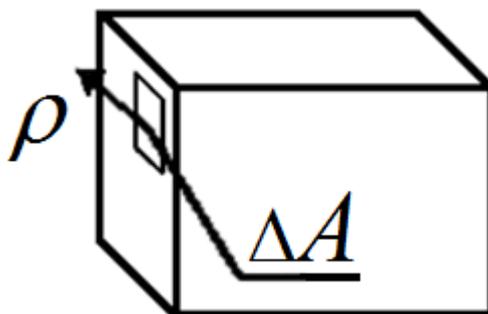


Рис. 2.1

Так как внутренние силы представляют собой поверхностные силы, приложенные к поперечному сечению, то интенсивность этих сил называется полным напряжением и определяется следующим образом:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Напряжение имеет размерность [Н/м²].

Полное напряжение является векторной величиной, поэтому разложим его на две составляющие: перпендикулярное к площадке – **нормальное напряжение** σ_n (характеризует сопротивление сечения растяжению или сжатию) и касательное к площадке – **касательное напряжение** τ_n (характеризует сопротивление сечения сдвигу) (рис. 2.2).

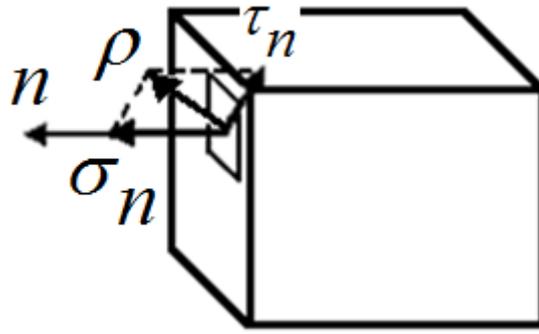


Рис. 2.2

$$p = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$$

Касательное напряжение также можно разложить на две составляющие, параллельные осям x и y – τ_{nx} и τ_{ny} (рис. 2.3).

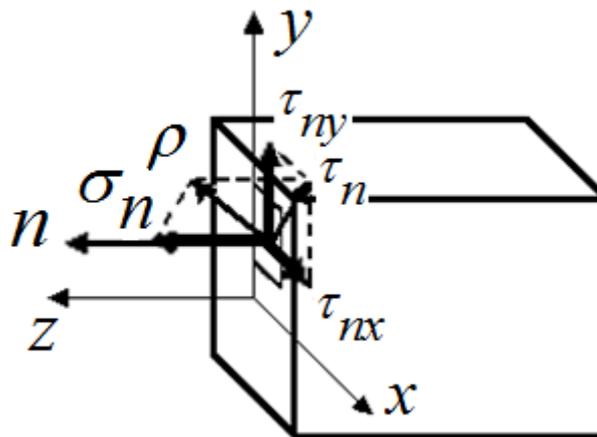


Рис. 2.3

$$p = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_{nx}^2 + \tau_{ny}^2}$$

Проанализируем напряжения на выбранном участке и выделим бесконечно малый объемный элемент со сторонами dx , dy , dz , по каждой грани которого действуют три напряжения (рис. 2.4):

1. Грань перпендикулярная оси x – σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} .
2. Грань перпендикулярная оси y – σ_y , τ_{yx} и τ_{yz} .
3. Грань перпендикулярная оси z – σ_z , τ_{zx} и τ_{zy} .

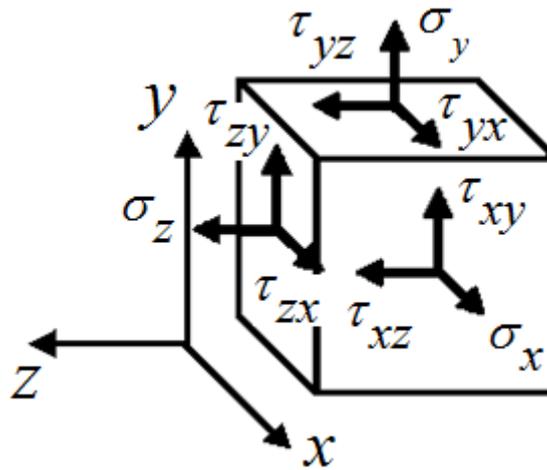


Рис. 2.4

Напряжения по трем перпендикулярным граням элемента образуют систему напряжений, которая называется тензором напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Индексы напряжений расставляются по определенным правилам: первый столбик – напряжения на площадках нормальных к оси x ; второй столбик – напряжения на площадках нормальных к оси y ; третий столбик – напряжения на площадках нормальных к оси z . Первый индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия рассматриваемого напряжения, второй индекс показывает направление действия напряжения.

Правила знаков:

1. Нормальное растягивающее (рис. 2.5а) и сжимающее (рис. 2.5б) напряжение;



Рис. 2.5

2. Знаки касательных напряжений, положительные (рис. 2.6а), отрицательные (рис. 2.6б);



Рис. 2.6

Напряженно-деформированное состояние в точке

Рассмотрим еще раз рис. 2.4, на гранях этого параллелепипеда могут действовать нормальные σ_n и касательные напряжения τ_n . Совокупность напряжений на всех площадках, проходящих через точку, называется **напряженным состоянием материала в точке**.

При повороте площадок на определенные углы можно добиться положения, при котором касательные напряжения будут равны нулю, а нормальные напряжения будут максимальными, такие площадки называются – **главными площадками и главными напряжениями**.

Главные напряжения обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ т.е.:

- σ_1 – наибольшее главное напряжение;
- σ_2 – промежуточное главное напряжение;
- σ_3 – наименьшее главное напряжение.

Различают три вида напряженного состояния:

1. **Линейное напряженное состояние** – на тело действует одно главное напряжение $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ или $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ (рис. 2.7).

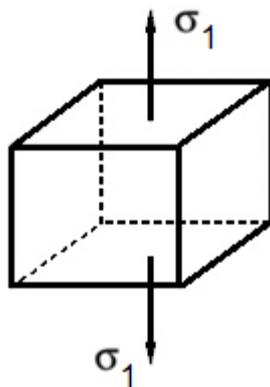


Рис. 2.7

Тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

2. **Плоское напряженное состояние** – если на тело действуют два главных напряжения, $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ или $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ (рис. 2.8).

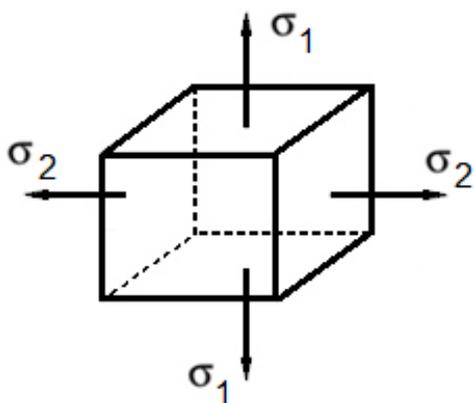


Рис. 2.8

Тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

3. **Объемное напряженное состояние** – на тело действуют три главных напряжения, $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ (рис. 2.9).

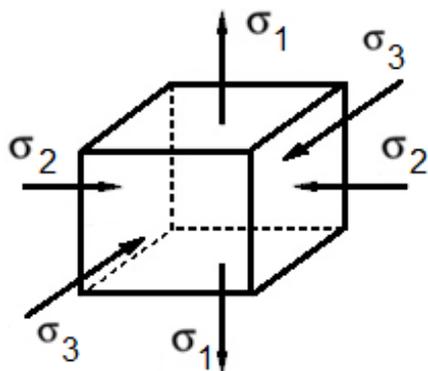


Рис. 2.9

Тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Связь внутренних усилий и напряжений

Внутренние усилия – это результат приведения к центру поперечного сечения внутренних сил, приложенных к элементарным площадкам (рис. 2.10).

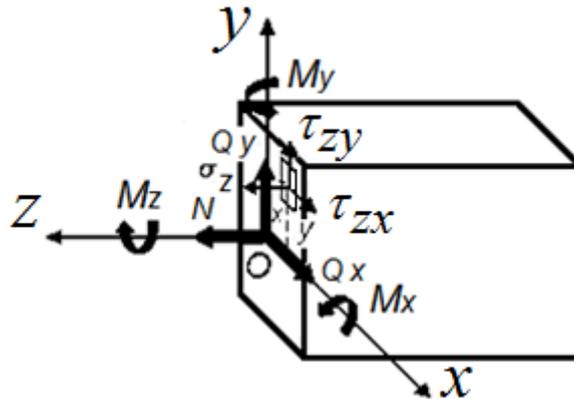


Рис. 2.10

Допустим, что известно напряжение в каждой площадке dA (рис. 2.10). Тогда можно записать следующим образом:

$$dN = \sigma_z dA$$

$$dQ_x = \tau_{zx} dA$$

$$dQ_y = \tau_{zy} dA$$

$$dM_x = \sigma_z y dA$$

$$dM_y = \sigma_z x dA$$

$$dM_z = dM_k = \tau_{zy} x dA - \tau_{zx} y dA$$

При выполнении интегрирования по площади поперечного сечения мы получим следующие выражения:

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA$$

$$M_y = - \int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

2.2. Растяжение и сжатие (центральное)

При центральном растяжении и сжатии возникает только одно внутреннее усилие – продольная сила N .

Для ее определения используют метод сечений, при этом считается, что продольная сила N положительна, если она вызывает растяжение элемента, т.е. направлена от сечения и отрицательна, если вызывает сжатие элемента, т.е. направлена к сечению.

Напряжения при растяжении и сжатии

При центральном растяжении и сжатии возникает только нормальное напряжение σ .

Направление и знак напряжения в сечении совпадает с направлением и знаком продольной силы N .

$$\sigma = \frac{N_z}{A}$$

2.3. Закон Гука

Рассмотрим центральное растяжение бруса под действием внешней силы F , один из концов которого жестко закреплен, а так же квадратное поперечное сечение (рис. 2.11).

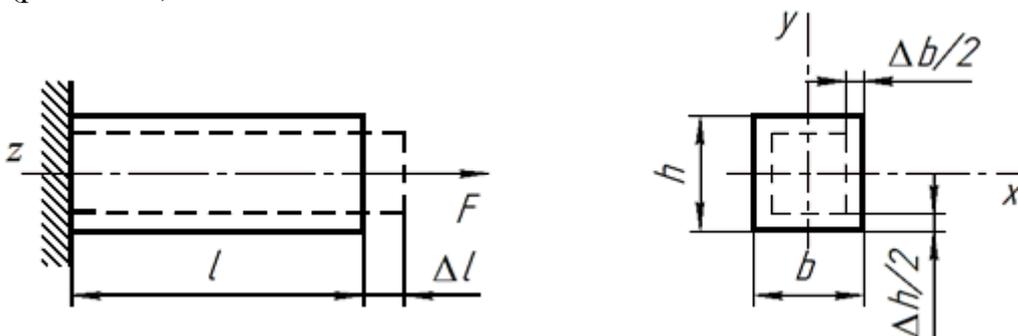


Рис. 2.11

где: l – первоначальная длина бруса; Δl – абсолютное продольное удлинение; Δh – абсолютное поперечное укорочение бруса по оси x (Δb) и по оси y (Δh).

При воздействии внешней силы F , происходит удлинение бруса на Δl и уменьшение поперечных размеров на Δh и Δb .

В сопротивлении материалов деформации рассчитываются в относительных единицах:

1. Относительное удлинение – $\varepsilon = \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}$.
2. Относительное сужение – $\varepsilon_x = \frac{\Delta b}{b}$, $\varepsilon_y = \frac{\Delta h}{h}$.

Для изотропных материалов поперечные деформации одинаковые:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y$$

Опытным путем установлено, что относительная поперечная деформация бруса ε' будет равна:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon'$$
$$\varepsilon' = \mu \varepsilon$$

где: μ – коэффициент Пуассона (это физико-механическая характеристика материала, установленная опытным путем).

В ходе экспериментов по деформированию тел стало понятно, что в пределах упругих деформаций деформации прямо пропорциональны нагрузке:

$$F = k \Delta$$
$$k = \frac{EA}{l}$$

где: F – внешняя сила; k – коэффициент упругости или жесткости; Δ – удлинение бруса; A – площадь поперечного сечения; E – модуль Юнга, характеризует жесткость материала.

Введем относительное удлинение ε и нормальное напряжение в поперечном сечении σ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Используя данные выражения можно записать закон Гука в следующем виде:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Для того, что бы определить удлинение бруса под действием внешних сил (растягивание, сжатие) применяют запись закона Гука в относительной форме:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

2.4. Механические испытания образцов. Испытание материалов на растяжение

Испытание на растяжение производится на образцах двух типов: цилиндрических (рис. 2.12а) и плоских (рис. 2.12б).

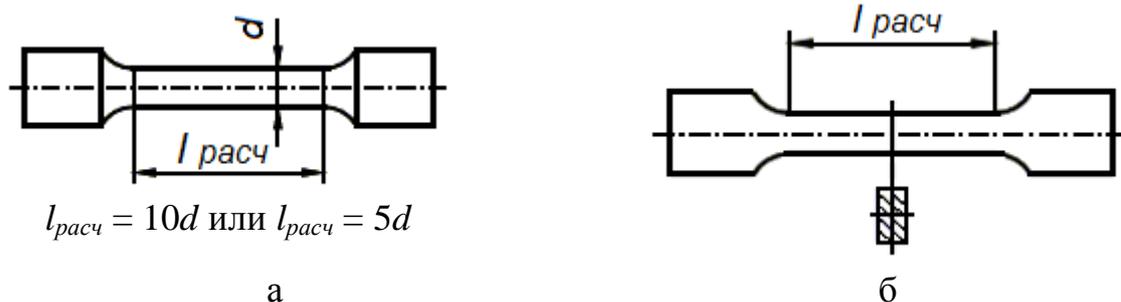


Рис. 2.12

Образцы растягиваются на специальных машинах с автоматической записью диаграммы испытания в координатах сила-удлинение это так называемая рабочая или индикаторная диаграмма.

Рассмотрим диаграмму испытания малоуглеродистой стали (рис. 2.13).

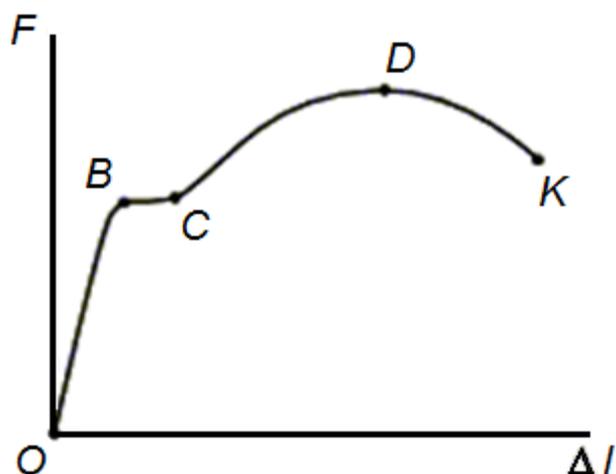


Рис. 2.13

Участки диаграммы:

OB – участок упругости;

BC – площадка текучести;

CD – участок упрочнения;

DK – участок местной текучести.

Для исключения влияния геометрических размеров образца, рабочую диаграмму переделывают в условную (в координатах напряжение-деформация) (рис. 2.14).

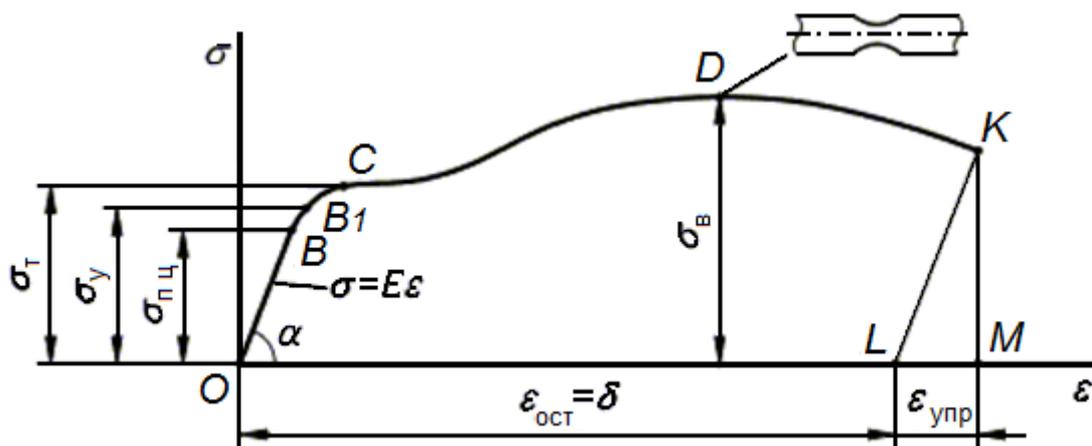


Рис. 2.14

$\sigma_{пц}$ – предел пропорциональности;

σ_y – предел упругости;

σ_m – предел текучести;

σ_ϵ – предел прочности или временное сопротивление разрыву.

Испытание материалов на сжатие

При испытании металлов используют цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру 1...3 (рис. 2.15а), для строительных материалов используют кубические образцы с длиной грани 100 или 150 мм (рис. 2.15б).

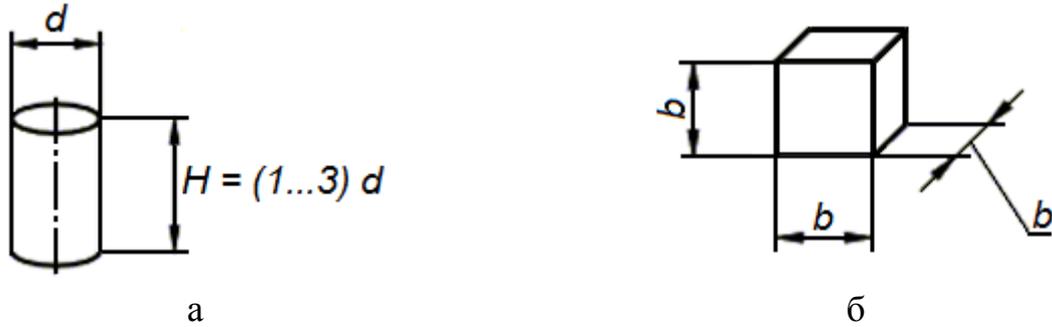


Рис. 2.15

Рассмотрим диаграммы испытания различных материалов на растяжение и сжатие (рис. 2.16).

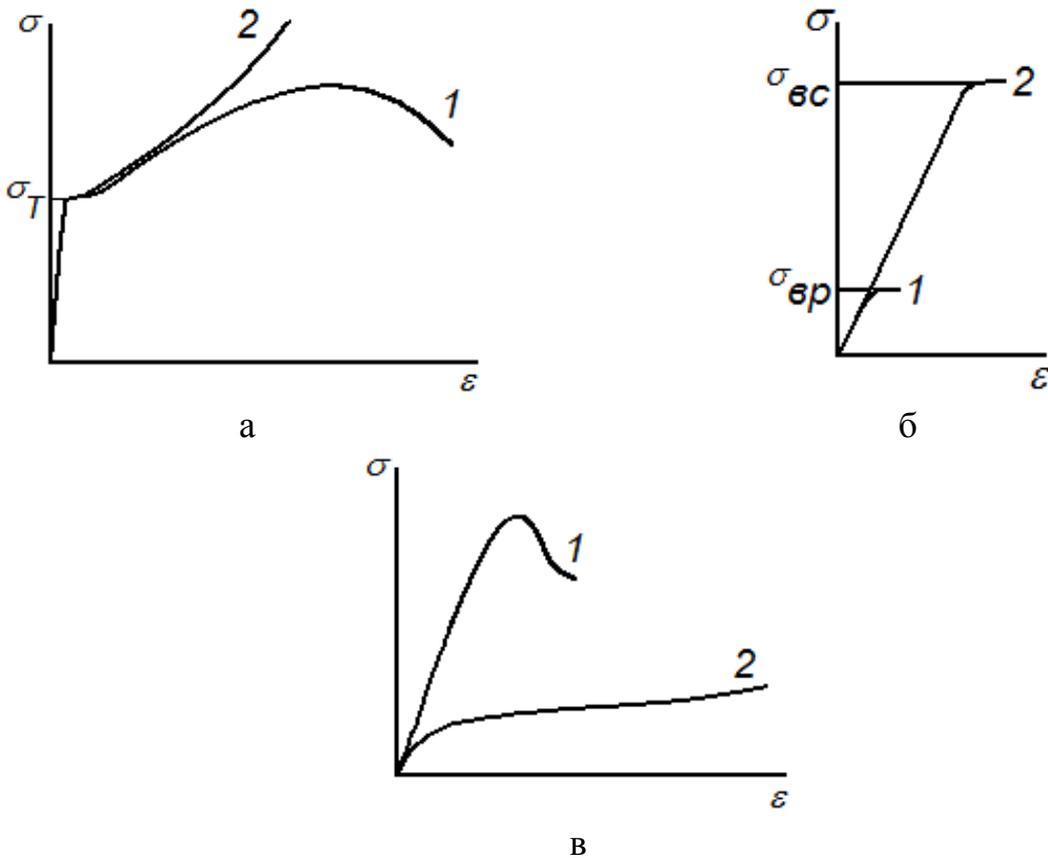


Рис. 2.16

а – диаграмма растяжения и сжатия пластичного материала: 1 – растяжение, 2 – сжатие ($\sigma_{тр} \approx \sigma_{тс}$) (рис. 2.16а).

б – диаграмма растяжения и сжатия хрупкого материала: 1 – растяжение, 2 – сжатие ($\sigma_{вр} < \sigma_{вс}$) (рис. 2.16б).

в – диаграмма сжатия волокнистого материала (дерево): 1 – дерево вдоль волокон, 2 – дерево поперек волокон (рис. 2.16в).

Механические характеристики материала

E – модуль упругости материала [МПа], табличная величина.

$\sigma_{пред} = \sigma_m$ – предел текучести [МПа], только для пластичных материалов.

$\sigma_{пред} = \sigma_v$ – предел прочности [МПа], для хрупких материалов.

Допускаемое напряжение – максимальное напряжение, при котором материал должен нормально работать:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}$$

где: $[\sigma]$ – допускаемое напряжение; s – коэффициент запаса прочности; $[s]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности.

Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

1. Проверочный расчет:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

2. Проектный расчет – определение требуемого сечения образца:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$$

3. Определение допускаемой нагрузки:

$$[N] = A[\sigma]$$

Расчет на жесткость при растяжении и сжатии

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{EA(z)} dz \leq [l]$$

2.5. Примеры решения задач

Пример №1. Стальной стержень находится под действием сил (рис. 2.17). Построить эпюры продольной силы N , нормального напряжения σ и деформаций Δl если дано: $A_1=10 \text{ см}^2$, $A_2=40 \text{ см}^2$, $A_3=20 \text{ см}^2$, $F_1=300 \text{ кН}$, $F_2=500 \text{ кН}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

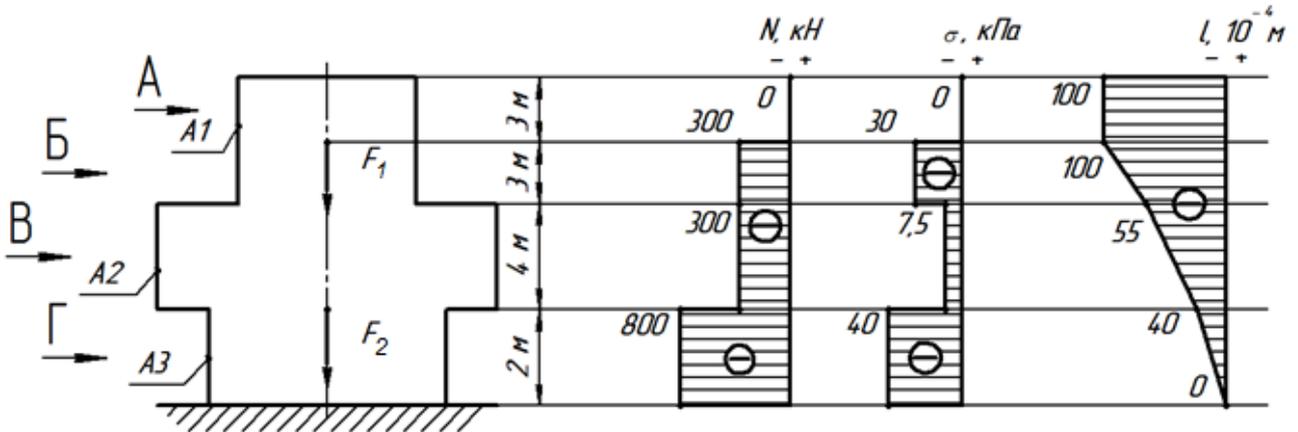


Рис. 2.17

Решение. Рассекаем фигуру на четыре части: 1-1, 2-3, 3-3, 4-4 (рис. 2.17а) и находим продольные силы N и нормальные напряжения σ на соответствующих участках.

Сечение 1-1		
	$N_1 = 0$	(2.1)
	$\sigma_1 = \frac{N_2}{A_1} = 0$	(2.2)
Сечение 2-2		
	$-N_2 - F_2 = 0$	(2.3)
	$N_2 = -F_1 = -300 \text{ кН}$	(2.4)
	$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-300}{10 \cdot 10^{-4}} = -30 \cdot 10^4 \text{ кПа}$	(2.5)

Сечение 3-3		
	$-N_3 - F_2 = 0$	(2.6)
	$N_3 = -F_1 = -300 \text{ кН}$	(2.7)
	$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-300}{40 \cdot 10^{-4}} = -7,5 \cdot 10^4 \text{ кПа}$	(2.8)
Сечение 4-4		
	$-N_4 - F_1 - F_2 = 0$	(2.9)
	$N_4 = -F_1 - F_2 = -800 \text{ кН}$	(2.10)
	$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_3} = \frac{-800}{20 \cdot 10^{-4}} = -40 \cdot 10^4 \text{ кПа}$	(2.11)

Строим эпюры продольных сил N (значения берем из формул: 2.1, 2.4, 2.7, 2.10) и нормальных напряжений σ (значения берем из формул: 2.2, 2.5, 2.8, 2.11) (рис. 2.17б, в).

Определяем деформацию отдельных участков Δl_k и полное укорочение бруса Δl .

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l}{EA_3} = \frac{-800 \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = -40 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA_2} = \frac{-300 \cdot 4}{2 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = -15 \cdot 10^{-4} \text{ м} + \Delta l_4$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_1} = \frac{-300 \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -45 \cdot 10^{-4} \text{ м} + \Delta l_4 + \Delta l_3$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1} = \frac{0 \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0 + \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2$$

Полное укорочение бруса Δl :

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = (0 - 45 - 15 - 40) \cdot 10^{-4} = -100 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1 \text{ см}$$

Строим эпюру Δl (рис. 2.17г).

2.6. Контрольные задания

Статически определимые системы

Стержень находится под действием сил (рис. 2.18-2.20). Построить эпюры продольной силы N , нормального напряжения σ и перемещения Δl . Данные своего варианта смотрите в табл. 2.1, модуль упругости E в приложении 2.

Таблица 2.1

№	$A, \text{см}^2$	$F, \text{кН}$	Линейные размеры, м			Материал стержня
			a	b	c	
1	5	10	1	2	3	сталь
2	8	15	2	3	4	дерево
3	10	20	3	4	5	серый чугун
4	2	11	4	5	6	медь
5	4	13	5	6	7	Алюминий катаный
6	12	16	1	2	2	сталь
7	19	14	2	3	3	дерево
8	7	19	3	4	4	серый чугун
9	9	12	4	5	5	медь
10	15	17	5	6	6	алюминий
11	11	10	1	2	2	сталь
12	14	15	2	3	3	дерево
13	6	20	3	4	4	серый чугун
14	13	11	4	5	5	медь
15	18	13	5	6	6	алюминий
16	5	16	1	2	2	сталь
17	8	14	2	3	3	дерево
18	10	19	3	4	4	серый чугун
19	2	12	4	5	5	медь
20	4	17	5	6	6	алюминий
21	12	10	1	2	2	сталь
22	7	15	2	3	3	дерево
23	9	20	3	4	4	серый чугун
24	15	11	4	5	5	медь
25	11	13	5	6	6	алюминий
26	14	16	1	2	2	сталь
27	6	14	2	3	3	дерево
28	13	19	3	4	4	серый чугун
29	18	12	4	5	5	медь
30	19	17	5	6	6	алюминий

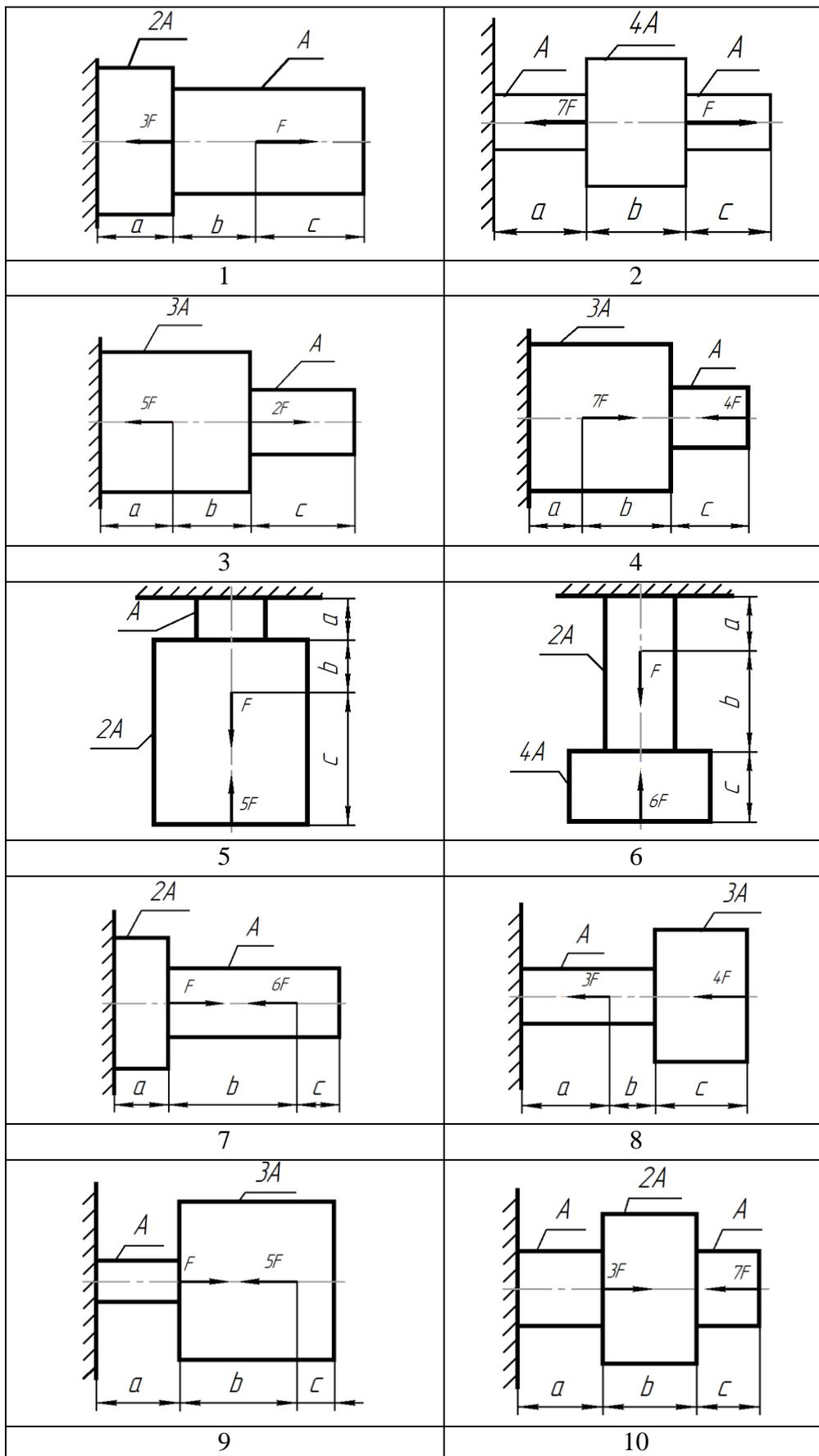


Рис. 2.18

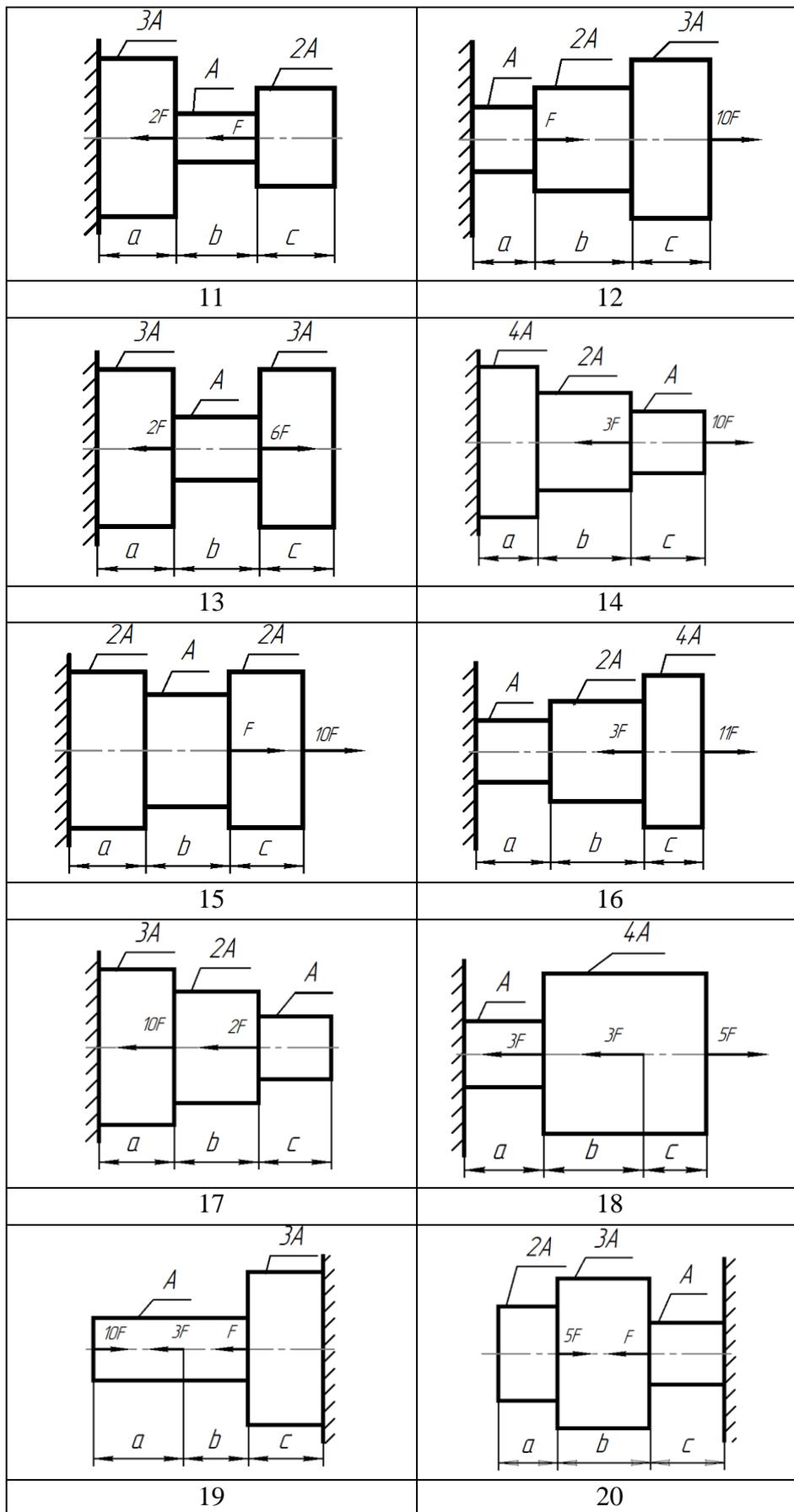


Рис. 2.19

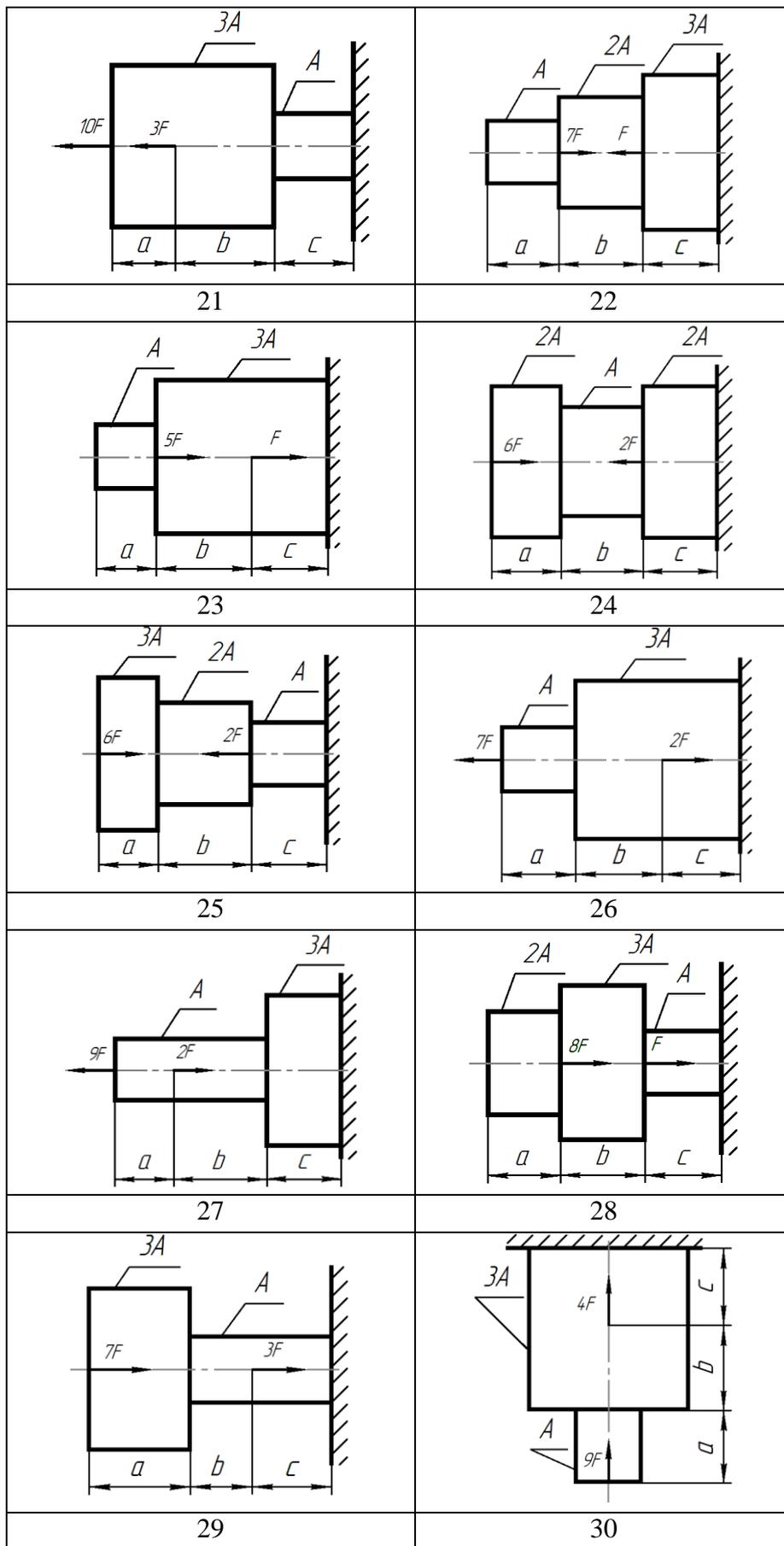


Рис. 2.20

3. Сдвиг (срез), закон Гука при сдвиге. Смятие

3.1. Сдвиг (срез), закон Гука при сдвиге

Сдвиг – это вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только одна поперечная сила (рис. 3.1).

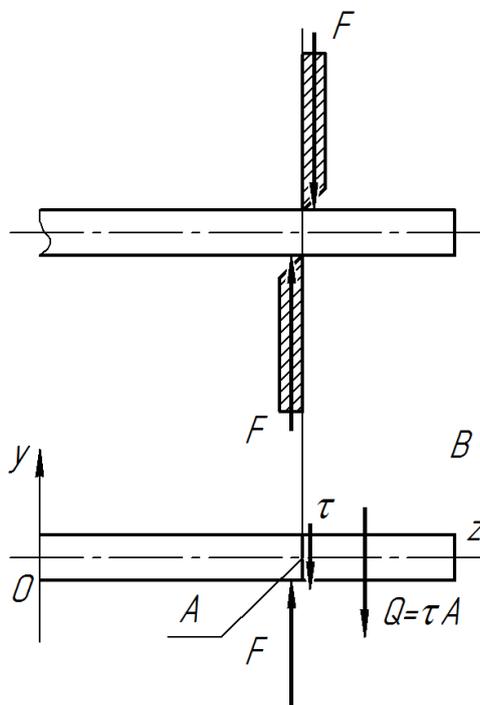


Рис. 3.1

Выделим элемент в виде бесконечно малого параллелипипеда, к граням которого приложены напряжения (рис. 3.2). Внутри бруса на каждой из его грани возникает касательное напряжение τ . На противоположных гранях образуются пары сил. Такое напряженное состояние называется **ЧИСТЫМ СДВИГОМ**.

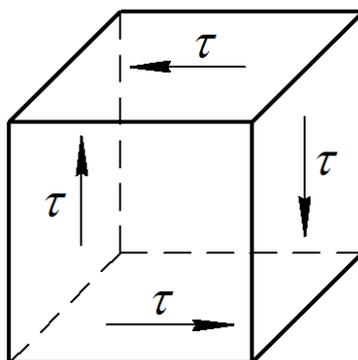


Рис. 3.2

В результате сдвига грани сдвигаются на угол, γ который называется **углом сдвига** (рис. 3.3).

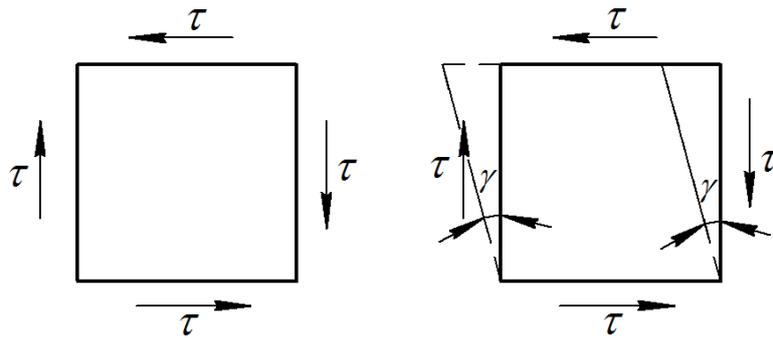


Рис. 3.3

При сдвиге в поперечном сечении бруса действуют только касательные напряжения:

$$\tau_c = \frac{Q_y}{A_c}$$

$$Q = \frac{F}{z}$$

где: Q_y – поперечная сила; A – площадь сдвига; z – количество деталей.

При сдвиге выполняется **закон Гука**:

$$\tau = G\gamma$$

где: τ – напряжение; G – модуль сдвига; γ – угол сдвига.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

где: E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона.

Для упрощения расчетов принимается ряд допущений:

1. При расчете на сдвиг изгиб деталей не учитывается.
2. Силы упругости распределены по сечению равномерно.
3. При использовании нескольких деталей внешняя сила распределяется между ними равномерно.

Условие прочности при сдвиге (срезе):

$$\tau_c = \frac{Q}{A_c} \leq [\tau_c]$$

где: $[\tau_c]$ – допускаемое напряжение сдвига.

Допускаемое напряжение $[\tau_c]$ определяется по формуле:

$$[\tau_c] = (0,25 \div 0,35) \sigma_T$$

где: σ_T – предел текучести материала.

Сдвиг, при котором материал разрушается, называется срезом.

3.2. Смятие

При передаче нагрузки от одной поверхности к другой, в месте контакта двух деталей одновременно со сдвигом может происходить смятие поверхности (например – разрушение болтов или деталей которые они соединяют, рис. 3.4а).

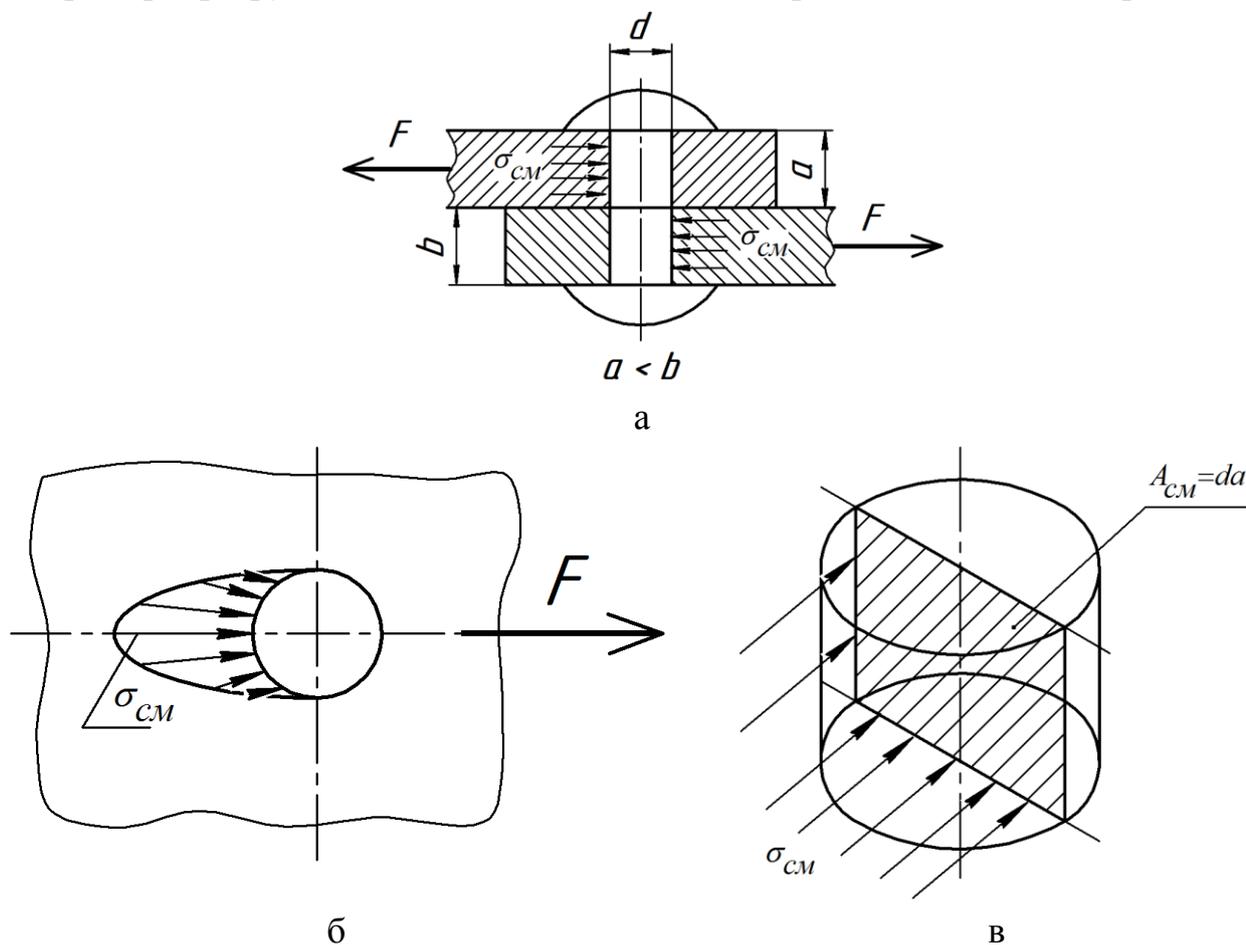


Рис. 3.4

При расчете на смятие принимают ряд допущений принятых для сдвига, но для расчета боковой цилиндрической поверхности используют условную плоскую поверхность, которая проходит через осевые линии цилиндра. На

рисунке 3.4б представлена действительная поверхность смятия, на рисунке 3.4в – условная поверхность смятия.

Детали, работающие на сдвиг (срез) и смятие:

1. Ось (рис. 3.5).

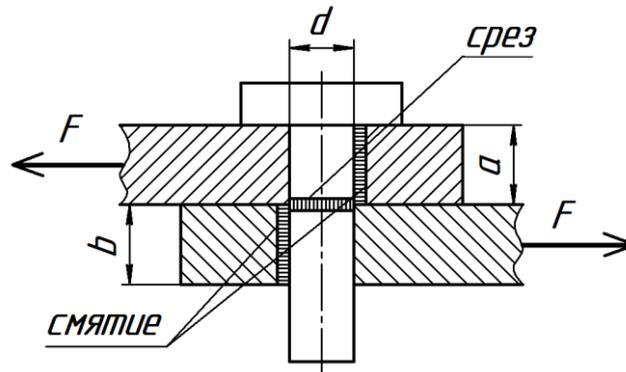


Рис. 3.5

Если $a < b$:

$$A_{см} = da$$

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} i, i = 1$$

где: i – количество площадей среза.

2. Болт (рис. 3.6).

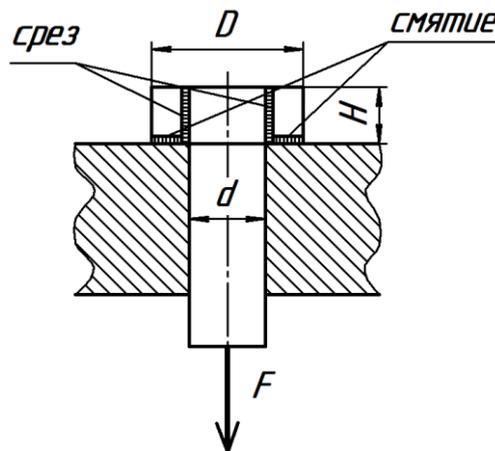


Рис. 3.6

$$A_c = \pi dH$$

$$A_{см} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

3. Заклепка односрезная (рис. 3.7).

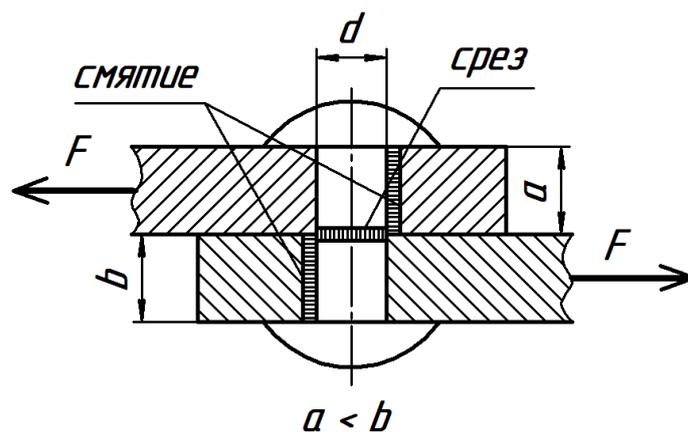


Рис. 3.7

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A_{см} = da$$

4. Заклепка двухсрезная (рис. 3.8).

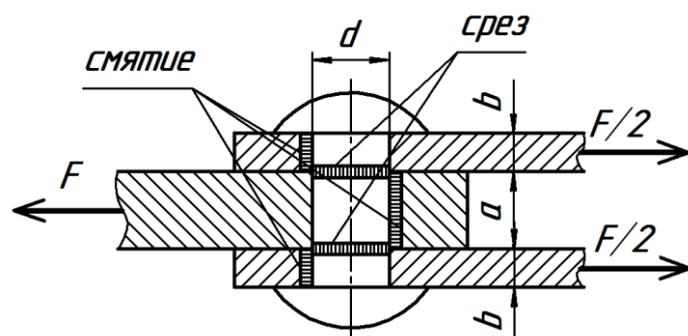


Рис. 3.8

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} i, i = 2$$

$$A_c = \frac{\pi d^2}{2}$$

$$A_{см} = db$$

5. Сварное соединение (рис. 3.9).

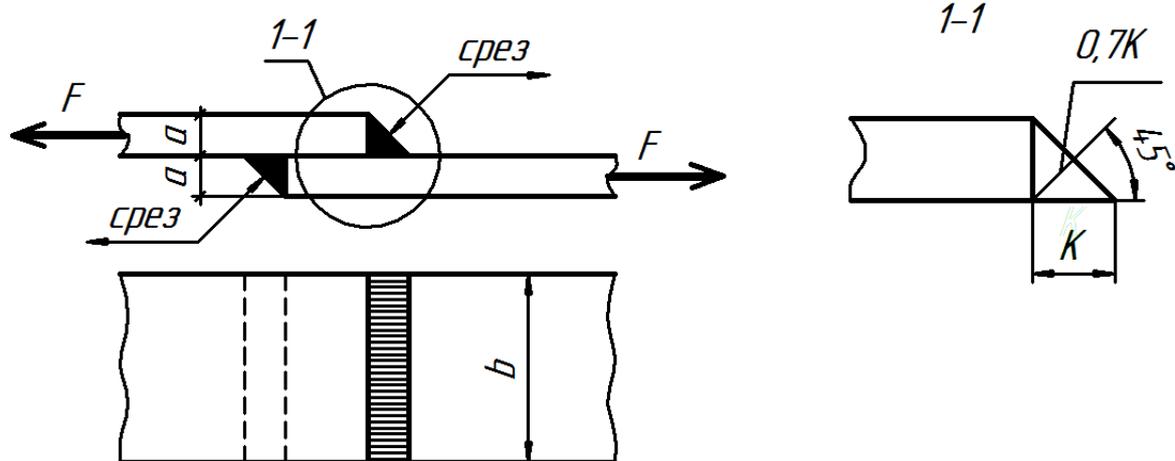


Рис. 3.9

Двухсторонний шов:

$$A_c = 2 \cdot 0,7Kb$$

3.3. Примеры решения задач

Пример №1. Определить необходимое количество заклепок диаметром $d=20$ мм для соединения внахлестку двух листов толщиной $a=8$ мм и $b=10$ мм (рис. 3.10). Сила F равна 196 кН. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau_c]=140$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}]=320$ МПа, $[\sigma]=160$ МПа.

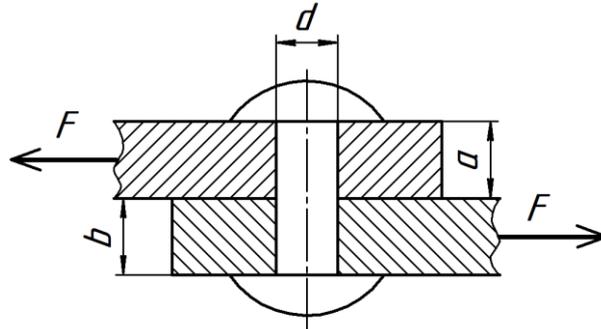


Рис. 3.10

Решение. Из уравнения прочности на срез определяем необходимое число заклепок:

$$\tau_c = \frac{F}{nA_c} \leq [\tau_c], \quad A_c = \frac{\pi d^2}{4}$$
$$n \geq \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau_c]} = \frac{196 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 20^2}{4} \cdot 140} = 4,5 \approx 5$$

Из уравнения прочности на смятие определяем необходимое число заклепок:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{nA_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad A_{см} = da$$
$$n \geq \frac{F}{da [\sigma_{см}]} = \frac{196 \cdot 10^3}{20 \cdot 8 \cdot 320} = 3,8 \approx 4$$

Для обеспечения прочности на срез и смятие необходимо 5 заклепок.

При установке заклепок, расстояние между ними и от края листа регламентируется: расстояние между центрами заклепок $3d$, расстояние до края $1,5d$. Для установки 5 заклепок диаметром 20 мм в ряд необходима ширина листа $l=300$ мм (рис. 3.11).

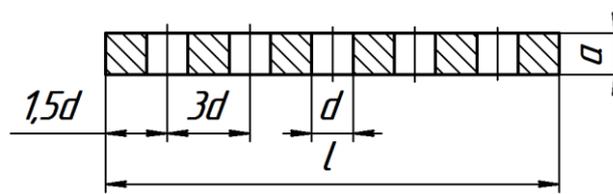


Рис. 3.11

Проверяем прочность листов на растяжение, а именно самый тонкий лист.

Записываем условие прочности на растяжение:

$$\sigma_{раст} = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{раст}]$$

Определяем ширину листа l согласно регламенту:

$$l = 2 \cdot 1,5 \cdot d + 4 \cdot 3 \cdot d = 2 \cdot 1,5 \cdot 20 + 4 \cdot 3 \cdot 20 = 300 \text{ мм}$$

$$A = (l - nd)a = (300 - 5 \cdot 20) \cdot 8 = 1600 \text{ мм}^2$$

$$\sigma_{раст} = \frac{196 \cdot 10^3}{1600} = 122,5$$

$$\sigma_{раст} \leq [\sigma_{раст}]$$

$$122,5 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$$

Ответ: прочность листа обеспечена.

Пример №2. Определить диаметр болта в соединении (рис. 3.12) если растягивающая сила $F=196$ кН, $a=15$ мм, $b=20$ мм, допускаемые напряжения для материала болта: на срез $[\tau_c]=80$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}]=200$ МПа. Гайку заворачивают, но не затягивают.

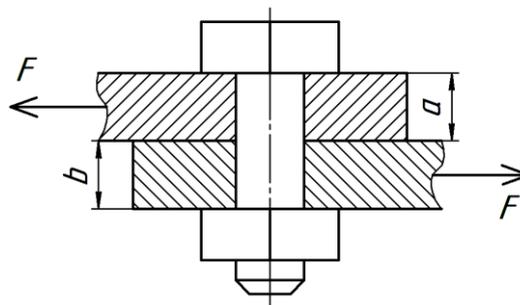


Рис. 3.12

Решение. Из уравнения прочности на срез определяем необходимый диаметр болта:

$$\tau_c = \frac{F}{nA_c} \leq [\tau_c], \quad A_c = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau_c]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 196 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80}} = 56 \text{ мм}$$

Из уравнения прочности на смятие определяем необходимый диаметр болта:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{nda} \leq [\sigma_{см}]$$

$$d \geq \frac{F}{na[\sigma_{см}]} = \frac{196 \cdot 10^3}{15 \cdot 200} = 65 \text{ мм}$$

Ответ: для обеспечения прочности на срез и смятие необходим болт диаметром 65 мм.

Пример №3. Проверить прочность сварного соединения на срез (рис. 3.13), если: действующая нагрузка $F=196$ кН, $a=15$ мм, $b=120$ мм, допускаемое напряжение шва на срез $[\tau_c]=80$ МПа.

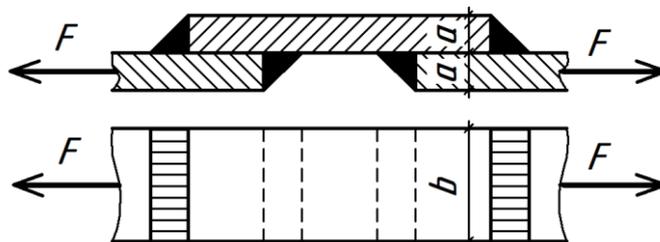


Рис. 3.13

Нагрузка воздействует на швы последовательно – два справа и два слева. Записываем уравнение прочности на срез:

$$\tau_c = \frac{F}{A_c} \leq [\tau_c]$$

$$A_c = 2 \cdot 0,7 \cdot Kb = 2 \cdot 0,7 \cdot 15 \cdot 120 = 2520 \text{ мм}^2$$

$$\tau_c = \frac{196 \cdot 10^3}{2520} = 77,8 \text{ МПа}$$

$$77,8 \text{ МПа} \leq 80 \text{ МПа}$$

Ответ: прочность сварного шва обеспечена.

3.4. Контрольные задания

Срез и смятие

1. На листы соединенные внахлестку действует растягивающая сила F . Определить необходимое количество заклепок диаметром d для соединения двух листов толщиной a и b (рис. 3.14). Заклепки расположить в один ряд. Проверить соединяемые листы на прочность. Данные для расчета взять из табл. 3.1.

Таблица 3.1

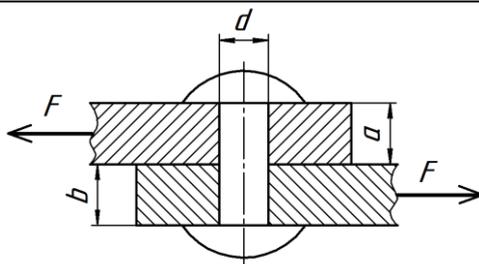


Рис. 3.14

№	a , мм	b , мм	d , мм	F , кН	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma_{см}]$, МПа	$[\tau_c]$, МПа
1	2	4	8	100	110	280	100
2	4	6	12	120	120	320	140
3	6	8	16	140	130	280	100
4	8	10	20	160	140	320	140
5	10	12	24	180	150	280	100
6	12	14	30	200	160	320	140
7	14	3	20	220	170	280	100
8	16	4	22	240	180	320	140
9	18	5	24	260	190	280	100
10	20	6	30	280	200	320	140
11	3	3	8	100	110	280	100
12	4	5	12	120	120	320	140
13	5	8	16	140	130	280	100
14	6	12	20	160	140	320	140
15	10	12	24	180	150	280	100
16	15	12	30	200	160	320	140
17	10	8	20	220	170	280	100
18	8	12	22	240	180	320	140
19	12	10	24	260	190	280	100
20	16	12	30	280	200	320	140
21	4	3	8	100	110	280	100
22	3	7	12	120	120	320	140
23	9	5	16	140	130	280	100
24	5	10	20	160	140	320	140
25	15	6	24	180	150	280	100
26	14	14	30	200	160	320	140
27	10	6	20	220	170	280	100
28	12	10	22	240	180	320	140
29	8	14	24	260	190	280	100
30	12	12	30	280	200	320	140

2. Определить необходимое число заклепок диаметром d для соединения двух листов толщиной b к третьему листу толщиной a (рис. 3.15) если известна сила F , растягивающая соединение. Заклепки расположить в один ряд. Проверить соединяемые листы на прочность. Данные для расчета взять из табл. 3.2.

Таблица 3.2

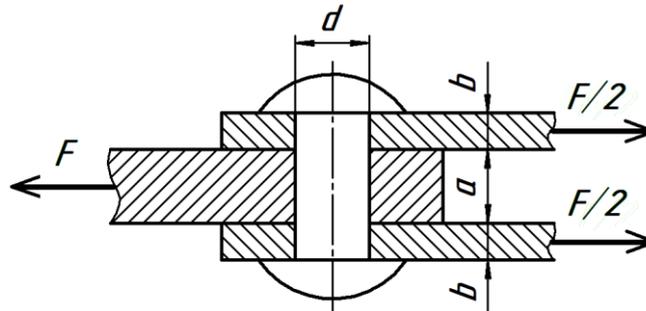


Рис. 3.15

№	a , мм	b , мм	d , мм	F , кН	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma_{см}]$, МПа	$[\tau_c]$, МПа
1	8	5	16	100	110	280	100
2	10	6	20	120	120	320	140
3	12	8	24	140	130	280	100
4	14	10	30	160	140	320	140
5	16	12	30	180	150	280	100
6	8	6	16	200	160	320	140
7	10	5	16	220	170	280	100
8	12	6	20	240	180	320	140
9	14	8	24	260	190	280	100
10	16	10	30	280	200	320	140
11	18	10	30	100	110	280	100
12	8	4	16	120	120	320	140
13	12	10	24	140	130	280	100
14	10	4	16	160	140	320	140
15	14	6	24	180	150	280	100
16	16	8	30	200	160	320	140
17	8	3	16	220	170	280	100
18	10	8	20	240	180	320	140
19	12	4	20	260	190	280	100
20	16	6	24	280	200	320	140
21	18	8	30	100	110	280	100
22	12	5	20	120	120	320	140
23	10	3	16	140	130	280	100
24	14	5	24	160	140	320	140
25	16	10	30	180	150	280	100
26	18	6	30	200	160	320	140
27	16	5	24	220	170	280	100
28	18	5	30	240	180	320	140
29	15	8	24	260	190	280	100
30	13	10	30	280	200	320	140

3. Определить необходимое число заклепок диаметром d для соединения впритык двух листов толщиной a при помощи двух накладок толщиной b (рис. 3.16) если известна сила F , растягивающая соединение. Проверить прочность заклепочного соединения на срез и смятие. Данные для расчета взять из табл. 3.3.

Таблица 3.3

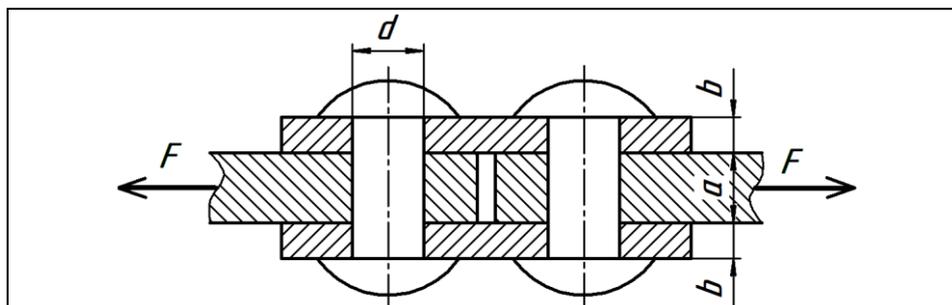


Рис. 3.16

№	a , мм	b , мм	d , мм	F , кН	$[\sigma_{см}]$, МПа	$[\tau_c]$, МПа
1	8	5	16	100	280	100
2	10	6	20	120	320	140
3	12	8	24	140	280	100
4	14	10	30	160	320	140
5	16	12	30	180	280	100
6	8	6	16	200	320	140
7	10	5	16	220	280	100
8	12	6	20	240	320	140
9	14	8	24	260	280	100
10	16	10	30	280	320	140
11	18	10	30	100	280	100
12	8	4	16	120	320	140
13	12	10	24	140	280	100
14	10	4	16	160	320	140
15	14	6	24	180	280	100
16	16	8	30	200	320	140
17	8	3	16	220	280	100
18	10	8	20	240	320	140
19	12	4	20	260	280	100
20	16	6	24	280	320	140
21	18	8	30	100	280	100
22	12	5	20	120	320	140
23	10	3	16	140	280	100
24	14	5	24	160	320	140
25	16	10	30	180	280	100
26	18	6	30	200	320	140
27	16	5	24	220	280	100
28	18	5	30	240	320	140
29	15	8	24	260	280	100
30	13	10	30	280	320	140

4. На болт действует растягивающая осевая сила F (рис. 3.17). Определить диаметр болта в соединении. Гайку заворачивают, но не затягивают. Данные взять из табл. 3.4.

5. На болт действует осевая растягивающая сила (рис. 3.18), при этом возникает смятие головки болта. Рассчитать величину площади смятия болта. Из условия прочности болта на смятие определить величину допускаемой нагрузки F . Гайку заворачивают, но не затягивают. Данные взять из табл. 3.4.

Таблица 3.4

Рис. 3.17		Рис. 3.18					
№	$F, кН$	$[\sigma_{расм}], МПа$	$d, мм$	$D, мм$	$H, мм$	$[\sigma_{см}], МПа$	$[\tau_c], МПа$
1	100	135	6	10	6	160	80
2	120	125	8	13	8	192	96
3	140	118	10	16	10	240	120
4	160	112	6	10	6	512	256
5	180	105	8	13	8	160	80
6	200	100	10	16	10	192	96
7	220	160	12	18	12	240	120
8	240	150	14	21	14	512	256
9	260	140	16	24	16	160	80
10	280	130	18	27	18	192	96
11	100	125	20	30	20	240	120
12	120	120	22	33	22	512	256
13	140	200	24	36	24	160	80
14	160	187	27	40	27	192	96
15	180	176	30	45	30	240	120
16	200	166	33	50	33	512	256
17	220	157	36	54	36	160	80
18	240	150	20	30	20	192	96
19	260	426	22	33	22	240	120
20	280	400	24	36	24	512	256
21	100	376	10	16	10	160	80
22	120	355	12	18	12	192	96
23	140	336	14	21	14	240	120
24	160	320	16	24	16	512	256
25	180	135	18	27	18	160	80
26	200	125	20	30	20	192	96
27	220	118	22	33	22	240	120
28	240	112	24	36	24	512	256
29	260	105	27	40	27	160	80
30	280	100	30	45	30	192	96

6. На болт действует растягивающая поперечная сила F (рис. 3.19). Определить диаметр болта в соединении. Проверить прочность болтового соединения на срез и смятие. Данные для расчета взять из табл. 3.5.

Таблица 3.5

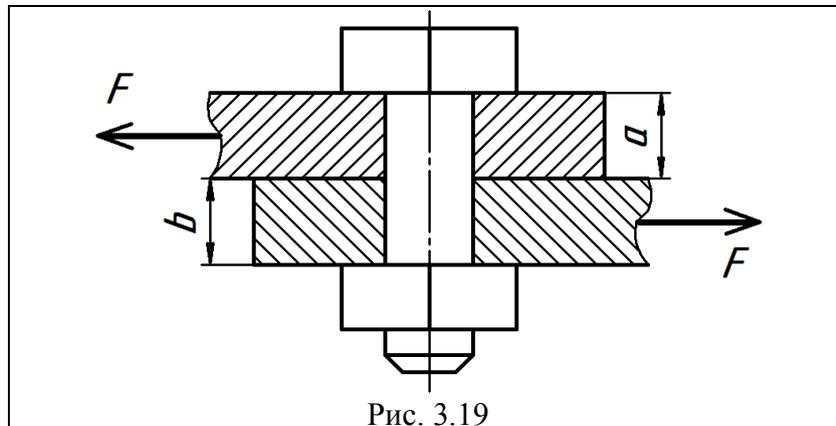


Рис. 3.19

№	a , мм	b , мм	F , кН	$[\sigma_{см}]$, МПа	$[\tau_c]$, МПа
1	8	5	100	160	80
2	10	6	120	192	96
3	12	8	140	240	120
4	14	10	160	512	256
5	16	12	180	160	80
6	8	6	200	192	96
7	10	5	220	240	120
8	12	6	240	512	256
9	14	8	260	160	80
10	16	10	280	192	96
11	18	10	100	240	120
12	8	4	120	512	256
13	12	10	140	160	80
14	10	4	160	192	96
15	14	6	180	240	120
16	16	8	200	512	256
17	8	3	220	160	80
18	10	8	240	192	96
19	12	4	260	240	120
20	16	6	280	512	256
21	18	8	100	160	80
22	12	5	120	192	96
23	10	3	140	240	120
24	14	5	160	512	256
25	16	10	180	160	80
26	18	6	200	192	96
27	16	5	220	240	120
28	18	5	240	512	256
29	15	8	260	160	80
30	13	10	280	192	96

7. Рассчитать суммарную площадь среза сварных швов при передаче силы F (рис. 3.20). Проверить прочность сварного соединения на срез. Данные для расчета взять из табл. 3.6.

Таблица 3.6

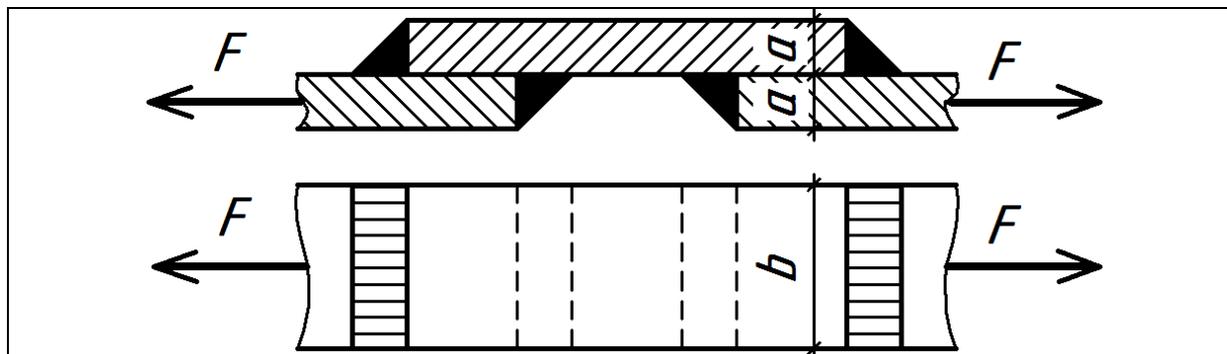


Рис. 3.20

№	a , мм	b , мм	F , кН	$[\tau_c]$, МПа
1	6	60	100	80
2	8	80	120	96
3	10	100	140	120
4	12	120	160	256
5	14	140	180	80
6	16	160	200	96
7	18	180	220	120
8	20	200	240	256
9	22	220	260	80
10	24	240	280	96
11	6	60	100	120
12	8	80	120	256
13	10	100	140	80
14	12	120	160	96
15	14	140	180	120
16	16	160	200	256
17	18	180	220	80
18	20	200	240	96
19	22	220	260	120
20	24	240	280	256
21	6	60	100	80
22	8	80	120	96
23	10	100	140	120
24	12	120	160	256
25	14	140	180	80
26	16	160	200	96
27	18	180	220	120
28	20	200	240	256
29	22	220	260	80
30	24	240	280	96

8. На листы, сваренные встык действует сила F , которая направлена перпендикулярно сваренному шву (рис. 3.21). Проверить прочность сварного соединения на сжатие и растяжение. Данные для расчета взять из табл. 3.7.

Таблица 3.7

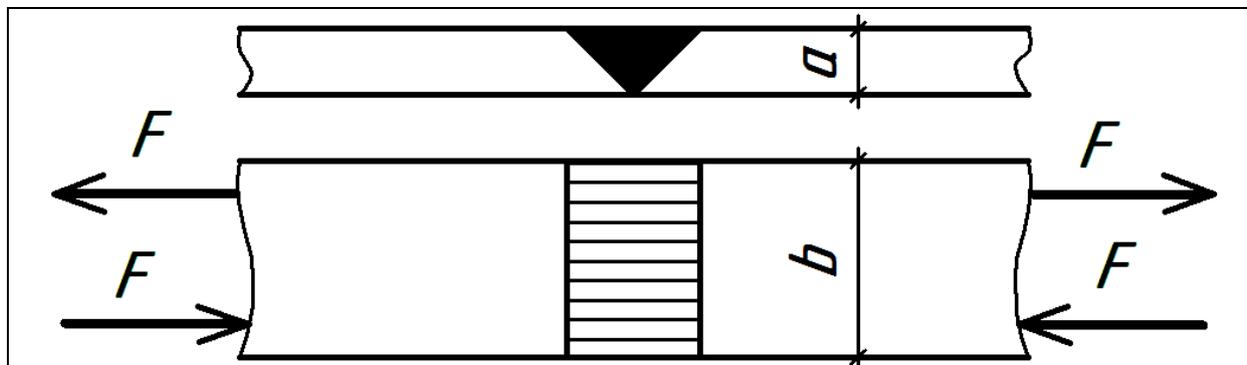


Рис. 3.21

№	a , мм	b , мм	F , кН	$[\sigma_{сж}]$, МПа	$[\sigma_{расм}]$, МПа
1	6	60	100	214	183
2	8	80	120	295	214
3	10	100	140	346	244
4	12	120	160	214	254
5	14	140	180	295	285
6	16	160	200	346	295
7	18	180	220	214	346
8	20	200	240	295	183
9	22	220	260	346	214
10	24	240	280	214	244
11	6	60	100	295	254
12	8	80	120	346	285
13	10	100	140	214	295
14	12	120	160	295	346
15	14	140	180	346	183
16	16	160	200	214	214
17	18	180	220	295	244
18	20	200	240	346	254
19	22	220	260	214	285
20	24	240	280	295	295
21	6	60	100	346	346
22	8	80	120	214	183
23	10	100	140	295	214
24	12	120	160	346	244
25	14	140	180	214	254
26	16	160	200	295	285
27	18	180	220	346	295
28	20	200	240	214	346
29	22	220	260	295	285
30	24	240	280	346	295

9. На листы, сваренные внахлестку с применением лобовых и фланговых швов действует сила F (рис. 3.22). Проверить прочность сварного соединения на срез. Данные для расчета взять из табл. 3.8.

Таблица 3.8

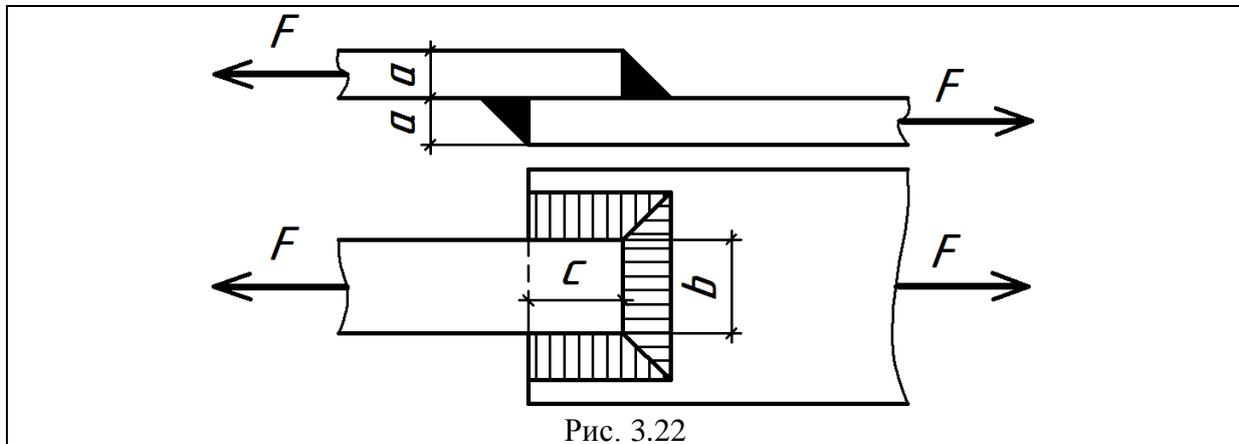


Рис. 3.22

№	a , мм	b , мм	c , мм	F , кН	$[\tau_c]$, МПа
1	6	60	80	100	132
2	8	80	100	120	173
3	10	100	120	140	203
4	12	120	140	160	132
5	14	140	160	180	173
6	16	160	180	200	203
7	18	180	200	220	132
8	20	200	220	240	173
9	22	220	240	260	203
10	24	240	260	280	132
11	6	60	100	100	173
12	8	80	120	120	203
13	10	100	140	140	132
14	12	120	160	160	173
15	14	140	180	180	203
16	16	160	200	200	132
17	18	180	220	220	173
18	20	200	240	240	203
19	22	220	260	260	132
20	24	240	240	280	173
21	6	60	120	100	203
22	8	80	140	120	132
23	10	100	160	140	173
24	12	120	180	160	203
25	14	140	200	180	203
26	16	160	220	200	132
27	18	180	240	220	173
28	20	200	260	240	203
29	22	220	240	260	132
30	24	240	260	280	173

10. На листы, сваренные угловыми швами с накладкой действует сила F (рис. 3.23). Проверить прочность сварного соединения на срез. Данные для расчета взять из табл. 3.9.

Таблица 3.9

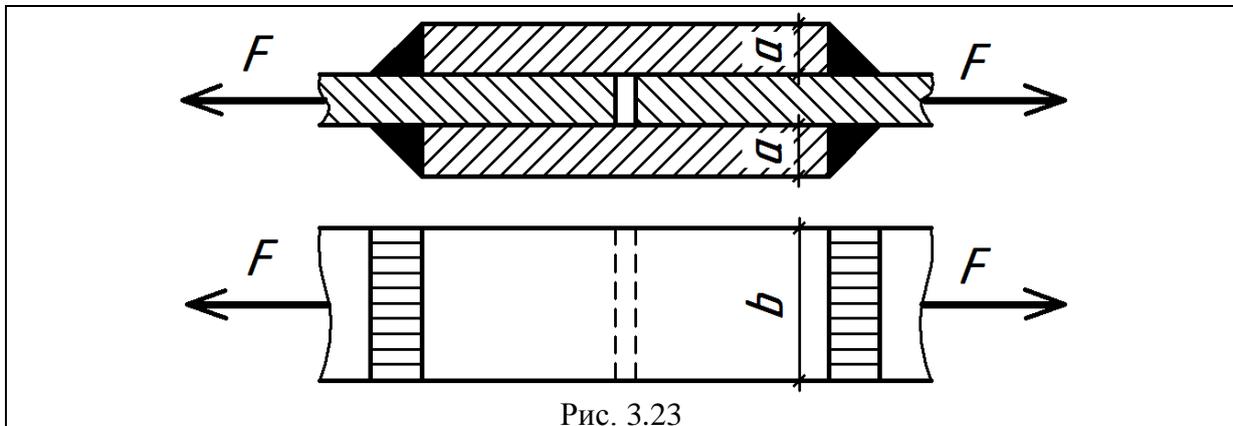


Рис. 3.23

№	a , мм	b , мм	F , кН	$[\tau_c]$, МПа
1	6	60	100	132
2	8	80	120	173
3	10	100	140	203
4	12	120	160	132
5	14	140	180	173
6	16	160	200	203
7	18	180	220	132
8	20	200	240	173
9	22	220	260	203
10	24	240	280	132
11	6	60	100	173
12	8	80	120	203
13	10	100	140	132
14	12	120	160	173
15	14	140	180	203
16	16	160	200	132
17	18	180	220	173
18	20	200	240	203
19	22	220	260	132
20	24	240	280	173
21	6	60	100	203
22	8	80	120	132
23	10	100	140	173
24	12	120	160	203
25	14	140	180	203
26	16	160	200	132
27	18	180	220	173
28	20	200	240	203
29	22	220	260	132
30	24	240	280	173

4. КРУЧЕНИЕ. КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ

4.1. Напряжения и деформации при кручении (круглый брус)

Кручение – это такой вид нагружения, когда в поперечных сечениях тела действуют только крутящие моменты M_z или M_k (рис. 4.1аб).

Гипотезы кручения:

1. Поперечные сечения бруса при кручении остаются круглыми, их радиусы не меняют своей длины и не искривляются.
2. Гипотеза плоских сечений Бернулли – поперечные сечения, плоские до приложения внешнего момента, остаются такими же и после нагружения, поворачиваясь относительно друг друга на некоторый угол.
3. Материал бруса при кручении подчиняется закону Гука при сдвиге.

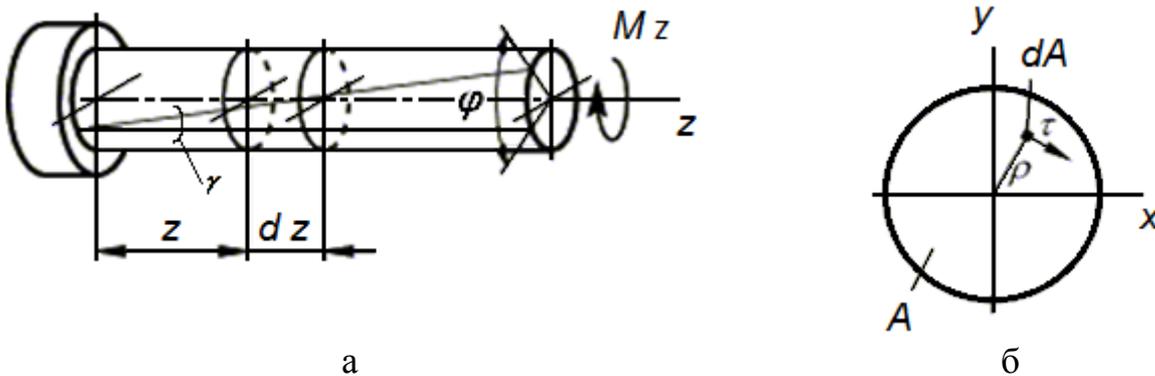


Рис. 4.1

$$M_z = \int_A \tau \rho \cdot dA$$

Кручение происходит при нагружении бруса парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси. При этом образующие бруса искривляются и разворачиваются на угол γ – угол сдвига. Поперечные сечения разворачиваются на угол φ – угол закручивания его еще называют **абсолютным углом закручивания**.

Угол φ определяется по следующей формуле:

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p}$$

где: M – крутящий момент; l – длина стержня; G – модуль упругости при сдвиге; J_p – полярный момент инерции.

$$\varphi = [\text{радиан}]$$

$$G = \left[\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \right]$$

GJ_p – жесткость стержня при кручении.

Согласно гипотезе о линейной зависимости деформаций от приложенных сил получим относительный угол закручивания θ , а при сравнении его с допустимым значением $[\theta]$ найдем условие жесткости при кручении.

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{GJ_p}$$

Угол θ выражается в 1/см, 1/м и т.д.

Согласно закону Гука для сдвига:

$$\tau = G\gamma$$

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\tau = \frac{\rho M_k}{J_p}$$

$$\gamma = [\text{радиан}]$$

Так как касательные напряжения τ в поперечном сечении распределены вдоль радиуса ρ по линейному закону и имеют наибольшее значение в точках, наиболее удаленных от оси мы можем записать следующее выражение максимального касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k \rho_{\max}}{J_p}$$

$$\frac{J_p}{\rho_{\max}} = W_p$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}$$

где: ρ_{max} – радиус поперечного сечения; W_p – полярный момент сопротивления, $[M^3]$.

Полярные моменты простых сечений см. в приложении 3.

4.2. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Расчеты на прочность

1. **Проектный расчет** – определяем площадь и диаметр бруса в опасном сечении.

$$\tau = \frac{M k_{max}}{W_p} \leq [\tau]$$

где: $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение при кручении.

2. **Проверочный расчет** – определяем наибольшее касательное напряжение, а потом его сравниваем с допускаемым касательным напряжением $[\tau]$:

$$\tau_{max} = \frac{M k_{max}}{W_p} \leq [\tau]$$

3. **Определение допускаемой нагрузки** – определяем максимальный крутящий момент:

$$\begin{aligned} [M_{k_{max}}] &= W_p [\tau] \\ M_{k_{внеш}} &\leq [M_{k_{внеш}}] \end{aligned}$$

Расчеты на жесткость

При кручении деформация оценивается относительным углом закручивания.

$$\theta_{max} = \frac{M k_{max}}{GJ_p} \leq [\theta]$$

где: $[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

4.3. Кручение стержня некруглого профиля

При решении задач нахождения напряжений и перемещений стержней некруглого сечения невозможно использовать методы сопротивления материалов т.к. в данном случае гипотеза Бернулли неприменима. Поперечные сечения при кручении искривляются (рис. 4.2а,б).

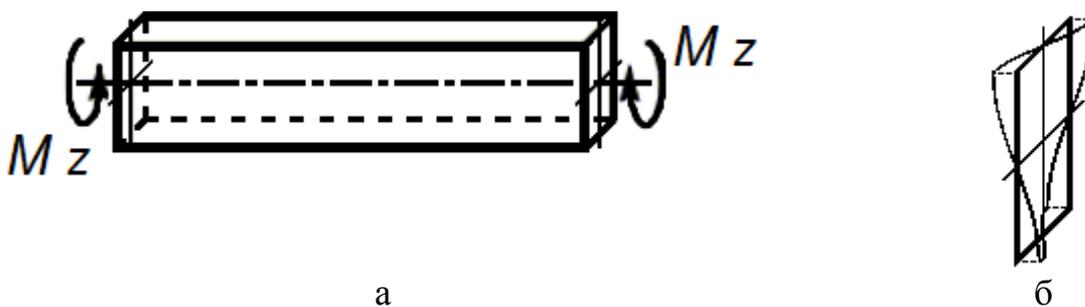


Рис. 4.2

Закон распределения касательных напряжений для прямоугольного сечения имеет следующий вид (рис. 4.3).

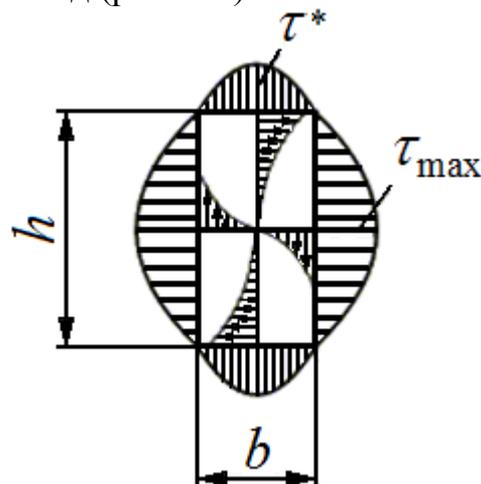


Рис. 4.3

Максимальное касательное напряжение возникает посередине длинной стороны сечения (рис. 4.3) и определяется по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M k_{\max}}{W_p}$$

$$W_p = \alpha h b^2$$

где: h и b – длинная и короткая сторона сечения; α – табличный коэффициент, который зависит от отношения h/b .

Касательное напряжение, действующее посередине короткой стороны:

$$\tau^* = \gamma \tau_{\max}$$

где: γ – табличный коэффициент, который зависит от отношения h/b .

Относительный угол закручивания:

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p}$$
$$J_p = \beta hb^3$$

где: β – табличный коэффициент, который зависит от отношения h/b .

4.4. Примеры решения задач

Пример №1. На вал выполненный из стали действует четыре момента (см. рис. 4.4): $M_1=4$ кН·м, $M_2=3$ кН·м, $M_3=2$ кН·м, $M_4=1$ кН·м, $a=0,1$ м, $b=0,2$ м, $c=0,3$ м, $d=0,4$ м, $[\tau]=35$ МПа. Построить эпюру крутящих моментов. Из условия прочности определить размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала: круглым, кольцевым $\frac{d}{D}=0,40$ (стандартные значения диаметров см. в приложении 2). Выбрать вал с меньшей площадью поперечного сечения. Найти наибольший относительный угол закручивания, θ_{max} если допустимый $[\theta]=1$ град/м. Построить эпюру углов закручивания для вала. Модуль сдвига $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа.

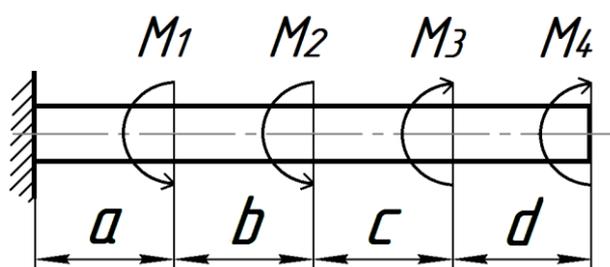


Рис. 4.4

Решение. Вычисляем реактивный момент, возникающий в жесткой заделке, обозначив его как M_A и направив против часовой стрелки (см. рис. 4.5).

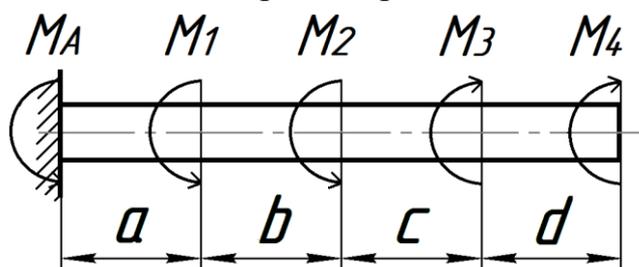


Рис. 4.5

Запишем уравнение равновесия вала, при этом смотрим на вал со стороны свободного конца т.е оси z :

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 0 \\ M_A + M_1 + M_2 - M_3 - M_4 &= 0 \\ M_A &= M_4 + M_3 - M_2 - M_1 = 1 + 2 - 3 - 4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Знак «минус» в полученном выражении говорит о том, что мы не угадали с направлением реактивного момента M_A , возникающего в заделке.

Рассекаем вал на четыре части, обозначаем сечения как А-А, Б-Б, В-В, Г-Г. Вычисляем крутящие моменты на участках вала (см. рис. 4.6а):

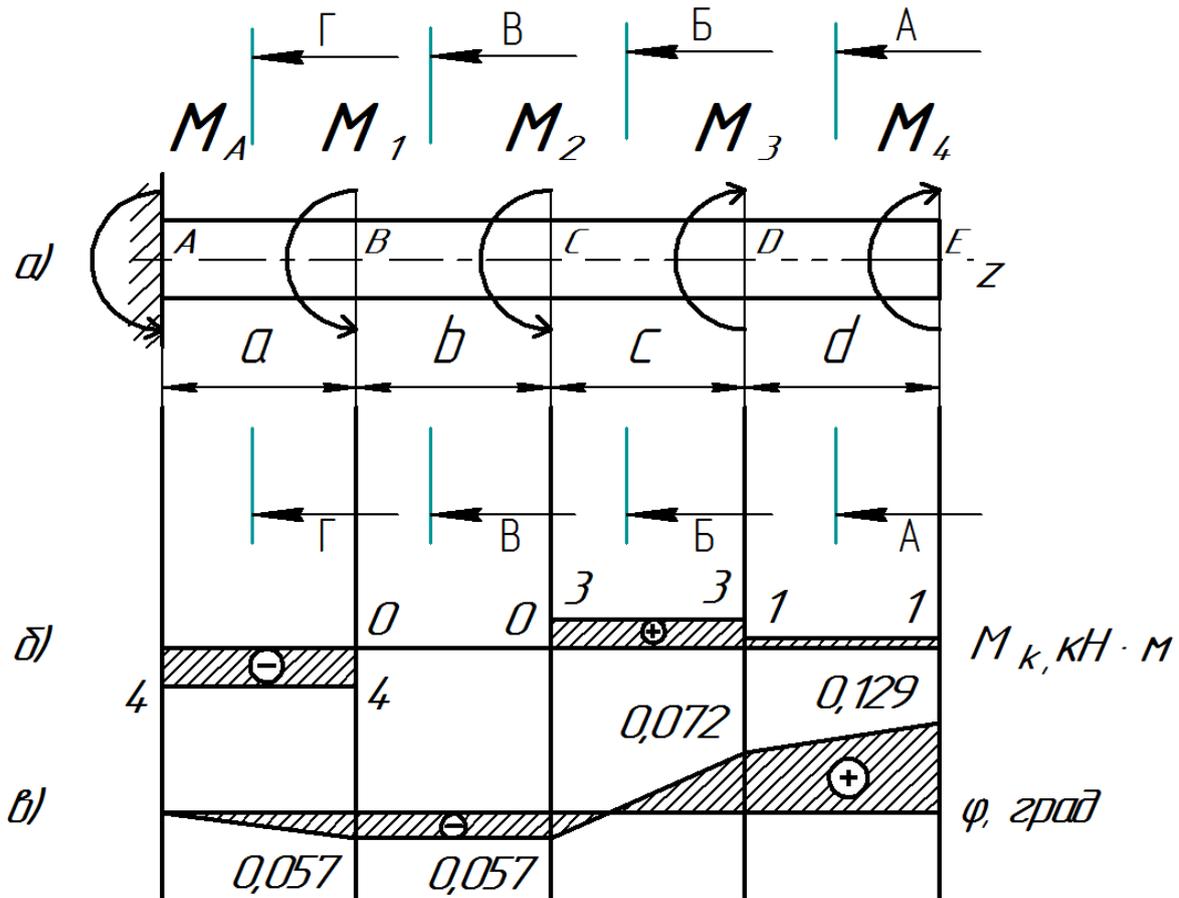


Рис. 4.6

Сечение А-А:	$M_{K_{A-A}} = M_4 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$
Сечение Б-Б:	$M_{K_{B-B}} = M_4 + M_3 = 1 + 2 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$
Сечение В-В:	$M_{K_{B-B}} = M_4 + M_3 - M_2 = 1 + 2 - 3 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$
Сечение Г-Г:	$M_{K_{Г-Г}} = M_A = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Под основным чертежом строим эпюру крутящих моментов M_K (см. рис. 4.6б).

Опасным является участок AB , момент на данном участке равен $M=4$ кН·м.

Из условия прочности определяем размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала круглым:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K_{\max}}}{W_p} \leq [\tau]$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16M K_{\max}}{\pi D^3} \leq [\tau]$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M K_{\max}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 35 \cdot 10^6}} = 0,083 \text{ м} = 8,3 \text{ см}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный $D=8,5$ см.

Находим площадь поперечно сечения (площадь круга):

$$A_{\text{круг}} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8,5^2}{4} = 56,71 \text{ см}^2$$

Из условия прочности определяем размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала кольцевым:

$$\tau_{\max} = \frac{M K_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right)$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M K_{\max}}{\pi \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (1 - 0,4^4) 35 \cdot 10^6}} = 0,084 \text{ м} = 8,4 \text{ см}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный $D=8,5$ см.

Находим площадь поперечно сечения (площадь кольца):

$$A_{\text{кольцо}} = \frac{\pi D^2}{4} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right) = \frac{3,14 \cdot 8,5^2}{4} (1 - 0,4^2) = 47,64 \text{ см}^2$$

Сравниваем площади поперечных сечений и выбираем наиболее экономичный:

$$A_{\text{круг}} = 56,71 \text{ см}^2 \geq A_{\text{кольцо}} = 47,64 \text{ см}^2$$

Выбираем вал кольцевого сечения.

Для выбранного вала с кольцевым сечением проверяем выполнение условия жесткости:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = \frac{3,14 \cdot 8,5^4}{32} (1 - 0,4^4) = 499,11 \text{ см}^4$$

Определяем жесткость вала при кручении:

$$GJ_p = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 499,11 \cdot 10^{-8} = 399,29 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Находим наибольший относительный угол закручивания, θ если допустимый $[\theta] = 1$ град/м:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{K\max}}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{4}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,574 \text{ град/м}$$

Проверяем условие жесткости:

$$\Theta_{\max} = 0,574 \text{ град/м} < [\Theta] = 1 \text{ град/м}$$

Условие жесткости выполнено.

Находим углы закручивания на отдельных участках вала при этом угол закручивания в жесткой заделке равен $\varphi_A = 0$:

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{M_{K_{\Gamma-\Gamma}}^a}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} = 0 + \frac{-4 \cdot 0,1}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = -0,057 \text{ град}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{K_{B-B}}^b}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} = -0,057 + \frac{0 \cdot 0,2}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = -0,057 \text{ град}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{M_{K_{B-B}}^c}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} = -0,057 + \frac{3 \cdot 0,3}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,072 \text{ град}$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{M_{K_{A-A}}^d}{GJ_p} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,072 + \frac{1 \cdot 0,4}{399,29} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,129 \text{ град}$$

Строим эпюру углов закручивания (см. рис. 4.6в).

Пример №2. Какую максимальную мощность может передать стальной вал диаметром 105 мм без нарушения прочности и жесткости, если известны: допустимое напряжение $[\tau]=57$ МПа, допустимый наибольший относительный угол закручивания $[\theta]=0,007$ рад/м и угловая скорость вращения $\omega=93$ с⁻¹. Модуль сдвига $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Определяем мощность по формуле:

$$P_{\max} = M_{K \max} \omega$$

Из условия прочности вала определяем момент передаваемый валом:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K \max}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow M_{K \max} = W_p [\tau]$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 10,5^3}{16} = 227,2 \text{ см}^3$$

Подставляя полученные данные в формулу мощности, находим максимальную мощность на валу:

$$P_{\max} = W_p [\tau] \omega = 227,2 \cdot 10^{-6} \cdot 57 \cdot 10^6 \cdot 93 = 1204,4 \text{ кВт}$$

Из условия жесткости вала определяем момент передаваемый валом:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{K \max}}{GJ_p} \leq [\Theta] \Rightarrow M_{K \max} = GJ_p [\Theta]$$

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 10,5^4}{32} = 1192,72 \text{ см}^4$$

Подставляя полученные данные в формулу мощности, находим максимальную мощность на валу:

$$P_{\max} = GJ_p [\Theta] \omega = 8 \cdot 10^{10} \cdot 1192,72 \cdot 10^{-8} \cdot 0,007 \cdot 93 = 621,2 \text{ кВт}$$

Ответ: максимальная мощность на валу $P_{\max} = 621,2$ кВт.

Пример №3. Из расчетов на прочность и жесткость определить диаметр вала для передачи заданной мощности $P=105$ кВт. Известно: угловая скорость вращения $\omega=43$ рад/с, допустимое напряжение $[\tau]=52$ МПа, допустимый

наибольший относительный угол закручивания $[\theta]=0,06$ рад/м. Модуль сдвига $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Записываем условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K \max}}{W_p} \leq [\tau]$$

Определяем вращательный момент из формулы мощности:

$$P_{\max} = M_{K \max} \omega$$

$$M_{\text{вращ}} = M_{K \max}$$

$$P_{\max} = M_{\text{вращ}} \omega \Rightarrow M_{\text{вращ}} = \frac{P_{\max}}{\omega} = \frac{105 \cdot 10^3}{43} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Определяем момент сопротивления вала при кручении:

$$W_p \geq \frac{M_{\text{вращ}}}{[\tau]} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{52 \cdot 10^6} = 0,046 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 4,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$$

Определяем диаметр вала:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4,6 \cdot 10^4}{3,14}} = 62 \text{ мм}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный $D=63$ мм.

Записываем условие жесткости при кручении:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{\text{вращ}}}{G J_p} \leq [\Theta]$$

Определяем момент инерции сечения:

$$J_p \geq \frac{M_{\text{вращ}}}{G [\Theta]} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,06} = 50 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 500 \cdot 10^3 \text{ мм}^4$$

Определяем диаметр вала:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 J_p}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 500 \cdot 10^3}{3,14}} = 48 \text{ мм}$$

Из приложения 2 (стандартные значения диаметров) выбираем окончательный диаметр вала равный $D=48$ мм.

Ответ: для обеспечения прочности и жесткости выбираем диаметр вала равный $D=63$ мм.

4.5. Контрольные задания

Кручение вала

1. На вал действуют четыре момента (см. рис. 4.7-4.9): M_1, M_2, M_3, M_4 . Построить эпюру крутящих моментов. Из условия прочности определить размеры поперечного сечения вала, приняв сечение вала: круглым, кольцевым (стандартные значения диаметров см. в приложении 2). Выбрать вал с меньшей площадью поперечного сечения. Найти наибольший относительный угол закручивания, θ если допустимый $[\theta]=1$ град/м. Построить эпюру углов закручивания для вала. Данные для расчета взять из таблицы. Модуль сдвига G и материал вала смотри в приложении 2 таблица 5.

Таблица 4.1

№	$M_1,$ кН·м	$M_2,$ кН·м	$M_3,$ кН·м	$M_4,$ кН·м	$a,$ м	$b,$ м	$c,$ м	$[\tau],$ МПа	$\frac{d}{D}$	№ материала
1	1	2	3	4	0,2	0,3	0,4	35	0,40	1
2	2	3	4	5	0,3	0,4	0,5	40	0,45	2
3	3	4	5	6	0,4	0,5	0,6	45	0,50	3
4	4	5	6	7	0,5	0,6	0,7	50	0,55	4
5	5	6	7	8	0,6	0,7	0,8	55	0,60	5
6	6	7	8	9	0,7	0,8	0,9	60	0,65	7
7	7	8	9	10	0,8	0,9	1	65	0,70	9
8	8	9	10	1	0,9	1	1,2	70	0,75	1
9	9	10	1	2	1	1,2	1,3	75	0,80	2
10	10	1	2	3	1,2	1,3	1,4	80	0,85	3
11	1	2	3	4	0,2	0,3	0,4	35	0,40	4
12	2	3	4	5	0,3	0,4	0,5	40	0,45	5
13	3	4	5	6	0,4	0,5	0,6	45	0,50	7
14	4	5	6	7	0,5	0,6	0,7	50	0,55	9
15	5	6	7	8	0,6	0,7	0,8	55	0,60	1
16	6	7	8	9	0,7	0,8	0,9	60	0,65	2
17	7	8	9	10	0,8	0,9	1	65	0,70	3
18	8	9	10	1	0,9	1	1,2	70	0,75	4
19	9	10	1	2	1	1,2	1,3	75	0,80	5
20	10	1	2	3	1,2	1,3	1,4	80	0,85	7
21	1	2	3	4	0,2	0,3	0,4	35	0,40	9
22	2	3	4	5	0,3	0,4	0,5	40	0,45	1
23	3	4	5	6	0,4	0,5	0,6	45	0,50	2
24	4	5	6	7	0,5	0,6	0,7	50	0,55	3
25	5	6	7	8	0,6	0,7	0,8	55	0,60	4
26	6	7	8	9	0,7	0,8	0,9	60	0,65	5
27	7	8	9	10	0,8	0,9	1	65	0,70	7
28	8	9	10	1	0,9	1	1,2	70	0,75	9
29	9	10	1	2	1	1,2	1,3	75	0,80	1
30	10	1	2	3	1,2	1,3	1,4	80	0,85	2

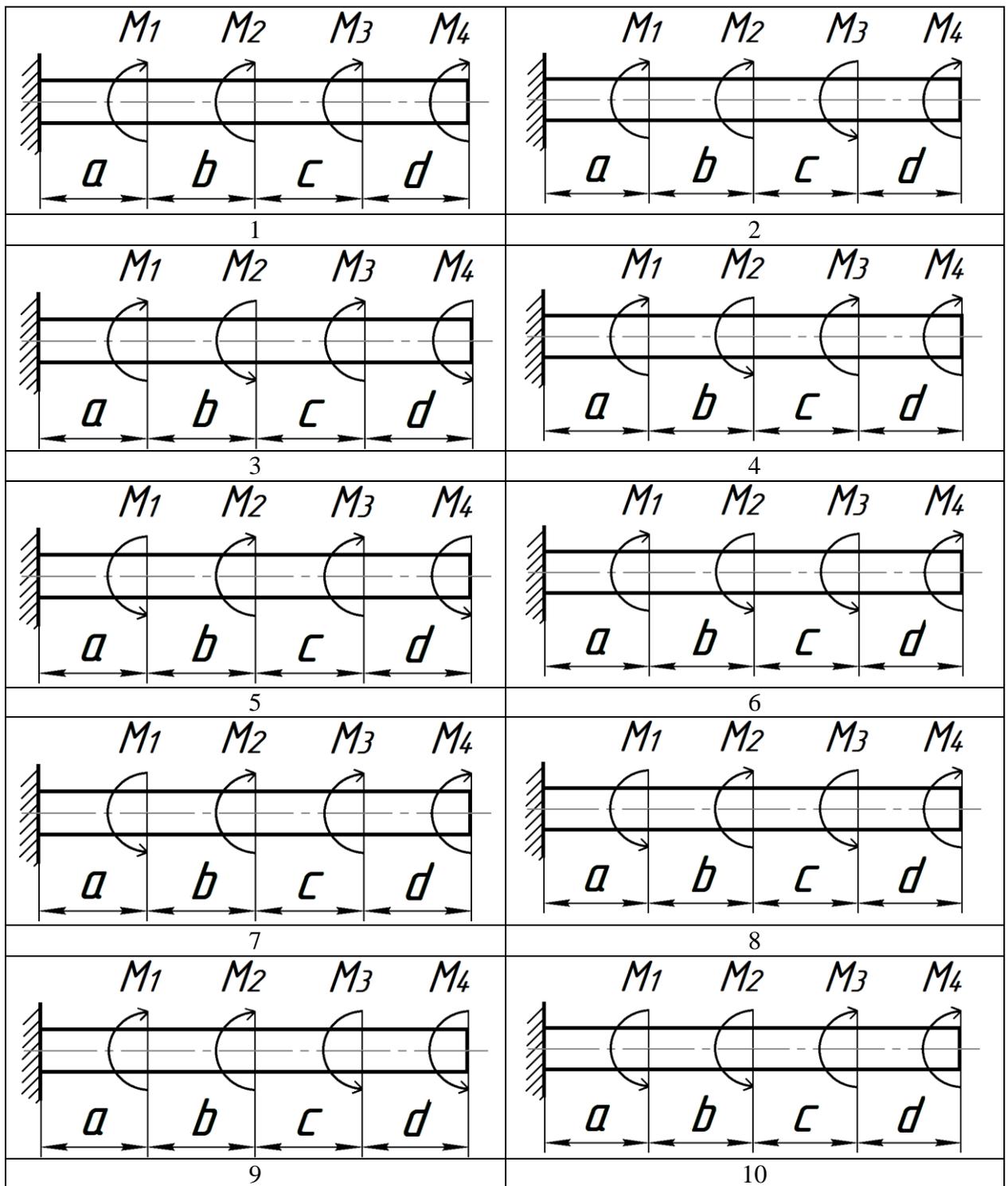


Рис. 4.7

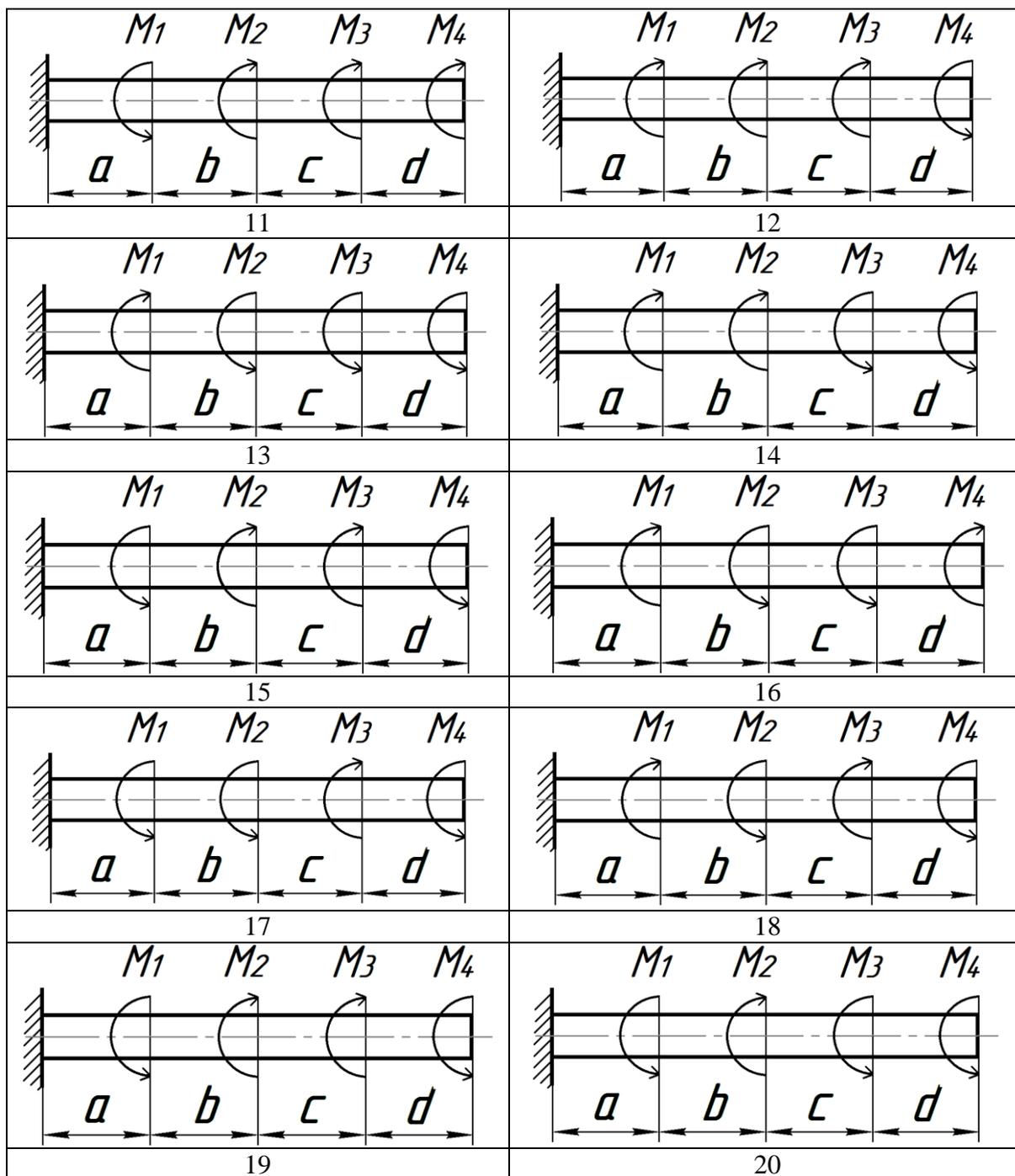


Рис. 4.8

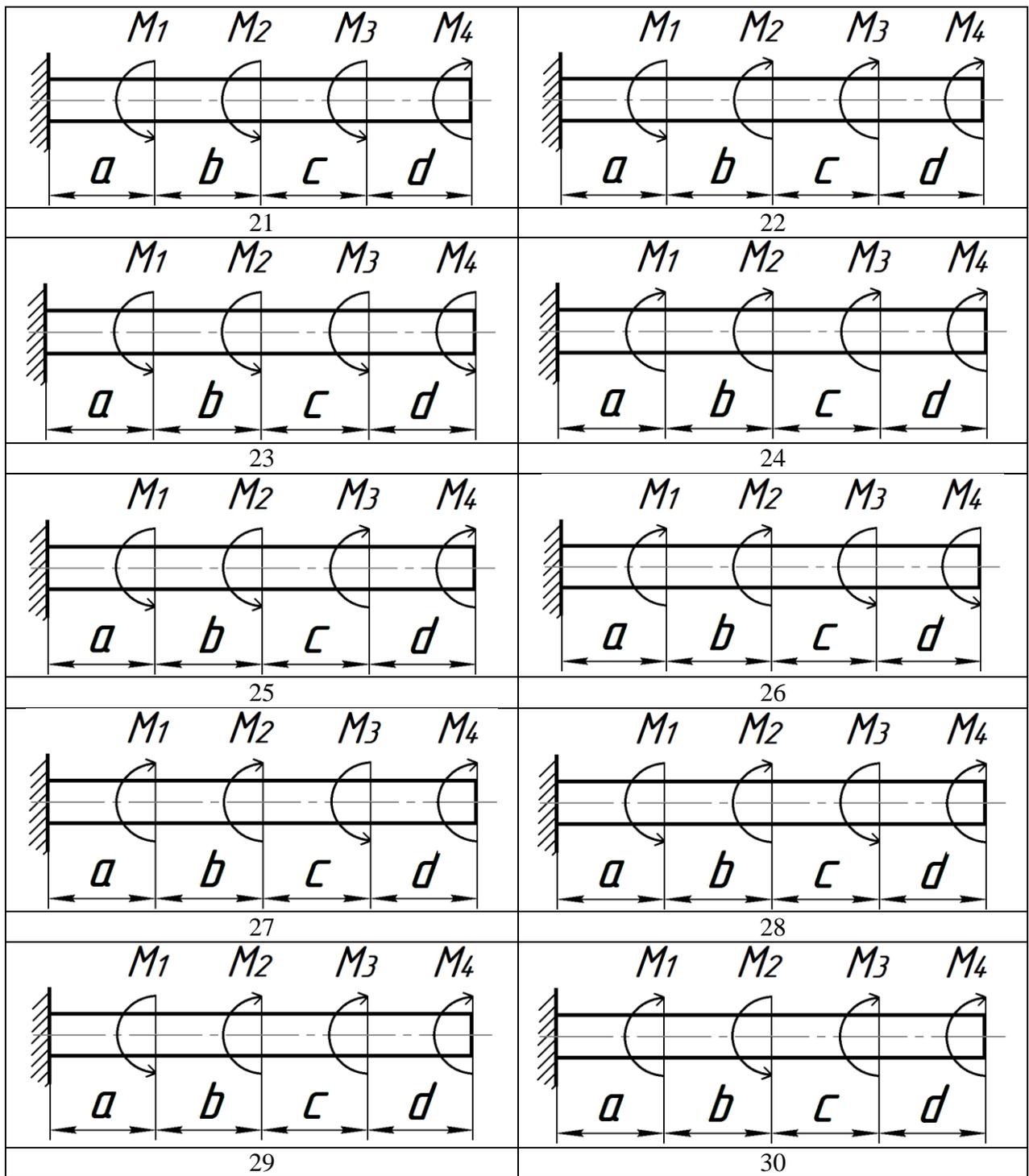


Рис. 4.9

2. Какую максимальную мощность может передать вал заданного диаметра без нарушения прочности и жесткости, если известны: допускаемое напряжение $[\tau]$, допустимый наибольший относительный угол закручивания $[\theta]$ и угловая скорость вращения ω . Данные для расчета взять из таблицы. Модуль сдвига G и материал вала смотри в приложении 2 таблица 5.

Таблица 4.2

№	D , мм	$[\tau]$, МПа	ω , с ⁻¹	$[\theta]$, рад/м	№ материала
1	50	25	40	0,004	1
2	55	30	42	0,005	2
3	60	35	44	0,006	3
4	65	40	46	0,007	4
5	70	45	48	0,008	5
6	75	50	50	0,009	7
7	80	55	52	0,01	9
8	85	60	54	0,02	1
9	90	65	56	0,03	2
10	95	70	58	0,04	3
11	100	75	60	0,05	4
12	52	25	62	0,004	5
13	54	30	64	0,005	7
14	56	35	66	0,006	9
15	58	40	68	0,007	1
16	60	45	70	0,008	2
17	62	50	72	0,009	3
18	64	55	74	0,01	4
19	66	60	76	0,02	5
20	68	65	78	0,03	7
21	70	70	80	0,04	9
22	72	75	64	0,05	1
23	74	40	66	0,007	2
24	76	45	68	0,008	3
25	78	50	70	0,009	4
26	80	55	72	0,01	5
27	82	60	74	0,02	7
28	84	65	76	0,03	9
29	86	70	78	0,04	1
30	88	75	80	0,05	2

3. Из расчетов на прочность и жесткость определить диаметр вала для передачи заданной мощности P . Известно: угловая скорость вращения ω , допускаемое напряжение $[\tau]$, допустимый наибольший относительный угол закручивания $[\theta]$. Данные для расчета взять из таблицы. Модуль сдвига G и материал вала смотри в приложении 2 таблица 5.

Таблица 4.3

№	P , кВт	ω , рад/с	$[\tau]$, МПа	$[\theta]$, рад/м	№ материала
1	50	18	15	0,01	1
2	52	20	17	0,02	2
3	54	22	19	0,03	3
4	56	24	21	0,04	4
5	58	26	23	0,05	5
6	60	28	25	0,06	7
7	62	30	27	0,07	9
8	64	32	29	0,08	1
9	66	34	31	0,09	2
10	68	36	33	0,02	3
11	70	38	35	0,03	4
12	72	40	37	0,04	5
13	74	42	39	0,05	7
14	76	44	41	0,06	9
15	78	46	42	0,07	1
16	80	48	44	0,08	2
17	82	50	46	0,09	3
18	84	40	48	0,03	4
19	86	42	50	0,04	5
20	88	44	51	0,05	7
21	90	46	53	0,06	9
22	92	48	55	0,07	1
23	94	50	57	0,08	2
24	96	40	59	0,09	3
25	98	42	61	0,04	4
26	100	44	62	0,05	5
27	82	46	51	0,06	7
28	84	48	53	0,07	9
29	86	50	55	0,08	1
30	88	46	57	0,09	2

5. ПРЯМОЙ ИЗГИБ БАЛКИ

5.1. Основные определения

Изгибом называют такой вид деформации, при которой происходит искривление продольной оси бруса.

Если все внешние нагрузки расположены в одной плоскости проходящей через центр тяжести балки, то такой изгиб называют **прямым**.

При прямом изгибе поперечных сечений балки возникают два внутренних силовых фактора: M_x – изгибающий момент и Q_y – поперечная сила.

Если в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент M_x , то такой изгиб называется **чистым**.

Если при изгибе в поперечном сечении балки возникают изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y , то такой изгиб называется **поперечным**.

Брус, работающий на изгиб принято называть балкой.

Простые балки (статически определимые) бывают трех видов:

1. Однопролетные (рис. 5.1).

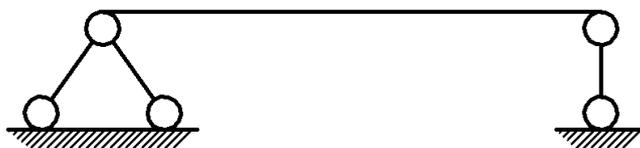


Рис. 5.1

2. Консольные (рис. 5.2).

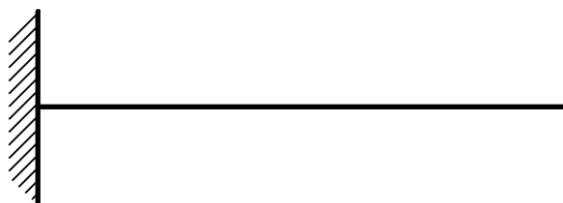


Рис. 5.2

3. Пролетная с консолями (рис. 5.3).



Рис. 5.3

При чистом изгибе выполняются гипотезы плоских сечений Бернулли и ненадавливваемости слоев:

1. При воздействии на брус изгибающих моментов между растянутыми и сжатыми волокнами будет расположен слой продольных волокон, которые искривляются, но не меняют своей длины – такой слой называется **нейтральным** (рис. 5.4).

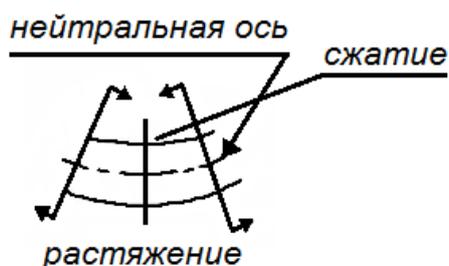


Рис. 5.4

2. Продольные волокна не давят друг на друга, поэтому слои испытывают простое растяжение или сжатие.

3. Сечения плоские и нормальные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации.

Правила знаков:

1. Изгибающий момент M считается положительным, если внешний силовой фактор растягивает нижние волокна балки относительно точки сечения (рис. 5.5а, б).



Рис. 5.5

2. Поперечная сила Q считается положительной, если она вращает отсеченную часть балки по часовой стрелки (рис. 5.6а, б).



Рис. 5.6

5.2. Зависимость между поперечной силой, изгибающим моментом и нагрузкой для построения эпюр

1. На участках балки, где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент M возрастает и наоборот.
2. Если $Q=0$ то на эпюре изгибающего момента M – экстремум.
3. На незагруженных участках балки эпюра поперечной силы – прямая линия параллельная базе, эпюра изгибающего момента – наклонная прямая.
4. Под распределенной нагрузкой эпюра изгибающего момента – квадратичная парабола выпуклостью в сторону действия нагрузки, эпюра поперечной силы – наклонная прямая.
5. В точке приложения сосредоточенной нагрузки на эпюре поперечной силы скачек на величину нагрузки, на эпюре изгибающего момента – излом в сторону действия нагрузки.
6. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре изгибающего момента скачек на величину этого момента, эпюра поперечной силы без изменения.

5.3. Дифференциальные зависимости при изгибе

Изгибающий момент, поперечная сила и интенсивность распределенной нагрузки связаны зависимостями Д.Н. Журавского:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q$$
$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

Если $M_x = \text{const}$ то $Q_y = 0$, если $Q_y = \text{const}$ то $q = 0$.

5.4. Нормальные напряжения при изгибе

Рассмотрим элемент балки длиной dz (рис. 5.7).

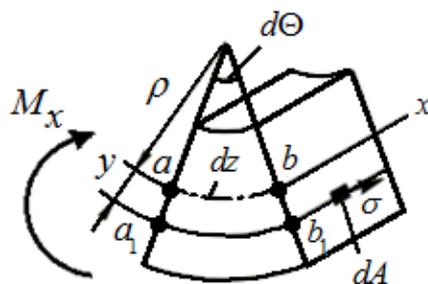


Рис. 5.7

Относительное изменение длины волокна:

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

где: ρ – радиус нейтральной линии; $d\theta$ – угол поворота сечения; $ab=dz$ – длина нейтральной линии для выбранного элемента.

Согласно закону Гука:

$$\sigma_z = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$

Изгибающий момент:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A \frac{Ey}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EJ_x}{\rho}$$

где: EJ_x – жесткость поперечного сечения при изгибе; $\int_A y^2 dA = J_x$ – статический момент сечения.

Нахождение нормальных напряжений в любом слое поперечного сечения бруса σ_z :

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{J_x}$$

Следовательно, абсолютная величина напряжения тем выше, чем больше расстояние y от нейтральной линии.

Максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_{\max}}{J_x} = \frac{M_x}{W_x}$$
$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

где: y_{\max} – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки сечения; W_x – момент сопротивления сечения при изгибе, [м³].

5.5. Расчет на прочность при изгибе

1. **Проектный расчет** – определяем максимальное расчетное напряжение, затем сравниваем его с допускаемым напряжением:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

где: $[\sigma]$ – допускаемое напряжении.

2. **Проектный расчет** – подбор сечения бруса (рис. 5.8):

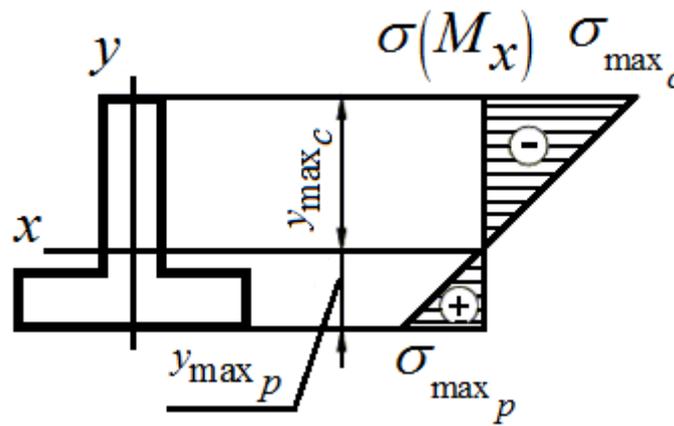


Рис. 5.8

$$\sigma_{\max}^{раст} = \frac{M_x y_{\max}^{раст}}{J_x} \leq [\sigma_{раст}]$$

$$\sigma_{\max}^{сж} = \frac{M_x y_{\max}^{сж}}{J_x} \leq [\sigma_{сж}]$$

Если $\frac{y_{\max}^{сж}}{y_{\max}^{раст}} > \frac{[\sigma_{сж}]}{[\sigma_{раст}]}$ - опасными являются сжатые волокна.

Если $\frac{y_{\max}^{сж}}{y_{\max}^{раст}} < \frac{[\sigma_{сж}]}{[\sigma_{раст}]}$ - опасными являются растянутые волокна.

3. **Определение наибольшего допускаемого изгибающего момента:**

$$[M_x] = W_x [\sigma]$$

5.6. Касательные напряжения при изгибе

При прямом изгибе касательные напряжения определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{omc}}{J_x b}$$

где: Q_y – поперечная сила; S_x^{omc} – статический момент отсеченной части относительно оси x ; J_x – момент инерции сечения; b – ширина балки.

5.7. Примеры решения задач

Изгиб

Пример №1. Для стальной балки (см. рис. 5.9) написать выражения Q и M для каждого участка, построить эюры Q и M , найти M_{max} , подобрать размеры круглого, прямоугольного ($\frac{h}{b}=2$) и двутаврового сечений, если известно: $q=8$ кН/м, $F=100$ кН, $[\sigma]=160$ МПа.

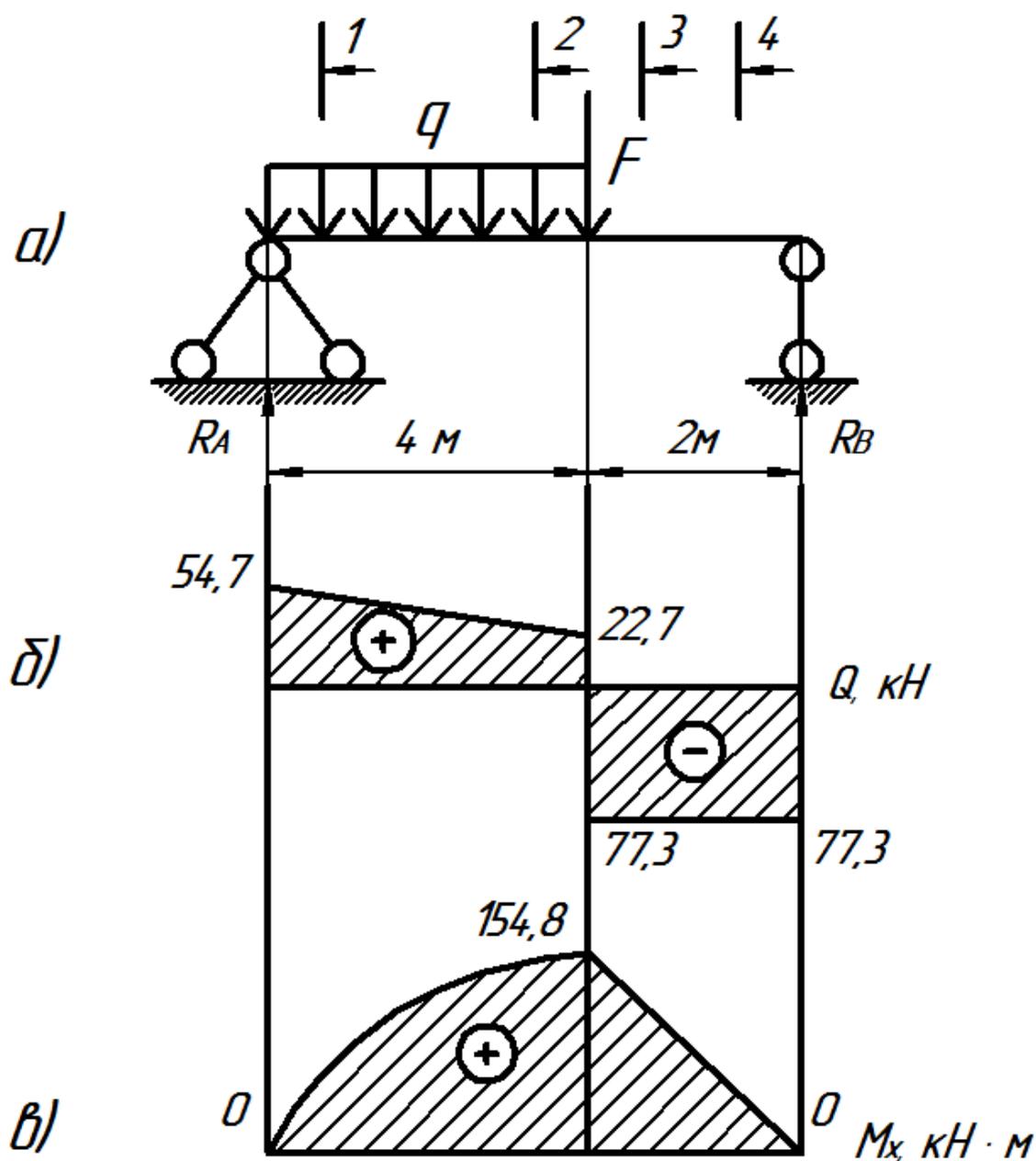


Рис. 5.9

Решение. Из условия равновесия определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0$$

$$q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 4}{6} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 2 + 100 \cdot 4}{6} = 77,3 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 4 - F \cdot 2 = 0$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 4 + F \cdot 2}{6} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 4 + 100 \cdot 2}{6} = 54,7 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum y = 0$$

$$R_A + R_B - F - q \cdot 4 = 54,7 + 77,3 - 100 - 32 = 0$$

Реакции определены верно.

Определяем значения поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях. Мысленно рассекаем брус на четыре части (см. рис. 5.9а) 1-1, 2-2, 3-3, 4-4:

$$Q_{1-1} = R_A = 54,7 \text{ кН}$$

$$Q_{2-2} = R_A - q \cdot 4 = 54,7 - 8 \cdot 4 = 22,7 \text{ кН}$$

$$Q_{3-3} = R_A - q \cdot 4 - F = 54,7 - 8 \cdot 4 - 100 = -77,3 \text{ кН}$$

$$Q_{4-4} = Q_{3-3} = -77,3 \text{ кН}$$

$$M_{1-1} = 0$$

$$M_{2-2} = R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 54,7 \cdot 4 - 8 \cdot 4 \cdot 2 = 154,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{3-3} = M_{2-2} = 154,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{4-4} = 0$$

Строим эпюры Q и M (см. рис. 5.9б, в).

Из эпюры изгибающих моментов находим максимальный по модулю изгибающий момент $M_{max} = 154,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из условия прочности определяем осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{154,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,9675 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 967,5 \text{ см}^3$$

Подбираем сечение:

Круглое сечение:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 967,5}{3,14}} = 21,44 \text{ см}$$

Выбираем окончательный диаметр $d=22$ см.

$$A_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 22^2}{4} = 379,94 \text{ см}^2$$

Прямоугольное сечение:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 967,5}{2}} = 11,32 \text{ см}$$

$$h = 2b = 2 \cdot 11,32 = 22,64 \text{ см}$$

$$A_{\text{прям}} = bh = 11,32 \cdot 22,64 = 256,28 \text{ см}^2$$

Двутавровое сечение:

Из таблицы сортамента (приложение 2) подбираем необходимый номер двутавра равный или больший расчетному $W_x=967,5 \text{ см}^3$.

Выбираем двутавр №45: $h=450$ мм, $b=160$ мм, $d=8,6$ мм, $t=14,2$ мм, $A=83,0 \text{ см}^2$, $J_x=27450 \text{ см}^4$, $W_x=1220 \text{ см}^3$, $S_x=699 \text{ см}^3$.

5.8. Контрольные задания

Изгиб

Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x . Из расчета на прочность подобрать стальные балки с круглым, кольцевым, прямоугольным ($\frac{h}{b} = 2$), квадратным и двутавровым поперечными сечениями.

Таблица 5.1

№	$a, м$	$b, м$	$c, м$	$F, кН$	$q, кН/м$	$M, кН \times м$	$[\sigma], МПа$	$\frac{d}{D}$
1	0,5	0,1	1	2	20	2	110	0,40
2	0,6	0,2	1,2	4	18	3	120	0,45
3	0,7	0,3	1,4	6	16	4	130	0,50
4	0,8	0,4	1,6	8	14	5	140	0,55
5	0,9	0,5	1,8	10	12	6	150	0,60
6	1	0,6	2	12	10	7	160	0,65
7	1,1	0,7	2,2	14	8	8	170	0,70
8	1,2	0,8	2,4	16	6	9	180	0,75
9	1,3	0,9	2,6	18	4	10	190	0,80
10	1,4	1	2,8	20	2	11	200	0,85
11	0,5	0,1	1	2	20	2	110	0,40
12	0,6	0,2	1,2	4	18	3	120	0,45
13	0,7	0,3	1,4	6	16	4	130	0,50
14	0,8	0,4	1,6	8	14	5	140	0,55
15	0,9	0,5	1,8	10	12	6	150	0,60
16	1	0,6	2	12	10	7	160	0,65
17	1,1	0,7	2,2	14	8	8	170	0,70
18	1,2	0,8	2,4	16	6	9	180	0,75
19	1,3	0,9	2,6	18	4	10	190	0,80
20	1,4	1	2,8	20	2	11	200	0,85
21	0,5	0,1	1	2	20	2	110	0,40
22	0,6	0,2	1,2	4	18	3	120	0,45
23	0,7	0,3	1,4	6	16	4	130	0,50
24	0,8	0,4	1,6	8	14	5	140	0,55
25	0,9	0,5	1,8	10	12	6	150	0,60
26	1	0,6	2	12	10	7	160	0,65
27	1,1	0,7	2,2	14	8	8	170	0,70
28	1,2	0,8	2,4	16	6	9	180	0,75
29	1,3	0,9	2,6	18	4	10	190	0,80
30	1,4	1	2,8	20	2	11	200	0,85

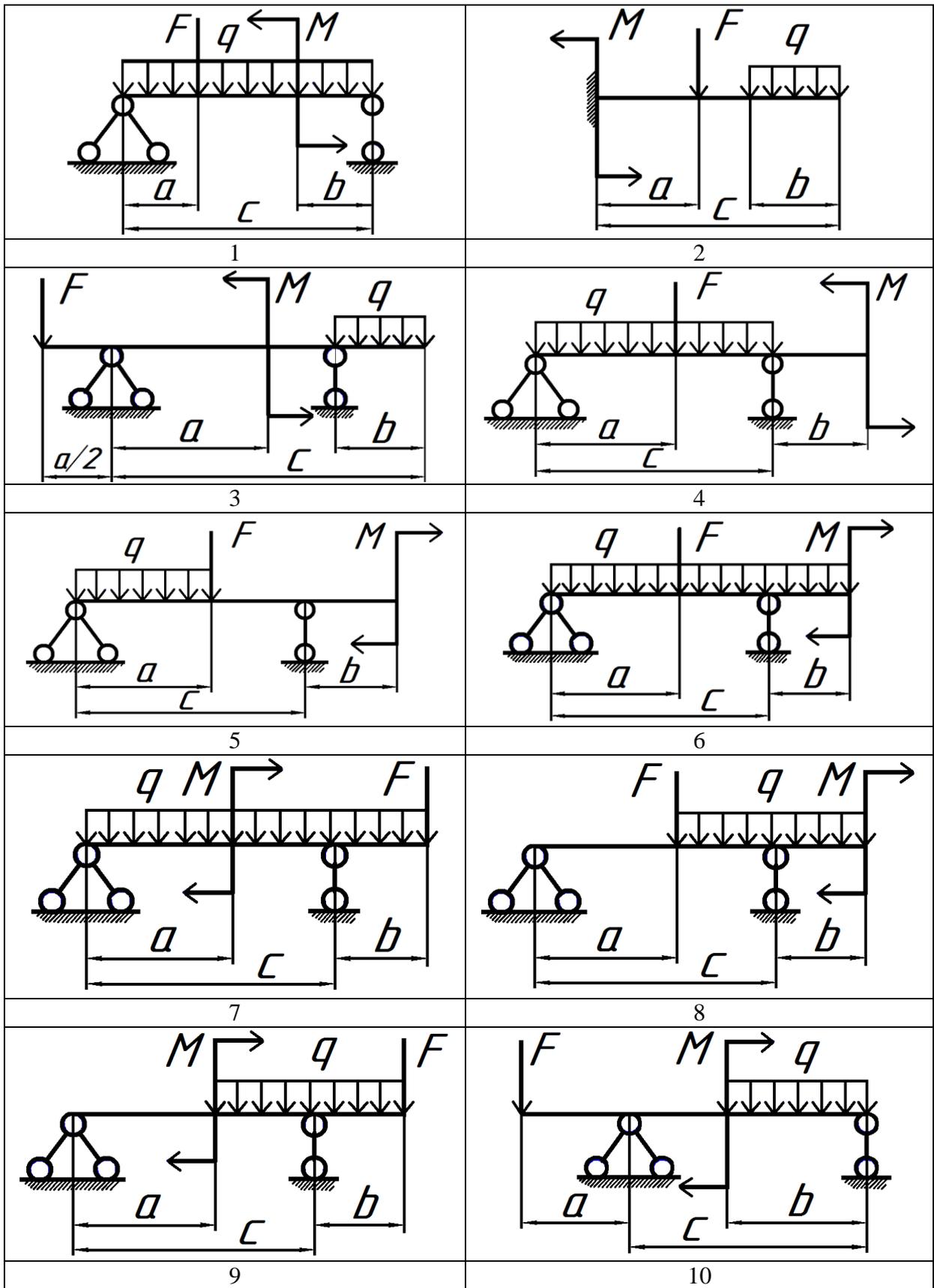


Рис. 5.10

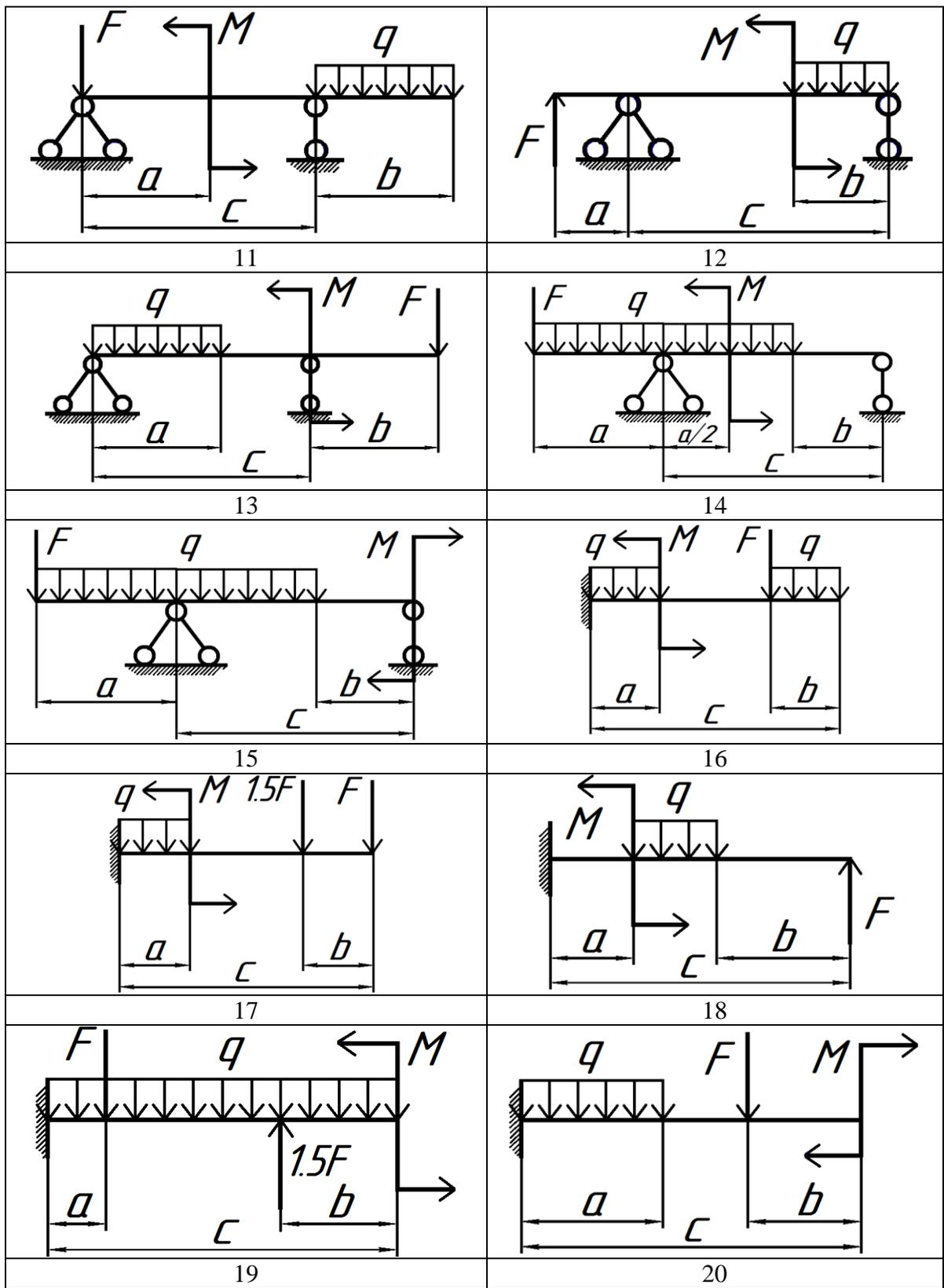


Рис. 5.11

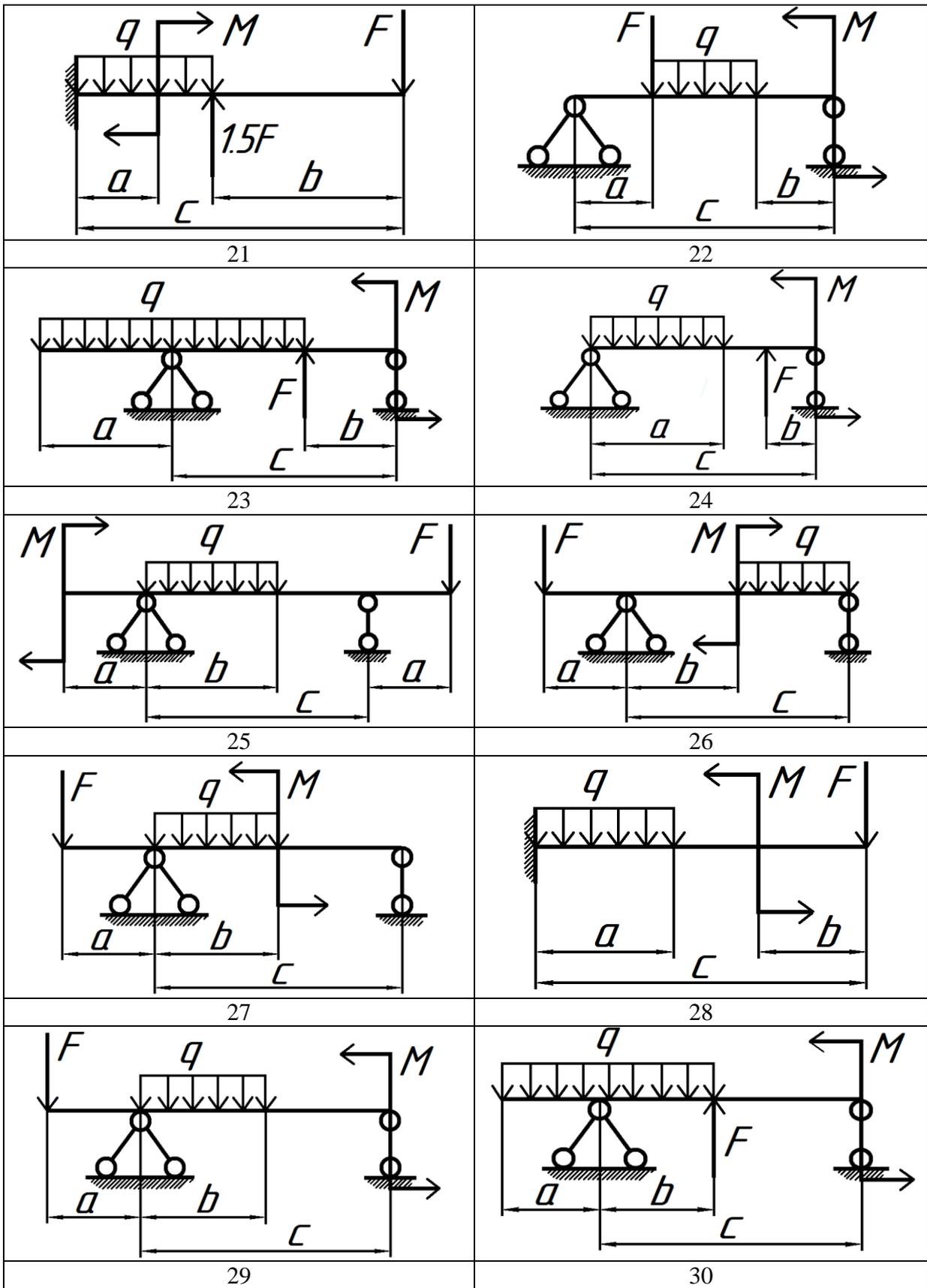


Рис. 5.12

6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

6.1. Статические моменты сечения. Центр тяжести

Рассмотрим произвольное сечение, изображенное на рис. 6.1.

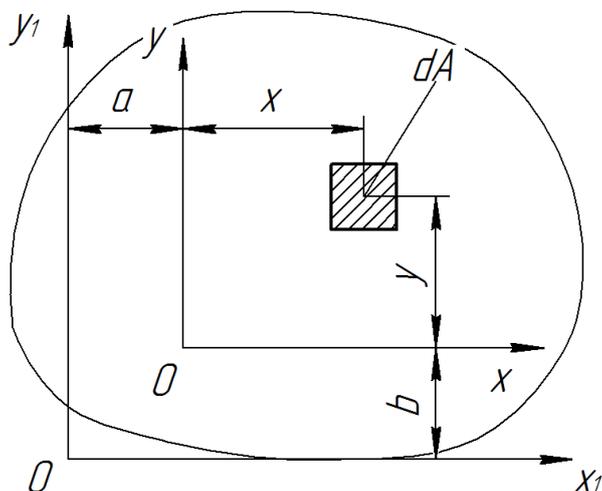


Рис. 6.1

Разобьем данное сечение на бесконечно малые площадки dA , положение которого в прямоугольной системе координат определяется величинами x и y . Проинтегрировав произведение dA на расстояние до оси координат получим **статический момент** площади сечения относительно осей x и y .

Статическим моментом площадки плоского сечения относительно произвольной оси лежащей в той же плоскости называется распространенная на всю площадь сумма элементарных площадок умноженных на их расстояние до этой оси.

$$S_x = \sum_{k=1}^n A_k y_k = \int_A y dA$$

$$S_y = \sum_{k=1}^n A_k x_k = \int_A x dA$$

Статический момент измеряется в м^3 , см^3 , мм^3 .

Статические моменты используются для нахождения центра тяжести сечения.

Центром тяжести – называется геометрическая точка неизменно связанная с твердым телом, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести.

Для определения координат центра тяжести плоского сечения воспользуемся двумя формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_k}{\sum_{k=1}^n A} = \frac{\sum_{k=1}^n S_y}{\sum_{k=1}^n A}$$
$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_k}{\sum_{k=1}^n A} = \frac{\sum_{k=1}^n S_x}{\sum_{k=1}^n A}$$

Для определения координат центра тяжести воспользуемся следующими методами:

1. Метод разбиения – разбиваем фигуру на простые элементы центры тяжести, которых известны.
2. Использование симметрии.
3. Метод дополнений – при наличии в теле отверстия его можно рассматривать как разность двух тел.
4. Экспериментальный метод – тело подвешивается за разные точки и на пересечении линий действия сил тяжести находится центр тяжести.

В зависимости от положения координат, S_x и S_y могут принимать положительные или отрицательные значения.

Если оси проходят через центр тяжести $x_c=0$, $y_c=0$ то $S_x=0$ и $S_y=0$, такие оси называют центральными.

6.2. Моменты инерции площади поперечного сечения

С помощью моментов инерции площади находят напряжения при изгибе и кручении.

1. Осевой или экваториальный момент инерции сечения относительно некоторой оси – это сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний до этой оси, взятые по всей площади.

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

$$J_y = \int_A x^2 dA$$

2. Полярный момент инерции сечения относительно некоторого полюса (точки) – это сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний до этого центра, взятые по всей площади.

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A p^2 dA$$

3. Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (рис. 6.2).

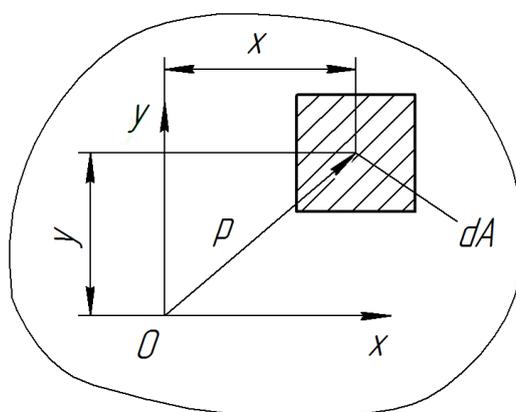


Рис. 6.2.

$$p^2 = x^2 + y^2$$

$$J_p = J_x + J_y$$

$$\int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A p^2 dA = J_p$$

4. Центробежный момент инерции относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называется суммой произведений элементарных площадок dA на их расстояние до этой оси.

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$

Момент инерции бывает положительным, отрицательным или равным нулю, когда одна из осей проходит через центр тяжести сечения.

Момент инерции измеряется в м^4 , см^4 , мм^4 .

6.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

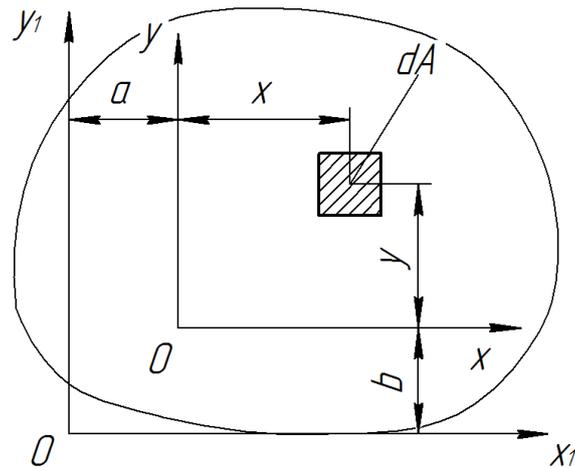


Рис. 6.3

$$x_1 = x + a$$

$$y_1 = y + b$$

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+b)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A 2ybdA + \int_A b^2 dA = J_x + 2bS_x + b^2A$$

$$J_{y_1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x+a)^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A 2xadA + \int_A a^2 dA = J_y + 2aS_x + a^2A$$

$$J_{x_1y_1} = \int_A x_1y_1 dA + \int_A (x+a)(y+b) dA = \int_A xy dA + \int_A bxdA + \int_A aydA + \int_A abdA = J_{xy} + bS_y + aS_x + abA = J_{xy} + abA$$

Если оси x и y проходят через центр тяжести сечения, то формулы приобретают следующий вид:

$$J_{x_1} = J_x + b^2A$$

$$J_{y_1} = J_y + a^2A$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} + abA$$

При вычислении моментов инерции сложных сечений пользуются теми же принципами, что и при определении центра тяжести сложных сечений: разбиваем сечение на простейшие элементы и, используя формулы параллельного переноса осей, производим вычисление.

$$J_x = \sum_{k=1}^n J_{xk} = J_{x1} + J_{x2} + \dots + J_{xk}$$

$$J_y = \sum_{k=1}^n J_{yk} = J_{y1} + J_{y2} + \dots + J_{yk}$$

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^n J_{xkyk} = J_{x1y1} + J_{x2y2} + \dots + J_{xkyk}$$

Моменты инерции составных частей можно брать только относительно одной и той же оси, нельзя складывать моменты инерции, взятые относительно разных осей.

Главные оси инерции проходят через центр тяжести сечения.

Моменты инерции, взятые относительно центра тяжести называются главными осевыми моментами инерции.

Формулы перехода при параллельном переносе осей:

$$J_{xk} = J_{xk}^0 + A_k y_k^2$$

$$J_{yk} = J_{yk}^0 + A_k x_k^2$$

$$J_{xkyk} = J_{xkyk}^0 + A_k x_k y_k$$

где: J_x^0, J_y^0 – собственные моменты инерции; x_k, y_k – расстояние от центральных осей до центра тяжести простейшего элемента.

Моменты инерции простых сечений см. в приложении 3.

6.4. Примеры решения задач

Пример №1. Для фигуры (см. рис. 6.4) определить: положение центра тяжести и осевые моменты инерции. $a_x=a_y=2$ см, $b_x=b_y=6$ см, $c=8$ см.

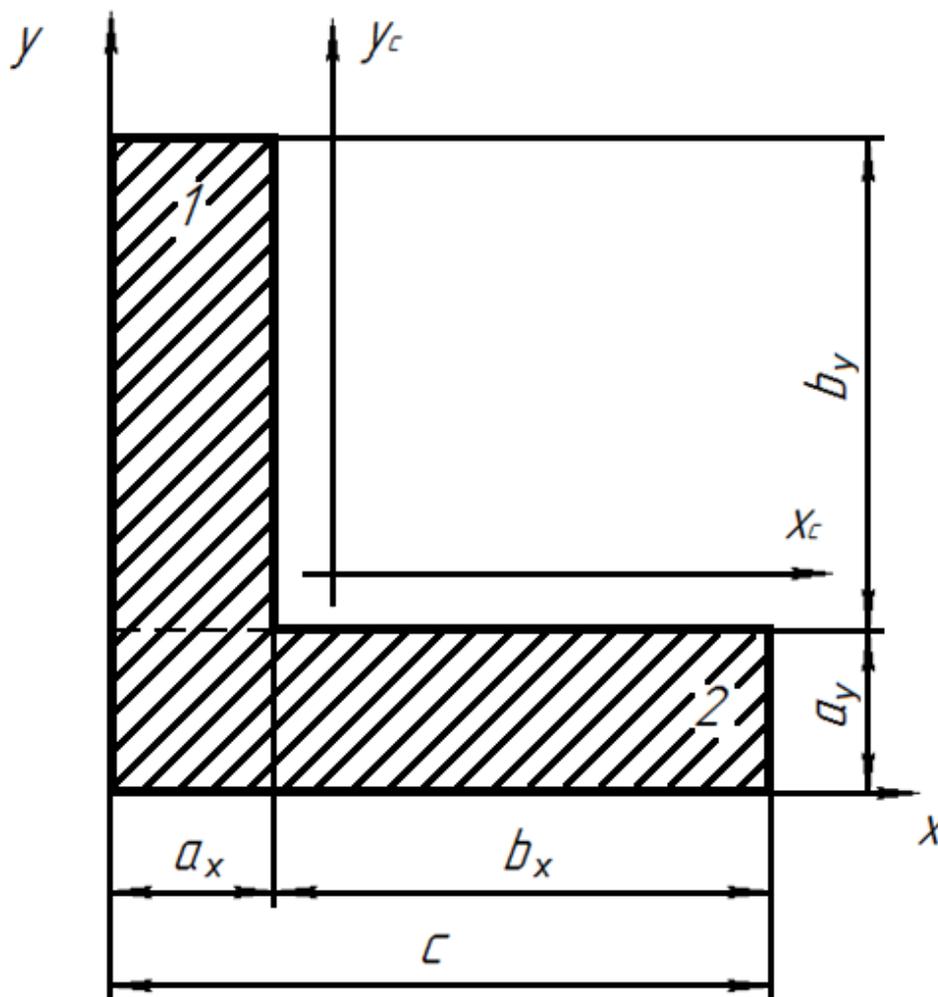


Рис. 6.4

Решение. Разобьем фигуру на две составляющие: фигуру 1 и фигуру 2 (рис. 6.4). Определяем центр тяжести фигуры. Фигура не имеет оси симметрии, поэтому следует находить обе координаты x_c и y_c .

1. Определяем координаты центра тяжести плоского сечения по формулам (6.1) и (6.2):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^2 S_{yk}}{\sum_{k=1}^2 A_k} = \frac{76}{28} = 2,7 \text{ см} \quad (6.1)$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^2 S_{xk}}{\sum_{k=1}^2 A_k} = \frac{76}{28} = 2,7 \text{ см} \quad (6.2)$$

Находим площади A_1 и A_2 фигур 1 и 2:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_x b_y = 2 \cdot 6 = 12 \text{ см}^2 \\ A_2 &= c a_y = 8 \cdot 2 = 16 \text{ см}^2 \\ \sum_{k=1}^2 A_k &= A_1 + A_2 = 12 + 16 = 28 \text{ см}^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Находим статические моменты S_x и S_y фигур 1 и 2:

$$\begin{aligned} S_{y1} &= A_1 x_1^0 \Rightarrow x_1^0 = 1 \text{ см} \\ S_{y1} &= 12 \cdot 1 = 12 \text{ см}^3 \\ S_{y2} &= A_2 x_2^0 \Rightarrow x_2^0 = 4 \text{ см} \\ S_{y2} &= 16 \cdot 4 = 64 \text{ см}^3 \\ \sum_{k=1}^2 S_{yk} &= S_{y1} + S_{y2} = 12 + 64 = 76 \text{ см}^3 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} S_{x1} &= A_1 y_1^0 \Rightarrow y_1^0 = 5 \text{ см} \\ S_{x1} &= 12 \cdot 5 = 60 \text{ см}^3 \\ S_{x2} &= A_2 y_2^0 \Rightarrow y_2^0 = 1 \text{ см} \\ S_{x2} &= 16 \cdot 1 = 16 \text{ см}^3 \\ \sum_{k=1}^2 S_{yx} &= S_{x1} + S_{x2} = 60 + 16 = 76 \text{ см}^3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Значения формул (6.3), (6.4), (6.5) подставляем в формулы (6.1) и (6.2).

2. Определяем осевые моменты инерции сечения по формулам (6.6) и (6.7):

$$J_x = \sum_{k=1}^2 J_{xk}, \quad J_{xk} = J_{xk}^0 + A_k y_k^2 \quad (6.6)$$

$$J_y = \sum_{k=1}^2 J_{yk}, \quad J_{yk} = J_{yk}^0 + A_k x_k^2 \quad (6.7)$$

Определяем собственные моменты инерции фигур 1 и 2:

$$J_{x1}^0 = \frac{a_x b_y^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36 \text{ см}^3 \quad (6.8)$$

$$J_{x2}^0 = \frac{c a_y^3}{12} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,3 \text{ см}^3 \quad (6.9)$$

$$J_{y1}^0 = \frac{b_y a_x^3}{12} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4 \text{ см}^3 \quad (6.10)$$

$$J_{y2}^0 = \frac{a_y c^3}{12} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,3 \text{ см}^3 \quad (6.11)$$

Находим расстояния от центральных осей y_1, y_2, x_1, x_2 до центра тяжести фигур 1 и 2:

$$y_1 = y_1^0 - y_c = 5 - 2,7 = 2,3 \text{ см} \quad (6.12)$$

$$y_2 = y_2^0 - y_c = 1 - 2,7 = -1,7 \text{ см} \quad (6.13)$$

$$x_1 = x_1^0 - x_c = 1 - 2,7 = -1,7 \text{ см} \quad (6.14)$$

$$x_2 = x_2^0 - x_c = 4 - 2,7 = 1,3 \text{ см} \quad (6.15)$$

Находим осевые моменты инерции J_x и J_y подстановкой значений формул (6.8-6.15) в формулы (6.6) и (6.7):

$$J_{x1} = 36 + 12 \cdot 2,3^2 = 99,48 \text{ см}^4$$

$$J_{x2} = 5,3 + 16 \cdot (-1,7)^2 = 51,54 \text{ см}^4$$

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} = 99,48 + 51,54 = 151,02 \text{ см}^4$$

$$J_{y1} = 4 + 12 \cdot (-1,7)^2 = 38,68 \text{ см}^4$$

$$J_{y2} = 85,3 + 16 \cdot 1,3^2 = 112,34 \text{ см}^4$$

$$J_y = J_{y1} + J_{y2} = 38,68 + 112,34 = 151,02 \text{ см}^4$$

Ответ: $x_c = 2,7$ см, $y_c = 2,7$ см, $J_x = 151,02$ см⁴, $J_y = 151,02$ см⁴.

Пример №2. Для поперечного сечения (рис. 6.5) определить: положение центра тяжести, осевые моменты инерции. Фигура состоит из:

1. Двутавр №10, $A_1 = 23,4$ см², $J_{x1} = 198$ см⁴, $J_{y1} = 17,9$ см⁴.
2. Двутавр №10, $A_2 = 23,4$ см², $J_{x2} = 198$ см⁴, $J_{y2} = 17,9$ см⁴.
3. Швеллер №18, $A_3 = 20,7$ см², $z_{03} = 1,94$ см, $J_{x3} = 1090$ см⁴, $J_{y3} = 86$ см⁴.
4. Швеллер №18, $A_4 = 20,7$ см², $z_{04} = 1,94$ см, $J_{x4} = 1090$ см⁴, $J_{y4} = 86$ см⁴.
5. Уголок неравнобокий 6,4/4, $64 \times 40 \times 5$, $A_5 = 4,98$ см², $x_{05} = 0,95$, $y_{05} = 2,08$, $J_{x5} = 19,9$ см⁴, $J_{y5} = 6,26$ см⁴.
6. Уголок неравнобокий 6,4/4, $64 \times 40 \times 5$, $A_6 = 4,98$ см², $x_{06} = 0,95$, $y_{06} = 2,08$, $J_{x6} = 19,9$ см⁴, $J_{y6} = 6,26$ см⁴.

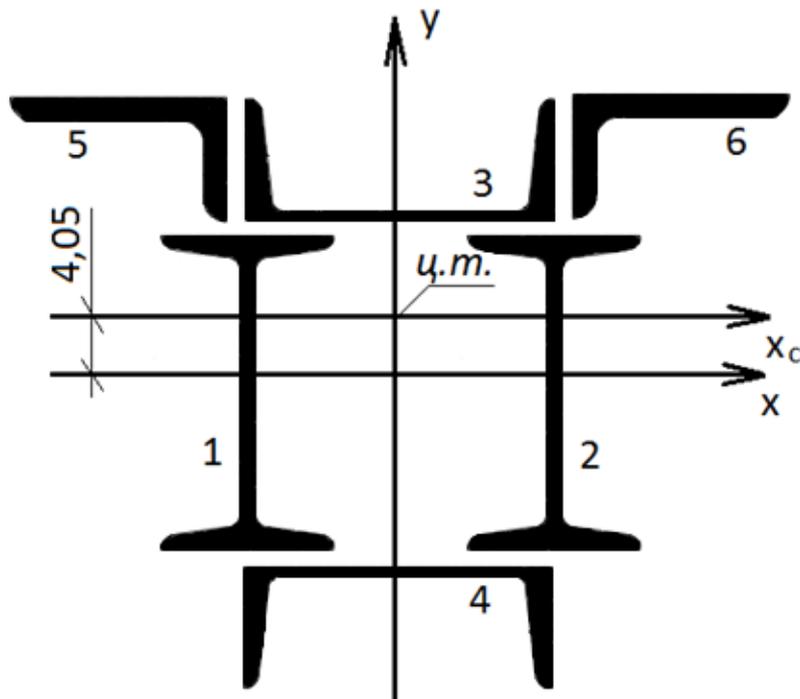


Рис. 6.5

Решение. Находим центр тяжести. Так как фигура симметрична относительно оси y то центр тяжести лежит на этой оси и задача сводится к определению координат y_c .

1. Определяем координаты центра тяжести плоского сечения по формулам (6.16):

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^6 S_{xk}}{\sum_{k=1}^6 A_k} = \frac{397,374}{98,16} = 4,05 \text{ см} \quad (6.16)$$

Находим сумму площадей A_k всех фигур:

$$\sum_{k=1}^6 A_k = 2A_1 + 2A_3 + 2A_5 = 2 \cdot 23,4 + 2 \cdot 20,7 + 2 \cdot 4,98 = 98,16 \text{ см}^2 \quad (6.17)$$

Находим статические моменты S_x всех фигур:

$$S_{x1} = A_1 y_1^0 \Rightarrow y_1^0 = 0$$

$$S_{x1} = 0$$

$$S_{x2} = A_2 y_2^0 \Rightarrow y_2^0 = 0$$

$$S_{x2} = 0$$

$$S_{x3} = A_3 y_3^0 \Rightarrow y_3^0 = 5 + 1,94 = 6,94 \text{ см}$$

$$S_{x3} = 20,7 \cdot 6,94 = 143,658 \text{ см}^3$$

$$S_{x4} = A_4 y_4^0 \Rightarrow y_4^0 = -5 - 1,94 = -6,94 \text{ см}$$

$$S_{x4} = 20,7 \cdot (-6,94) = -143,658 \text{ см}^3$$

$$S_{x5} = A_5 y_5^0 \Rightarrow y_5^0 = 5 + 7 - 0,95 = 11,05 \text{ см}$$

$$S_{x5} = 4,98 \cdot 11,05 = 55,029 \text{ см}^3$$

$$S_{x6} = A_6 y_6^0 \Rightarrow y_6^0 = 5 + 7 - 0,95 = 11,05 \text{ см}$$

$$S_{x6} = 4,98 \cdot 11,05 = 55,029 \text{ см}^3$$

$$\sum_{k=1}^6 S_{xk} = 2S_3 + 2S_5 = 2 \cdot 143,658 + 2 \cdot 55,029 = 397,374 \text{ см}^3 \quad (6.18)$$

Значения формул (6.17) и (6.18) подставляем в формулу (6.16). Таким образом, необходимо поднять ось x на 4,05 см.

2. Определяем осевые моменты инерции по формулам (6.19) и (6.20):

$$J_x = \sum_{k=1}^6 J_{xk}, \quad J_{xk} = J_{xk}^0 + A_k y_k^2 \quad (6.19)$$

$$J_y = \sum_{k=1}^6 J_{yk}, \quad J_{yk} = J_{yk}^0 + A_k x_k^2 \quad (6.20)$$

Находим расстояние от центральных осей y и x до центра тяжести всех фигур:

$$y_1 = y_1^0 - y_c = 0 - 4,05 = -4,05 \text{ см} \quad (6.21)$$

$$y_2 = y_2^0 - y_c = -4,05 \text{ см} \quad (6.22)$$

$$y_3 = y_3^0 - y_c = 6,94 - 4,05 = 2,89 \text{ см} \quad (6.23)$$

$$y_4 = y_4^0 - y_c = -6,94 - 4,05 = -10,99 \text{ см} \quad (6.24)$$

$$y_5 = y_5^0 - y_c = 11,05 - 4,05 = 7 \text{ см} \quad (6.25)$$

$$y_6 = y_6^0 - y_c = 11,05 - 4,05 = 7 \text{ см} \quad (6.26)$$

$$x_1 = -9 \text{ см} \quad (6.27)$$

$$x_2 = 9 \text{ см} \quad (6.28)$$

$$x_3 = 0 \quad (6.29)$$

$$x_4 = 0 \quad (6.30)$$

$$x_5 = -11,08 \text{ см} \quad (6.31)$$

$$x_6 = 11,08 \text{ см} \quad (6.32)$$

Находим осевые моменты инерции J_x и J_y подстановкой значений формул (6.21-6.32) в формулы (6.19) и (6.20):

$$J_{x1} = 198 + 23,4 \cdot (-4,05)^2 = 581,82 \text{ см}^4$$

$$J_{x2} = 198 + 23,4 \cdot (-4,05)^2 = 581,82 \text{ см}^4$$

$$J_{x3} = 1090 + 20,7 \cdot 2,89^2 = 1262,89 \text{ см}^4$$

$$J_{x4} = 1090 + 20,7 \cdot (-10,99)^2 = 3590,15 \text{ см}^4$$

$$J_{x5} = 19,9 + 4,98 \cdot 7^2 = 263,92 \text{ см}^4$$

$$J_{x6} = 19,9 + 4,98 \cdot 7^2 = 263,92 \text{ см}^4$$

$$J_x = 2 \cdot 581,82 + 1262,89 + 3590,15 + 2 \cdot 263,92 = 6544,52 \text{ см}^4$$

$$J_{y1} = 17,9 + 23,4 \cdot (-9)^2 = 1913,3 \text{ см}^4$$

$$J_{y2} = 17,9 + 23,4 \cdot (-9)^2 = 1913,3 \text{ см}^4$$

$$J_{y3} = 86 \text{ см}^4$$

$$J_{y4} = 86 \text{ см}^4$$

$$J_{y5} = 6,26 + 4,98 \cdot (-11,08)^2 = 617,64 \text{ см}^4$$

$$J_{y6} = 6,26 + 4,98 \cdot 11,08^2 = 617,64 \text{ см}^4$$

$$J_y = 2 \cdot 1913,3 + 2 \cdot 86 + 2 \cdot 617,64 = 5233,88 \text{ см}^4$$

Ответ: $y_c = 4,05 \text{ см}$, $J_x = 6544,52 \text{ см}^4$, $J_y = 5233,88 \text{ см}^4$.

6.5. Контрольные задания

Геометрические характеристики плоских сечений

Вычислить центральные осевые моменты плоских сечений. Величины выбираются из табл. 6.1.

Таблица 6.1

№	Линейные размеры, см		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	5	4	2
2	2	7	1.5
3	4	5	1
4	6	4	2
5	1.5	4	1
6	2	8	2
7	8	6	3
8	6	4	1.5
9	8	4.5	2
10	7	5	2
11	6	5	2
12	9	9	3
13	8	5	3
14	3	7	2
15	2	6	1
16	5	6	3
17	3	7	2
18	2	5	2
19	10	20	55
20	4	6	2

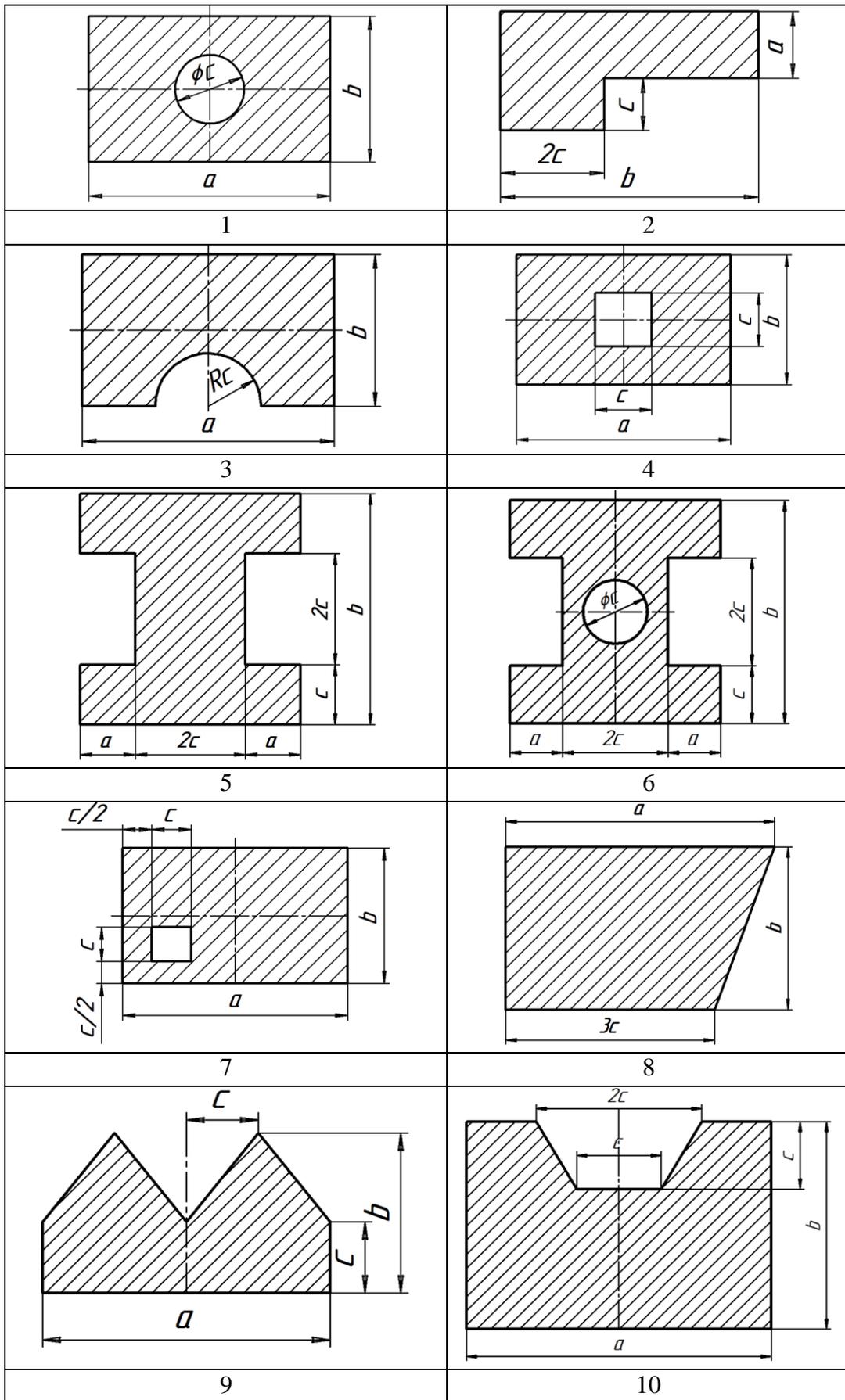


Рис. 6.6

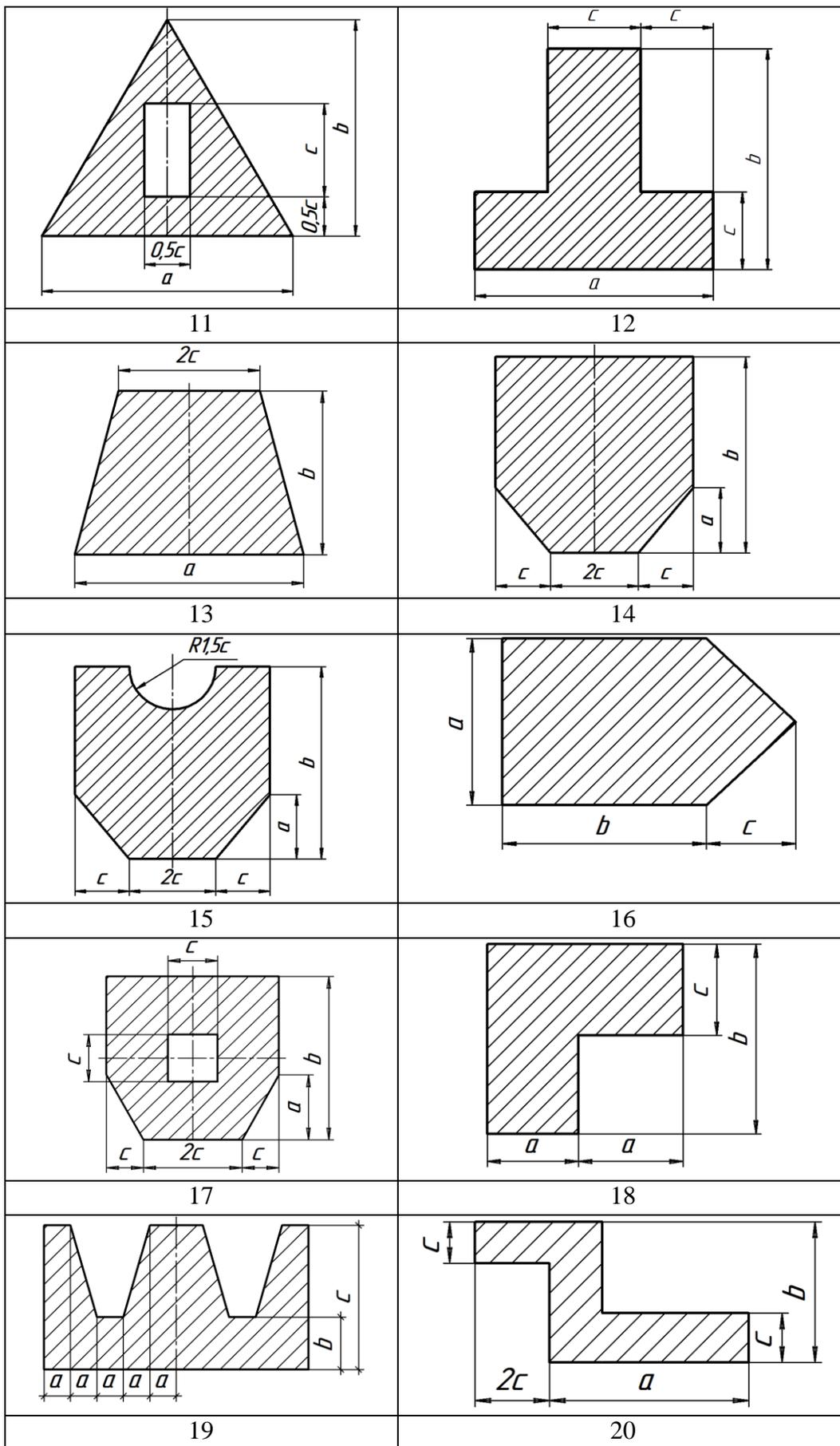


Рис. 6.7

Геометрические характеристики плоских сечений

Вычислить центральные осевые моменты плоских сечений. Величины выбираются из табл. 6.2, геометрические характеристики профилей прокатных сталей выбирать из приложения 1.

Таблица 6.2

№	№ Профиля			
	Швеллер	Двутавр	Равнобокий уголок*	Неравнобокий уголок*
1	8	10	-	-
2	14	12	-	-
3	10	14	-	-
4	10	10	-	-
5	16	18	-	-
6	18	20	-	-
7	8	14	-	-
8	14a	-	-	-
9	20	-	-	-
10	5	-	3.2 × 4	-
11	20a	-	5 × 5	-
12	-	-	2 × 3	2.5/1.6
13	-	-	2.5 × 3	3.2/2 × 3
14	-	-	2.8	4/2.5 × 3
15	-	-	4 × 4	5/3.2 × 4
16	-	20a	-	12.5/8 × 10
17	-	22	-	14/9 × 10
18	-	14	-	7.5/5 × 5
19	-	16	3.6 × 4	-
20	-	18a	4.5/5	-

* Параметры уголков состоят из двух значений, например: 2 × 3 – первая цифра обозначает номер профиля, вторая цифра – толщину уголка (*d*).

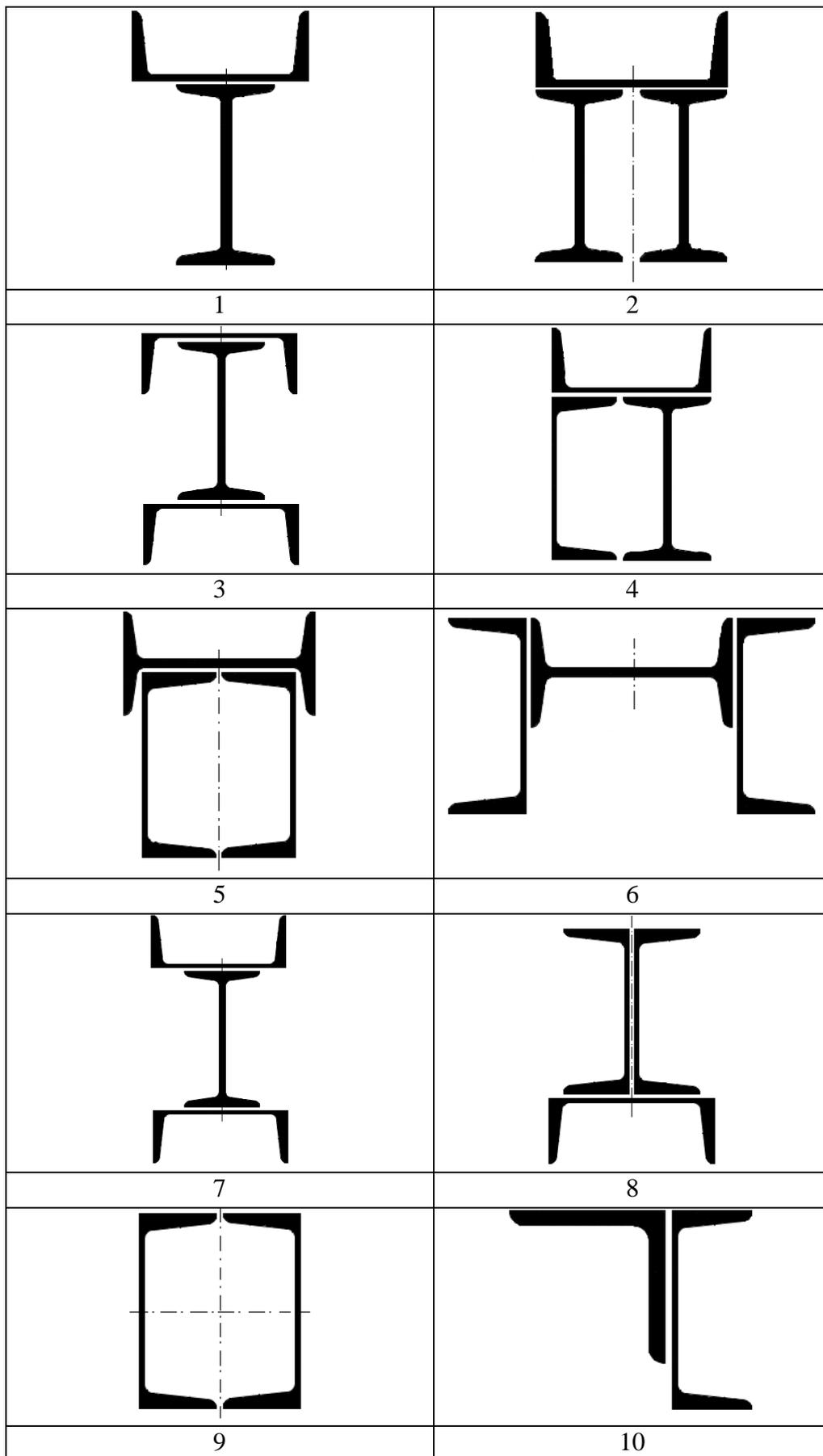


Рис. 6.8

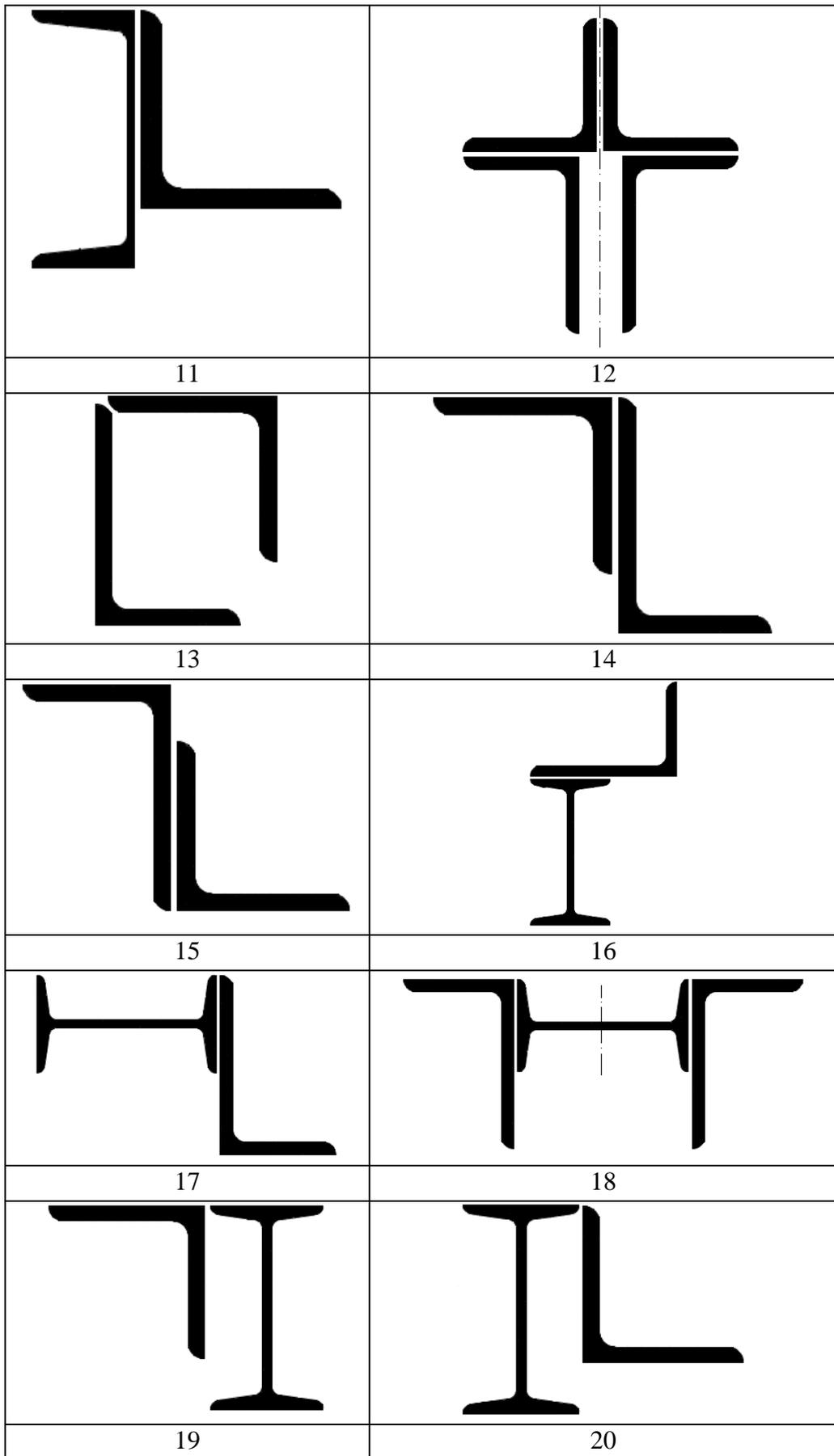


Рис. 6.9

7. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Опасное напряженное состояние тела зависит от комбинации между главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ т.е. для каждой комбинации можно определить величину предельного напряженного состояния но в реальности это сделать очень сложно т.к. может существовать множество комбинаций соотношения главных напряжений. Поэтому были разработаны специальные методы расчета прочности, которые позволяют оценить степень опасности любого напряженного состояния по напряжению растяжения-сжатия. Такие методы расчета прочности называются теориями предельных напряженных состояний или **гипотезами прочности**.

Прочность конструкций определяется с использованием **теории разрушения**.

Теория разрушения – это наука о прогнозировании условий, при которых твердые материалы разрушаются под действием внешних нагрузок. Под действием статической нагрузки с помощью, которой проводят испытания материалов на центральное растяжение сжатие и в зависимости от условий: температуры, распределения напряжений, вида нагрузки и т.д. большинство материалов можно отнести к хрупким или пластичным.

Для выполнения расчетов на прочность вводится понятие **эквивалентное напряжение $\sigma_{эkv}$** .

Эквивалентное напряжение $\sigma_{эkv}$ – это условная расчетная величина напряжения, которое следует создать в растянутом теле, что бы его напряженное состояние было равно опасно с заданным. Полученное расчетным путем эквивалентное напряжение сравнивают с предельным.

В сопротивлении материалов существует пять наиболее известных **гипотез прочности**:

1. Гипотеза наибольших нормальных напряжений.
2. Гипотеза наибольших относительных удлинений.
3. Гипотеза наибольших касательных напряжений.
4. Гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения.
5. Гипотеза прочности О. Мора.

Из всех пяти гипотез прочности самой полной и точной является гипотеза прочности О. Мора. Все положения данной гипотезы были проверены экспериментально для хрупких и пластичных материалов.

Гипотезы прочности:

1. **Гипотеза наибольших нормальных напряжений.** Данная гипотеза была сформулирована Галилеем в XVII в. – материал достигает опасного состояния при наибольшем по абсолютной величине нормальном напряжении σ при растяжении или сжатии.

Условия прочности при **объемном** напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 \leq [\sigma_{\text{раст}}]$$

при условии, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ т.е. $[\sigma_1] > [\sigma_3]$

или

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_3 \leq [\sigma_{\text{сж}}]$$

при условии, что $\sigma_3 < 0$, если $[\sigma_1] < [\sigma_3]$.

где: $[\sigma_{\text{раст}}]$ - допускаемое напряжение при одноосном растяжении; $[\sigma_{\text{сж}}]$ - допускаемое напряжение при одноосном сжатии.

Условия прочности при **плоском** напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Главный недостаток гипотезы заключается в том, что при определении эквивалентного напряжения не учитываются другие главные напряжения характеризующие прочность материала.

Экспериментально гипотеза наибольших нормальных напряжений подтверждена только для расчета хрупких и однородных материалов при растяжении, в практических расчетах не применяется.

2. **Гипотеза наибольших относительных удлинений.** Данная гипотеза была сформулирована Э. Мариоттом в 1682 г. – материал начинает разрушаться при достижении максимального значения линейной деформации ε при простом растяжении или сжатии.

Условия прочности при **объемном** напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

или согласно обобщенному закону Гука

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

Условия прочности при **плоском** напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1-\mu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Гипотеза наибольших относительных удлинений при вычислении эквивалентного напряжения учитывает все три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Экспериментально гипотеза наибольших относительных удлинений подтверждена только для расчета хрупких и однородных материалов при растяжении.

3. **Гипотеза наибольших касательных напряжений.** Данная гипотеза была сформулирована Ш. Кулоном в 1773 г. – предельное напряженное состояние возникает в момент, когда в двух взаимноперпендикулярных сечениях, проведенных через исследуемую точку, наибольшие касательные напряжения τ достигают предельного значения, при котором возможно разрушение путем сдвига и скольжения одной части материала по другой (разрушение происходит в результате среза).

Условия прочности при **объемном** напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Условия прочности при **плоском** напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma]$$

Условия прочности при **плоском** напряженном состоянии при изгибе с кручением:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\text{изг}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma_{\text{раст.сж}}]$$

Гипотеза наибольших касательных напряжений при вычислении эквивалентного касательного напряжения учитывает только два главных напряжения σ_1, σ_3 поэтому она подходит для расчета пластичных материалов.

4. Гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения.

Данная гипотеза гласит – предельное напряженное состояние возникает при некотором значении потенциальной энергии, накапливаемой элементом конструкции при изменении её формы. Количество потенциальной энергии формоизменения одинаково как при сложном напряженном состоянии, так и при простом растяжении.

Условия прочности при **объемном** напряженном состоянии:

$$\sigma_{эkv} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \leq [\sigma]$$

При изгибе с кручением:

$$\sigma_{эkv} = \sqrt{\sigma_{изг}^2 + 3\tau_{кр}^2} \leq [\sigma_{раст.сж}]$$

В гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения эквивалентное напряжение определяется нахождением всех трех $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ главных напряжений. Экспериментальные проверки показали, что данная гипотеза справедлива только для пластичных материалов.

5. **Гипотеза прочности О. Мора.** Данная гипотеза была сформулирована О. Мором в 1900 г. – базируется на двух факторах – (σ_1, σ_3) и τ при этом влияние среднего значения σ_2 не учитывается.

Напряжения для материалов с одинаковым пределом текучести при растяжении и сжатии в случае **объемного** напряженного состояния:

$$\sigma_{эkv} = \sigma_1 - \sigma_3 \frac{[\sigma_{раст}]}{[\sigma_{сж}]} \leq [\sigma_p]$$

при условии, что $\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$;

при условии, что $[\sigma_{раст}] = [\sigma_{сж}]$ гипотеза прочности О. Мора совпадает с гипотезой наибольших касательных напряжений.

Напряжения для материалов с одинаковым пределом текучести при растяжении и сжатии в случае **плоского** напряженного состояния:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1-a}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+a}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Все положения гипотеза прочности О. Мора были проверены экспериментально. Она справедлива для расчета хрупких и пластичных материалов. Недостаток гипотезы заключается в том, что она не учитывает главное напряжение σ_2 .

8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Расчет на устойчивость имеет большое значение для элементов конструкций, которые представляют собой длинные и тонкие стержни, тонкие пластины и оболочки.

Если стержень, отклоненный от положения равновесия возвращается в исходное положение после устранения причины вызвавшее это отклонение то такое равновесие называется **устойчивым**.

Продольный изгиб – это стержень, изгиб которого привел к потере устойчивости прямолинейной формы равновесия.

Наибольшее значение центрально приложенной сжимающей силы, до которого прямолинейная форма равновесия стержня устойчива, называется критическим $F_{кр}$ (рис. 8.1).

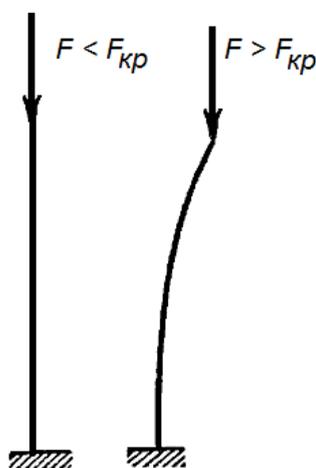


Рис. 8.1

При сжимающей силе, меньше критической стержень работает на **сжатие**.

При сжимающей силе, большей критической, стержень работает на **сжатие и изгиб**.

При небольшом превышении сжимающей нагрузки критического значения прогибы стержня и напряжения приводят к его разрушению. Поэтому в практических расчетах критическая сила считается разрушающей нагрузкой.

8.1. Формула Эйлера

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения, один конец прикреплен к шарнирно-подвижной опоре (есть возможность продольного

перемещения), а другой к шарнирно-неподвижной (рис. 8.2). На стержень действует центрально сжимающая продольная сила F . Собственным весом стержня можно пренебречь.

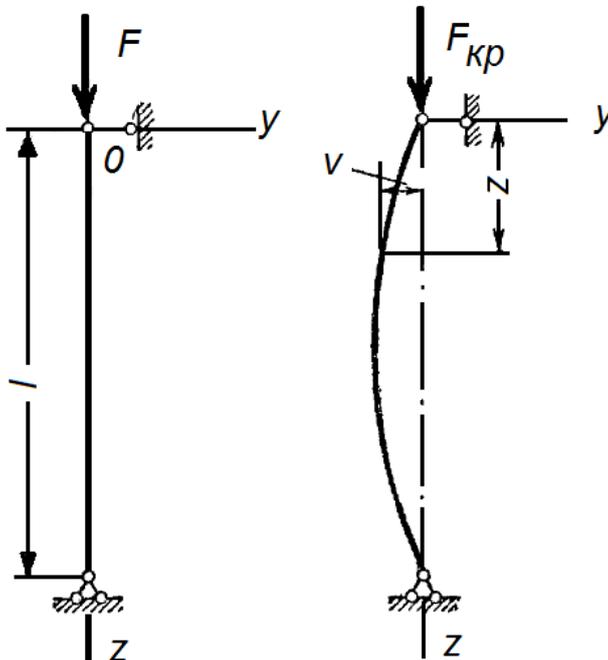


Рис. 8.2

$$EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} = M_x = -Fv$$

$$\frac{F}{EJ_x} = k^2$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = 0$$

Общий интеграл уравнения:

$$v = A \sin kz + B \cos kz$$

где: A, B – постоянные интегрирования.

Краевые условия на концах стержня дают два уравнения:

1. При $z=0, v=0$:

$$v = A \sin 0 + B \cos 0 = B = 0$$

2. При $z=l, v=0$:

$$0 = A \sin kl + B \cos kl = A \sin kl = 0$$

Решение $A=0$ является прямолинейной формой равновесия сжатого стержня т.е. $v=0$ и поэтому не представляет интереса.

Следовательно:

$$\begin{aligned} A &\neq 0, \\ \sin kl &= 0, \\ k &= \frac{\pi n}{l}, \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

где: n – различные устойчивые формы равновесия стержня (рис. 8.3).

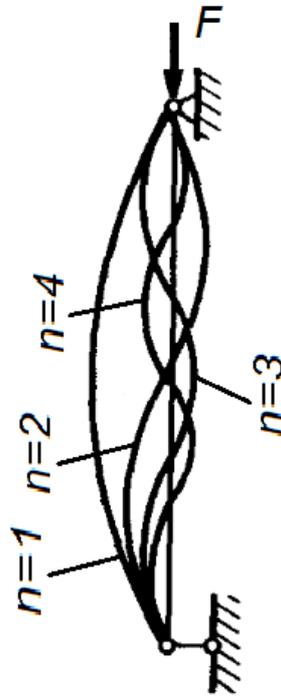


Рис. 8.3

Формула Эйлера для критической силы $F_{кр}$ при $n=1$:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$$

где: E – модуль упругости; J_{\min} – минимальный осевой момент инерции; l – длина стержня.

8.2. Определение критической силы $F_{кр}$

Если учитывать особенности перемещения стержней при различном их закреплении можно использовать формулу Эйлера и на другие расчетные случаи (рис. 8.4).

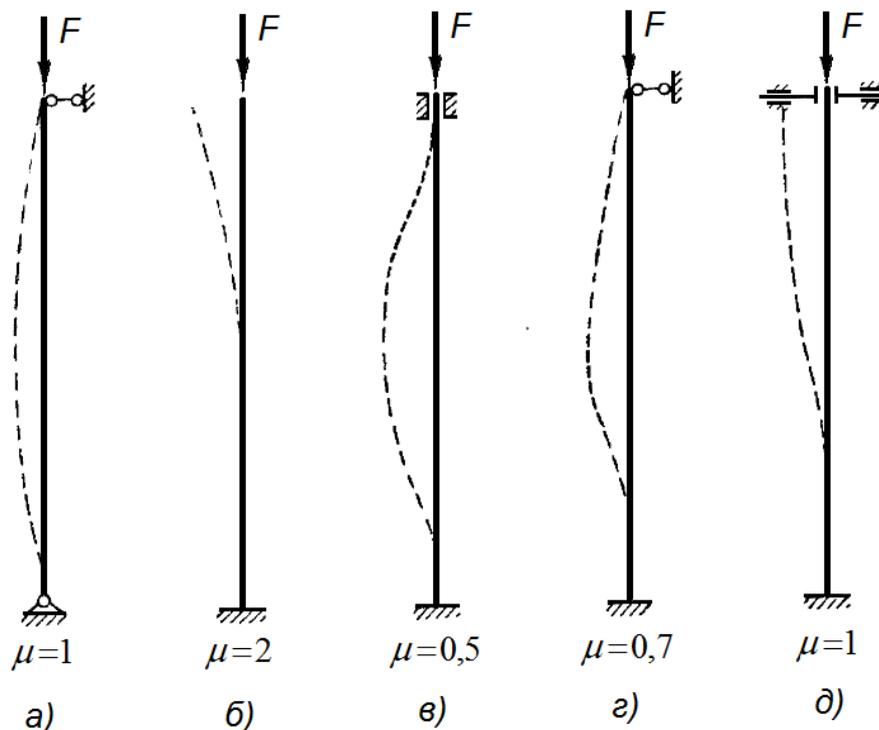


Рис. 8.4. Закрепление концов стержня: а – оба конца стержня закреплены шарнирно (могут сближаться); б – нижний конец жестко защемлен, верхний свободен; в – оба конца жестко защемлены (могут сближаться); г – нижний конец закреплен жестко, верхний – шарнирно (могут сближаться); д – нижний конец закреплен жестко, верхний имеет «плавающую заделку»

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ \min}{(\mu l)^2}$$

где: μ – коэффициент приведения длины, часто встречающиеся случаи закрепления стержня смотри на рисунке 8.4 а-д.

8.3. Критическое напряжение

Пределы применимости формулы Эйлера

Нормальное напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, соответствующее критическому значению сжимающей силы называется критическим.

Напряжение от сжимающей силы:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 A}$$

где: $\sigma_{кр}$ – напряжение сжатия.

Минимальный радиус инерции i_{\min} :

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$$

Окончательная формула для расчета критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}$$

где: $\frac{\mu l}{i_{\min}} = \lambda$ – гибкость стержня.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера справедлива лишь в пределах применимости закона Гука, т.е. критическое напряжение не должно превышать предела пропорциональности материала стержня:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$$
$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}$$

Гибкость стержня:

$$\lambda \geq \lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{тц}}}$$

где: $\lambda_{пред}$ – предельная гибкость стержня.

Предельная гибкость зависит от физико-механических свойств материала стержня и не зависит от его размеров. Предельная гибкость – величина постоянная для данного материала.

Стержни, для которых справедлива формула Эйлера, называются **стержнями большой гибкости**.

В случае неприменимости формулы Эйлера величина критического напряжения определяется по формулам, составленным Ф.С.Ясинским на основе опытов.

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda < \sigma_m$$

где: a, b – коэффициенты, зависящие от материала (см. таблицу 8.1 и рис. 8.5); σ_m – предел текучести.

Таблица 8.1

Материал	$a, \text{н/мм}^2$	$b, \text{н/мм}^2$	λ_0	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст2	250	0,668	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	343	1,42	60	95
Сталь 45	589	3,82	60	85
Дюралюминий Д16Т	400	3,33	30	60
Сосна, ель	29,3	0,184	-	70

Стержни, для которых справедлива формула Ясинского, называются **стержнями средней гибкости**.

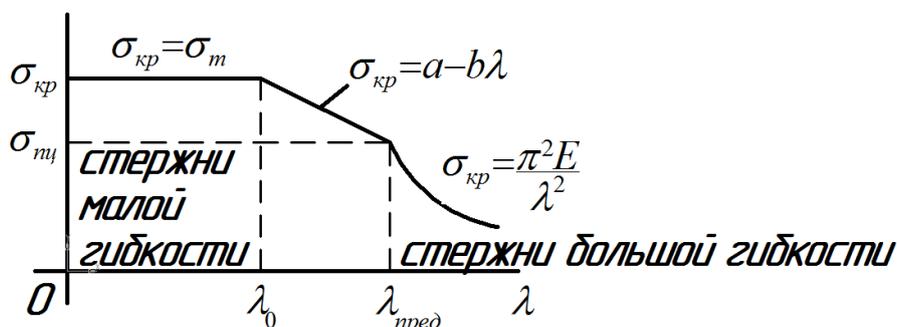


Рис. 8.5

1. При $\lambda \geq \lambda_{пред}$ расчет устойчивости ведется по формуле Эйлера (стержни большой гибкости):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

2. При $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ расчет устойчивости ведется по формуле Ф.С. Ясинского (стержни средней гибкости):

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

3. При $\lambda < \lambda_0$ расчет ведут не на устойчивость, а на прочность. Критическое напряжение считается постоянным при $\sigma_{кр} = \sigma_m$.

8.4. Расчеты на устойчивость

Расчеты на устойчивость:

1. **Проверочный расчет** – определяем коэффициент запаса устойчивости s_y и сравниваем с требуемым или нормативным его значением $[s_y]$.

$$s_y = \frac{F_{кр}}{F} \geq [s_y]$$

где: F – значение сжимающей нагрузки.

2. **Определяем допускаемую нагрузку:**

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[s_y]}$$

3. **Проектный расчет** – определяем размеры поперечного сечения стержня.

Расчет на устойчивость по коэффициентам продольного изгиба

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y]$$
$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{кр}}{[s_y]}$$

где: $[\sigma_y]$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость; $[s_y]$ – коэффициент запаса устойчивости; A – площадь поперечного сечения.

$[\sigma_y]$ – выражают через основное допускаемое напряжение на сжатие:

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma]$$

где: φ – коэффициент продольного изгиба стержня, $\varphi \leq 1$, данный коэффициент зависит от материала стержня и от его гибкости (см. табл. 8.2); $[\sigma]$ – основное допускаемое напряжение на сжатие.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}$$

где: $[s]$ – коэффициент запаса прочности.

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma] = \varphi \frac{\sigma_{пред}}{[s]} = \frac{\sigma_{кр}}{[s_y]}$$

тогда

$$\varphi = \frac{[s]\sigma_{кр}}{[s_y]\sigma_{пред}}$$

Значения коэффициентов продольного изгиба

λ	φ			
	Сталь Ст3, Ст4	Сталь Ст5	Чугун СЧ12-28 СЧ15-32 СЧ18-36 СЧ21-40	Дерево
0	1	1	1	1
10	0,9	0,98	0,97	0,99
20	0,97	0,96	0,91	0,97
30	0,95	0,93	0,81	0,93
40	0,92	0,9	0,69	0,87
50	0,89	0,85	0,57	0,8
60	0,86	0,8	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,34	0,61
80	0,75	0,67	0,26	0,49
90	0,69	0,59	0,2	0,38
100	0,6	0,5	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	0,25
120	0,45	0,37	-	0,22
130	0,4	0,32	-	0,18
140	0,36	0,28	-	0,16
150	0,32	0,25	-	0,14
160	0,29	0,23	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,1
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,15	-	0,08
210	0,17	0,14	-	-
220	0,16	0,13	-	-

Расчеты на устойчивость:

1. Проверочный расчет:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$$

2. Определяем допускаемую нагрузку:

$$[F] = A\varphi[\sigma]$$

3. Проектный расчет:

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}$$

8.5. Примеры решения задач

Пример. Используя формулу Эйлера, определить величины критической силы $F_{кр}$ и критического напряжения $\sigma_{кр}$ для сжатой стойки двутаврового поперечного сечения №22. Оба конца стойки шарнирно оперты (рис. 8.4а). Длина стойки 5 м. Материал стойки – сталь с пределом пропорциональности $\sigma_{пц} = 2000 \text{ кг/см}^2$.

Решение. По сортаменту стали (приложение 1) определяем геометрические характеристики двутавровой стойки: $A=30,6 \text{ см}^2$, $J_{min}=J_y=157 \text{ см}^4$, $i_{min}=i_y=2,27 \text{ см}$.

1. Вычисляем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 500}{2,27} = 220$$
$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100$$

$\lambda > \lambda_{пред}$ т.е. $220 > 100$, формула Эйлера применима

2. Определяем критическое усилие $F_{кр}$:

$$F_{кр} = \frac{E J_{min} \pi^2}{(\mu l)^2} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 157 \cdot 3,14^2}{(1 \cdot 500)^2} = 12400 \text{ кг}$$

3. Определяем критическое напряжение $\sigma_{кр}$:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{12400}{30,6} = 405 \text{ кг/см}^2$$

8.6. Контрольные задания

Устойчивость сжатых стержней

1. Используя формулу Эйлера, подобрать по сортаменту на продольную сжимающую нагрузку F двутавровое поперечное сечение стойки длиной l . Коэффициент приведения длины μ (см. рис. 8.4), коэффициент запаса устойчивости s_y , смотри в таблице 8.3. Материал стойки сталь Ст3.

Таблица 8.3

№	F , кН	l , м	s_y	M
1	0,5	1	1	0,5
2	0,6	1,1	1,1	0,7
3	0,7	1,2	1,2	1
4	0,8	1,3	1,3	2
5	0,9	1,4	1,4	0,5
6	1	1,5	1,5	0,7
7	1,1	1,6	1,6	1
8	1,2	1,7	1,7	2
9	1,3	1,8	1,8	0,5
10	1,4	1,9	1,9	0,7
11	1,5	2	2	1
12	1,6	2,1	2,1	2
13	1,7	2,2	2,2	0,5
14	1,8	2,3	2,3	0,7
15	1,9	2,4	2,4	1
16	2	2,5	2,5	2
17	2,1	2,6	2,6	0,5
18	2,2	2,7	2,7	0,7
19	2,3	2,8	2,8	1
20	2,4	2,9	2,9	2
21	2,5	3	3	0,5
22	2,6	1	1,1	0,7
23	2,7	1,1	1,2	1
24	2,8	1,2	1,3	2
25	2,9	1,3	1,4	0,5
26	3	1,4	1,5	0,7
27	3,1	1,5	1,6	1
28	3,2	1,6	1,7	2
29	3,3	1,7	1,8	0,5
30	3,4	1,8	1,9	0,7

2. Пользуясь таблицей значений коэффициентов продольного изгиба φ (таблица 8.2), определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки $[F]$ на стойку двутаврового поперечного сечения из стали Ст3 при основном допускаемом напряжении $[\sigma]$. Длину стойки l , основное допускаемое напряжение $[\sigma]$, коэффициент приведения длины μ , № профиля взять из таблицы 8.4. Схему закрепления концов стержня см. на рис. 8.4.

Таблица 8.4

№	$[\sigma]$, МПа	l , м	№ профиля	M
1	100	1	10	0,5
2	105	1,1	12	0,7
3	110	1,2	14	1
4	115	1,3	16	2
5	120	1,4	18	0,5
6	125	1,5	20	0,7
7	130	1,6	22	1
8	135	1,7	24	2
9	140	1,8	27	0,5
10	145	1,9	30	0,7
11	150	2	33	1
12	155	2,1	36	2
13	160	2,2	40	0,5
14	165	2,3	45	0,7
15	170	2,4	50	1
16	175	2,5	10	2
17	180	2,6	12	0,5
18	185	2,7	14	0,7
19	190	2,8	16	1
20	195	2,9	18	2
21	200	3	20	0,5
22	152	1	22	0,7
23	154	1,1	24	1
24	156	1,2	27	2
25	158	1,3	30	0,5
26	160	1,4	33	0,7
27	162	1,5	36	1
28	164	1,6	40	2
29	166	1,7	45	0,5
30	168	1,8	50	0,7

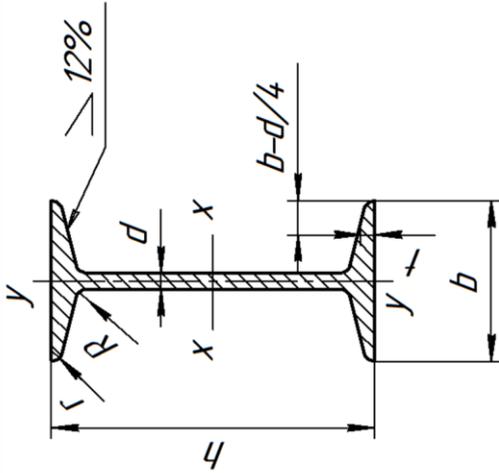
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов: Учеб. Для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова. – 3-е изд. Испр. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.
2. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
3. Костенко, Н.А. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. / Н.А. Костенко, С.В. Балясникова, Ю.Э. Волошановская и др.; Под ред. Н.А. Костенко. – М.: Высш. шк., 2004. – 430 с.
4. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: учебник / М.Д. Подскребко. – Минск: Выш. шк., 2007. – 797 с.
5. Антуфьев, Б.А. Сборник задач по сопротивлению материалов с теорией и примерами: Учеб. пос. для вузов 2-е изд., перераб. и допол. / Б.А. Антуфьев, А.Г. Горшков, О.В. Егорова, В.Н. Зайцев, А.Б. Костриченко, Д.И. Макаревский, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский; Под ред. А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 632 с.
6. Лихарев, К.К. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов»: Учеб. пос. для машиностроительных вузов / К.К. Лихарев, Н.А. Сухова. – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.
7. Смирнов, А.Ф. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1975. – 390 с.
8. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: учебник для втузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высшая школа, 1989. – 622 с.
9. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для втузов / В.И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 592 с.
10. Степин, П.А. Сопротивление материалов: учебник для втузов / П.А. Степин. – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 320 с.
11. Беляев, Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для втузов / Н.М. Беляев, Л.А. Белявский, Я.И. Кипнис и др.; Под общ. ред. В.К. Качурина. – М.: Наука, 1972. – 492 с.
12. Миролюбов, И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для втузов / И.Н. Миролюбов, С.А. Енгальчев, Н.Д. Сергиевский и др. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.

13. Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для вузов / Г.М. Ицкович, А.С. Минин, А.И. Винокуров; Под общ. ред. Л.С. Минина. – М.: Высшая школа, 2001. – 592 с.

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-72)



Обозначения:

h – высота балки;

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

i – радиус инерции;

S – статический момент полусечения.

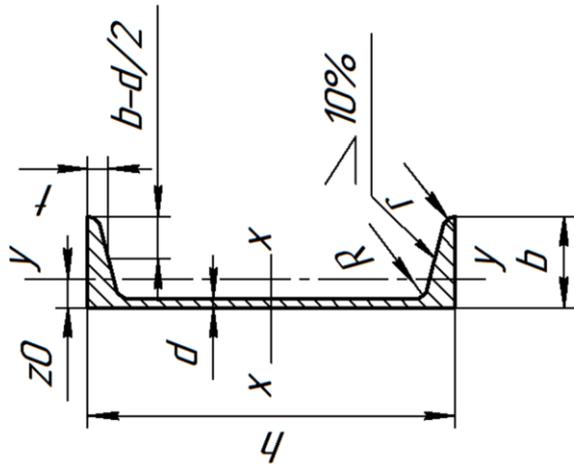
Таблица 1

№ профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	Масса I м, кг
	h	b	d	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3

Продолжение приложения 1
Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05	56,1
45	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12	65,2
50	500	170	9,5	15,2	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26	76,8
55	550	180	10,3	16,5	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44	89,8
60	600	190	11,1	17,8	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60	104
65	650	200	12,0	19,2	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77	120
70	700	210	13,0	20,8	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94	138
70a	700	210	15,0	24,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01	158
70б	700	210	17,5	28,2	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09	184

Продолжение приложения 1
Швеллеры (по ГОСТ 8240-72)



Обозначения:

- h – высота швеллера;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки.
- J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 i – радиус инерции;
 S – статический момент полусечения.

117

Таблица 2

№ профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$z_0, \text{см}$	Масса l м, кг
	h	b	d	t										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14а	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16а	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18а	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20а	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8

Продолжение приложения 1
Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Продолжение приложения 1
Уголки равнобокие (по ГОСТ 8509-72)

Обозначения:

- b – ширина полки;
- d – толщина полки;
- J – момент инерции;
- i – радиус инерции;
- z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

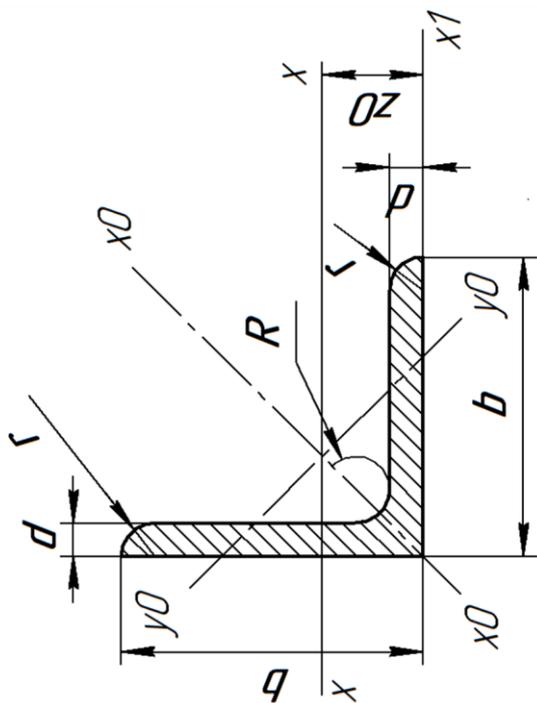


Таблица 3

№ профиля	Размеры, мм		Площадь сечения A , $см^2$	J_x , $см^4$	i_x , $см$	J_{x0} макс., $см^4$	i_{x0} макс., $см$	J_{y0} мин., $см^4$	i_{y0} мин., $см$	J_{x1} , $см^4$	z_0 , $см$	Масса l м, кг
	b	d										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42

Продолжение приложения 1
Продолжение табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	3,5	3,86	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50	3,03
		4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,1
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55	12,2

Продолжение приложения 1
Продолжение табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112,0	1,94	542	3,06	23,3
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	112	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1

Продолжение приложения 1
Окончание табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4

Продолжение приложения 1
Уголки неравнобокие (по ГОСТ 8510-72)

Обозначения:

- B – ширина большой полки;
 b – ширина маленькой полки;
 d – толщина полки;
 J – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней
 полок.

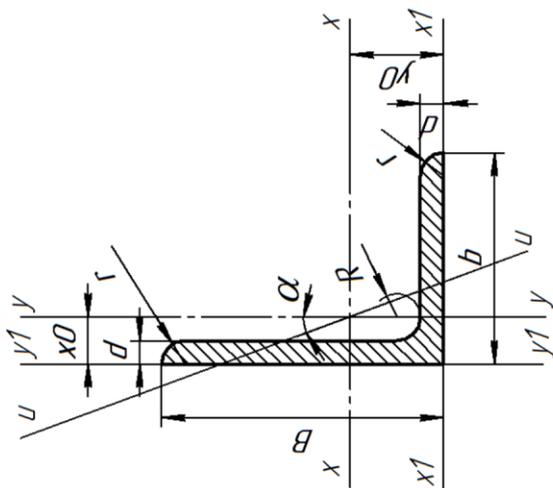


Таблица 4

№ профиля	Размеры, мм		Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$J_u, \text{см}^4$	$i_u, \text{мин.}, \text{см}$	Угол наклона на оси $u, \text{tg } \alpha$	$J_{x1}, \text{см}^4$	$J_{y1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Масса $1 \text{ м}, \text{кг}$	
	B	b														d
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,392	1,56	0,43	0,42	0,86	0,91
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,382	3,26	0,82	0,49	1,08	1,17
	4	4	4	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	0,35	0,43	0,374	4,38	1,12	0,53	1,12	1,52
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,385	6,37	1,58	0,59	1,32	1,48
	4	4	4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	0,71	0,54	0,381	8,53	2,15	0,63	1,37	1,94
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,79	0,61	0,382	9,02	2,20	0,64	1,47	1,68
	4	4	4	2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	1,02	0,60	0,379	12,1	2,98	0,68	1,51	2,20
5/3,2	50	32	3	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	1,18	0,70	0,403	12,4	3,26	0,72	1,60	1,90
	4	4	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	16,6	4,42	0,76	1,65	2,49

Продолжение приложения 1
Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5,6/3,6	56	36	3,5	3,16	10,1	1,79	3,30	1,02	1,95	0,79	0,407	20,3	5,43	0,82	1,80	2,48
			4	3,58	11,4	1,78	3,70	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,73	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7/4,5	70	45	4,5	5,07	25,3	2,23	8,25	1,28	4,88	0,98	0,407	51,0	13,6	1,03	2,25	3,98
			5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	68,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,70
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,78
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,1
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	286	74,3	1,58	3,55	8,98
			7	12,3	152	3,52	48,7	1,99	28,8	1,53	0,402	309	80,3	1,60	3,57	9,64
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	204	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5

Продолжение приложения 1
Окончание табл. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3
18/11	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7

**Стандартные значения диаметров (размеры в мм)
ГОСТ 6636-69 из ряда R_{a40}**

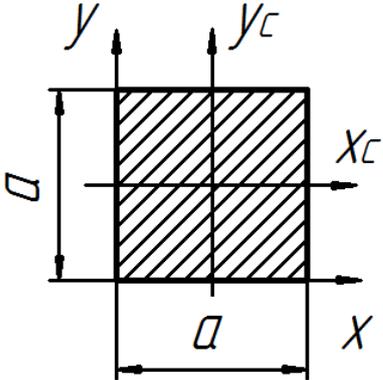
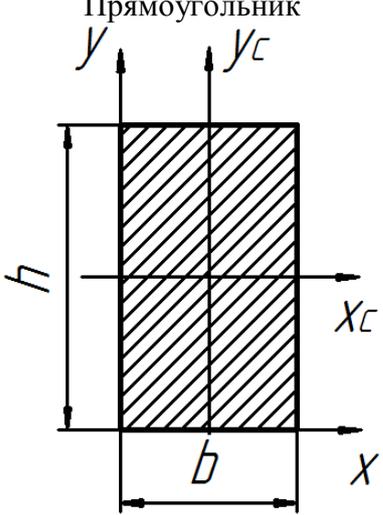
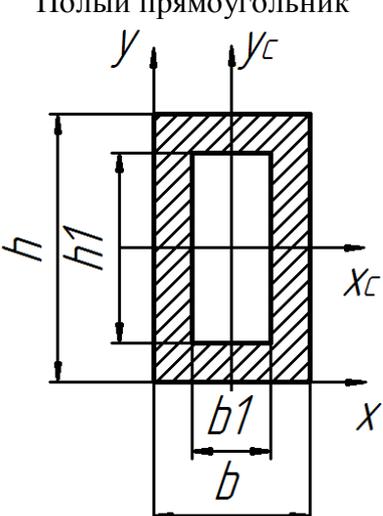
10, 10.5, 11, 11.5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 120, 125, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200.

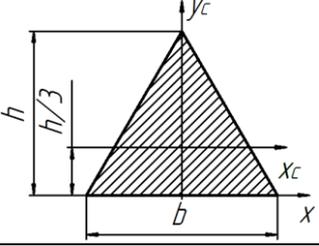
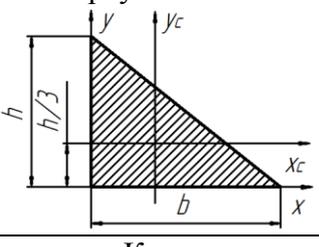
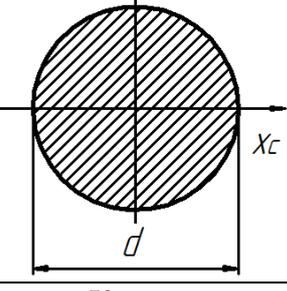
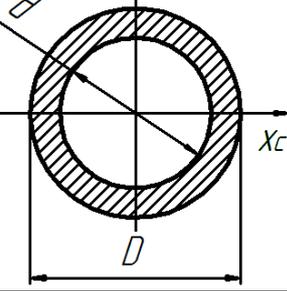
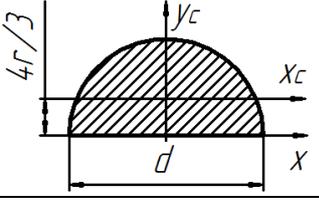
**Модули упругости (E , G) и коэффициенты Пуассона (μ)
для некоторых материалов**

Таблица 5

№	Материал	Модуль упругости, 10^5 МПа		Коэффициент Пуассона μ
		E	G	
1	Чугун белый, серый	1,15–1,60	0,45	0,23–0,27
1.1	- ковкий	1,55	-	-
2	Сталь углеродистая	2,0–2,1	0,8–0,81	0,24–0,28
2.1	- легированная	2,1–2,2	0,8–0,81	0,25–0,30
3	Медь прокатаная	1,1	0,4	0,31–0,34
3.1	- холодноотянутая	1,3	0,49	-
3.1	- литая	0,84	-	-
4	Бронза фосфористая катаная	1,15	0,42	0,32–0,35
5	Бронза марганцевая катаная	1,1	0,4	0,35
6	Бронза алюминиевая литая	1,05	0,42	-
7	Латунь холодноотянутая	0,91–0,99	0,35–0,37	0,32–0,42
8	Латунь корабельная катаная	1,0	-	0,36
9	Алюминий катаный	0,69	0,26–0,27	0,32–0,36
10	Проволока алюминиевая тянутая	0,7	-	-
11	Дюралюминий катаный	0,71	0,27	-
12	Древесина вдоль волокон	0,1–0,12	0,0055	-
12.1	- поперек волокон	0,005–0,01	-	-

Геометрические характеристики плоских сечений

№	Вид сечения	Площадь сечения A	Осевые моменты инерции	Момент сопротивления
1	<p>Квадрат</p> 	$A=a^2$	$J_{xc}=J_{yc}=\frac{a^4}{12}$ $J_x=J_y=\frac{a^4}{3}$ $J_p=\frac{a^4}{3}$	$W_{xc}=W_{yc}=\frac{a^3}{6}$
2	<p>Прямоугольник</p> 	$A=bh$	$J_{xc}=\frac{bh^3}{12};$ $J_{yc}=\frac{hb^3}{12}$ $J_x=\frac{bh^3}{3}; J_y=\frac{hb^3}{3}$ $J_p=\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$	$W_{xc}=\frac{bh^2}{6}$ $W_{yc}=\frac{hb^2}{6}$
3	<p>Полый прямоугольник</p> 	$A=bh-b_1h_1$	$J_{xc}=\frac{bh^3-b_1h_1^3}{12}$ $J_{yc}=\frac{hb^3-h_1b_1^3}{12}$ $J_p=J_{xc}+J_{yc}$	$W_{xc}=\frac{bh^3-b_1h_1^3}{6h}$ $W_{yc}=\frac{hb^3-h_1b_1^3}{6b}$

№	Вид сечения	Площадь сечения A	Осевые моменты инерции	Момент сопротивления
4	Треугольник 	$A = \frac{1}{2}bh$	$J_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$ $J_{y_c} = \frac{hb^3}{36}$ $J_x = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{36}$	для верхней части $W_{x_c} = \frac{bh^2}{24}$ для нижней части $W_{x_c} = \frac{bh^2}{12}$
5	Прямоугольный Треугольник 	$A = \frac{1}{2}bh$	$J_{x_c} = \frac{bh^3}{36}; J_{y_c} = \frac{hb^3}{36}$ $J_x = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12}$ $J_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2)$	для верхней части $W_{x_c} = \frac{bh^2}{24}$ для нижней части $W_{x_c} = \frac{bh^2}{12}$
6	Круг 	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$J_{x_c} = J_{y_c} = \frac{\pi d^4}{64}$ $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_{x_c} = W_{y_c} = \frac{\pi d^3}{32}$
7	Кольцо 	$A = \frac{\pi d^2}{4}(1 - c^2)$ $c = \frac{d}{D}$	$J_{x_c} = J_{y_c} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4)$ $J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4)$	$W_{x_c} = W_{y_c} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4)$
8	Полукруг 	$A = \frac{\pi d^2}{8}$	$J_{x_c} = 6,86 \cdot 10^{-3} d^4$ $J_{y_c} = 2,5 \cdot 10^{-2} d^4$ $J_x = 3,92 \cdot 10^{-1} r^4$	для верхней части $W_{x_c} = 2,39 \cdot 10^{-2} d^3$ для нижней части $W_{x_c} = 3,24 \cdot 10^{-2} d^3$

Опорные реакции и эпюры изгибающих моментов для некоторых видов балок при различных нагрузках

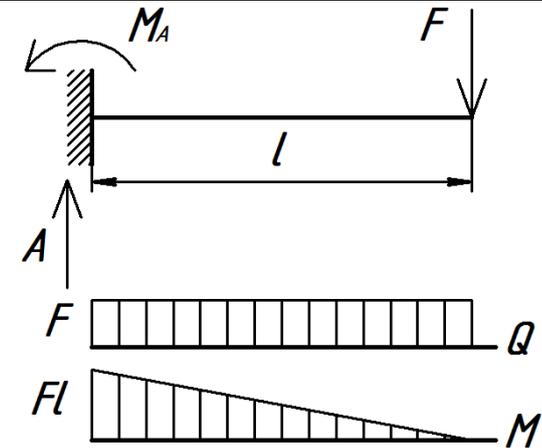
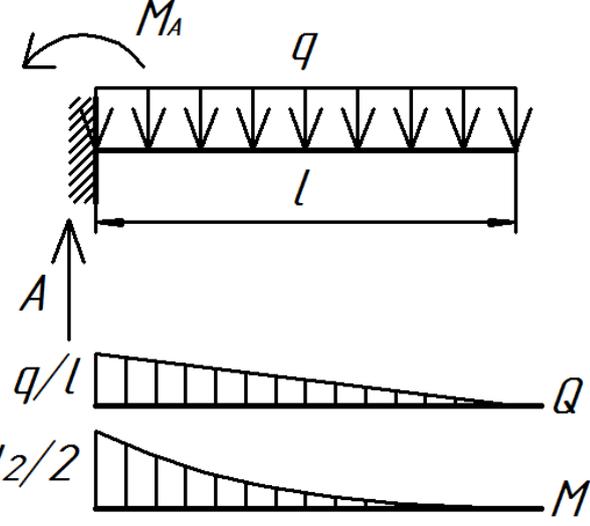
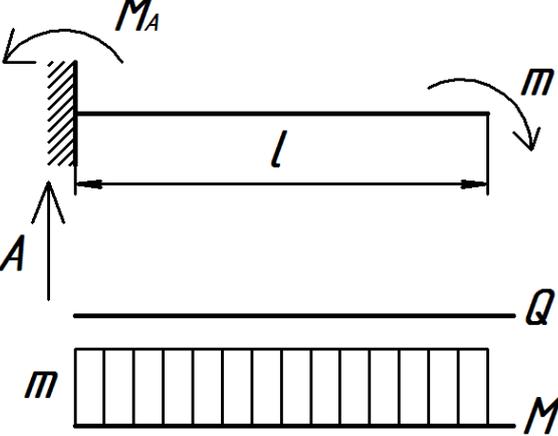
Схема балки, эпюра Q и M	Опорные реакции
	$A = F$ $M_A = Fl$
	$A = ql$ $M_A = \frac{ql^2}{2}$
	$A = 0$ $M_A = m$

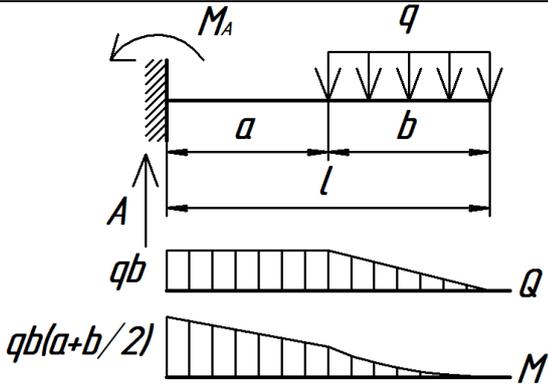
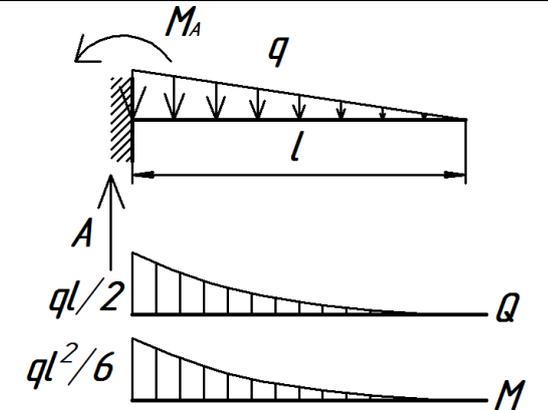
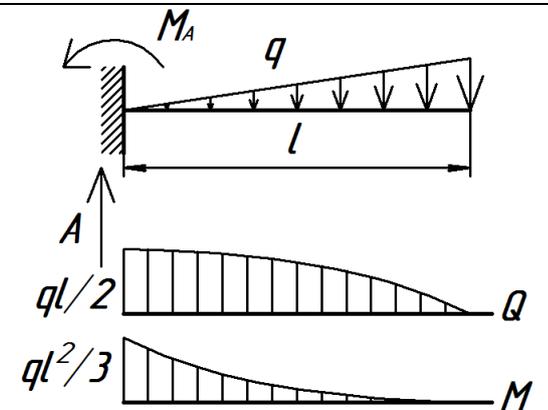
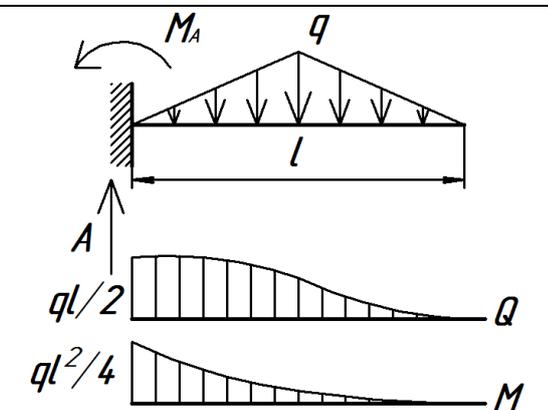
Схема балки, эпюры Q и M	Опорные реакции
 <p> q M_A a b l A qb Q $qb(a+b/2)$ M </p>	$A = qb$ $M_A = qb \left(a + \frac{b}{2} \right)$
 <p> M_A q l A $ql/2$ Q $ql^2/6$ M </p>	$A = \frac{ql^2}{2}$ $M_A = \frac{ql^2}{6}$
 <p> M_A q l A $ql/2$ Q $ql^2/3$ M </p>	$A = \frac{ql}{2}$ $M_A = \frac{ql^2}{3}$
 <p> M_A q l A $ql/2$ Q $ql^2/4$ M </p>	$A = \frac{ql}{2}$ $M_A = \frac{ql^2}{4}$

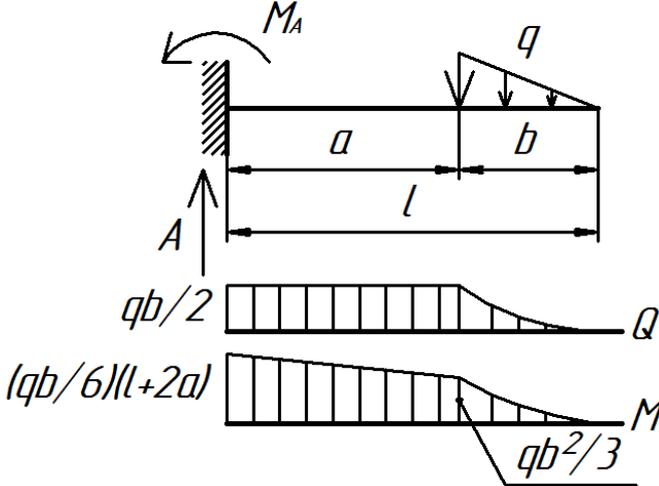
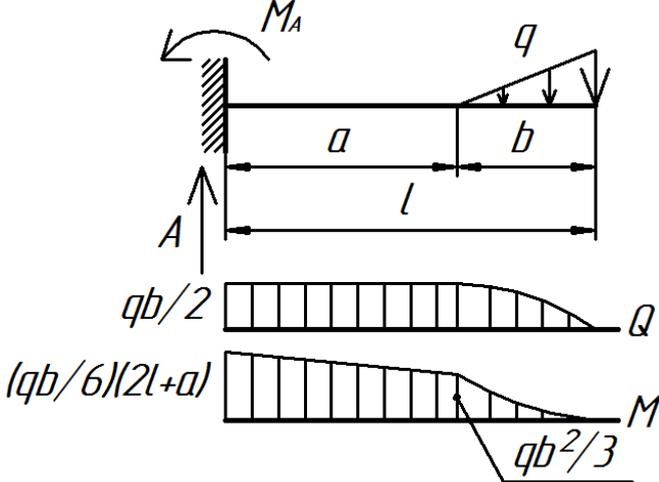
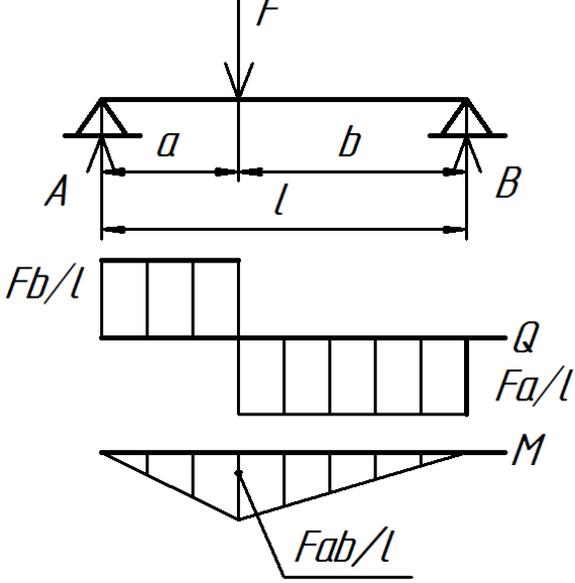
Схема балки, эпюра Q и M	Опорные реакции
	$A = \frac{qb}{2}$ $M_A = \frac{qb}{6}(l + 2a)$
	$A = \frac{qb}{2}$ $M_A = \frac{qb}{2}(2l + a)$
	$A = \frac{Fb}{l}$ $B = \frac{Fa}{l}$ $M_{max} = \frac{Fab}{l}$

Схема балки, эпюра Q и M	Опорные реакции
	$A = B = F$ $M_{max} = Fa$
	$A = B = \frac{ql}{2}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$
	$A = \frac{qa}{l} \left(\frac{a}{2} + b \right)$ $B = \frac{qa^2}{2l}$

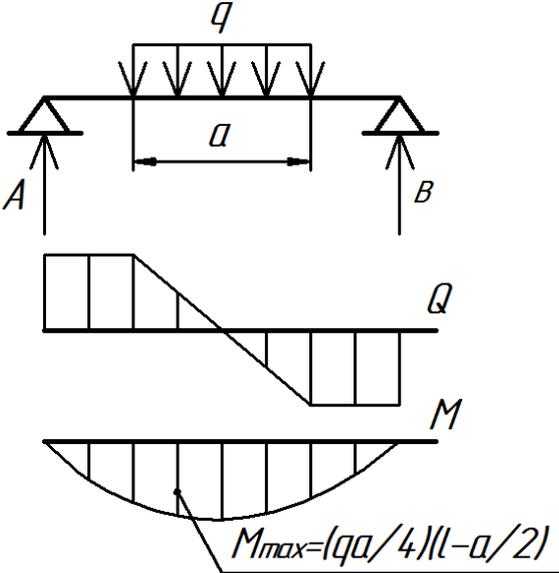
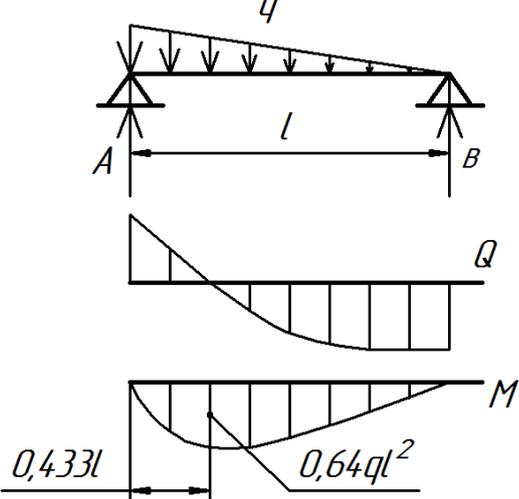
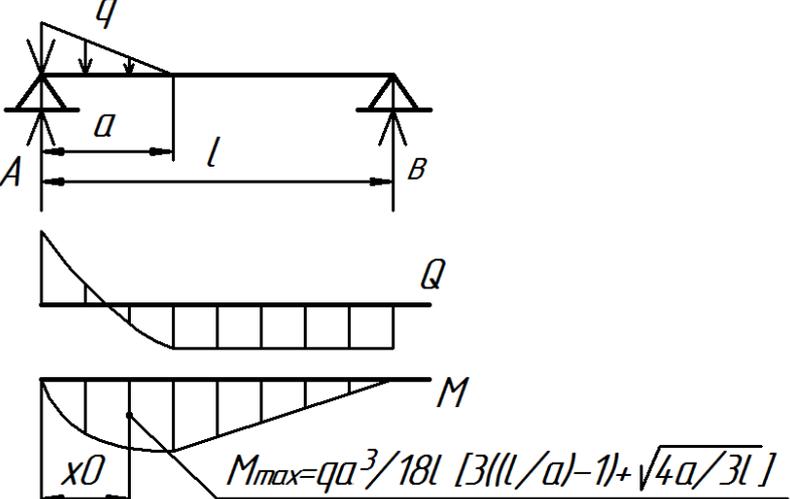
Схема балки, эпюра Q и M	Опорные реакции
 <p style="text-align: center;">$M_{max} = (qa/4)(l-a/2)$</p>	$A = B = \frac{qa}{2}$
 <p style="text-align: center;">$0,433l$ $0,64ql^2$</p>	$A = \frac{ql}{3}$ $B = \frac{ql}{6}$
 <p style="text-align: center;">x_0 $M_{max} = qa^3/18l [3(l/a)-1] + \sqrt{4a/3l}$</p>	$A = \frac{qa}{6l} (3l - a)$ $B = \frac{qa^2}{6l}$ $x_0 = a - \sqrt{\frac{a^3}{3l}}$

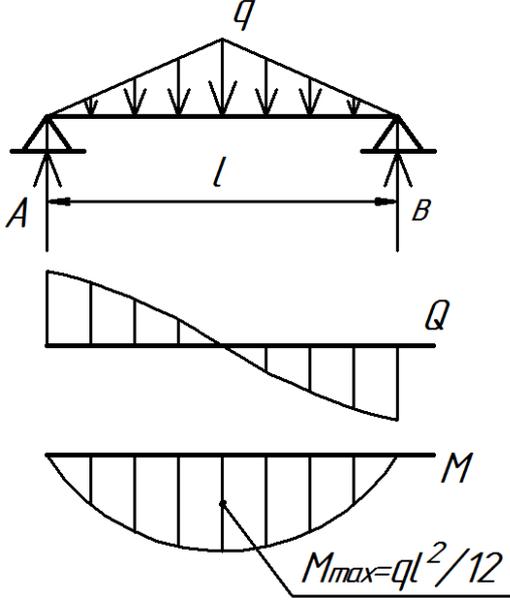
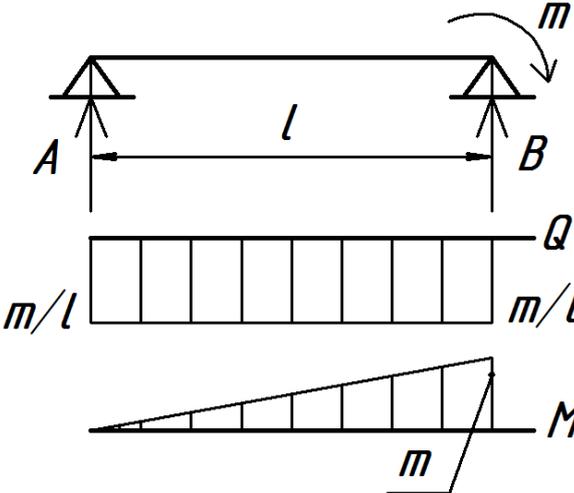
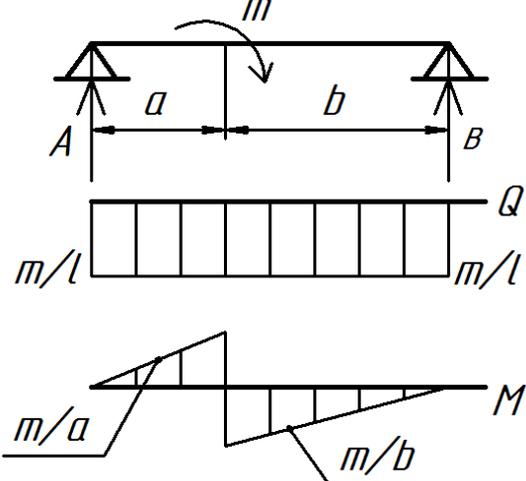
Схема балки, эпюра Q и M	Опорные реакции
 <p style="text-align: center;">$M_{max} = ql^2/12$</p>	$A = B = \frac{ql}{4}$
	$A = -\frac{m}{l}$ $B = \frac{m}{l}$
	$A = -\frac{m}{l}$ $B = \frac{m}{l}$

Схема балки, эюры Q и M	Опорные реакции
<p>Схема балки с равномерно распределенной нагрузкой q. Длина балки l, расстояние от опоры B до правого конца a. Эюры поперечной силы Q и изгибающего момента M.</p>	$A = \frac{q(l^2 - a^2)}{2l}$ $B = \frac{q(l^2 + a^2)}{2l} + qa$ $M_B = \frac{qa^2}{2}$
<p>Схема балки с сосредоточенной нагрузкой F в конце. Длина балки l, расстояние от опоры B до правого конца a. Эюры поперечной силы Q и изгибающего момента M.</p>	$A = -\frac{Fa}{l}$ $B = F\left(1 + \frac{a}{l}\right)$
<p>Схема балки с сосредоточенным моментом m в конце. Длина балки l, расстояние от опоры B до правого конца a. Эюры поперечной силы Q и изгибающего момента M.</p>	$A = -\frac{m}{l}$ $B = \frac{m}{l}$ $M_B = -m$

Витюнин М.А., Чикова О.А.

Сопротивление материалов

Учебное пособие.

Комплекс заданий и упражнений по сопротивлению материалов

Подписано в печать 17.12.14. Формат 30х42/4.

Бумага для множ. ап. Гарнитура «Georgia». Печать на ризографе.

Усл. п. л. 7,9. Тираж 500 экз. Заказ № 4486

Тираж отпечатан в отделе множительной техники
Уральского государственного педагогического университета
620017, г. Екатеринбург, пр. Космонавтов, 26