

М.Б. ГУМЕН, В.М. СПІВАК,
С.К. МЕЩАНИНОВ, Г.Г. ВЛАСЮК, Т.Ф. ГУМЕН

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

АНАЛІЗ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Книга 2

АНАЛІЗ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Підручник для студентів технічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Київ
«КАФЕДРА» 2017

**М. Б. ГУМЕН, В. М. СПІВАК, С. К. МЕЩАНИНОВ,
Г. Г. ВЛАСЮК, Т. Ф. ГУМЕН**

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

КНИГА 2

АНАЛІЗ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

**Підручник для студентів
ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ВИЩИХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ**

**Київ
«КАФЕДРА»
2017**

УДК 519.7(075.8)
ББК 22.18я73
Г94

РЕКОМЕНДОВАНО ВЧЕНОЮ РАДОЮ
ДНІПРОВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ЯК ПІДРУЧНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ
ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ
(ПРОТОКОЛ № 35 ВІД 26 05.2016 Р.)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

ТКАЧОВ В. В., ЗАВДУВАЧ КАФЕДРИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ДЕРЖАВНОГО ВНЗ
«НГУ», Д. Т. Н., ПРОФЕСОР, ЗАСЛУЖЕНИЙ ДІЯЧ НАУКИ І ТЕХНІКИ УКРАЇНИ;
КОВАЛЕНКО О. В., ЗАВДУВАЧ КАФЕДРИ РАДІОЕЛЕКТРОНИКИ ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ ІМ. О. ГОНЧАРА, Д. Ф. М. Н., ПРОФ.

Г94

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ: ПІДРУЧНИК (У 2-Х КН.) КНИГА 2.
АНАЛІЗ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ / М. Б. ГУМЕН, В. М. СПІВАК, С. К. МЕЩАНИНОВ, Г. Г.
ВЛАСЮК, Т. Ф. ГУМЕН. – 2-Е ВИД., ЗІ ЗМІНАМИ І ДОПОВН. – К.: КАФЕДРА, 2017. – 331 С.

ISBN 978-617-7301-28-7 (ЗАГ.)
ISBN 978-617-7301-30-0 (КН.2)

У ПІДРУЧНИКУ ВИКЛАДЕНО БАЗОВІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ, ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ, ВИСВІТЛЕНО ЙМОВІРНІСНІ, ЧАСОВІ, КОРЕЛЯЦІЙНІ ТА СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ, ОСОБЛИВОСТІ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ТА МОДУЛЬОВАНИХ ПРОЦЕСІВ, ВИКЛАДЕНО МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРОЦЕСІВ І СИГНАЛІВ РІЗНОМАНІТНИМИ СИСТЕМАМИ В РАМКАХ СПЕКТРАЛЬНО-КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ, РОЗГЛЯНУТО ТОЧКОВІ ТА ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ, ПРОБЛЕМАТИКА ПЕРЕВІРКИ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ.

Видання може бути корисним не тільки для студентів вищих навчальних закладів відповідного профілю, а також спеціалістів із проектування та експлуатації інформаційно-вимірювальних та експертних систем, діагностичних комплексів, систем керування складними об'єктами та технологічними процесами неруйнівного контролю, систем передачі та обробки даних, розпізнавання образів тощо.

УДК 519.7(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-617-7301-28-7 (ЗАГ.)
ISBN 978-617-7301-30-0 (КН.2)

© ГУМЕН М. Б., СПІВАК В. М., ВЛАСЮК Г. Г.,
ГУМЕН Т. Ф., 2010
© ГУМЕН М. Б., СПІВАК В. М.,
МЕЩАНИНОВ С. К., ВЛАСЮК Г. Г., ГУМЕН
Т. Ф., 2017

ЗМІСТ

Передмова	7
Глава 1 Математична статистика.....	8
1.1 Основні завдання математичної статистики.....	8
1.2 Вибірка та варіаційний ряд.....	11
1.3 Точкове оцінювання параметрів випадкових величин....	22
1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибіркові моменти.....	22
1.3.2 Властивості точкових оцінок	36
1.4 Інтервальне оцінювання параметрів випадкових величин.....	47
1.4.1 Надійний інтервал та його побудова.....	47
1.4.2 Надійний інтервал для математичного очікування.	51
1.4.3 Інтервальне оцінювання дисперсії та коефіцієнта кореляції.....	56
1.5 Спектральні оцінки часового ряду.....	65
1.6 Перевірка статистичних гіпотез.....	69
1.7 Завдання для поточного тестування.....	78
1.7.1 Запитання для поточного контролю.....	78
1.7.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	82
Глава 2 Стаціонарні випадкові процеси.....	87
2.1 Визначення стаціонарного випадкового процесу у вузькому та широкому значеннях.....	87
2.2 Особливі автокореляційних функцій стаціонарних процесів.....	93
2.3 Особливості взаємних кореляційних функцій стаціонарних процесів.....	99
2.4 Практична значущість взаємних кореляційних функцій..	104
2.5 Ергодичні процеси та їхні кореляційні характеристики...	107
2.6 Завдання для поточного тестування.....	111
2.6.1 Запитання для поточного контролю.....	111

2.6.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	113
Глава 3 Імовірнісні характеристики випадкових процесів.....	117
3.1 Математична модель випадкового процесу.....	117
3.2 Закони розподілу випадкових процесів.....	121
3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу.....	121
3.2.2 Двовимірні закони розподілу ймовірності....	134
3.2.3 Багатовимірні закони розподілу ймовірності.....	144
3.3 Характеристична функція.....	148
3.4 Визначення законів розподілу ймовірності за характеристичними функціями.....	153
3.5 Перетворення змінних під час обчислення законів розподілу.....	158
3.6 Завдання для поточного тестування.....	167
3.6.1 Запитання для поточного контролю.....	167
3.6.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	171
Глава 4 Часові характеристики випадкових процесів.....	175
4.1 Загальна характеристика моментних функцій.....	175
4.2 Одновимірні моменти функції першого порядку.....	180
4.3 Одновимірні моментні функції другого порядку.....	188
4.4 Взаємозв'язок одновимірних моментних та характеристичних функцій.....	198
4.5 Завдання для поточного тестування.....	204
4.5.1 Запитання для поточного контролю.....	204
4.5.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	207
Глава 5 Кореляційні характеристики випадкових процесів.....	211
5.1 Види статистичної залежності.....	211
5.2 Двовимірні моментні функції другого порядку.....	214
5.3 Особливості кореляційних характеристик.....	223

5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих випадкових процесів.....	227
5.5 Завдання для поточного тестування.....	240
5.5.1 Запитання для поточного контролю.....	240
5.5.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	242
Глава 6 Спектральні характеристики випадкових процесів.....	245
6.1 Особливості спектрального аналізу випадкових процесів.....	245
6.2 Спектри нестационарних процесів.....	247
6.3 Спектри стаціонарних процесів.....	249
6.4 Властивості спектральної щільності потужності стаціонарних процесів.....	254
6.5 Фізичний та математичний спектри.....	258
6.6 Взаємозв'язок кореляційний та спектральних характеристик стаціонарних процесів.....	261
6.7 Ширина енергетичного спектра та інтервал кореляції.....	266
6.8 Завдання для поточного тестування.....	271
6.8.1 Запитання для поточного контролю.....	271
6.8.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	274
Глава 7 Кореляційно-спектральний аналіз перетворень випадкових процесів лінійними системами.....	278
7.1 Постановка задачі кореляційного аналізу.....	278
7.2 Математичне очікування та середній квадрат реакції....	280
7.3 Автокореляційна функція реакції.....	289
7.4 Кореляція вхідних та вихідних процесів.....	296
7.5 Постановка задачі спектрального аналізу.....	300
7.6 Спектральний аналіз інтегруючих та диференціюючих систем.....	304
7.7 Шумова смуга пропускання лінійної системи.....	307
7.8 Взаємні спектри реакції та дії.....	314
7.9 Завдання для поточного тестування.....	317
7.9.1 Запитання для поточного контролю.....	317

7.9.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	320
Список рекомендованої літератури	323
Додатки.....	324
Додаток 1 Таблиця значень інтегральної функції нормального розподілу.....	324
Додаток 2 Таблиця значень розподілу Стюдента.....	326
Додаток 3 Таблиця значень інтегральної функції Пірсона.....	327

У цій книзі висвітлено ймовірнісні, часові, кореляційні та спектральні характеристики випадкових процесів і сигналів, розглянуто особливості характеристик стаціонарних випадкових процесів і сигналів. Розгляд характеристик процесів і сигналів ґрунтується на їхній практичній значимості.

У підручнику викладено також підходи до оцінювання перетворень випадкових процесів і сигналів різноманітними системами в рамках спектрально-кореляційної теорії, яка ґрунтується на статистичному підході до опису випадкових процесів і сигналів, тобто використанні при їх дослідженні математичного очікування, серед нього квадрату (дисперсії), кореляційної функції та спектральна щільності потужності.

Ідеї та методи теорії процесів і сигналів необхідні майбутнім фахівцям із проектування та експлуатації інформаційно-вимірювальних та експертних систем, діагностичних комплексів, систем керування складними об'єктами та технологічними процесами, неруйнівного контролю, систем передачі та обробки даних, розпізнавання образів тощо.

Для більш глибокого розуміння проблем і розглядуваних підходів до їх розв'язання, оволодіння практичними навичками в даній сфері у підручнику поряд із теоретичним матеріалом вміщено велику кількість прикладів розв'язання конкретних завдань.

В основу підручника покладено курси лекцій, що читаються авторами студентам факультету електроніки Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" та факультету інформаційних технологій Національного авіаційного університету.

Основне завдання підручника – не тільки в достатньо зрозумілій формі висвітлити ключові положення теорії процесів і сигналів, а й пробудити читача до самостійної творчої роботи.

1 Математична статистика

1.1 Основні завдання математичної статистики

Ключове завдання практики – визначення якісних і кількісних характеристик досліджуваних об'єктів і явищ. На сьогодні методи розв'язання цього завдання докорінним чином змінилися і дають змогу здійснювати раціональний вибір місць сприйняття інформації, з урахуванням порядку й швидкості їхнього опитування, виділення сигналу на фоні завад із необхідною точністю, обробку таких сигналів, їх перетворення, передачу, збереження та надання в необхідному вигляді інформації споживачеві.

Усі процеси, що протікають у природі, є результатом взаємодії багатьох факторів. Для того щоб їх вивчити, потрібно з'ясувати, яку роль у даному процесі відіграє кожний із факторів. Наприклад, у найпростішому, на перший погляд, експерименті з вимірювання опору потрібно врахувати хоча б два основних фактори: вплив температури й вологості навколишнього середовища на значення цього опору. Інший приклад. Результати багаторазових вимірювань вихідної напруги підсилювача постійного струму за фіксованого вхідного сигналу будуть випадковою величиною, зважаючи на такі фактори: випадкові зміни дійсних значень напруги, випадкові зміни показів вимірювальних приладів.

Дію усіх факторів потрібно подати в кількісних значеннях, а потім уже оцінити їхній вплив на результат дослідження. Для отримання кількісних значень проводиться ряд дослідів. Але навіть самий ретельний експеримент не дає змоги виділити вплив окремого фактора в чистому вигляді або в силу фізичних причин, або в силу відсутності апріорних даних про причини, що впливають. Отже, кожний експеримент дає нам лише наближене значення досліджуваного параметра. Причому, в окремому з дослідів результат буде коливатися в певних межах.

Таким чином, отримати точне значення параметра досліджуваного об'єкта практично неможливо. Будь-яке збільшення точності дослідження значно ускладнює експеримент, а іноді робить його неможливим. Тому результати усіх експериментів характеризуються певною похибкою, величина якої потрібно оцінити. Водночас, процес з великою кількістю параметрів набуває властивостей випадкового

1.1 Основні завдання математичної статистики

явища. Тому оцінювати похибку потрібно статистичними методами, які і складають основу **математичної статистики**.

У теорії ймовірностей за заданими ймовірностями подій і функціями розподілу випадкових об'єктів, як відомо, визначаються ймовірності та функції розподілу інших подій, випадкових величин і процесів. Природно виникає питання: де взяти ці задані ймовірності та функції розподілу? Одних апіорних даних для цього, зазвичай, недостатньо. Потрібні експерименти, і навіть спеціальні випробування. Завданнями математичної статистики і є розробка методів, що дають змогу за результатами спостережень робити певні висновки про закономірності досліджуваних величин і їхні числові характеристики. У багатьох випадках для виявлення загальних закономірностей потрібно провести велику кількість дослідів, а це потребує відповідних методів обробки таких результатів. Такі методи також розробляє математична статистика.

Предметом математичної статистики є дві основні групи питань: по-перше, це методи статистичного оцінювання параметрів законів розподілу ймовірності; по-друге - це методи перевірки статистичних гіпотез. Під час статистичного оцінювання основне завдання полягає в тому, щоб визначити відхилення між оцінкою параметра і його дійсним значенням, порівняти оцінки між собою та вибрати найкращу з них, а також виробити вимоги, яким повинні задовольняти обрані оцінки.

Під час розв'язання другої групи питань математична статистика дає змогу визначити потрібну кількість дослідів для того, щоб отримати певну статистичну точність, і, крім того, перевірити справедливність висунутих апіорі пропозицій про закони розподілу досліджуваних величин і процесів та числові характеристики цих законів.

Дуже часто математичну статистику визначають як науку про прийняття рішень в умовах невизначеності. Останнє не означає, що дані відсутні, а тільки передбачається неможливість точного результату дослідів. Так, наприклад, під час проведення вимірального експерименту мають місце випадкові похибки, зумовлені непередбачуваними змінами самого об'єкта дослідження, так і неточністю виміральної апаратури. Дійсні значення параметрів, які визначають властивості досліджуваного об'єкта, виявляються в експерименті з урахуванням зазначених випадкових факторів. Окрім того, треба вказати і значення можливих похибок.

У разі, коли результати в кожному досліді змінюються невизначеним чином і всі спроби їх передбачити не справджуються, йдеться про послідовність *випадкових експериментів*. Тоді результати дослідів є випадкові величини.

Таким чином, *математичну статистику можна визначити як науку про методи обробки експериментальних даних із метою отримання результатів, близьких до істинних із одночасним оцінюванням ступеня такої близькості*.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Всі процеси, що протікають у природі, є результатом взаємодії багатьох факторів. Для того щоб їх вивчити, потрібно з'ясувати, яку роль у даному процесі відіграє кожний із факторів.

2. Експеримент дає лише наближене значення досліджуваного параметра та не дає змоги виділити вплив окремого фактора в чистому вигляді або в силу фізичних причин, або в силу відсутності апріорних даних про причини, що впливають.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: експеримент, випадковий експеримент, математична статистика.



Слід запам'ятати:

1. Визначення поняття: випадковий експеримент.

2. Предметом математичної статистики є дві основні групи питань: по-перше, це методи статистичного оцінювання параметрів законів розподілу ймовірності; по-друге - це методи перевірки статистичних гіпотез.

3. Математична статистика є наукою про методи обробки експериментальних даних з метою отримання результатів, близьких до істинних.

1.2 Вибірка та варіаційний ряд

Повний набір усіх значень, які може прийняти випадкова величина при необмеженому числі випробувань, у статистиці прийнято називати **генеральною сукупністю**. Використовується і більш узагальнене означення:

генеральна сукупність – це уся сукупність об’єктів, яка підлягає дослідженню.

В подальшому будемо дотримуватися першого означення генеральної сукупності.

У реальних умовах експерименту, зазвичай, ми дістанемо лише деяке число n можливих значень вимірюваної випадкової величини.

Числа $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, отримані під час n -кратного повторення дослідів за незмінних умов (в одному складному експерименті) називаються *вибіркою* обсягом n .

У практиці отримані в результаті проведення n спостережень дані x_1, x_2, \dots, x_n над деякою випадковою величиною X або часовим ергодичним рядом $\{x_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ розглядають як вибірку з деякої чисто умовної генеральної сукупності, утвореної нескінченною кількістю можливих за даних умов дослідів.

Вибірка повинна утворюватися з генеральної сукупності у випадковий спосіб і бути досить представницькою.

Зауважимо, що часовий ряд являє собою стаціонарний процес з дискретним часом.

Сукупність отриманих результатів дослідів називається *статистичною сукупністю* або *статистичним рядом*.

Результати спостережень x_1, x_2, \dots, x_n подані в порядку отримання часто бувають незручними для подальшого аналізу, тому їх упорядковують, розміщуючи у порядку їхнього зростання: $x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \dots \leq x^{(n)}$. Такий спосіб запису вибірки отримав назву *упорядкованого статистичного ряду* або *варіаційного ряду*. Кожний елемент варіаційного ряду називається *порядковою статистикою*, а

різниця найбільшого та найменшого значень $R = x^{(n)} - x^{(1)}$ вибірки - *розмахом варіювання* або *розмахом вибірки*.

Деякі порядкові статистики можуть служити статистичними оцінками параметрів, що характеризують випадкову величину X . Наприклад, якщо $n = 6l - 1$, то $x^{(l)}$ і $x^{(5l)}$ називаються вибірковимі *секстилями* і за оцінку середньоквадратичного відхилення σ_X випадкової величини X можна взяти вираз $\sigma_X \approx (x^{(5l)} - x^{(l)}) / 2$.

За оцінку її математичного очікування m_X (при непарному n) беруть $m_X \approx x^{((n+1)/2)}$.

► **Приклад.** Під час вимірювання опору партії резисторів отримали такі значення (в омах):

$$\begin{aligned} &9,0; 9,2; 9,1; 9,1; 9,2; 9,2; 9,3; 9,2; 9,2; 9,3; \\ &9,3; 9,3; 9,3; 9,4; 9,3; 9,4; 9,3; 9,5; 9,4; 9,4. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Вибірка (1.1) з 20 результатів вимірювання опору і є статистичним рядом. Розмістивши отримані значення опору в порядку їх зростання дістанемо упорядкований статистичний або варіаційний ряд:

$$\begin{aligned} &9,0; 9,1; 9,1; 9,2; 9,2; 9,2; 9,2; 9,2; 9,3; 9,3; \\ &9,3; 9,3; 9,3; 9,3; 9,3; 9,4; 9,4; 9,4; 9,4; 9,5. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Розмах заданої вибірки $R = 9,5 - 9,0 = 0,5$.



Нехай вибірка $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ має лише k різних чисел z_1, z_2, \dots, z_k , причому z_j зустрічається n_j разів. Такий випадок, зазвичай, має місце для дискретної вибірки. У цьому разі, однакові значення z_j випадкової величини X називають **варіантами**, а число n_j , яке показує скільки разів зустрічається варіанта у статистичному ряді спостережень, - **частотою** n_j варіанти z_j .

Очевидно, що для дискретної вибірки $\sum_{j=1}^k n_j = n$. Для неперервної вибірки вважається, що частоти всіх її елементів однакові і дорівнюють одиниці.

Послідовність пар (z_j, n_j) , що дає змогу судити про розподіл частот між усіма варіантами, отримала назву **статистичного розподілу вибірки**. В літературі для позначення такої послідовності

1.2 Вибірка та варіаційний ряд

використовують і інші назви: просто *статистичний ряд* або *дискретний варіаційний ряд*.

У подальшому, щоб уникнути непорозумінь та використання одних і тих самих найменувань для позначення різних за змістом термінів, ми називатимемо статистичний розподіл вибірки **частотним варіаційним рядом**. Його зручно записувати у вигляді таблиці:

z_1	z_2	z_3	...	z_k
n_1	n_2	n_3	...	n_k

► **Приклад.** *Визначити статистичний розподіл (частотний варіаційний ряд) вибірки (1.1).*

Для вибірки (1.1) варіанта $z_1 = 9,0$ повторилася один раз, варіанта $z_2 = 9,1$ - два рази, варіанта $z_3 = 9,2$ - п'ять разів, варіанта $z_4 = 9,3$ - сім разів, варіанта $z_5 = 9,4$ - чотири рази, а варіанта $z_6 = 9,5$ - один раз.

Число повторень варіант, як відомо, визначає їхні частоти. Тоді маємо такий частотний варіаційний ряд:

Таблиця 1.1

9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5
1	2	5	7	4	1



Окрім частоти в математичній статистиці оперують і с такими поняттями, як *відносна* та *накопичена відносна частота*.

Відносною частотою ω_j називається величина, що дорівнює відношенню частоти n_j до повного обсягу вибірки n :

$$\omega_j = n_j / n. \quad (1.3)$$

Накопичена відносна частота $\omega_{i\text{нак}}$ i -ї варіанти визначається сумою відносних частот поточної та всіх попередніх варіант:

$$\omega_{i\text{нак}} = \sum_{j=1}^i \omega_j, \quad i = \overline{1, k}. \quad (1.4)$$

Для вибірки (1.1) значення усіх видів частот подані в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

j	z_j	n_j	Ψ_j	$\Omega_{\text{жн.к.}}$
1	9,0	1	0,05	0,05
2	9,1	2	0,10	0,15
3	9,2	5	0,25	0,40
4	9,3	7	0,35	0,75
5	9,4	4	0,20	0,95
6	9,5	1	0,05	1.00

Для великого обсягу вибірки, а особливо під час дослідження неперервних випадкових величин чи процесів, побудова частотного варіаційного ряду не дає бажаних результатів, тому що випадкові значення x_j можуть як завгодно мало відрізнятися одне від одного, а число варіант буде занадто великим. У цьому разі початково елементи вибірки об'єднують у певні групи. Кожна з груп утворюється експериментальними даними, вибраними з відповідних інтервалів варіаційного ряду. Для цього інтервал, що містить усі елементи вибірки, розбивають на r частинних, зазвичай, однакових інтервалів (підінтервалів), які не перетинаються. Між цими підінтервалами і розподіляють елементи вибірки.

Для визначення оптимальної ширини d частинного інтервалу, за якої варіаційний ряд не був би занадто громіздким і давав змогу виявити характер розподілу випадкової величини, можна скористатися таким співвідношенням:

$$d = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r}, \quad (1.5)$$

де x_{\max} - максимальне, а x_{\min} - мінімальне значення серед усіх елементів вибірки.

Один із науживанішихі способів для визначення числа частинних інтервалів, запропонованим у 1926 році Стєрджесом, ґрунтується на такому співвідношенні:

$$r \approx 1 + 3,322 \lg n. \quad (1.6)$$

Проте, такий підхід зовсім не враховує передбачуваний вид закону розподілу досліджуваної випадкової величини. Тоді, за однакового обсягу вибірки n кількість частинних інтервалів буде однаковою як для рівномірного розподілу з плоскою вершиною, так і для гостровершин-

1.2 Вибірка та варіаційний ряд

ного експонентного розподілу. Цей недолік усувається у разі, якщо кількість частинних інтервалів

$$r \approx (4/\chi) \lg(n/10), \quad (1.7)$$

де χ - конфексес можливого закону розподілу досліджуваної величини.

Після вибору частинних інтервалів, визначають кількість елементів вибірки $n_j^{(i)}$, що потрапили до кожного частинного інтервалу, тобто знаходять частоти попадання значень x_j у певний частинний інтервал. Такі частоти називають *інтервальними*.

У разі, якщо елемент знаходиться на межі частинних інтервалів, то його відносять до одного з них, наприклад до правого, а частоту елемента розподіляють між двома частинними інтервалами.

За потреби обчислюють *відносну інтервальну частоту*

$$\omega_j^{(i)} = n_j^{(i)} / n \quad (1.8)$$

та *накопичену відносну інтервальну частоту* $\omega_{\text{нак.}}^{(i)}$

Накопичена відносна інтервальна частота $\omega_{\text{нак.}}^{(i)}$ - це така величина, що визначається сумою відносних частот поточного та всіх попередніх інтервалів:

$$\omega_{\text{нак.}}^{(i)} = \sum_{j=1}^i \omega_j^{(i)}, \quad i = \overline{1, r}. \quad (1.9)$$

Ряд, що дає інформацію про розподіл частот $n_j^{(i)}$ (можливо і відносних та накопичених інтервальних частот) між частинними інтервалами варіаційного ряду, називається *інтервальним варіаційним рядом*. Такий ряд у верхньому рядку містить або середини частинних інтервалів, або самі частинні інтервали, а у нижньому інтервальні частоти. Як і частотний, інтервальний варіаційний ряд зручно подавати таблицею *частот групованої вибірки*.

Отже, щоб утворити інтервальний варіаційний ряд із певної вибірки, потрібно:

- визначити оптимальну ширину частинних інтервалів;
- установити повну шкалу частинних інтервалів;

- визначити інтервальні, відносні інтервальні та накопичені відносні інтервальні частоти для частинних інтервалів;
- побудувати інтервальний варіаційний ряд.

► **Приклад.** Під час перевірки ста вольтметрів постійного струму отримали такі значення їхньої максимальної абсолютної похибки (В):

0,111; 0,085; 0,091; 0,101; 0,109; 0,086; 0,102; 0,111; 0,098; 0,085;
 0,105; 0,112; 0,098; 0,113; 0,087; 0,109; 0,115; 0,099; 0,094; 0,105;
 0,107; 0,099; 0,125; 0,089; 0,104; 0,113; 0,096; 0,103; 0,145; 0,104;
 0,105; 0,088; 0,103; 0,097; 0,115; 0,109; 0,089; 0,108; 0,107; 0,097;
 0,106; 0,096; 0,109; 0,116; 0,109; 0,117; 0,108; 0,109; 0,117; 0,103;
 0,127; 0,119; 0,118; 0,125; 0,105; 0,116; 0,101; 0,113; 0,107; 0,105
 0,119; 0,107; 0,111; 0,112; 0,129; 0,113; 0,106; 0,104; 0,106; 0,098;
 0,123; 0,108; 0,093; 0,105; 0,106; 0,139; 0,108; 0,107; 0,093; 0,117;
 0,107; 0,118; 0,099; 0,108; 0,119; 0,108; 0,101; 0,109; 0,128; 0,127;
 0,121; 0,118; 0,122; 0,116; 0,124; 0,125; 0,114; 0,126; 0,131; 0,143.

Таблиця 1.3

<i>i</i>	<i>Інтервали</i>	Інтервальна частота $n_j^{(i)}$	Відносна інтервальна частота $\omega_j^{(i)}$	Накопичена відносна інтервальна частота $\omega_{\text{нак.}}^{(i)}$
1	0,080...0,090	7	0,07	0,07
2	0,090...0,100	14	0,14	0,21
3	0,100...0,110	39	0,39	0,60
4	0,110...0,120	24	0,24	0,84
5	0,120...0,130	12	0,12	0,96
6	0,130...0,140	2	0,02	0,98
7	0,140...0,150	2	0,02	1,0



За цими даними важко виявити характерні риси варіації похибки. Отже, побудова частотного варіаційного ряду є недоцільною через велику кількість варіант. Потрібно утворити інтервальний варіаційний ряд, згрупувавши отримані дані, наприклад, у частинних інтервалах, кожний з яких визначається 10% від розмаху вибірки. Утворений у такий спосіб інтервальний варіаційний ряд подано другим та третім стовбчиком табл. 1.3. У стовбчику чотири та п'ять наведені значення відносної та накопиченої відносної інтервальної похибки.

1.2 Вибірка та варіаційний ряд

► **Приклад.** *Із партії резисторів з номінальним опором $R_n = 1000$ Ом, було відібрано 50 для визначення величини відхилення дійсних значень опору від номінального. У результаті вимірювання отримані такі значення абсолютних відхилень значень опору (дані упорядковані):*

15,804	20,027	21,993	23,770	26,323	
17,716	20,479	22,155	23,746	26,668	
17,796	20,824	22,312	24,038	26,987	
17,825	20,931	22,471	24,065	27,837	
18,274	20,957	22606	24198	28313	(1.10)
18,726	21,435	22,631	24,198	30,360	
19,390	21,474	22,763	24,676	30,706	
19,682	21,754	22,949	56,207	31,556	
19,709	21,834	23,104	25,552	31,795	
19,841	21,966	23,401	25,845	32,485.	

Побудувати інтервальний варіаційний ряд для такої вибірки.

Кількість частинних інтервалів визначимо за формулою (1.6):
 $r = 3,322 \lg 50 + 1 = 6,644 \approx 7$. Тоді ширина частинного інтервалу

$$d = (32,485 - 15,804) / 7 = 2,383 \approx 2,4.$$

Таблиця 1.4

i	Інтервали	Інтервальна частота $n_j^{(i)}$	Відносна інтервальна частота $\omega_j^{(i)}$	Накопичена відносна інтервальна частота $\omega_{\text{нак.}}^{(i)}$
1	15,8...18,2	4	0,08	0,08
2	18,2...20,6	8	0,16	0,24
3	20,6...23,0	16	0,32	0,56
4	23,0...25,4	10	0,20	0,76
5	23,4...27,8	5	0,10	0,86
6	27,8...30,2	2	0,04	0,90
7	30,2...32,6	5	0,10	1,00

З урахуванням ширини частинних інтервалів та мінімального значення вибірки (1.10) утворюємо шкалу інтервалів (див. стовбчик другий табл. 1.4). Розподіливши елементи заданої вибірки між частинними інтервалами, дістанемо значення інтервальних частот (див. третій стовбчик табл. 1.4). Другий та третій стовбчики табл. 1.4 і утворюють інтервальний варіаційний ряд для абсолютних відхилень опору.

Потім згідно з (1.8) і (1.9) обчислюємо відносні та накопичені відносні інтервальні частоти. Отримані результати зведені в частотну табл. 1.4. Із цієї таблиці випливає, що найбільш імовірними значеннями абсолютного відхилення ΔR є такі, що належать інтервалу [20,6...23,0] Ом.



Частотний і інтервальний варіаційні ряди можуть бути подані не тільки в табличній, але й у більш наочній графічній формі. Науживанішими є такі графічні зображення варіаційних рядів: **полігон**, **гістограма**, **кумулятивна крива**.

Полігон – це графічне зображення дискретного варіаційного ряду.

Для побудови полігону на площині з прямокутною системою координат (Z, ω) зображують точки з координатами (z_j, ω_j) , де z_j - варіанта, а ω_j - відповідна їй відносна частота. Потім ці точки послідовно з'єднують відрізками (див. рис. 1.1, а). На рис. 1.1, б зображено полігон для частотного варіаційного ряду, поданою табл. 1.2.

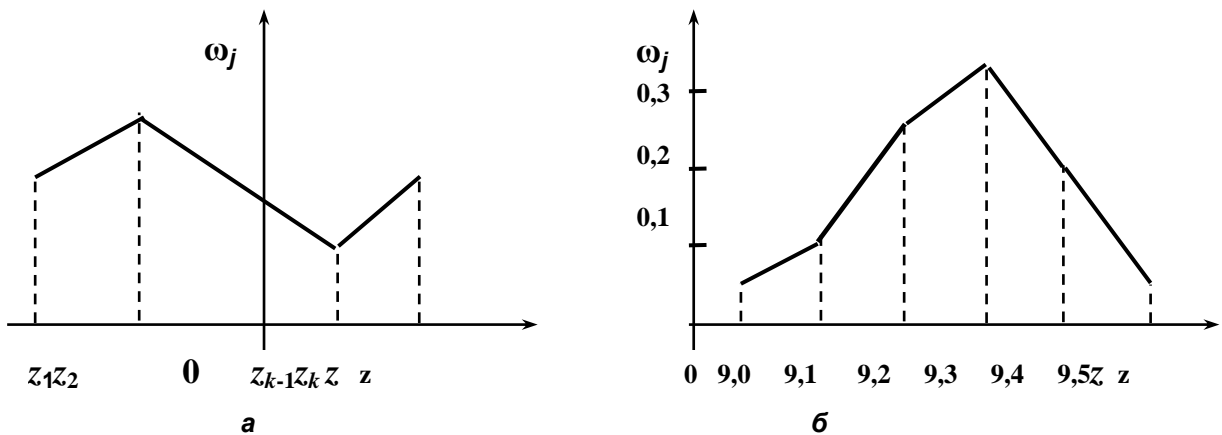


Рисунок 1.1 – Приклади полігонів.

Гістограма – це певне графічне зображення інтервального варіаційного ряду.

Для побудови гістограми в прямокутній системі координат по осі абсцис відкладаються частинні інтервали і на кожному з них, як на основі, будується прямокутник, висота якого дорівнює відношенню відносної інтервальної частоти до ширини частинного інтервалу: $\omega_j^{(i)} / d$. Ясно, що за таких умов площа кожного із прямокутників

1.2 Вибірка та варіаційний ряд

дорівнює відносній інтервальній частоті $\omega_j^{(i)}$ відповідного частинного інтервалу (див. рис. 1.2, а).

Гістограма розподілу абсолютних відхилень значень опору від номінального значення для інтервального варіаційного ряду, дані про який подано табл. 1.4, зображена на рис. 1.2, б.

Полігон і гістограма є графічними зображеннями статистичних аналогів законів розподілу випадкової величини (дискретної та неперервної відповідно). Вважають, що вони є емпіричними законами розподілу ймовірності.

Гістограма є своєрідним поданням емпіричної функції щільності розподілу ймовірності $p^*(z)$. Це зумовлено тим, що, як зазначалось раніше, площа кожного прямокутника гістограми дорівнює відносній інтервальній частоті певної групи вибірових значень. За великих обсягів n вибірки можна очікувати, що ця площа буде приблизно дорівнювати ймовірності для досліджуваних значень потрапити у відповідний інтервал, тобто фактично визначатися інтегралом від щільності ймовірності $p(z)$, поширеному на даний інтервал. Інакше кажучи, гістограма - це вибірова щільність розподілу.

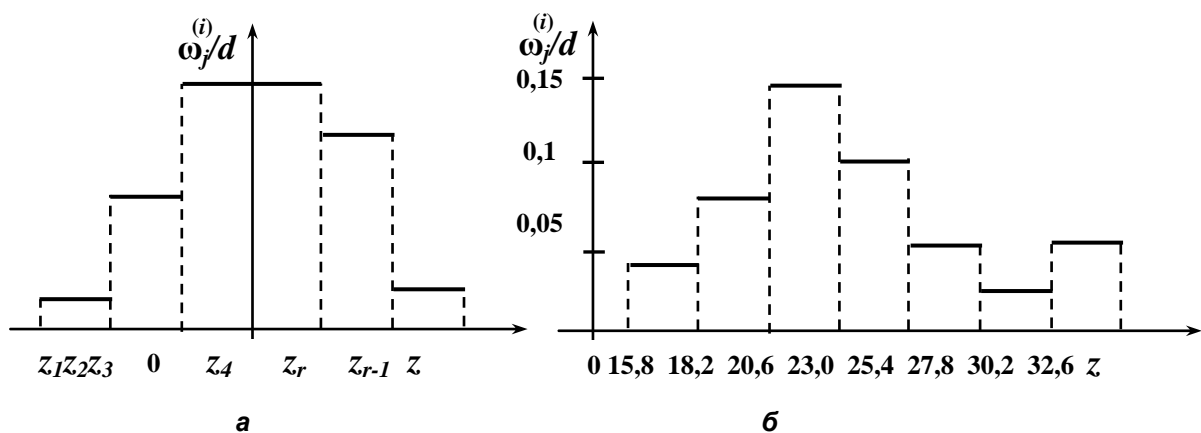


Рисунок 1.2 – Приклади гістограм.

Дійсно, припустімо, спостерігаються значення випадкової величини X , неперервна щільність розподілу $p(z)$ якої невідома і її потрібно оцінити за вибіркою з n незалежних спостережень $\{x_j, j = \overline{1, n}\}$.

Розмах варіювання розіб'ємо на r інтервалів із однаковою довжиною. Тоді для кожного частинного інтервалу Δ_i довжиною d значення гістограми, як висоти прямокутника за її означенням (емпірична щільність розподілу), визначається рівністю

$$p_i^*(z) = \frac{n_i}{nd} = \omega_j^{(i)} / d, \quad z \in \Delta_i, \quad i = \overline{1, r}, \quad (1.11)$$

де n_i - кількість спостережень, що належать до інтервалу Δ_i . Очевидно, що частота n_i / n відображає площу прямокутника, побудованого на Δ_i , як на основі з висотою, що дорівнює ординаті гістограми $\omega_j^{(i)} / d$.

Таким чином, для великих n площа прямокутника буде наближатися до ймовірності P_i певному значенню випадкової величини X потрапити до інтервалу Δ_i :

$$P_i = \int_{\Delta_i} p(z) dz. \quad (1.12)$$

Але ймовірність, обчислена згідно з (1.12), віднесена до ширини частинного інтервалу, визначає значення $p(z_i)$ функції щільності ймовірності $p(z)$ для значення її аргумента z_i , що належить до інтервалу Δ_i :

$$M\{p_n^*(z), z \in \Delta_i\} = M\left[\frac{n_i}{nd}\right] = \frac{1}{d} \int_{\Delta_i} p(z) dz = p(z_i).$$

Отже, для великих n гарантується рівномірне наближення $p_n^*(z)$ до $p(z)$.

Статистичним аналогом функції розподілу ймовірності $F(z)$ випадкової величини X є емпірична функція розподілу $F^*(z)$, графічне зображення якої називають **кумулятивною кривою (кумулятою)** або **графіком накопичених відносних частот**.

Будується така крива так. Для частотного варіаційного ряду в прямокутній системі координат (Z, ω) по осі абсцис відкладаються значення варіант z_i , а по осі ординат відповідні їм значення накопиченої відносної частоти $\omega_{\text{інак}}$ (див. (1.4)). З'єднавши точки з координатами $(z_i, \omega_{\text{інак}})$ прямолінійними відрізками, дістанемо кумулятивну криву (рис. 1.3, а).

1.2 Вибірka та варіаційний ряд

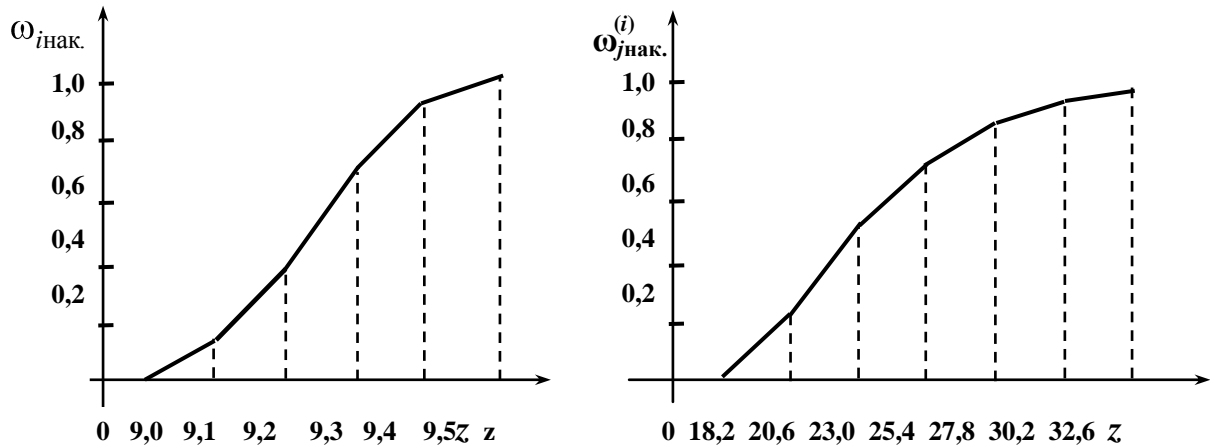


Рисунок 1.3 – Криві накопичених відносних частот для частотного (а) та інтервального (б) варіаційних рядів.

Уразі, якщо варіаційний ряд є інтервальним, то кумулятивна крива є послідовністю відрізків, кожний з яких з'єднує точки з певними координатами. Значення абсциси точки на площині визначається верхньою межею інтервалу варіювання Δ_i , а ординати - відповідним значенням накопиченої відносної інтервальної частоти цього інтервалу $\omega_{\text{інак.}}^{(i)}$ (рис. 1.3, б). Зазвичай за нижню межу першого частинного інтервалу береться нульове значення $\omega_{\text{інак.}}^{(i)}$.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Вибірka утворюється з генеральної сукупності у випадковий спосіб і повинна бути достатньо представницькою.

2. Полігон, гістограма і кумулятивна крива є графічним зображенням емпіричних законів розподілу ймовірності: гістограма – емпіричної функції щільності ймовірності, а кумулятивна крива – емпіричної функції розподілу ймовірності.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: генеральна сукупність, вибірka, обсяг вибірki, статистична сукупність або статистичний ряд, варіаційний ряд, розмах вибірki, варіанта, частота варіанти, відносна та накопичена відносна частота, інтервальна, відносна інтервальна та накопичена відносна інтервальна частоти, статистичний розподіл вибірki або частотний варіаційний ряд, інтервальний варіаційний ряд, полігон, гістограма, кумулятивна крива (комуля-

Треба вміти:

1. Визначати поняття: генеральна сукупність, вибірка та її обсяг і розмах, статистичний варіаційний, інтервальний частотний варіаційний ряди, варіанта, частота варіанти, відносна, накопичена відносна, інтервальна, відносна інтервальна та накопичена відносна інтервальна частоти, полігон, гістограма, кумулятивна крива.

2. Будувати різні види варіаційних рядів, полігони, гістограми та кумулятивну криву за результатами експериментів.

та).

2. Алгоритим утворення інтервального варіаційного ряду із певної вибірки.

3. Алгоритми побудови полігону, гістограми та кумулятивної кривої

4. Формули для визначення оптимальної ширини та кількості частинних інтервалів:

$$d = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r};$$

$$r \approx 1 + 3,322 \lg n;$$

$$r \approx (4/\chi) \lg(n/10).$$

1.3 Точкове оцінювання параметрів випадкових величин

1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибіркові моменти

Загальні положення. Побудова варіаційних рядів - перший крок до осмислення результатів досліджень. Наступним є визначення оцінок основних характеристик досліджуваної випадкової величини чи процесу. Оскільки такі оцінки визначаються за результатами

експерименту, тобто за даними вибірки, то вони називаються **емпіричними** або **вибірковими**.

Статистичною оцінкою невідомого параметра θ розподілу випадкової величини X називають функцію від вибірових значень даної випадкової величини.

1.3 Точкове оцінювання параметрів випадкових величин

Статистичні оцінки поділяють на *параметричні* та *непараметричні*. Серед параметричних оцінок виділяють *точкові* та *інтервальні*.

Розглянемо досліджувану випадкову величину X з відомим інтегральним законом розподілу ймовірності $F(z, \theta)$, де θ - деякий невідомий параметр. Заданою є також послідовність результатів спостережень над X , тобто вибірка $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n , яка залежить від невідомого параметра θ . За результатами експерименту $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ необхідно знайти відповідну точкову оцінку θ_T параметра θ .

Точковою статистичною оцінкою параметра θ називається однозначно визначена функція $\theta_T = \theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від результатів спостережень над випадковою величиною X .

Зважаючи на ймовірнісний характер вибірки, можна стверджувати, що оцінка θ_T є функцією випадкових змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, а тому вона сама являє собою випадкову величину і називається **вибірковою**. Вибрана функція, за якою здійснюється оцінювання, ще називається **статистикою**.

Точкове оцінювання полягає у виборі цієї функції таким чином, щоб її значення можна було прийняти за найкраще в даних умовах і в певному ймовірнісному розумінні наближення до параметра θ для оцінюваної випадкової величини X . Зрозуміло, що найбільш повно характеризує статистичну оцінку в цьому аспекті її функція розподілу $F_T(z|\theta)$, а якщо випадкова величина θ_T - неперервна, то й щільність розподілу $p_T(z|\theta)$.

Функція розподілу ймовірності $F_T(z|\theta)$ при заданій функції $\theta_T = \theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може бути одержана із заданої функції розподілу ймовірності $F\{z_1, x_2, \dots, x_n|\theta_n\}$ компонент вектора $\Xi_n = \theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді щільність ймовірності

$$p_T(z|\theta) = F'\{\theta_T(x_1, \dots, x_n) < z\} = \int (n) \int dF(x_1, \theta) dF(x_2, \theta) \dots dF(x_n, \theta).$$

У багатьох випадках важко чи взагалі неможливо отримати як функцію розподілу $F_T(z|\theta)$, так і щільність розподілу $p_T(z|\theta)$. Крім того, порівняння різних оцінок за їх законами розподілу також є досить складною проблемою. Тому вибір найкращої оцінки невідомого параметра θ здійснюють за більш зручними критеріями, в основі яких лежать числові ймовірнісні характеристики статистики $\theta_T = \theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Вибіркові моменти. Широковживаними точковими статистиками є *емпіричні моменти*, які за своєю структурою повністю відповідають теоретичним моментам законів розподілу, що розглядалися раніше, і є їх статистичними оцінками. Як і теоретичні, вибіркові моменти поділяють на *початкові* та *центральні*. Обчислюються емпіричні моменти за отриманими результатами спостережень випадкової (досліджуваної) величини X , тобто є функціями від випадкових аргументів, тому й самі є випадковими.

Припустимо, що у нашому розпорядженні є вибірка $\{x_j, j = \overline{1, n}\}$ обсягу n , отримана в результаті дослідження X .

Тоді *емпіричний початковий момент* k -го порядку визначається за такою формулою:

$$\overline{M}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.13)$$

У разі, якщо порядок моменту дорівнює, наприклад, одиниці, маємо середнє вибіркове (середньостатистичне вибіркове, емпіричне математичне очікування)

$$\overline{M}_1 = \overline{m}_X = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j. \quad (1.14)$$

Якщо за результатами спостереження побудовано варіаційний ряд, то середнє вибіркове обчислюється за такою формулою:

$$\tilde{M}_1 = \tilde{m}_X = \sum_{j=1}^k \tilde{z}_j \tilde{\omega}_j. \quad (1.15)$$

де \tilde{z}_j – варіанта, якщо ряд частотний для дискретних величин і центр частинного інтервалу, коли ряд інтервальний варіаційний; $\tilde{\omega}_j$ – віднос-

1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибіркові моменти

на частота для частотного варіаційного ряду та відносна інтервальна частота для інтервального ряду.

Середнє вибіркоче, обчислене за формулою (1.15), називають *зваженим*, на відміну від середнього вибіркового, визначеного відповідно до (1.14).

Ясно, що середнєвибіркоче та зважене середнє вибіркоче мають розмірність досліджуваної випадкової величини X .

► **Приклад.** Обчислити значення вибіркового середнього для вибірки (1.1) обсягу $n = 20$.

Згідно з (1.14) звичайне середнє вибіркоче

$$\bar{M}_1 = \frac{1}{20} (9,2 + 9,1 + 9,4 + 9,0 + 9,2 + \dots + 9,2 + 9,3) = 9,27.$$

Відповідно до (1.15) та даними табл. 1.2 зважене середнє вибіркоче

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= 9,0 \cdot 0,05 + 9,1 \cdot 0,1 + 9,2 \cdot 0,25 + 9,3 \cdot 0,35 + \\ &+ 9,4 \cdot 0,20 + 9,5 \cdot 0,05 = 9,27 \end{aligned}$$

Отже, для частотного варіаційного ряду значення середнього вибіркового та зваженого середнього вибіркового збігаються.



► **Приклад.** Обчислити значення вибіркового середнього максимальної абсолютної похибки вольтметрів за даними табл. 1.3.

Згідно з (1.14) звичайне середнє вибіркоче

$$\bar{M}_1 = \frac{1}{100} (0,111 + 0,085 + 0,091 + 0,101 + \dots + 0,131 + 0,143) = 0,1091.$$

Відповідно до (1.15) та даними табл. 1.3 зважене середнє вибіркоче

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= 0,085 \cdot 0,07 + 0,095 \cdot 0,14 + 0,105 \cdot 0,39 + 0,115 \cdot 0,24 + \\ &+ 0,125 \cdot 0,12 + 0,135 \cdot 0,02 + 0,145 \cdot 0,02 = 0,1084. \end{aligned}$$

Отримане значення середньої абсолютної похибки вольтметрів характеризує її систематичну складову, вказуючи на те, що результати вимірювання, здійснені приладами з даної партії, будуть відрізнятися від дійсного значення в середньому на 0,1098.

Різниця в значеннях середнього вибіркового та зваженого середнього вибіркового зумовлена заміною згрупованих в частинні інтервали значень

випадкової величини X одним значенням, що відповідає середині кожного частинного інтервалу. Така заміна здійснюється без урахування щільності розподілу X всередині частинного інтервалу.



Вважається, що середньостатистичне вибіркове є тим рівнем, відносно якого варіюють значення вибірки. Кажуть, що вибіркове середнє визначає положення випадкової величини. Поряд із зазначеною оцінкою для цього застосовуються **емпіричні медіана** та **центр розмаху**.

Емпірична медіана \bar{X}_M для частотного варіаційного ряду обчислюється за такими формулями:

$$\bar{X}_M = x_{(n+1)/2} \quad (1.16)$$

- для непарних значень обсягу вибірки n ;

$$\bar{X}_M = \frac{x_{n/2} + x_{(n/2+1)}}{2} \quad (1.17)$$

- для парних n .

Для інтервального варіаційного ряду вибіркова медіана

$$\bar{X}_M = a_M + d \frac{0,5 - \omega_M^{\max}}{\omega_M}, \quad (1.18)$$

де a_M – початок медіанного інтервалу, тобто частинного інтервалу, якому відповідає перше значення накопиченої відносної частоти, що перевищує 0,5; ω_M^{\max} – значення відносної накопиченої частоти на початок медіанного інтервалу; ω_M – накопичена відносна частота, що відповідає медіанному інтервалу.

► **Приклад.** *Визначити емпіричне медіанне значення абсолютної похибки вольтметрів за табл. 1.3.*

Вибіркове середнє для заданої згідно з табл. 1.3 вибірки було визначено раніше і дорівнює 0,1091. Ширина частинного інтервалу $d = (0,15 - 0,08) / 7 = 0,01$. Відповідно до даних табл. 1.3 $a_M = 0,1$, $\omega_M^{\max} = 0,21$, а $\omega_M = 0,39$.

Тоді згідно з (1.18) шукана емпірична медіана

$$\bar{X}_M = 0,1 + 0,01(0,5 - 0,21) / 0,39 = 0,1074.$$

1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибірові моменти

Порівнюючи це значення з вибіровим середнім, приходимо до висновку, що значення емпіричної медіани не збігається із значенням вибірового середнього. Отже, оцінка медіани є зсуненою відносно вибірового середнього, але для її визначення потрібні менші витрати. Крім того, у деяких випадках, вона виявляється більш ефективною оцінкою, чим вибірове середнє.



Важливою з практичного погляду властивістю емпіричної медіани є така:

✦ зважена сума абсолютних відхилень варіант від значення вибірової медіани менше, ніж від будь-якої іншої величини C , тобто

$$\sum_{j=1}^k (\tilde{z}_j - \bar{X}_M) \tilde{\omega}_j < \sum_{j=1}^k (\tilde{z}_j - C) \tilde{\omega}_j, \quad C \neq \bar{X}_M. \quad (1.19)$$

► **Приклад.** Під час випробувань на міцність крила літака уздовж його осі передбачається розмістити 6 груп датчиків. Перша група, яка складається з 30 датчиків, розміщується на відстані 2 м від фюзеляжу; друга, з 22 датчиків, - на відстані 3 м; третя, з 18 датчиків, - 5 м; четверта, з 14 датчиків, - 8 м; п'ята, з 12 датчиків, - 12 м і шоста, з 8 датчиків, - на відстані 15 м. Визначити, на якій відстані від фюзеляжу літака необхідно встановити комутатор вимірювальної системи, щоб загальна довжина з'єднувальних проводів була мінімальною.

Для розв'язання цього завдання скористаємося властивостями медіани. У цьому разі кількість датчиків визначає обсяг вибірки: $n = 104$. Тоді згідно з (1.17) значення вибірової медіани $X_M = (x_{52} + x_{53}) / 2 = 4,0$ м. Це значення і береться за відстань до вхідного пристрою, за якої загальна довжина з'єднувальних проводів буде мінімальною.



Ще на одне потрібно звернути увагу. З визначення емпіричної медіани випливає, що на її значення зовсім не впливають варіації крайніх членів упорядкованого ряду. Тому у разі, якщо значення крайніх членів упорядкованої вибірки дуже великі або малі, то перевагу потрібно віддати емпіричній медіані, а не вибіровому середньому.

Оцінка положення випадкової величини з використанням вибірового центру розмаху визначається таким співвідношенням

$$\bar{X}_p = \frac{x_1 + x_n}{2}, \quad (1.20)$$

де x_1 й x_n – відповідно мінімальне й максимальне значення упорядкованого статистичного ряду. Для ряду (1.10) $\bar{X}_p = (32,485 + 15,804) / 2 = 24,1445$.

На відміну від емпіричного середнього та вибіркової медіани оцінка центра розмаху має більшу чутливість до промахів, тобто результатів спостереження, які істотно відрізняються від інших.

Кожна із зазначених оцінок положення випадкової величини ϵ , у свою чергу, величиною випадковою, що має свій закон розподілу, математичне очікування й дисперсію.

Дисперсія середнього вибіркового не залежить від виду закону розподілу випадкової величини X і визначається за такою формулою:

$$D[\bar{M}_1] = D[X] / n = \sigma_X^2 / n \quad (1.21)$$

Дійсно, з урахуванням (1.14)

$$\begin{aligned} D[\bar{M}_1] &= D\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{j=1}^n x_j\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n D[x_j] = \\ &= \frac{nD[X]}{n^2} = \frac{D[X]}{n}. \end{aligned}$$

Під час доведення (1.21) враховано, що згідно з властивостями дисперсії $D[1/n] = 1/n^2$, а у разі, якщо елементи вибірки $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ є некорельованими величинами дисперсія суми

дорівнює сумі дисперсій складових: $D\left[\sum_{j=1}^n x_j\right] = \sum_{j=1}^n D[x_j] = nD[X]$.

Можна показати, що дисперсія емпіричної медіани (див. (1.16)-(1.18))

$$D[\bar{X}_m] = \frac{1}{4np^2(z_c)}, \quad (1.22)$$

де $p(z_c)$ – щільність розподілу в точці z_c , що відповідає центру розподілу.

1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибіркові моменти

♦ Отже, **дисперсія емпіричної медіани залежить не тільки від обсягу вибірки, але й від виду закону розподілу.**

Так, для рівномірного закону розподілу випадкової величини X і елементів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ вибірки

$$D[\bar{X}_m] = \frac{3D[X]}{n} = \frac{\sigma_X^2}{n}. \quad (1.23)$$

Без доведення подамо дисперсії точкових оцінок медіани для найуживаніших законів розподілу:

$$D[\bar{X}_m] = \frac{\pi D[X]}{2n} = \frac{\pi \sigma_X^2}{2n} \quad (1.24)$$

- для нормального розподілу;

$$D[\bar{X}_m] = \frac{\alpha D[X]}{2n} = \frac{\alpha \sigma_X^2}{2n} \quad (1.25)$$

- для симетричного експонентного закону $p(z) = \alpha e^{-|z|}$.

Дисперсія оцінки центра розмаху (1.20) також залежить від обсягу вибірки, так і від виду закону розподілу:

$$D[\bar{X}_p] = \frac{\pi^2 D[X]}{24 \ln n} = \frac{\pi^2 \sigma_X^2}{24 \ln n} \quad (1.26)$$

- для нормального розподілу;

$$D[\bar{X}_p] = \frac{3(4 - \pi) \sigma_X^2}{2n} = \frac{3(4 - \pi) D[X]}{2n} \quad (1.27)$$

- для трикутного розподілу;

$$D[\bar{X}_p] = \frac{5\pi^4 \sigma_X^2}{n^4} = \frac{5\pi^4 D[X]}{n^4}. \quad (1.28)$$

- для арксинусного розподілу.

Використовуючи (1.22 - 1.28), можна визначити ефективність оцінок медіани й центра розмаху в порівнянні із середнім вибірковим як відношення їхніх дисперсій за однакових обсягів вибірки.

Згідно з (1.13) емпіричний початковий момент другого порядку або **середньоквадратичне вибіркве (середній вибірквий квадрат)**

$$\overline{M}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2. \quad (1.29)$$

Емпіричний центральний момент k -го порядку обчислюється за такою формулою:

$$\overline{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \overline{M}_1)^k, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (1.30)$$

Співвідношення (1.30) дає змогу обчислити емпіричні центральні моменти другого порядку і більше, оскільки відомо, що вибірквий центральний момент першого порядку дорівнює нулю: $\overline{\mu}_1 = 0$.

Поширеним і практично значущим емпіричним центральним моментом другого порядку є **вибіркве дисперсія**

$$\overline{\mu}_2 = \overline{D}_X = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \overline{M}_1)^2, \quad (1.31)$$

якій відповідає вибіркве **середнє квадратичне** або **стандартне відхилення** $\overline{\sigma}_X = \sqrt{\overline{D}_X}$.

На практиці замість вибіркової дисперсії часто використовують статистику, яку називають **виправленою вибірковою дисперсією**. Така статистика є поширеною під час обробки результатів експерименту невеликого обсягу. Обчислюють її за такою формулою:

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{n}{n-1} \overline{D}_X = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \overline{M}_1)^2. \quad (1.32)$$

Відношення $n/(n-1)$ називають **поправкою Бесселя**.

Співвідношення (1.32) можна записати у такому вигляді, яке є справедливим як для частотного, так і інтервального варіаційних рядів:

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m (\tilde{z}_j - \overline{M}_1)^2 \tilde{n}_j, \quad (1.33)$$

1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибірові моменти

де \tilde{z}_j – значення j -ї варіанти дискретної величини або значення, що відповідає середині j -го частинного інтервалу для неперервної випадкової величини, \tilde{n}_j – відповідні їм частоти, m – кількість варіант або відповідно частинних інтервалів.

Підчас визначення вибіркової дисперсії для інтервального варіаційного ряду крім поправки на зсув через обмежений обсяг вибірки n потрібно враховувати поправки Шеппарда.

Як відомо, у разі обробки вибірок великого обсягу, а часто також і в процесі самих вимірювань, експериментатор змушений робити заокруглення або групування результатів експерименту. Групування полягає в тому, що вибравши деякий крок d і вибравши сітку на шкалі значень вимірювань, усі результати спостережень, щовідхиляються від якогось з вузлів сітки на відстань, що не перевищує $d/2$, вважаються рівними постійній величині, а саме – вузлу сітки. Іншими словами, всі спостереження, що потрапляють до заданого інтервалу $\Delta_i = \left(x_i - \frac{d}{2}, x_i + \frac{d}{2} \right)$, ми приймаємо рівним середині цього інтервалу x_i , і тому в результаті отримуємо лише заокруглені значення x_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm r$. У разі такого заокруглення виникає випадкова помилка, значення якої не перевищує $d/2$. Цю помилку можна вважати рівномірно розподіленою на інтервал $[-d/2, d/2]$, тобто замість випадкової величини X під час групування результатів ми оперуємо з новою випадковою величиною $X_0 = X + \eta$, де η – похибка заокруглення, щоне залежить від X . У зв'язку з тим, що похибка η розподілена рівномірно, середньостатистичне значення

$$M[\eta^k] = \frac{1}{n} \int_{-d/2}^{d/2} \eta^k d\eta = 0 \quad (1.34)$$

- для непарних k ;

$$M[\eta^k] = \frac{1}{n} \int_{-d/2}^{d/2} \eta^k d\eta = \frac{d^k}{2^k (k+1)} \quad (1.35)$$

- для парних k ,

де $k = 1, 2, 3, \dots$.

Оскільки величини X та η є статистично незалежними, то середньостатистичне суми для будь-якого k буде визначатися сумою середньостатистичних значень складових.

Якщо тепер позначити через \tilde{M}_k і $\tilde{\mu}_k$ початкові та центральні емпіричні моменти відповідно, отримані за заокругленими даними скористатися лінійними співвідношеннями (1.34) і (1.35), то дістанемо виправлені моменти

$$\begin{aligned}\tilde{M}_1 &= \bar{M}_1; \tilde{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 = 0; \tilde{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 - \frac{d^2}{12}; \tilde{\mu}_3 = \bar{\mu}_3, \\ \tilde{\mu}_4 &= \bar{\mu}_4 - \frac{d^2}{12} \bar{\mu}_2 + \frac{7d^4}{240}.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Як і теоретичні, так і емпіричні початкові та центральні моменти пов'язані між собою. Можна показати, що, зокрема,

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_2 &= \bar{M}_2 - \bar{M}_1^2; \\ \bar{\mu}_3 &= \bar{M}_3 - 3\bar{M}_2\bar{M}_1 + 2\bar{M}_1^3; \\ \bar{\mu}_4 &= \bar{M}_4 - 4\bar{M}_3\bar{M}_1 + 6\bar{M}_2\bar{M}_1^2 - 3\bar{M}_1^4.\end{aligned}\quad (1.37)$$

Як приклад, доведемо перше співвідношення:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_2 &= \bar{D}_X = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{M}_1)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\bar{M}_1 x_j + \bar{M}_1^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2\bar{M}_1 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j + \bar{M}_1^2 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 - \bar{M}_1^2 = \\ &= \bar{M}_2 - \bar{M}_1^2.\end{aligned}$$

♦ Таким чином, **емпіричні моменти пов'язані між собою співвідношеннями, аналогічними до співвідношень між теоретичними моментами.**

Іншими прикладами точкових оцінок є емпіричний коефіцієнт асиметрії та емпіричний коефіцієнт ексцесу.

Емпіричним коефіцієнтом асиметрії називається величина, що визначається виразом

1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибіркові моменти

$$k_a = \bar{\mu}_3 / \sqrt{\bar{\mu}_2^3} = \bar{\mu}_3 / \bar{\sigma}_X^3. \quad (1.38)$$

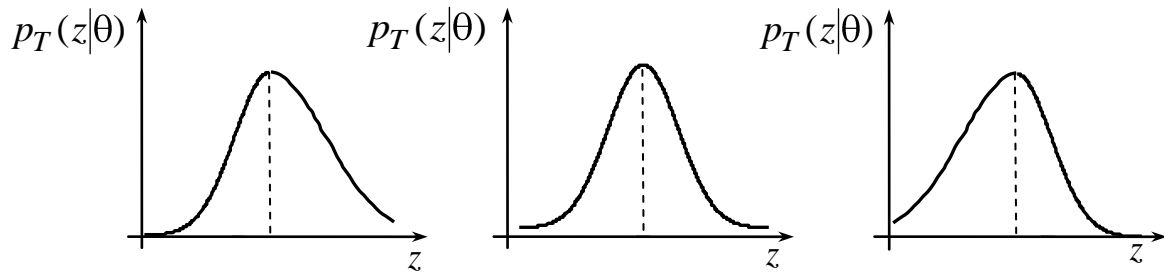


Рисунок 1.4 - До визначення коефіцієнта асиметрії.

Цей коефіцієнт характеризує асиметрію емпіричної (вибіркової) щільності розподілу відносно емпіричного середнього (рис. 1.4). У разі, якщо $k_a > 0$, то маємо "праву" асиметрію, якщо $k_a < 0$ то - "ліву".

Емпіричним коефіцієнтом ексцесу називається величина

$$k_E = \bar{\mu}_4 / \bar{\mu}_2^2 - 3 = \bar{\mu}_4 / \bar{\sigma}_X^4 - 3. \quad (1.39)$$

Вибірковий коефіцієнт ексцесу характеризує крутизну закону розподілу. Значення $k_E > 0$ показує збільшення крутизни, а $k_E < 0$ її зменшення в порівнянні з кривою, що відповідає коефіцієнту ексцесу $k_E = 0$ (див.рис. 1.5).

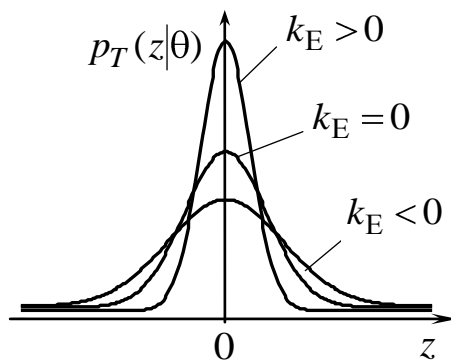


Рисунок 1.5 – Закони розподілу для різних коефіцієнтів ексцесу.

Існує точка зору, що коефіцієнт ексцесу характеризує поведінку функції щільності розподілу в околі вершини у порівнянні з кривою гауссового розподілу. У загальному випадку це твердження неправильне, але є багато розподілів, коли це так.

► **Приклад.** Визначити середнє вибіркове, вибіркову дисперсію, стандартне відхилення, вибірковий коефіцієнт асиметрії та вибірковий ексцес для вибірки обсягу 50:

15,9556,636,637,3435,19	34,0038,3130,7433,9931,81								
34,5126,748,225,2218,5227,4028,6421,9720,27	23,06								
22,65	36,5	16,5	32,05	33,47	41,02	32,63	34,71	16,04	44,10
22,27	54,8	37,9	43,21	21,73	24,15	29,81	12,95	49,87	23,76
14,47	35,3	20,2	20,55	25,14	26,81	31,50	42,27	25,72	32,39

Згідно з формулою (1.14) середнє вибіркве $\bar{M}_1 = 31,32$. Відповідно до першого співвідношення (1.18) для заданої вибірки дістанемо таке значення вибіркової дисперсії: $\bar{\mu}_2 = \bar{D}_X = 109,338$. Тоді відповідне вибіркве стандартне відхилення $\bar{\sigma}_X = \sqrt{\bar{D}_X} = \sqrt{109,338} = 10,46$.

■

Як відзначалося раніше теоретичний коефіцієнт кореляції двох гільбертових випадкових величин ξ і η визначається за формулою

$$\rho_{XY} = \frac{M[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sqrt{D_X D_Y}}, \quad (1.40)$$

і характеризує міру тісноти та напрямку лінійного зв'язку між випадковими величинами X і Y . Його точковою оцінкою є емпіричний коефіцієнт кореляції

Зупинимося тепер на питанні, яким чином по отриманій внаслідок спостережень над величинами X і Y вибірки і представленій множиною пар чисел $\{x_j, y_j, j = \overline{1, n}\}$, де n - обсяг вибірки, побудувати емпіричний коефіцієнт кореляції.

Емпіричним коефіцієнтом кореляції називають залежну від результатів спостережень величину

$$\rho_B = S_{XY} / (S_X S_Y), \quad (1.41)$$

де

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{m}_X)(y_j - \bar{m}_Y) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j - n \bar{m}_X \bar{m}_Y \right),$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{m}_X)^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 - n \bar{m}_X^2 \right),$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{m}_Y)^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 - n \bar{m}_Y^2 \right).$$

Зауважимо, що, як і теоретичний коефіцієнт кореляції ρ , так і емпіричний коефіцієнт кореляції ρ_B задовольняє умову $-1 \leq \rho_B \leq 1$. Якщо $\rho_B > 0$, то більшим значенням Y відповідають загалом більші значення

1.3.1 Загальні вимоги до точкових оцінок та вибіркові моменти

X , а у разі $\rho_B < 0$ - навпаки. Тому в цих випадках говорять про додатну або від'ємну кореляцію.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Точкове оцінювання полягає у виборі функції від результатів спостережень таким чином, щоб її значення можна було прийняти за найкраще в даних умовах і в певному ймовірнісному розумінні наближення до певного параметра для оцінюваної випадкової об'єкта.

2. Визначення найкращої оцінки невідомого параметра здійснюють за критеріями, що ґрунтуються на числових ймовірнісних характеристики точкової статистичної оцінки (статистики).

3. Емпіричні моменти є випадковими об'єктами з певними законами розподілу ймовірності, оскільки обчислюються за отриманими результатами спостережень випадкової (досліджуваної) величини.

4. Середнє зважене на відміну від середнього вибіркового визначається за варіаційним рядом.

5. Вибіркова медіана є більш ефективного з погляду витрат на її визначення, ніж вибіркоче



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: точкова статистична оцінка, початкові та центральні емпіричні (вибіркові) моменти, емпіричний момент k -го порядку, середнє вибіркоче (емпіричне математичне очікування), зважене вибіркоче, емпірична медіана та центр розмаху, середній вибіркочий квадрат, вибіркоча дисперсія, вибіркоче середнє квадратичне або стандартне відхилення, виправлена вибіркоча дисперсія, поправка Шеппарда, емпіричні коефіцієнти асиметрії, кореляції та ексцесу.

2. Емпіричні моменти є статистичними оцінками моментів теоретичних.

3. Для частотного варіаційного ряду значення середнього вибіркового та зваженого середнього збігаються.

4. Оцінкою положення випадкової величини разом із середнім вибіркочим є емпірична медіана та центр розмаху.

5. На відміну від емпіричних середнього та медіани вибіркочий центр розмаху має більшу чутливість до розкиду резуль-

середнє.

6. Дисперсія емпіричних медіани та центру розмаху залежить як від обсягу вибірки, так і законів розподілу оцінок. Водночас дисперсія вибіркового середнього визначається тільки обсягом вибірки.

7. Суть поправки Шеппарда. Дисперсія середнього вибіркового

таттів спостереження.

6. Під час визначення вибіркової дисперсії за інтервальним рядом крім поправки на зсув через обмежений обсяг вибірки потрібно враховувати поправку Шеппарда.

7. Емпіричні моменти пов'язані між собою співвідношеннями, аналогічними до співвідношень між теоретичними моментами.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: точкова статистична оцінка, початкові та центральні емпіричні (вибіркові) моменти, емпіричний момент k -го порядку, середнє вибіркоче (емпіричне математичне очікування), зважене вибіркоче, емпірична медіана та центр розмаху, середній вибіркочвий квадрат, вибіркочва дисперсія, вибіркоче середнє квадратичне або стандартне відхилення, виправлена вибіркочва дисперсія, поправка Шеппарда, емпіричні коефіцієнти асиметрії, кореляції та ексцесу.

2. За результатами спостережень (дослідів) визначати точкові оцінки теоретичних моментів першого та другого порядків, а також оцінки асиметрії та крутизни законів розподілу ймовірності, ступеня кореляції між випадковими об'єктами.

3. Пояснити суть поправки Шеппарда.

1.3.2 Властивості точкових оцінок

Для вибору найкращої в певному розумінні точкової оцінки потрібна знати її основні властивості. Зупинимось на деяких із них.

Незсунені оцінки.

Вибіркова точкова оцінка θ_T параметра θ називається незміщеною (більш точно -незміщеною в середньому), якщо математичне очікування оцінки дорівнює значенню параметра:

1.3.2 Властивості точкових оцінок

$$M[\theta_T] = \theta = \int_{-\infty}^{\infty} zp_T(z|\theta)dz. \quad (1.42)$$

У разі, якщо співвідношення (1.42) не справджується, то оцінку θ_T називають *зсуненою*, а різницю $M[\theta_T] - \theta$ - *зсувом* оцінки.

Іноді говорять, що незміщена оцінка дає змогу визначити параметр θ без *систематичної похибки*.

Вибіркова точкова оцінка θ_T параметра θ називається асимптотично незміщеною, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[\theta_T] = \theta. \quad (1.43)$$

► **Приклад.** Показати, що незміщеною оцінкою для математичного очікування $M_1[X] = m_X < \infty$ є середнє арифметичне від результатів спостережень над випадковою величиною X :

$$\bar{M}_1 = \sum_{j=1}^n a_j x_j, \quad \text{де} \quad \sum_{j=1}^n a_j = 1. \quad (1.44)$$

Дійсно, згідно з (1.44) та відповідно до того, що середньостатистичне суми дорівнює сумі середньостатистичних значень її складових, дістанемо: $M[\bar{M}_1] = \sum_{j=1}^n a_j M[x_j] = m_X$. Оскільки у цьому разі параметром θ є m_X , то умова (1.42) справджується.

Математичне очікування $M_1[X] = m_X < \infty$ є теоретичним початковим моментом першого порядку, а \bar{M}_1 - емпіричним моментом того самого порядку.



Результати цього прикладу є наслідком більш загального висновку:

✦ **емпіричний момент k - го порядку є незміщеною точковою оцінкою теоретичного початкового моменту того самого порядку.**

► **Приклад.** Показати, що емпіричний початковий момент другого порядку \bar{M}_2 є зсуненою оцінкою дисперсії випадкової величини X .

Згідно з (1.37) вибірковий центральний момент $\bar{\mu}_2 = \bar{M}_2 - \bar{M}_1^2$.

З урахуванням (1.29) визначимо математичне очікування емпіричного початкового моменту другого порядку:

$$M[\bar{M}_2] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M[x_j^2] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [D_{x_j} + (m_{x_j})^2] = D_X + m_X^2. \quad (1.45)$$

Середньостатистичне від квадрата емпіричного початкового моменту першого порядку (див. (1.14))

$$\begin{aligned} M[\bar{M}_1^2] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right]^2 = M\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - M[x_j]) + M[X]\right]^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} M\left\{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (x_j - M[x_j])(x_k - M[x_k]) + \right. \\ &\left. + 2 \frac{M[X]}{n} M \sum_{j=1}^n (x_j - M[x_j]) + (M[X])^2\right\} = \frac{1}{n} D_X + (M[X])^2. \end{aligned} \quad (1.46)$$

З урахуванням (1.45) та (1.46) дістанемо:

$$M[\bar{\mu}_2] = D_X + m_X^2 - \frac{1}{n} D_X - m_X^2 = \frac{n-1}{n} D_X. \quad (1.47)$$

Відповідно до (1.41) потрібно щоб $M[\bar{\mu}_2] = \mu_2 = D_X$. Отже, $\bar{\mu}_2$ - є зсуненою оцінкою дисперсії величини X .

Можна показати, що

♦ **незміщеною точковою оцінкою дисперсії D_X є виправлена вибіркова дисперсія (див. (1.32)).**

Спрямувавши в (1.47) $n \rightarrow \infty$, дістанемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[\bar{\mu}_2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} D_X = D_X.$$

Тоді, згідно з (1.43) маємо, що

♦ **центральный емпіричний момент другого порядку (вибіркова дисперсія) є асимптотично незміщеною оцінкою дисперсії D_X .**

1.3.2 Властивості точкових оцінок

Узагальненням наведених висновків є такий:

- ✦ *центральної емпіричної момент k - го порядку, на відміну від початкового, є зсуненою, але асимптотично незміщеною точковою оцінкою теоретичного центрального моменту того самого порядку.*



Зрозуміло, що краще застосовувати незсунені чи хоча б асимптотично незсунені оцінки (в останньому випадку для вибірок якомога більшого обсягу).

Слушні або ґрунтовні оцінки. Важливою з практичного погляду є поведінка точкової статистики у разі нескінченного зростання обсягу вибірки. Таку поведінку у певному розумінні відображає така властивість точкової оцінки, як *слушність* або *ґрунтовність*.

Точкова статистична оцінка θ_T називається слушною (ґрунтовною) у разі, якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ ймовірність того, що абсолютне значення відхилення θ_T від θ менше ніж ε , прямує до одиниці у разі зростання обсягу вибірки до нескінченності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\theta_T - \theta| < \varepsilon\} = 1. \quad (1.48)$$

Іншими словами вибіркова оцінка θ_T параметра θ є *слушною*, якщо для як завгодно малої величини $\varepsilon > 0$ вона збігається за ймовірністю до θ .

У теорії статистики доводиться: для того, щоб точкова оцінка θ_T параметра θ була ґрунтовною, достатньо, щоб вона була незміщеною або асимптотично незміщеною і за нескінченного зростання обсягу вибірки її дисперсія прямувала до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D[\theta_T] = 0. \quad (1.49)$$

Дійсно, як впливає з нерівності Чебишева:

$$P\{|\theta_T - M[\theta_T]| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} D[\theta_T]. \quad (1.50)$$

Останній вираз при $n \rightarrow \infty$ з урахуванням сформульованих умов (див. (1.42), (1.43) та (1.49)) доводить справедливість наведеного вище висновку.

► **Приклад.** З'ясувати, за яких умов вибіркоче середнє \bar{M}_1 є слушною оцінкою теоретичного початкового моменту першого порядку випадкової величини X .

Раніше ми дійшли висновку, що вибіркоче середнє є незміщеною точковою оцінкою випадкової величини X . Тоді достатньо впевнитися в тому, що для розглядуваної оцінки справджується (1.49).

Відповідно до (1.21) дисперсія

$$D[\bar{M}_1] = D_X / n. \quad (1.51)$$

З (1.51) випливає, що при $n \rightarrow \infty$ дисперсія $D[\bar{M}_1] \rightarrow 0$. Умова (1.49) справджується.

✦ **Отже, середнє вибіркоче \bar{M}_1 є слушною оцінкою тоді і лише тоді, коли вибіркочі значення при $n \rightarrow \infty$ будуть некорельованими.**

Ясно, що для випадку незалежних спостережень ця оцінка завжди ґрунтовна.

Справедливим є і більш загальний висновок

✦ **емпіричний початковий і центральний моменти k -го порядку для незалежних чи некорельованих спостережень є ґрунтовною оцінкою відповідно початкового та центрального моменту того самого порядку випадкової величини X .**



► **Приклад** Нехай X - випадкова величина, що має розподіл Бернуллі з невідомим параметром $\theta \in [0, 1]$, а $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ - вибірка обсягу n , кожен елемент якої має той самий розподіл, що й X . Визначити, чи є

статистика $\theta_T = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ незміщеною і слушною точковою оцінкою пара-

метра θ у разі, якщо елементи вибірки є незалежними.

Для того, щоб точкова оцінка була незміщеною, потрібно, щоб вона задовольняла або умову (1.42), або (1.43).

Математичне очікування оцінки

1.3.2 Властивості точкових оцінок

$$M[\theta_T] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{j=1}^n x_j\right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M[x_j] = \frac{M[X]}{n}.$$

Оскільки для розподілу Бернуллі $M[X] = n\theta$, з урахуванням останнього співвідношення $M[\theta_T] = n\theta/n = \theta$. Таким чином, зазначена оцінка є незміщеною.

Можна показати, що дисперсія розглядуваної оцінки

$$D[\theta_T] = \frac{n\theta(1-\theta)}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} D[\theta_T] = 0$. Отже, зазначена незміщена оцінка задовольняє умову (1.49) і є слушною.

□

► **Приклад** Нехай X - випадкова величина має гауссівський розподіл з параметром p , що є математичним очікуванням величини X , а $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ - вибірка обсягу n , кожний елемент якої має той самий розподіл, що і X . Визначити, чи є статистика $\theta_T = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ слушною точковою оцінкою параметра p гауссівського розподілу у разі, якщо елементи вибірки є незалежними.

Раніше зазначалось, що така точкова оцінка є незміщеною.

Дисперсія

$$\begin{aligned} D[\theta_T] &= D\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{j=1}^n x_j\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n D[x_j] = \\ &= \frac{nD[X]}{n^2} = \frac{D[X]}{n}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

У разі, якщо $n \rightarrow \infty$ границя $\lim_{n \rightarrow \infty} D[\theta_T] = 0$.

Отже, статистика $\theta_T = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ є слушною оцінкою параметра p гауссівського розподілу.

□

Ефективні оцінки. Якщо є декілька незсунених точкових статистичних оцінок, то потрібно брати таку з них, яка має найменшу дисперсію.

Очевидно, що ґрунтовні оцінки є гарними в тому розумінні, що дають змогу забезпечувати будь-яку точність оцінювання невідомого параметра, якщо тільки є можливість проведення як завгодно великої кількості дослідів. Але властивість ґрунтовності точкових оцінок не дає змоги порівнювати їх (для вибору найкращої) для заданого скінченного обсягу вибірки. Однак виявляється, що для множини функцій розподілу $\{F(z, \theta), x \in (-\infty, \infty), \theta \in \Theta\}$, які достатньо регулярно залежать від параметра θ , можна вказати нижню межу дисперсій усіх можливих незсунених оцінок цього параметра при заданому обсязі вибірки. Для деяких розподілів існує незміщена оцінка параметра, дисперсія якої дорівнює згаданій вище мінімально можливій дисперсії. У будь-якому випадку, навіть якщо незміщена оцінка з мінімальною дисперсією не існує, судити про те, наскільки гарною є та чи інша незміщена оцінка при заданому обсязі вибірки, можна, порівнюючи її дисперсію з нижньою межею дисперсій незсунених оцінок.

Незміщена вибіркова оцінка θ_T^E , яка має найменшу дисперсію серед усіх можливих незсунених точкових оцінок θ_T параметра θ , розрахованих за n членами вибірки, називається ефективною оцінкою:

$$D[\theta_T^E] = \min_{\theta_T} \{ D[\theta_T] \}. \quad (1.53)$$

✦ Отже, **ефективна оцінка, з усіх можливих незсунених оцінок параметра θ (для одного того самого обсягу вибірки), має найменшу дисперсію.**

Потрібно пам'ятати, що ефективна оцінка існує не завжди, тобто не за будь-якого розподілу вибірки.

Точкова статистична незміщена оцінка θ_T параметра θ називається асимптотично ефективною у разі, якщо дисперсії оцінок θ_T^E і θ_T задовольняють таку умову:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D[\theta_T^E]}{D[\theta_T]} = 1. \quad (1.54)$$

1.3.2 Властивості точкових оцінок

Для незалежних спостережень дисперсія ефективної оцінки визначається виразом

$$D[\theta_T^E] = \frac{1}{nI_1(\theta)}, \quad (1.55)$$

де $I_1(\theta) = M \left[\frac{\partial \ln p(z, \theta)}{\partial \theta} \right]^2$ - кількість інформації на одне спостереження.

Можна показати, що

- для неперервних випадкових величин

$$I_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln p(z, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 p(z, \theta) dz; \quad (1.56)$$

- для дискретних величин

$$I_1(\theta) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \ln F(z, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 P(z, \theta). \quad (1.57)$$

У неперервному випадку $p(z, \theta)$ - щільність розподілу ймовірності, а в дискретному $F(z_j, \theta)$ - розподіл ймовірності.

Функцію $I(\theta) = nI_1(\theta)$ Р.А.Фішер (1922-1925 р.р.) назвав інформацією, що знаходиться у вибірці обсягу n .

Зазначимо, що для n незалежних рядів спостережень повна інформація в них визначається сумою

$$I_n(\theta) = I^{(1)}(\theta) + I^{(2)}(\theta) + \dots + I^{(n)}(\theta). \quad (1.58)$$

► **Приклад** Нехай X - випадкова величина має гауссівський розподіл з параметром μ , що є математичним очікуванням величини X , а $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ - вибірка обсягу n , кожен елемент якої має той самий розподіл, що й X . Визначити, чи є статистика $\theta_T = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ ефективною

точковою оцінкою параметра μ гауссівського розподілу у разі, якщо елементи вибірки є незалежними.

Згідно з (1.56)

$$\begin{aligned}
 I_1(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{(z-\theta)^2}{2\sigma^2} \right) \right]^2 e^{-\frac{(z-\theta)^2}{2\sigma^2}} dz = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-\theta)^2}{\sigma^4} e^{-\frac{(z-\theta)^2}{2\sigma^2}} dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} s ds e^{-\frac{s^2}{2}} = \\
 &= - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(se^{-\frac{s^2}{2}} \right) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{1}{\sigma^2},
 \end{aligned}$$

де $\sigma^2 = D[X]$ - дисперсія величини з гауссівським розподілом.

З іншого боку відповідно до (1.52) дисперсія використовуваної оцінки

$$D[\theta_T] = \frac{D[X]}{n} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n(1/\sigma^2)} = \frac{1}{nI_1(\theta)}.$$

Порівнюючи це співвідношення з (1.55), робимо висновок, що

♦ *середнє вибіркове \bar{M}_1 (див. 1.14) є ефективною оцінкою параметра θ , якщо розподіл X - нормальний.*

◼

► **Приклад.** Оцінити три конкуруючі оцінки θ_T^a , θ_T^b , θ_T^c , закони розподілу яких показані на рис. 1.6.

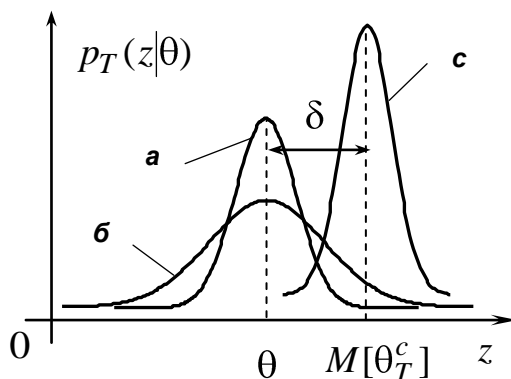


Рисунок 1.6 – Закони розподілу різних точкових оцінок.

Перші дві оцінки мають перевагу перед θ_T^c у тому розумінні, що їхнє математичне очікування дорівнює θ , тобто вони є незсуненими оцінками.

Оцінка θ_T^a краще за оцінку θ_T^b у тому розумінні, що в малому околі параметра θ відхилення оцінки θ_T^a менше, ніж у оцінки θ_T^b .

Отже, оцінка θ_T^a буде частіше на-

1.3.2 Властивості точкових оцінок

бувати значення із цього околу, ніж θ_T^b .

Водночас, у разі збільшення аргументу розподілів до нескінченності більші відхилення від θ будуть спостерігатися частіше знову ж таки для θ_a .

Серед трьох оцінок θ_T^a , θ_T^b , θ_T^c найменшу дисперсію має оцінка θ_T^c , тобто є найкращою оцінкою в цьому розумінні, але θ_T^c є зсуненою оцінкою, тому що $M[\theta_T^c] \neq \theta$.

Крім того, оцінка θ_T^c не є слушною, тому що при $n \rightarrow \infty$ найбільш ймовірне значення відхилення буде $|\theta - M[\theta_T^c]| = d \neq 0$.

Незсуненість та ефективність не можна розглядати незалежно, оскільки зсунена оцінка з малим значенням дисперсії може виявитися доцільнішою, ніж незміщена оцінка з великою дисперсією.



Достатні оцінки. У (1.58) для регулярних розподілів було введено функцію $I_n(\theta)$ -кількість інформації, що міститься у вибірці $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ про параметр θ . Виникає питання, чи повною мірою використовуютьцю інформацію відповідні оцінки цього параметра? Відповідь на це запитання можна дати, використовуючи умовний розподіл вибірки відносно відповідної оцінки.

Нехай $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ -вбірка, що використовується для оцінювання невідомого параметра θ , а $\{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ - реалізації цієї вибірки.

Точкова статистика $\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається достатньою для параметра θ , якщо умовний розподіл вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ за умови, що $\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \theta_T(z_1, z_2, \dots, z_n)$, не залежить від θ .

Відповідно до цього означення статистика $\theta_T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ не дає нічого нового для оцінювання параметра θ в порівнянні з тим, що отримується для статистики $\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Інакше кажучи, розподіл достатньої статистики $\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (якщо вона існує) містить ту саму інформацію про параметр θ , що й розподіл самої вибірки. Фактично, це означає, якщо $\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є достатньою оцінкою

параметра θ , то не існує іншої оцінки цього параметра, що дала б додаткову інформацію про цей параметр.

Зрозуміло, що будь-яка достатня для параметра θ статистика $\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не має бути обов'язково незміщеною, слухною та ефективною оцінкою цього параметра.

Встановлено, що незсунену, слухну та ефективну оцінку $\tilde{\theta}_T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна отримати у вигляді відповідної функції від достатньої статистики: $\tilde{\theta}_T = g[\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)]$. У більшості випадків функцію $g[\cdot]$ можна вибрати так, щоб незміщена, слухна та ефективна оцінка $\tilde{\theta}_T = g[\theta_T(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ також була достатньою статистикою.

Загалом, будь-яка взаємно-однозначна функція від достатньої статистики також є достатньою статистикою. Тобто для одного того самого параметра можуть існувати різні достатні статистики.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. З практичного погляду краще застосовувати незсунені чи хоча б асимптотично незсунені оцінки.

2. Для того, щоб точкова оцінка певного параметра була ґрунтовною, достатньо, щоб вона була незміщеною або асимптотично незміщеною, а її дисперсія прямувала до нуля у разі збільшення обсягу вибірки до нескінченності.

3. У разі обмеженого обсягу вибірки серед незсунених кращою вважається оцінка, що є ефективною.

4. Розподіл достатньої статистичної оцінки надає таку са-

1. Визначення понять: незміщена та асимптотично незміщена, слухна або ґрунтова оцінка, ефективна та асимптотично ефективна, достатня оцінки.

2. Емпіричний початковий момент k -го порядку є незміщеною точковою оцінкою теоретичного початкового моменту того самого порядку.

3. Центральний емпіричний момент k -го порядку є зсуненою, але асимптотично незміщеною точковою оцінкою теоретичного центрального моменту того самого порядку.

5. Емпіричні початковий і центральний моменти k -го по-

1.3.2 Властивості точкових оцінок

му інформацію про певний параметр, що і закон розподілу вибірки.

5. Достатня для певного параметра оцінка не має бути обов'язково незміщеною, слушною та ефективною.

рядку для незалежних чи некорельованих спостережень є ґрунтовою оцінкою відповідно початкового та центрального моменту того самого порядку.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: незміщена та асимптотично незміщена, слухна або ґрунтова, ефективна та асимптотично ефективна, достатня оцінки.

2. Визначати автокореляційну функцію, коефіцієнт автокореляції та спектральну щільність потужності різних періодичного процесів і сигналів.

3. За результатами досліджень визначати чи є оцінки незсуненими та асимптотично незсуненими, слухними або ґрунтовними, ефективними та асимптотично ефективними, достатніми.

1.4 Інтервальне оцінювання параметрів випадкових величин

1.4.1 Надійний інтервал та його побудова

Надійний інтервал. У результаті стохастичного експерименту ми отримуємо лише певну реалізацію точкової оцінки y_T параметра θ як деяке число, яке береться за наближене значення параметра θ . Оскільки таке число лише наближено характеризує оцінюваний параметр, то, подаючи кінцевий результат оцінювання, крім цього числа, обов'язково слід вказувати й показники точності оцінювання. Принаймні потрібно вказати величину зсуву та дисперсію; використовуваної оцінки. Але у багатьох випадках ці показники самі залежать від оцінюваного (невідомого) параметра.

Досконалішим за точністю отримуваних оцінок є метод **інтервального оцінювання** параметрів, запропонований Є. Нейманом у 1935 році.

Суть інтервального оцінювання полягає в побудові числового інтервалу, щодо якого заздалегідь із призначеною ймовірністю можна стверджувати, що усередині цього інтервалу перебуває істинне значення оцінюваного параметра.

Процедура отримання інтервальної оцінки передбачає

- формулювання певного ймовірнісного твердження щодо оцінюваного параметра генеральної сукупності;
- перетворення аргументу у такий спосіб, щоб значення оцінюваного параметра генеральної сукупності належало інтервалу, обмеженому емпіричними величинами, які можна обчислити за вибіркою.

Надійним інтервалом для невідомого параметра θ називається такий випадковий інтервал $[\theta^{(1)}, \theta^{(2)}]$, де $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ - певні статистики, що не залежать від θ , який накриває істинне значення параметра θ із заданою ймовірністю

$$P\{\theta^{(1)} \leq \theta \leq \theta^{(2)}\} = \gamma = 1 - \alpha. \quad (1.59)$$

Таким чином, у разі інтервального оцінювання, оцінюваний параметр θ вважається не випадковим, в той час як $\theta^{(1)}$ та $\theta^{(2)}$ - межі *надійного інтервалу*, є випадковими величинами, а точніше функціями результатів спостережень $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Величина $\gamma = 1 - \alpha$ називається *надійною ймовірністю*, значення якої вибирається близьким до одиниці. В практичних застосуваннях найчастіше зустрічається $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$.

Отже, кінцевим результатом інтервального оцінювання є лише реалізація надійного інтервалу.

Надійні інтервали не завжди можна побудувати. Ми розглянемо один із можливих способів їх побудови, вказуючи одночасно умови, за яких таку побудову можна здійснити. Зазначимо, що дуже часто надійний інтервал називають довірчим інтервалом, а надійну ймовірність – довірчою ймовірністю.

1.4.1 Надійний інтервал та його побудова

Побудова надійного інтервалу. Нехай y_T — точкова статистична оцінка невідомого параметра θ . Окрім того, будемо вважати, що існує така функція (статистика) $g(y_T, y)$ від y_T і θ , залежність якої від θ є *стро́го монотонною та неперервною*. Відомим є і розподіл функції $g(y_T, y)$, зокрема, він не залежить від θ чи інших невідомих параметрів.

Тоді, задавши деяке $\gamma = 1 - \alpha$ з інтервалу $[0, 1]$, можна визначити два числа $k_\gamma^{(1)}$ та $k_\gamma^{(2)}$ таких, що $P\{k_\gamma^{(1)} \leq g(\theta_T, \theta) \leq k_\gamma^{(2)}\} \geq \gamma = 1 - \alpha$ (зрозуміло, що ці числа доцільно вибирати так, щоб інтервал $[k_\gamma^{(1)}, k_\gamma^{(2)}]$ був якомога меншим).

Оскільки $g(y_T, y)$ залежить від θ строго монотонно та неперервно, то нерівність $k_\gamma^{(1)} \leq g(\theta_T, \theta) \leq k_\gamma^{(2)}$ можна розв'язати відносно θ і записати в еквівалентному виді: $\theta^{(1)} \leq \theta \leq \theta^{(2)}$, де статистики $\theta^{(1)}$ та $\theta^{(2)}$ залежать від $k_\gamma^{(1)}$ та $k_\gamma^{(2)}$. Тепер $P\{k_\gamma^{(1)} \leq g(\theta_T, \theta) \leq k_\gamma^{(2)}\} = P\{\theta^{(1)} \leq \theta \leq \theta^{(2)}\} \geq \gamma$ і $[\theta^{(1)}, \theta^{(2)}]$ — надійний θ .

Очевидно, що числа $k_\gamma^{(1)}$ і $k_\gamma^{(2)}$ можна вибрати різними способами. Для того щоб зробити їх вибір однозначним, надалі вимагатимемо певної симетрії інтервалу $[k_\gamma^{(1)}, k_\gamma^{(2)}]$ в тому розумінні, що

$$P\{g(\theta_T, \theta) < k_\gamma^{(1)}\} = P\{g(\theta_T, \theta) > k_\gamma^{(2)}\} = (1 - \gamma) / 2 = \alpha / 2. \quad (1.60)$$

Зауважимо, що вимога симетрії інтервалу є зовсім не обов'язковою і може ставитись або ні, залежно від конкретної задачі.

Вважається, що за таких умов число $k_\gamma^{(1)}$ - квантиль розподілу статистики $g(y_T, y)$ за рівнем $(1 - \gamma) / 2 = \alpha / 2$, а $k_\gamma^{(2)}$ - квантиль розподілу цієї самої статистики $g(y_T, y)$ за рівнем $1 - (1 - \gamma) / 2 = (1 + \gamma) / 2 = 1 - (\alpha / 2)$ і

$$P\{k_\gamma^{(1)} \leq g(\theta_T, \theta) \leq k_\gamma^{(2)}\} = \gamma = 1 - \alpha. \quad (1.61)$$

Зрозуміло, що надійний інтервал $[\theta^{(1)}, \theta^{(2)}]$ залежить також від вибору функції статистики $g(y_T, y)$. Зазвичай, для заданого значення надійної ймовірності $\gamma = 1 - \alpha$, намагаються побудувати надійний

інтервал якомога меншої довжини $\theta^{(2)} - \theta^{(1)}$ (чим коротший надійний інтервал для заданого $\gamma = 1 - \alpha$, тим вищою є точність оцінювання).

У цьому аспекті, очевидно, доцільно використовувати гарні (незсунені, слушні, ефективні чи асимптотично ефективні) оцінки $\hat{\theta}_T$. У класі незсунених та асимптотично нормальних оцінок використання оцінки $\hat{\theta}_T$ з найменшою дисперсією дає змогу побудувати найкоротший надійний інтервал.

Зменшити надійний інтервал можна також, задаючи меншу довірчу (надійну) ймовірність $\gamma = 1 - \alpha$. Але у цьому разі, звичайно, зростає ймовірність того, що отриманий у результаті оцінювання надійний інтервал не буде включати істинного значення оцінюваного параметра.

Найбільш просто надійні інтервали можна визначити для математичного очікування і стандартного відхилення у випадках, коли генеральна сукупність має нормальний розподіл.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Суть інтервального оцінювання полягає в побудові числового інтервалу, щодо якого заздалегідь із призначеною ймовірністю можна стверджувати, що усередині цього інтервалу перебуває істинне значення оцінюваного параметра.

2. Зменшення надійного інтервалу за рахунок зменшення надійної ймовірності може привести до того, що отриманий у результаті оцінювання надійний інтервал не буде включати істинного значення оцінюваного параметра.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: надійний (довірчий) інтервал і надійна (довірча) ймовірність, квантиль розподілу статистики за певним рівнем.

2. Чим коротший надійний інтервал для заданого $\gamma = 1 - \alpha$, тим вищою є точність оцінювання.

3. Для побудови нацкоротшого надійного інтервалу доцільно використовувати незсунені, слушні, ефективні чи асимптотично ефективні з найменшою дисперсією оцінки невідомого параметра.

**Треба вміти:**

1. Визначати поняття: надійний (довірчий) інтервал і надійна (довірча) ймовірність, квантиль розподілу статистики за певним рівнем.
2. Пояснити суть інтервального оцінювання.
3. Сформулювати умови для побудови найкоротшого надійного інтервалу.

1.4.2 Надійний інтервал для математичного очікування

Визначимо інтервальну оцінку для невідомого математичного очікування m_X випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом за відомими оцінками середнього вибіркового \bar{M}_1 (див. (1.14)) і виправленої вибіркової дисперсії $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\sigma}_X^2$ (див. (1.32)) для вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n . Будемо вважати також, що невідомою є дисперсія генеральної сукупності.

Середнє вибіркоче \bar{M}_1 є певним числом. Оскільки обсяг вибірки і її склад є випадковим, то середнє вибіркоче \bar{M}_1 буде змінюватися від однієї вибірки до іншої, взятої з тієї самої генеральної сукупності, що має такий самий обсяг. Отже, вибіркоче середнє можна розглядати як випадкову величину з певним законом розподілу та математичним очікуванням і дисперсією.

Оскільки вибіркоче середнє є зваженою сумою елементів вибірки (див. 1.14), то для нормально розподіленої випадкової величини X з математичним очікуванням m_X і дисперсією $D_X = \sigma_X^2$ середньостатистичне вибіркоче також підпорядковується нормальному закону розподілу, для якого математичне очікування $M[\bar{M}_1] = m_X$, а дисперсія $D[\bar{M}_1] = D_X / n = \sigma_X^2 / n$ (див. (1.51)).

Нормоване відхилення

$$U = (\bar{M}_1 - m_X) / (\sigma_X / \sqrt{n}) \quad (1.62)$$

також задовольняє нормальний розподіл, але з нульовим математичним очікуванням та дисперсією, значення якої дорівнює одиниці.

У разі, якщо дисперсія генеральної сукупності невідома, що відповідає більшості практичних випадків, використовують стандартизовану змінну виду

$$t = (\bar{M}_1 - m_X) / (\tilde{\sigma}_X / \sqrt{n}). \quad (1.63)$$

Закон розподілу такої стандартизованої змінної називають *t* – **розподілом** або **розподілом Стьюдента**. Функція, що описує цей розподіл, є табульованою, а тому її значення, зазвичай, подають у відповідних таблицях (див. табл. Д2)

Розподіл змінної *t* не залежить від математичного очікування m_X випадкової величини *X* і від її дисперсії $D_X = \sigma_X^2$, а визначається лише числом степенів свободи $l = n - 1$, пов'язаних із виправленою вибірковою дисперсією $\tilde{m}_2 = \tilde{y}_X^2$. Функція $p(t)$ розподілу Стьюдента є парною, тобто $p(-t) = p(t)$.

Розглянемо статистику, яка містить оцінюваний параметр, тобто математичне очікування m_X , точкові статистики \bar{M}_1 та $\tilde{m}_2 = \tilde{y}_X$ і не залежить від невідомої дисперсії генеральної вибірки:

$$g(\theta_T, \theta) = t = (\bar{M}_1 - m_X) \sqrt{n} / \tilde{\sigma}_X. \quad (1.64)$$

Зажадаємо, щоб стандартизовані відхилення $t = (\bar{X} - m_X) \sqrt{n} / \tilde{\sigma}_X$ не перевищували деякого фіксованого значення $t_{\text{гр}}$ з імовірністю $\gamma = 1 - \alpha$, тобто справджувалась така умова:

$$P\{(\bar{M}_1 - m_X) \sqrt{n} / \tilde{\sigma}_X \leq t_{\text{гр}}\} = 1 - \alpha$$

або

$$P\{-t_{\text{гр}} \leq [(\bar{M}_1 - m_X) \sqrt{n} / \tilde{\sigma}_X] \leq t_{\text{гр}}\} = 1 - \alpha. \quad (1.65)$$

Порівнявши (1.65) і (1.61), дійдемо висновку, що число мінус $t_{\text{гр}} = k_\gamma^{(1)}$ - квантиль розподілу статистики $t = g(\theta_T, \theta)$ за рівнем $(1 - \gamma) / 2 = \alpha / 2$, а $t_{\text{гр}} = k_\gamma^{(2)}$ - квантиль розподілу цієї самої статистики (12.64) за рівнем $1 - (1 - \gamma) / 2 = (1 + \gamma) / 2 = 1 - (\alpha / 2)$.

1.4.2 Надійний інтервал для математичного очікування

Тоді $-t_{\text{гр}} = k_{\lambda}^{(1)} = t_{\alpha/2}$, а $-t_{\text{гр}} = k_{\lambda}^{(2)} = t_{1-(\alpha/2)}$. З урахуванням цього тепер співвідношення (7.65) можна записати у такому вигляді:

$$P\{t_{\alpha/2} \leq [(\bar{M}_1 - m_X)\sqrt{n} / \tilde{\sigma}_X] \leq t_{1-(\alpha/2)}\} = 1 - \alpha. \quad (1.66)$$

Оскільки щільність розподілу Стьюдента симетрична відносно $t = 0$, то згідно з (1.60) $P\{t < t_{\alpha/2}\} = P\{t > t_{1-(\alpha/2)}\} = \alpha/2$ (див. рис. 1.7).

Задавши надійну ймовірність $\gamma = 1 - \alpha$, можна за таблицями знайти квантілі $t_{\alpha/2}$ і $t_{1-(\alpha/2)}$. Наприклад, для надійної ймовірності

$\gamma = 0,95$ квантіль $t_{1-(\alpha/2)} = 1,96$, а для $\gamma = 0,99$ - $t_{1-(\alpha/2)} = 2,576$.

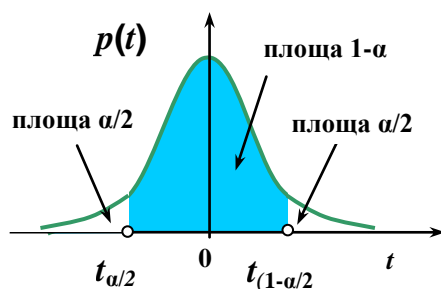


Рисунок 1.7 – До вибору надійного інтервалу для розподілу Стьюдента.

Тоді інтервал $[t_{\alpha/2}, t_{1-(\alpha/2)}]$ є надійним інтервалом стандартизованого відхилення t .

Урахувавши симетрію розподілу Стьюдента, дістанемо

$$t_{\alpha/2} = -t_{1-(\alpha/2)}. \quad (1.67)$$

Тоді з урахуванням (1.66) можемо записати

$$P\left\{-t_{1-(\alpha/2)} \leq \frac{\bar{M}_1 - m_X}{\tilde{\sigma}_X} \sqrt{n} \leq t_{1-(\alpha/2)}\right\} =$$

$$P\left\{\bar{M}_1 - \frac{t_{1-(\alpha/2)}\tilde{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \leq m_X \leq \bar{M}_1 + \frac{t_{1-(\alpha/2)}\tilde{\sigma}_X}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

Звідси

$$\left[\bar{M}_1 - \frac{t_{1-(\alpha/2)}\tilde{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \bar{M}_1 + \frac{t_{1-(\alpha/2)}\tilde{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \right] \quad (.68)$$

- надійний інтервал для невідомого математичного очікування m_X випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, за відомих оцінок середнього вибіркового \bar{M}_1 і виправленої вибіркової дисперсії $\tilde{m}_2 = \tilde{y}_X^2$ для вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n .

Довжина

$$\Delta_d = 2t_{1-(\alpha/2)}\tilde{\sigma}_X / \sqrt{n} \quad (1.69)$$

цього інтервалу є не випадковою. Це дає змогу за потреби забезпечити точність оцінювання (задану довжину надійного інтервалу) шляхом вибору необхідного обсягу вибірки

$$n = 4t_{1-(\alpha/2)}^2 \tilde{\sigma}_X^2 / (\Delta_d)^2. \quad (1.70)$$

► **Приклад.** Визначити для $\gamma = 0,99$ і $t_{1-(\alpha/2)} = 2,576$ надійний інтервал для оцінки кута цілі на площині за вибіркою з дев'яти вимірювань (див. табл. 1.5), отриманих різними однакової точності методами (середньоквадратичне відхилення $\tilde{y}_X = 1$).

Таблиця 1.5

Номер експерименту (j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Результати вимірювань x_j	+3	+1	-2	+4	+2	+4	-2	+5	+3

Згідно з (1.14) середнє вибіркове для заданої вибірки

$$\bar{M}_1 = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^9 x_j = \frac{1}{9} (3+1-2+4+2+4-2+5+3) = 2.$$

Оскільки середнє вибіркове є незсуненою точковою оцінкою, $m_X = \bar{M}_1 = 2$.

Надійний інтервал (див. (1.69))

$$\Delta_d = 2t_{1-(\alpha/2)}\tilde{\sigma}_X / \sqrt{n} = 2 \cdot 2,58 / \sqrt{9} = 1,72.$$

Таким чином, в середньому результати вимірювання потраплять до інтервалу $[2 \pm 0,86]$ з ймовірністю 0,99.



Надійний інтервал для m_X за відомої дисперсії $D[X]$ генеральної сукупності можна отримати на основі стандартизованого відхилення (1.62) з нормальним законом розподілу. У цьому разі

$$\bar{M}_1 - \frac{U_{1-(\alpha/2)}\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq m_X \leq \bar{M}_1 + \frac{U_{1-(\alpha/2)}\sigma_X}{\sqrt{n}}. \quad (1.71)$$

1.4.2 Надійний інтервал для математичного очікування

Довжина такого інтервалу

$$\Delta_d = 2U_{1-(\alpha/2)}\sigma_X / \sqrt{n}. \quad (1.72)$$

Забезпечити задану довжину надійного інтервалу (1.72) можна вибором потрібного обсягу вибірки

$$n = 4U_{1-(\alpha/2)}^2\sigma_X^2 / (\Delta_d)^2. \quad (1.73)$$

Для заданої надійної ймовірності $\gamma = 1 - \alpha$ значення $U_{(1-\alpha/2)}$ наводяться в таблицях інтегральної функції розподілу нормалізованого розподілу. Вибір надійної ймовірності $\gamma = 1 - \alpha$ не є, як правило, математичним завданням, а визначається конкретним розв'язуванням завданням.

► **Приклад.** Нехай ймовірність безвідмовної роботи вимірювальних приладів становить 0,99 за 100 годин, тобто ймовірність виходу з ладу за зазначений час дорівнює $b = 0,01$. Визначити, малою або великою є така ймовірність?

Якщо йдеться, наприклад, про побутові термометри, то із цим можна миритися, зважаючи на те, що вихід з ладу одного відсотка приладів принесе менший збиток, чим перебудова технологічного процесу.

Якщо ж розглядати певний елемент вимірювального комплексу, наприклад, пасажирського літака, то задана величина α буде неприпустимою, тому що вихід з ладу вимірювальної апаратури навіть на одному зі ста літаків може спричинити серйозні наслідки.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Зміною обсягу вибірки за заданого надійного інтервалу можна забезпечити потрібну точність оцінювання невідомого параметра.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: роз-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: розподіл Стюдента і інтегральна функція нормального розподілу.
2. Визначення надійного інтервалу для математичного очікування випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, ґрунтується на розподілі

поділ Стюдента і інтегральна функція нормального розподілу.

2. За заданою надійною ймовірністю та обсягом вибірки визначати надійний інтервал для математичного очікування випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

3. За надійним інтервалом визначати обсяг вибірки, що забезпечить потрібну точність оцінювання математичного очікування

Стюдента у разі, якщо не задано дисперсію величини, і на інтегральній функції нормального розподілу – якщо дисперсія є заданою.

3. Формули визначення довжини надійного інтервалу для математичного очікування у разі застосування:

- розподілу Стюдента

$$\Delta_d = 2t_{1-(\alpha/2)} \tilde{\sigma}_X / \sqrt{n};$$

- інтегральної функції нормального розподілу

$$\Delta_d = 2U_{1-(\alpha/2)} \sigma_X / \sqrt{n}.$$

1.4.3 Інтервальне оцінювання дисперсії та коефіцієнта кореляції

Інтервальне оцінювання дисперсії. Як зазначалося раніше, виправлена вибіркова дисперсія $\tilde{\sigma}_X^2$ (див. (1.32)) є незсуненою оцінкою дисперсії σ_X^2 генеральної сукупності випадкової величини X . При n незалежних результатах вимірювання, тобто для вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n , виправлена вибіркова дисперсія $\tilde{\sigma}_X^2$ є випадковою величиною.

Під час аналізу розподілу вибіркової дисперсії $\tilde{\sigma}_X^2$ (див. (1.31)) можна розглядати два випадки:

- **математичне очікування m_X випадкової величини X є заданим;**
- **математичне очікування m_X випадкової величини X не є заданим.**

У разі, якщо значення m_X випадкової величини X є заданим, оцінкою дисперсії σ_X^2 генеральної сукупності є величина, що визначається за такою формулою:

1.4.3 Інтервальне оцінювання дисперсії та коефіцієнта кореляції

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - m_X)]^2. \quad (1.74)$$

Помноживши ліву та праву частини співвідношення (1.74) на n/σ_X^2 , дістанемо

$$n\hat{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - m_X) / \sigma_X]^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2. \quad (1.75)$$

Якщо випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим математичним очікуванням m_X та дисперсією σ_X^2 і заданою вибіркою $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n , то значення $U_i = (x_i - m_X) / \sigma_X$ також є незалежними, а випадкова величина U має нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією.

У математичній статистиці доводиться, що випадкова величина, яка подається сумою квадратів n незалежних випадкових величин U_i , підпорядкованих нормальному розподілу з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією, має розподіл χ^2 (хі-квадрат) – розподіл Пірсона із $k = n$ ступенями свободи. Тоді і статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2 = n\hat{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2 \quad (1.76)$$

має χ^2 – розподіл Пірсона із $k = n$ ступенями свободи

У таблиці ДЗ наведені значення ймовірності події, коли випадкова величина, що підпорядкована χ^2 -розподілу з відомим числом ступенів свободи k , перевищить фіксоване значення $\chi_{k,\alpha}^2$, тобто $P[\chi^2 > \chi_{k,\alpha}^2]$.

Слід зазначити, що χ^2 -розподіл Пірсона не залежить ні від математичного очікування m_X , ні від дисперсії σ_X^2 випадкової величини X , а визначається лише числом ступенів свободи k .

Якщо математичне очікування m_X випадкової величини X є невідомим, і оцінка дисперсії подається виправленою вибірковою дисперсією (1.32), то випадкова величина $n\tilde{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2$ має χ^2 -розподіл Пірсона із $k = n - 1$ числом ступенів свободи.

Інтервальне оцінювання дисперсії σ_X^2 генеральної сукупності ґрунтується на тому, що відношення (статистики) $n\hat{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2$ та

$n\tilde{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2$ мають χ^2 - розподіл із $k = n$ і $k = n - 1$ ступенями свободи відповідно. Нехай, наприклад, статистика $n\tilde{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2$ набуває значень, менших за деяке фіксоване значення $\chi_{\text{гр}}^2$ з імовірністю $\gamma = 1 - \alpha$. Тоді

$$P\left\{\left|\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2}\right| \leq \chi_{\text{гр}}^2\right\} = 1 - \alpha$$

або

$$P\{-\chi_{\text{гр}}^2 \leq \frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \leq \chi_{\text{гр}}^2\} = 1 - \alpha. \quad (1.77)$$

Умова (1.77) означає, що $-\chi_{\text{гр}}^2$ - квантиль розподілу статистики $n\tilde{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2$ за рівнем $(1 - \gamma) / 2 = \alpha / 2$, а $\chi_{\text{гр}}^2$ - квантиль розподілу цієї самої статистики за рівнем $1 - (1 - \gamma) / 2 = (1 + \gamma) / 2 = 1 - (\alpha / 2)$. Тоді $-\chi_{\text{гр}}^2 = \chi_1^2 = \chi_{\alpha/2}^2$, а $\chi_{\text{гр}}^2 = \chi_2^2 = \chi_{1-\alpha/2}^2$.

З урахуванням цього тепер співвідношення (1.77) можна записати у такому вигляді:

$$P\{\chi_1^2 \leq \frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \leq \chi_2^2\} = P\{\chi_{\alpha/2}^2 \leq \frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2\} = 1 - \alpha. \quad (1.78)$$

Для заданої надійної ймовірності $\gamma = 1 - \alpha$ за таблицею χ^2 - розподілу (див. табл. Д3) вибирають такі значення χ_1^2 і χ_2^2 , які задовольняють умову (1.78).

Еквівалентною до (1.78) є така умова:

$$P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} < \chi_1^2\right\} = P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} > \chi_2^2\right\} = \alpha / 2. \quad (1.79)$$

Фактично квантилі χ_1^2 і χ_2^2 вибирають такими, щоб площа під графіком щільності χ^2 -розподілу в інтервалі $[\chi_1^2, \chi_2^2]$ дорівнювала $(1 - \alpha)$, а за його межами - α (ліворуч та праворуч від граничних значень по $\alpha / 2$; див. рис. 1.8). Тоді інтервал $[\chi_1^2, \chi_2^2]$ є надійним інтервалом величини $n\tilde{y}_X^2 / y_X^2$.

1.4.3 Інтервальне оцінювання дисперсії та коефіцієнта кореляції

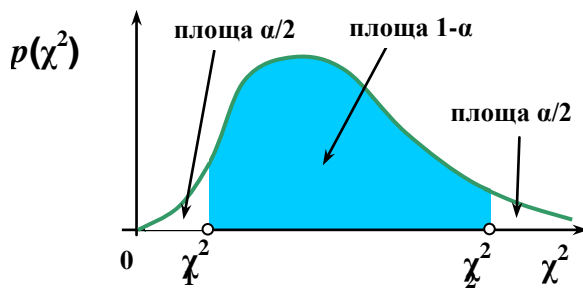


Рисунок 1.8 – До вибору надійного інтервалу для розподілу Пірсона.

При користуванні табл. Д3 потрібно враховувати, що

$$P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} < \chi_1^2\right\} = 1 - P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \geq \chi_1^2\right\} = \alpha/2. \quad (1.80)$$

Тоді з урахуванням (1.80) співвідношення (1.78) подається у такому вигляді:

$$\begin{aligned} P\left\{\chi_1^2 \leq \frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \leq \chi_2^2\right\} &= P\left\{\chi_{\alpha/2}^2 \leq \frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2\right\} = \\ &= P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} > \chi_1^2\right\} - P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} > \chi_2^2\right\}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

а

$$P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} > \chi_1^2\right\} = 1 - \alpha/2; \quad P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} > \chi_2^2\right\} = \alpha/2. \quad (1.82)$$

Тоді з урахуванням (7.81) можемо записати:

$$P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\chi_2^2} \leq \sigma_X^2 \leq \frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\chi_1^2}\right\} = 1 - \alpha. \quad (1.83)$$

Звідси дістанемо

$$\left[\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\chi_2^2}, \frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\chi_1^2} \right] \quad (1.84)$$

- надійний інтервал для дисперсії σ_X^2 випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, за відомих оцінок середнього вибіркового \bar{M}_1 і виправленої вибіркової дисперсії $\tilde{m}_2 = \tilde{y}_X^2$ для вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n .

Довжина

$$\Delta_{\text{д}} = n\tilde{\sigma}_X^2 \left[\frac{1}{\chi_2^2} - \frac{1}{\chi_1^2} \right] = n\tilde{\sigma}_X^2 \frac{\chi_1^2 - \chi_2^2}{\chi_2^2 \chi_1^2} \quad (1.85)$$

цього інтервалу є не випадковою і дає змогу за потреби забезпечити точність оцінювання (задану довжину надійного інтервалу) вибором потрібного обсягу вибірки

$$n = \frac{\Delta_{\text{д}}}{\tilde{\sigma}_X^2} \frac{\chi_2^2 \chi_1^2}{(\chi_1^2 - \chi_2^2)}. \quad (1.86)$$

Під час інтервального оцінювання дисперсії σ_X^2 генеральної сукупності, що ґрунтується на вибірковій дисперсії $\bar{\sigma}_X^2$, у співвідношеннях (1.77)-(1.86) потрібно замінити позначення виправленої вибіркової дисперсії $\tilde{\sigma}_X^2$ на позначення вибіркової дисперсії $\bar{\sigma}_X^2$.

► **Приклад.** Під час перевірки вимірювального приладу встановлено, що виправлена вибіркова дисперсія $\tilde{\sigma}_\Delta^2$ випадкової складової його похибки Δ становить 0,1 за обсягу вибірки $n = 20$. Визначити надійний інтервал для дисперсії σ_Δ^2 похибки для надійної імовірності $\gamma = 1 - \alpha = 0,98$.

У цьому разі $\alpha = 1 - \gamma = 0,02$, а кількість ступенів свободи $k = (n - 1) = 19$.

Згідно з (1.82)

$$P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} > \chi_1^2\right\} = 1 - \alpha/2 = 1 - 0,02/2 = 0,99;$$

$$P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} > \chi_2^2\right\} = \alpha/2 = 0,02/2 = 0,01.$$

Для $k = 19$ за табл. ДЗ дістанемо $\chi_1^2 = 7,6$, $\chi_2^2 = 36,2$.

Тоді відповідно до (1.84) для σ_Δ^2

$$(20 \cdot 0,1) / 36,2 \leq \sigma_\Delta^2 \leq (20 \cdot 0,1) / 7,6.$$

Звідки та згідно з (1.85) надійний інтервал для зазначеної дисперсії $[0,055, 0,263]$, а його довжина $\Delta_{\text{д}} = 0,263 - 0,005 = 0,258$.



1.4.3 Інтервальне оцінювання дисперсії та коефіцієнта кореляції

Дисперсія виправленої вибіркової дисперсії

$$D[\bar{\sigma}_X^2] = M[(\tilde{\sigma}_X^2 - \sigma_X^2)^2]. \quad (1.87)$$

Якщо випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим математичним очікуванням m_X та дисперсією σ_X^2 і заданою вибіркою $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n , то

$$D[\tilde{\sigma}_X^2] = D[\sigma_X^2 \chi_k^2] = (\sigma_X^2)^2 D[\chi^2 / k] = 2\sigma_X^4 / k, \quad (1.88)$$

де враховано, що $D[\tilde{y}_X^2] = 2k$.

Співвідношення (1.88) відображає той факт, що оцінка \tilde{y}_X^2 дисперсії є слушною, оскільки дисперсія $D[\tilde{y}_X^2]$ прямує до нуля у разі збільшення числа ступенів свободи k до нескінченності.

У разі, якщо оцінка дисперсії визначається за результатами не однієї, а m вибірок з однаковою дисперсією σ_X^2 та можливо різними математичними очікуваннями, результуюча виправлена вибіркова дисперсія

$$\tilde{\sigma}_{pX}^2 = \sum_{j=1}^m k_j \tilde{\sigma}_{Xj}^2 / \sum_{j=1}^m k_j, \quad (1.89)$$

де k_j – число ступенів свободи, пов'язане з виправленою вибірковою дисперсією $\tilde{\sigma}_{Xj}^2$

Практична значущість співвідношення (1.89) полягає в тому, що використовуючи кілька вибірок малого обсягу, можна визначити оцінку дисперсії $\tilde{\sigma}_{pX}^2$, яка ґрунтується на ефективно більшому числі ступенів свободи, ніж при використанні однієї вибірки з такою самою кількістю елементів.

► **Приклад.** Деяка фізична величина X вимірюється двома однотипними вимірювальними приладами, які мають однакову дисперсію випадкової складової похибки. Результати вимірювання подані в табл.1.6. Визначити виправлену вибірковою дисперсією за однією та двома вибірками однакового обсягу.

Якщо отримані результати розглядати як одну вибірку обсяг $n = 20$, то середнє вибіркове $\bar{M}_1 = 7,089$, а виправлена вибіркова дисперсія згідно з (1.32)

$$\tilde{\sigma}_X^2 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - 7,089)^2 = 0,059.$$

Таблиця 1.6

j	1	2	3	4	5
x_{1j}	7,32	6,82	7,09	7,43	7,07
x_{2j}	7,40	6,88	7,12	7,42	7,18
j	6	7	8	9	10
x_{1j}	6,66	6,95	7,08	6,88	7,33
x_{2j}	6,64	6,98	7,13	6,93	7,36

При обробці результатів вимірювання парами дістанемо:

$$\bar{M}_{1i} = \frac{(x_{1i} - x_{2i})}{2}, \quad \tilde{\sigma}_{X_i}^2 = \frac{1}{2-1} \frac{(x_{1i} - x_{2i})^2}{2},$$

де враховано, що

$$(x_{1i} - \bar{M}_{1i})^2 + (x_{2i} - \bar{M}_{1i})^2 = (x_{1i} - x_{2i})^2 / 2; \quad k_i = 1.$$

Тоді співвідношення (1.89) для m вибірок можна записати так:

$$\tilde{\sigma}_{pX}^2 = \sum_{i=1}^m k_i \tilde{\sigma}_{X_i}^2 / \sum_{i=1}^m k_i = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (x_{1i} - x_{2i})^2. \quad (1.90)$$

Згідно з (1.90) та з урахуванням числових значень x_{1i} і x_{2i} дістанемо $\tilde{y}_{pX}^2 = 0,0303 / (2 \cdot 10) = 0,00152$.

Таким чином, об'єднання результатів вимірювання в пари дало змогу істотно зменшити дисперсію результату дослідження.



У математичній статистиці широко застосовується розподіл відношення дисперсій, досліджений Р. А. Фішером. Випадкова змінна цього розподілу (звичайно позначається F) вводиться у такий спосіб: якщо отримано n_1 й n_2 незалежних результатів спостереження двох

1.4.3 Інтервальне оцінювання дисперсії та коефіцієнта кореляції

випадкових величин X_1 і X_2 з нормальним розподілом та параметрами $(\mu_{1X}, \sigma_{1X}^2)$ та $(\mu_{2X}, \sigma_{2X}^2)$ відповідно, то відношення

$$F(k_1, k_2) = \frac{\tilde{\sigma}_{1X}^2 / \sigma_{1X}^2}{\tilde{\sigma}_{2X}^2 / \sigma_{2X}^2} \quad (1.91)$$

підпорядковується F – розподілу з $k_1 = n_1 - 1$ і $k_2 = n_2 - 1$ ступенями свободи, які пов'язані з виправленими вибірковими дисперсіями \tilde{y}_{1X}^2 і \tilde{y}_{2X}^2 та можуть вирізнятися від $(n - 1)$.

У разі, якщо $y_{1X}^2 = y_{2X}^2 = y_X^2$, то

$$F(k_1, k_2) = \frac{\tilde{\sigma}_{1X}^2}{\tilde{\sigma}_{2X}^2}. \quad (1.92)$$

При користуванні таблицями F – розподілу варто пам'ятати, що перше число в аргументі F відповідає ступеню свободи чисельника, а в знаменник (1.91)) завжди підставляється більше значення оцінки дисперсії.

Надійний інтервал для коефіцієнта кореляції. Будемо розглядати вибірку обсягу n , отриману з генеральної сукупності системи двох нормально розподілених величин X і Y . Тоді надійний інтервал для коефіцієнта кореляції ρ_{XY} , симетричний відносно точкової оцінки \bar{c}_{XY} , можна побудувати скориставшись допоміжною величиною

$$Z_\rho = \frac{\bar{\rho}_{XY} - \rho_{XY}}{\tilde{\sigma}_\rho}, \quad (1.93)$$

де $\tilde{\sigma}_\rho$ - виправлене стандартне відхилення для \bar{c}_{XY} , яке обчислюється за такою формулою:

$$\tilde{\sigma}_\rho = \frac{1 - \bar{\rho}_{XY}^2}{\sqrt{n}}. \quad (1.94)$$

Тоді згідно з (1.93) та з урахуванням (1.94)

$$Z_\rho = \frac{\sqrt{n}(\bar{\rho}_{XY} - \rho_{XY})}{1 - \bar{\rho}_{XY}^2}. \quad (1.95)$$

Випадкова величина (1.95) має нормальний стандартний розподіл і надійний інтервал за надійної довірчої ймовірності γ , який визначається через табульовану функцію Лапласа $\Phi(z)$ (див. табл. Д1). Для цього знаходимо таке значення аргументу z_γ функції Лапласа, за якого $\Phi(z_\gamma) = \gamma/2$. Тоді шуканий інтервал для коефіцієнта кореляції ρ_{XY} визначається як проміжок

$$[\bar{\rho}_{XY} - z_\gamma \bar{\sigma}_{XY}^2, \bar{\rho}_{XY} + z_\gamma \bar{\sigma}_{XY}^2]. \quad (1.96)$$

► **Приклад.** Для парної вибірки нормально розподілених величин при обсязі вибірки $n = 20$ отримана точкова оцінка коефіцієнта кореляції. Визначити надійний чий інтервал для коефіцієнта кореляції у разі, якщо надійна ймовірність $\gamma = 0,95$.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $z_\gamma = 1,96$, яке задовольняє таку умову: $\Phi(z_\gamma) = 0,95/2 = 0,475$.

Далі згідно з формулою (1.94) обчислюємо виправлене стандартне відхилення

$$\tilde{\sigma}_\rho = (1 - 0,9^2) / \sqrt{20} = 0,0425,$$

а за формулою (1.96) шуканий надійний інтервал $[0,817; 0,983]$.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Інтервальне оцінювання дисперсії генеральної сукупності ґрунтується на двох, підпорядкованих розподілу Пірсона, статистиках залежно від того чи є заданим, чи ні математичне очікування досліджуваної випадкової величини. У разі, якщо математичне очікування не є заданим, статистика визначається виправленою вибірковою дисперсією та розподілом Пір-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: розподіли Пірсона (χ^2 -розподіл) та Фішера.

2. Визначення надійного інтервалу для дисперсії випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, ґрунтується на розподілі Пірсона.

3. Формули:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - m_X)]^2 \quad - \text{точ-}$$

1.4.3 Інтервальне оцінювання дисперсії та коефіцієнта кореляції

сона із $n-1$ ступенями свободи, за невідомого математичного очікування оцінкою дисперсії (7.74) та розподілом Пірсона з n ступенями свободи.

2. Суть підходу до вибору надійного інтервалу для розподілу Пірсона.

3. Суть підходу до визначення надійного інтервалу для коефіцієнта кореляції.

4. Подання вибірки певного обсягу сукупністю вибірок з обсягами, що в сумі визначають обсяг заданої вибірки, дає більш точні оцінки дисперсії.

кова оцінка дисперсії генеральної сукупності у разі заданого математичного очікування;

$$\Delta_d = n \tilde{\sigma}_X^2 \frac{\chi_1^2 - \chi_2^2}{\chi_2^2 \chi_1^2} - \text{довжина}$$

надійного інтервалу для розподілу Пірсона через виправлену вибірку дисперсію;

$$n = \frac{\Delta_d}{\tilde{\sigma}_X^2} \frac{\chi_2^2 \chi_1^2}{(\chi_1^2 - \chi_2^2)^2} - \text{обсяг ви-}$$

бірки за відомого надійного інтервалу для дисперсії.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: розподіл Пірсона та Фішера.
2. За заданою надійною ймовірністю та обсягом вибірки визначати надійний інтервал для дисперсії випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.
3. За надійним інтервалом визначати обсяг вибірки, що забезпечить потрібну точність оцінювання дисперсії.

1.5 Спектральні оцінки часового ряду

Оцінювання спектральної щільності. Нехай маємо дійсний стаціонарний процес $X(t)$ із заданим скінченним математичним очікуванням $M[X(t)] = m_X$. Припускається, що для цього процесу існує, але невідома, спектральна щільність потужності $G_X(f)$.

Розглянемо x_1, x_2, \dots, x_n як відрізок реалізації процесу $X(t)$. Тоді за оцінку $G_X(f)$ можна взяти вираз

$$G_n(f) = \frac{1}{n\pi} \left(\sum_{k=1}^n \tilde{x}_k \cos 2\pi kf \right)^2, \quad f \in [-0,5; 0,5], \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.97)$$

де $\tilde{x}_k = x_k - m_X$, $k = \overline{1, n}$.

Наведений вид оцінки спектральної щільності можна пояснити таким чином. Якщо вважати значення $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ - коефіцієнтами відрізка ряду Фур'є, то $\sum_{k=1}^n x_k \cos 2\pi kf$ є періодичною функцією від f , заданою на періоді $[-0,5; 0,5]$, і яка в цей ряд розкладена. А оскільки $G_n(f)$ - оцінка спектральної щільності потужності, то останній вираз взято у квадраті і домножено на $1/(n\pi)$.

Функцію $G_n(f)$ у статистичній теорії спектральних функцій називають **періодограмою**. Якщо процес $X(t)$ - гауссів, то періодограма $G_n(f)$, $f \neq 0$ і $f \neq 0,5$, як випадкова функція, має χ^2 - розподіл з двома ступенями свободи.

Наведемо без доведення властивості математичного очікування оцінки (1.97) при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[G_n(f)] = \begin{cases} G_X(f), & f \in [-0,5; 0,5], \quad f \neq 0, \\ 2G_X(f), & f = 0. \end{cases} \quad (1.98)$$

Останнє співвідношення показує, що при $f \neq 0$ оцінка $G_n(f)$ є асимптотично незсуненою для спектральної щільності потужності

$$G_X(f) = \frac{1}{2\pi} \left[K_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} K_{kX} \cos 2\pi kf \right].$$

Обчислення дисперсії щільності $G_n(f)$ в загальному випадку пов'язане із складними викладками, які спрощуються у разі, якщо випадковий процес $X(t)$ є гауссовим. Наведемо без доведення асимптотичне значення дисперсії $G_n(f)$ для гауссового випадку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D[G_n(f)] = \begin{cases} 2S^2(f), & f \in [-0,5; 0,5], \quad f \neq 0, \\ 4S^2(f), & f = 0. \end{cases} \quad (1.99)$$

Тобто дисперсія $G_n(f)$ не прямує до нуля для всіх $G_n(f) \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$. Це означає, що оцінка (1.97) є неслухною, а, отже, практично-

1.5 Спектральні оцінки часового ряду

непридатною. Тобто, періодограму не можна використовувати для слушної оцінки спектральної щільності, якщо спектр абсолютно неперервний. Однак, у разі дискретного спектра вона може бути корисною.

Оцінювання спектральної функції. Для отримання слушної оцінки потрібно оцінювати не спектральну щільність, а спектральну функцію $F(\omega)$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, $\omega = 2\pi f$. Початкові припущення тут зберігаються такі самі, як і в попередньому пункті. Припускається, що для випадкового процесу $X(t)$ існує спектральна щільність

$$G_X(\omega) = F'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[K_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} K_{\tau} \cos \omega \tau \right], \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (1.100)$$

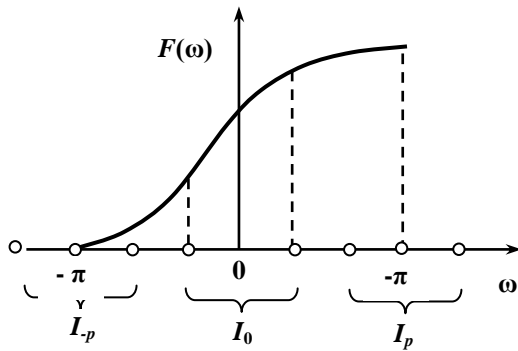


Рисунок 1.9 – До оцінювання спектральної функції.

Для цього процесу спостерігається вибірка $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ обсягу n , що є відрізком реалізації процесу $X(t)$. Потрібно оцінити $F(\omega)$ на деякому інтервалі частот.

Розіб'ємо всю частотну область $\omega \in [-\pi, \pi]$ на $2p+1$

інтервалів, кожний довжиною $h = \pi/p$

, які розміщені симетрично відносно початку координат, причому крайні виходять за межі області визначення $F(\omega)$, як показано на рис. 1.9.

Число p вибирається рівним числу відліків кореляційної функції K_{τ} , які дають "задовільний" її опис, при побудові її статистичної оцінки.

Позначимо кожний такий підінтервал через

$$I_j = \left(jh - \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2} \right), \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm p.$$

Приріст спектральної функції на інтервалі I_j позначимо через

$$\Delta_j = F\left(jh + \frac{h}{2}\right) - F\left(jh - \frac{h}{2}\right) = \int_{(j-0,5)h}^{(j+0,5)h} S(\omega) d\omega.$$

На крайніх інтервалах інтегрування йде за половиною інтервалу, який входить до області визначення $F(\omega)$.

Скориставшись (1.100) і зробивши почленне інтегрування, ізостаннього виразу дістанемо:

$$\begin{aligned} \Delta_{j,p} &= \frac{K_0 h}{2\pi} + \frac{2}{2\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} K_{\tau} \int_{(j-0,5)h}^{(j+0,5)h} \cos \omega \tau d\omega = \frac{K_0 h}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} K_{\tau} \frac{\sin \omega \tau}{\tau} \Big|_{(j-0,5)h}^{(j+0,5)h} = \\ &= \frac{K_0 h}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} (K_{\tau} / \tau) \{ \sin[\tau h(j + 0,5)] - \sin[\tau h(j - 0,5)] \} = \\ &= \left| \begin{array}{l} a = \tau h \left(j + \frac{1}{2} \right); \quad \frac{a - \beta}{2} = \tau h / 2 \\ \beta = \tau h \left(j - \frac{1}{2} \right); \quad \frac{a + \beta}{2} = \tau h j \end{array} \right| = \\ &= \frac{K_0 h}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{\tau=1}^{\infty} (K_{\tau} / \tau) \sin(\tau h / 2) \cos \tau h j. \end{aligned}$$

Звідси

$$\Delta_{j,p} = (1/2p) \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} K_{\tau} \left(\sin \frac{\tau \pi}{2p} \right) / \left(\frac{\tau \pi}{2p} \right) \cos(\tau \pi j / p). \quad (1.101)$$

Зауважимо, що вираз (1.101) можна записати у такому вигляді:

$$\Delta_{j,p} = \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) W_j(\omega) d\omega,$$

- до інтегрування;

$$\Delta_{j,p} = (1/2p) \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} K_{\tau} K_p(\tau) \cos(\tau \pi j / p)$$

- після інтегрування,

де функція W_j називається *спектральним*, а K_p - *кореляційним вікном*:

$$W_j(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } \omega \in I_j; \\ 0, & \text{при } \omega \notin I_j; \end{cases} \quad K_p(\tau) = \left(\sin \frac{\tau \pi}{2p} \right) / \left(\frac{\tau \pi}{2p} \right).$$

Вираз (1.101) дає змогу побудувати оцінку для Δ_j за відомого математичного очікування m_X процесу, що аналізується:

1.5 Спектральні оцінки часового ряду

$$\tilde{\Delta}_{j,p} = (1/2p) \sum_{\tau=-p}^p \tilde{\gamma}_{\tau} K_p(\tau) \cos \omega_j \tau, \quad p \leq n-1, \quad (1.102)$$

де $\omega_j = (\pi j) / p$ - центральна частота в оцінюваному інтервалі, $K_p(\tau)$ - кореляційне вікно, $\tilde{\gamma}_{\tau}$ - оцінка кореляційної функції за відомого математичного очікування.

Оцінка (7.102) є асимптотично незсуненою і слухною.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Суть оцінювання спектральної щільності потужності та спектральної функції.

2. Періодограму не можна використовувати для слухної оцінки спектральної щільності потужності, якщо спектр абсолютно неперервний. Однак, у разі дискретного спектра вона може бути корисною.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: періодограма, спектральна функція.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: періодограма, спектральна функція.

2. Визначати оцінки спектральної щільності потужності та спектральної функції.

1.6 Перевірка статистичних гіпотез

Основні визначення. *Статистична гіпотеза* є деяким припущенням щодо властивостей генеральної сукупності, з якої зроблена вибірка. Статистична гіпотеза може бути сформульована як щодо окремих параметрів досліджуваної випадкової величини, так і її закону розподілу.

Статистичні гіпотези про значення параметрів досліджуваного випадкового об'єкта (параметрів ознак генеральної сукупності) називають **параметричними**. Наприклад, висувається гіпотеза про те, що систематична складова випадкової похибки цифрового вольтметра, (тобто її математичне очікування) дорівнює нулю.

Статистичні гіпотези, що висуваються на підставі обробки вибірки про закон розподілу досліджуваного випадкового об'єкта, називаються **непараметричними**. Так, наприклад, непараметричною є статистична гіпотеза про те, що випадкова похибка цифрового вольтметра має рівномірний розподіл.

Нехай X — випадкова величина з функцією розподілу $F(z, \theta)$, де θ — невідомий параметр і $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - вибірка, кожен елемент якої відображає окреме спостереження випадкової величини X , і тому також залежить від θ .

Нехай про параметр θ відомо, що він може належати одній і лише одній з K множин Θ_j , $j = \overline{0, K-1}$. Необхідно на основі аналізу вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ прийняти рішення: *якій саме з множин Θ_j , $j = \overline{0, K-1}$ належить невідомий параметр θ* . Поставлене завдання відоме в математичній статистиці як задача перевірки статистичних гіпотез.

Гіпотезами в даному випадку є припущення, що параметр θ належить множині Θ_j , коротко це записується так $H_j : \theta \in \Theta_j$, $j = \overline{0, K-1}$. Очевидно, що істинною тут є лише одна з K гіпотез, інші є хибними (у зв'язку з цим гіпотези H_j , $j = \overline{0, K-1}$ називають **альтернативними**).

Гіпотеза $H_j : \theta \in \Theta_j$ називається **простою**, якщо множина Θ_j складається з одного елемента, в інших випадках ця гіпотеза називається **складною**. Отже, проста гіпотеза є однозначною, а складна — неоднозначною. Наприклад, згідно з простою гіпотезою математичне очікування досліджуваної випадкової величини (математичне очікування генеральної сукупності) дорівнює нулю. Складна гіпотеза може стверджувати, що математичне очікування генеральної сукупності належить певній області ймовірних значень.

Основною проблемою теорії перевірки статистичних гіпотез є побудова оптимального, в певному розумінні, правила (критерію) прийняття рішення, за яким одна з гіпотез приймається, а інші - відхиляються.

Оскільки будь-яке статистичне правило будується на основі аналізу вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то прийняте рішення може бути й помилковим. Тому висловлювання на зразок: гіпотеза H_0 приймається, а гіпотези H_1, H_2, \dots, H_{K-1} - відхиляються, означає лише те, що

1.6 Перевірка статистичних гіпотез

гіпотеза H_0 не суперечить наявним даним (конкретній реалізації $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$ вибірки). Тобто після проведення іншого експерименту або, наприклад, збільшення обсягу вибірки, гіпотеза H_0 може бути й відхилена.

Отже, під час перевірки гіпотез піддається випробуванню деяка гіпотеза H_0 , що називається **нульовою** або **основною**, в порівнянні з однією або декількома **альтернативними гіпотезами** H_1, H_2, \dots, H_{K-1} , які можуть бути явно сформульовані або маються на увазі.

► **Приклад.** *Необхідно перевірити гіпотезу про те, що дисперсія випадкової складової похибки вимірювального приладу дорівнює 0,01, тобто $H_0 : \sigma_{\Delta}^2 = 0,01$.*

Згідно з зазначеним альтернативними будуть гіпотези: $H_1 : \sigma_{\Delta}^2 \neq 0,01$; $H_2 : \sigma_{\Delta}^2 > 0,01$; $H_3 : \sigma_{\Delta}^2 = 0,03$, тощо.

Згідно з класичною теорією перевірки статистичних гіпотез, розробленою Є. Нейманом та Е. Пірсоном, всі гіпотези є детермінованими (невипадковими), тобто у будь-якому стохастичному експерименті, пов'язаному зі спостереженням вибірки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ істинною завжди є лише одна й та сама з висунутих гіпотез, а інші - хибні. Правило перевірки гіпотез, побудоване на такому підході отримало назву **критерія Неймана-Пірсона**.

Відповідно до методу Байєса кожній з висунутих гіпотез ставиться у відповідність певна ймовірність її появи, тобто в різних стохастичних експериментах, пов'язаних із спостереженням однієї й тієї ж вибірки, істинними можуть бути різні гіпотези (але, звичайно, в одному експерименті істинною є лише якась одна з висунутих гіпотез).

Уважно проаналізувавши задачі оцінювання та перевірки статистичних гіпотез, можна знайти в них багато спільного. Ось чому на сьогодні існує *загальна теорія прийняття статистичних рішень*. Згідно з цією теорією задачі оцінювання та задачі перевірки статистичних гіпотез розглядаються та розв'язуються з єдиних позицій.

Таким чином, зрозумілою є необхідність побудови такого правила, за якого ймовірності помилкових рішень є достатньо малими.

Правило, за яким гіпотеза приймається або відхиляється називається перевіркою гіпотези.

Таке правило, наприклад, може ґрунтуватися на оцінках різних статистичних характеристик, отриманим за вибірками з незалежних спостережень випадкової величини X . У цьому разі, всі можливі вибірки обсягу n розділяють між двома підмножинами, які не перетинаються. Першу з цих множин називають **областю допустимих значень**, а другу – **критичною областю**.

Припускається, що гіпотеза H_0 , яка перевіряється, може бути прийнята, якщо вибіркова статистика належить області допустимих значень, і повинна бути відхилена у разі, якщо вибіркова статистика належить критичній області.

Під час вибору критичної області варто враховувати, що перевірка гіпотез здійснюється на основі оцінок, отриманих за n спостереженнями, тому прийняте нами рішення може бути помилковим.

Якщо відхиляється основна гіпотеза H_0 , тобто приймається, наприклад, гіпотеза H_1 (але істинною є основна гіпотеза), то відбувається помилка **першого роду**. Імовірність помилки першого роду звичайно позначається $\alpha(\theta)$, яке відображає ймовірності помилок від істинного значення невідомого параметра θ .

Якщо приймається невірна гіпотеза (ми приймаємо гіпотезу H_0 , але істинною є альтернатива H_1), відбувається помилка **другого роду**. Імовірність помилки другого роду позначається через $\beta(\theta)$.

Імовірності α й β визначають ризик ухвалення неправильного рішення, тому одним із завдань перевірки гіпотез є побудова критерію, за яким α та β були б малі.

► **Приклад.** Нехай відома щільність розподілу $p(\tilde{\theta})$ для оцінки $\tilde{\theta}$ деякої характеристики випадкової величини θ , такої, що її значення для генеральної сукупності дорівнює θ_0 . Якщо

прийняти як нульову гіпотезу $H_0: \theta = \theta_0$, то наскільки повинна відрізнятися вибіркова оцінка $\tilde{\theta}$ від θ_0 , щоб ця гіпотеза була відхилена?

Відповісти на це питання можна лише з урахуванням закону розподілу оцінки $\tilde{\theta}$ (див. рис. 1.10).

Для того, щоб вирішити наскільки може відрізнятися $\tilde{\theta}$ від θ_0 ще до отримання вибірки, потрібно визначити

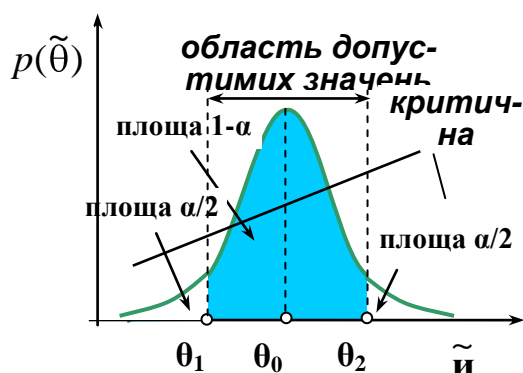


Рисунок 1.10 – До перевірки гіпотез.

1.6 Перевірка статистичних гіпотез

частку випробувань, для яких правильна гіпотеза H_0 може бути відхилена. Тобто потрібно задати величину помилки першого роду α , яку ще називають *рівнем значущості критерію*.

Певне значення величини α визначає інтервал $[\theta_1, \theta_2]$, у який потрапляє оцінка $\tilde{\theta}$ з довірчою ймовірністю $\gamma = 1 - \alpha$. Такий інтервал, у загальному випадку, може бути як симетричним, так і ні, одно-або двостороннім.

Для двостороннього симетричного інтервалу площі під графіком щільності розподілу за межами інтервалу $[\theta_1, \theta_2]$ повинні бути однаковими та дорівнювати $\alpha/2$. Тоді, як відомо, $\theta_1 = \theta_{\alpha/2}$, $\theta_2 = \theta_{(1-\alpha/2)}$, а

$$P(\theta < \theta_{\alpha/2}) = \int_{-\infty}^{\theta_{\alpha/2}} p(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = \alpha/2; \quad P(\theta > \theta_{(1-\alpha/2)}) = \alpha/2.$$

Зазвичай, значення α беруть настільки малим, щоб подія, що $\tilde{\theta}$ виявиться меншою за $\theta_{\alpha/2}$ або перевищить $\theta_{(1-\alpha/2)}$ була малоюмовірною (наприклад, $\alpha = 0,05$). Після чого для вибірки обчислюється оцінка $\tilde{\theta}$. У разі, якщо $\tilde{\theta} \in [\theta_{\alpha/2}, \theta_{(1-\alpha/2)}]$, то гіпотеза H_0 приймається, у іншому разі – відхиляється. Значення $\alpha = 0,05$ вказує на те, що істинна гіпотеза може бути відхилена в 5% спостережень.



Підсумовуючи, наведемо основні етапи перевірки гіпотез:

- **Визначитися з нульовою гіпотезою H_0 і її альтернативою.**
- **Установити рівень значущості α .**
- **Вибрати вид оцінки для перевірки гіпотези H_0 .**
- **Визначити закон розподілу обраної оцінки, якщо істинною є гіпотеза H_0 .**
- **Установити критичну область для перевірки гіпотези H_0 , зважаючи на те, що у цьому разі гіпотеза H_0 буде відхилена в $100\alpha\%$ випадків, коли вона є істинною.**
- **Отримати випадкову вибірку обсягу n , обчислити з її урахуванням обрану оцінку та прийняти рішення, чи істинною є гіпотеза H_0 .**

Для того, щоб визначити ймовірність помилки другого роду β , потрібно припустити, що приймається гіпотеза H_0 , але істинною є альтернатива H_1 . Імовірність β визначає ризик прийняття гіпотези H_0 у разі, якщо істинною є альтернативна H_1 , тобто є ймовірністю події, коли не виявляється існуюча різниця в значеннях характеристик двох генеральних сукупностей.

Імовірність $(1 - \beta)$ називається **потужністю критерію** і відповідає ймовірності ухвалення правильного рішення, незважаючи на те, що гіпотеза H_0 є помилковою. Під час розв'язування практичних завдань може виникнути потреба вибору статистичного критерію з певної множини. У цьому разі вибирають той критерій, якому притаманна найбільша потужність.

Перевірка гіпотез щодо математичного очікування й дисперсії. Перевірка правильності нульових параметричних гіпотез щодо математичного очікування m_X й дисперсії σ_X^2 генеральної сукупності випадкової величини X здійснюється з використанням вибіркового середнього \bar{M}_1 та виправленої вибіркової дисперсії $\tilde{\sigma}_X^2$.

Під час формулювання гіпотез відносно m_X й σ_X^2 зустрічаються два види завдань:

- порівняти числові характеристики m_X і σ_X^2 генеральної сукупності, з якої зроблена вибірка обсягу n , із заданими значеннями m_0 й σ_0^2 ;
- порівняти числові характеристики двох генеральних сукупностей випадкових величин X і Y .

Одним із важливих завдань математичної статистики є порівняння двох (можливо і декількох) вибірових дисперсій. Таке порівняння дає змогу визначити, чи можна вважати вибірові дисперсії статистичними оцінками однієї і тієї самої дисперсії генеральної сукупності. Воно застосовується передусім при обчисленні дисперсій за результатами технологічних вимірювань.

Критерії для перевірки гіпотез щодо математичного очікування та дисперсії наведені в табл. 1.7 (для величин з розподілом Стьюдента) і табл. 1.8 (для величин з розподілом Пірсона та Фішера).

► **Приклад.** Відомо, що похибка приладу Δ має математичне очікування $m_\Delta = 0,7$. Після чергової перевірки приладу за вибіркою обсягу $n = 9$

1.6 Перевірка статистичних гіпотез

дістали такі оцінки: $\bar{M}_{1\Delta} = 0,65$; $\tilde{\sigma}_{\Delta}^2 = 0,0025$. Перевірити гіпотезу H_0 про те, що похибка приладу має математичне очікування $m_{\Delta} = 0,7$.

Альтернативна гіпотеза $H_1 : m_{\Delta} \neq 0,7$. Виберемо рівень значущості $\alpha = 0,05$. Оскільки істинне значення дисперсії похибки приладу не відоме, для перевірки гіпотези скористаємося статистикою (1.63) з розподілом Стьюдента.

Для заданого рівня значущості α гіпотеза H_0 може бути прийнята, якщо $t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{(1-\alpha/2)}$ або (відповідно до симетрії t - розподілу) $|t| \leq t_{(1-\alpha/2)}$.

Отже, гіпотеза H_0 приймається, якщо

$$|\bar{M}_{1\Delta} - m_{\Delta}| < |t_{(1-\alpha/2)} \tilde{\sigma}_{\Delta} / \sqrt{n}|. \quad (1.103)$$

Ураховуючи числові дані, дістанемо: $|\bar{M}_{1\Delta} - m_{\Delta}| = 0,05$; число ступенів свободи $n - 1 = 8$.

Для восьми ступенів свободи та $\alpha = 0,05$ згідно з табл. Д2 $t_{(1-\alpha/2)} = 2,306$, а

$$t_{(1-\alpha/2)} \tilde{\sigma}_{\Delta} / \sqrt{n} = 2,306 \cdot 0,05 / 3 = 0,039 < |\bar{M}_{1\Delta} - m_{\Delta}| = 0,05.$$

Оскільки умова (1.103) не справджується, то гіпотеза про те, що математичне очікування похибки дорівнює 0,7 вважається відхиленою.



► **Приклад.** Під час перевірки двох однотипних вимірювальних приладів за вибіркою обсягу $n = 10$ отримані такі значення оцінок дисперсій їхніх випадкових складових похибок: $\tilde{\sigma}_1^2 = 0,169$; $\tilde{\sigma}_2^2 = 0,144$. З'ясувати, чи є значущою з практичного погляду відмінність дисперсій похибок цих приладів?

Таблиця 1.7

Гіпотеза	Дисперсія	Гіпотеза приймається при виконанні нерівності
$m_X = m_0$	невідомо; використовується відома $\tilde{\gamma}_X^2$	$ \bar{M}_{1X} - m_0 < (t_{(1-\alpha/2)} \tilde{\sigma}_X / \sqrt{n})$ $ \bar{M}_{1X} - m_0 < (U_{(1-\alpha/2)} \sigma_X / \sqrt{n})$

$m_X < m_0$; $m_X > m_0$	невідома; використовується відома \tilde{y}_X^2	$ \bar{M}_{1X} - m_0 < (t_{(1-\alpha/2)} \tilde{\sigma}_X / \sqrt{n})$ $ \bar{M}_{1X} - m_0 < (U_{(1-\alpha/2)} \sigma_X / \sqrt{n})$; $ \bar{M}_{1X} - m_0 > (t_{(1-\alpha/2)} \tilde{\sigma}_X / \sqrt{n})$ $ \bar{M}_{1X} - m_0 > (U_{(1-\alpha/2)} \sigma_X / \sqrt{n})$
$m_X = m_Y$	$\sigma_X^2 \approx \sigma_Y^2$; обидві невідомі	$ \bar{M}_{1X} - \bar{M}_{1Y} < t_{(1-\alpha/2)} S_p \sqrt{\frac{n_X + n_Y}{n_X n_Y}}$ $S_p = \sqrt{\frac{(n_X - 1)\tilde{\sigma}_X^2 + (n_Y - 1)\tilde{\sigma}_Y^2}{n_X + n_Y - 2}}$; число ступенів свободи $k = n_X + n_Y - 2$
	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$; обидві невідомі	$ \bar{M}_{1X} - \bar{M}_{1Y} < t_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_X^2}{n_X} + \frac{\tilde{\sigma}_Y^2}{n_Y}}$ $k = \frac{(\tilde{\sigma}_X^2 / n_X + \tilde{\sigma}_Y^2 / n_Y)^2}{\frac{(\tilde{\sigma}_X^2 / n_X)^2}{n_X + 1} + \frac{(\tilde{\sigma}_Y^2 / n_Y)^2}{n_Y + 1}} - 2$
	σ_X^2 і σ_Y^2 відомі	$ \bar{M}_{1X} - \bar{M}_{1Y} < U_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$

Гіпотеза H_0 полягає в тому, що $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Для її перевірки визначимо відношення $\tilde{\sigma}_1^2 / \tilde{\sigma}_2^2 = 1,17$.

Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ надійна ймовірність $1 - \alpha = 0,95$, а $1 - \alpha/2 = 0,975$. За таблицями визначаємо значення розподілу Фішера $F_{0,975}(9, 9) = 4,03$.

Таблиця 1.8

Гіпотеза	Гіпотеза приймається при виконанні нерівності	Число ступенів свободи
$\sigma_X^2 = \sigma_0^2$	$\tilde{\sigma}_X^2 \frac{k}{\chi_{1-\alpha/2}^2} < \sigma_0^2 < \tilde{\sigma}_X^2 \frac{k}{\chi_{1-\alpha/2}^2}$	$k = n - 1$
$\sigma_X^2 > \sigma_0^2$	$\tilde{\sigma}_X^2 \frac{k}{\chi_\alpha^2} < \sigma_0^2$	$k = n - 1$

1.6 Перевірка статистичних гіпотез

$\sigma_X^2 < \sigma_0^2$	$\tilde{\sigma}_X^2 \frac{k}{\chi_{1-\alpha}^2} > \sigma_0^2$	$k = n - 1$
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$\frac{1}{F_{(1-\alpha/2)}(k_1, k_2)} < \frac{\tilde{\sigma}_X^2}{\tilde{\sigma}_Y^2} < F_{(1-\alpha/2)}(k_1, k_2)$	$k_1 = n_X - 1$ $k_2 = n_Y - 1$
$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	$\frac{\tilde{\sigma}_X^2}{\tilde{\sigma}_Y^2} > F_{(1-\alpha)}(k_1, k_2)$	$k_1 = n_X - 1$ $k_2 = n_Y - 1$

Отримані значення задовольняють нерівність, що записана в табл. 1

1.8 на перетині п'ятого рядка та другого стовбчика:
 $(1/4,03) < 1,17 < 4,03$.

Отже, гіпотеза H_0 може бути прийнята, а відмінність дисперсій похибок двох приладів не є значущою з практичного погляду.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Статистична гіпотеза може бути сформульована як щодо окремих параметрів досліджуваної випадкової величини, так і її закону розподілу.

2. Основною проблемою теорії перевірки статистичних гіпотез є побудова оптимального, в певному розумінні, правила (критерію) прийняття рішення, за яким одна з гіпотез приймається, а інші - відхиляються.

3. Суть критерія Неймана-Пірсона.

1. Визначення понять: статистична, параметрична, непараметрична, альтернативна, проста, складна, нульва гіпотези, допустима та критична область значень вибірки, помилки першого та другого роду, рівень значущості критерію, потужність критерію.

2. Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези.

**Треба вміти:**

1. Визначати поняття: : статистична, параметрична, непараметрична, альтернативна, проста, складна, нульва гіпотези, допустима та критична область значень вибірки, помилки першого та другого роду, рівень значущості критерію, потужність критерію.
2. Формулювати загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези.
3. Перевіряти правильність нульових гіпотез.

1.7 Завдання для поточного тестування

1.7.1 Питання для поточного контролю

- Предмет математичної статистики.
- Дайте визначення генеральної та вибіркової (вибірки) сукупності.
- Що таке статистичний та упорядкований статистичний ряд?
- Дайте визначення розмаху вибірки.
- Що називається варіантою?
- Що таке частота, відносна частота та накопичена відносна частота варіанти?
- Дайте визначення статистичного розподілу вибірки або частотного варіаційного ряду.
- Що таке інтервальний варіаційний ряд?
- Способи визначення довжини та кількості частинних інтервалів інтервального варіаційного ряду.

1.7 Завдання для поточного тестування

- Дайте визначення інтервальної, відносної інтервальної та накопиченої інтервальної частот.
- Сформулюйте алгоритм побудови інтервального варіаційного ряду за певною вибіркою.
- Що таке полігон та гістограма?
- Наведіть приклади графічних зображень емпіричних законів розподілу.
- Що таке комулята?
- Які оцінки ознак випадкових об'єктів називаються емпіричними або вибірковими?
- Дайте визначення точкової статистичної оцінки.
- У чому полягає суть точкового оцінювання?
- Запишіть формули для визначення емпіричних початкових та центральних моментів k - го порядку.
- Чим відрізняються теоретичні моменти від вибіркових?
- Запишіть формули для визначення звичайного та зваженого середнього вибіркового.
- Які емпіричні параметри визначають положення випадкової величини?
- Запишіть формули для визначення емпіричної медіани для частотного та інтервального варіаційних рядів.
- Які переваги емпіричної медіани перед вибірковим середнім?
- Запишіть формули для визначення вибіркової та виправленої вибіркової дисперсії.
- Що таке поправки Шеппарда?
- Дайте визначення емпіричних коефіцієнтів асиметрії та ексцесу.
- Що таке емпіричний коефіцієнт кореляції?
- Яку умову задовольняє незміщена та асимптотично незміщена точкова оцінка?
- Чи є початковий емпіричний момент k - го порядку незміщеною точковою оцінкою початкового емпіричного моменту того самого порядку?

- Довести, що виправлена вибірка дисперсія є незміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності, а її асимптотично незміщеною оцінкою є вибірка дисперсія.
- Дайте визначення слушної або ґрунтовної точкової оцінки.
- У якому разі вибіркоче середнє є слушною оцінкою вибіркової сукупності?
 - Точкові оцінки ефективні, асимптотично ефективні, достатні.
 - Яку з декількох незміщених оцінок потрібно вибирати: а) таку, що має найменшу дисперсію; б) таку, що має найбільшу дисперсію?
 - У чому полягає суть інтервального оцінювання?
 - Що таке надійний (довірчий) інтервал та надійна ймовірність?
 - Сформулювати умови для побудови найкоротшого надійного інтервалу.
 - Що називають точністю і надійністю інтервальної оцінки?
 - Який закон розподілу ймовірності має величина $U = (\bar{M}_1 - m_X) / (\sigma_X / \sqrt{n})$?
 - Який закон розподілу ймовірності має величина $t = (\bar{M}_1 - m_X) / (\tilde{\sigma}_X / \sqrt{n})$?
 - Що таке закон розподілу Стюдента?
 - Чи залежить від математичного очікування та дисперсії генеральної сукупності змінна закону розподілу Стюдента?
 - Чи задовольняє умову парності розподіл Стюдента?
 - Як побудувати надійний інтервал для середнього вибіркового із заданою надійною ймовірністю за відомої виправленої вибіркової дисперсії?
 - Запишіть формулу для обсягу вибірки за заданого надійного інтервалу для середнього вибіркового.
 - Який розподіл ймовірності має величина $U_i = (x_i - m_X) / \sigma_X$?
 - Що таке розподіл Пірсона?
 - Якою кількістю ступенів свободи визначається χ^2 – розподіл випадкової величини $\chi^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2 = n\tilde{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2$?

1.7 Завдання для поточного тестування

- Якою кількістю ступенів свободи визначається χ^2 – розподіл випадкової величини $\chi^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2 = n\tilde{\sigma}_X^2 / \sigma_X^2$?
- Як побудувати надійний інтервал із заданою надійною ймовірністю для дисперсії випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, за відомими середнім вибірковим і виправленою вибірковою дисперсією для вибірки обсягу n ?
- Записати формулу визначення довжини надійного інтервалу для дисперсії випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, із заданою надійною ймовірністю за відомими середнім вибірковим і вибірковою дисперсією у разі подання великої вибірки обсягу n декількома вибірками менших за n обсягів?
- Як побудувати надійний інтервал із заданою надійною ймовірністю для дисперсії випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, за відомими середнім вибірковим і виправленою вибірковою дисперсією для вибірки обсягу n ?
- Що таке розподіл Фішера і коли він застосовується?
- Який закон розподілу має величина $Z_\rho = \frac{\sqrt{n}(\bar{\rho}_{XY} - \rho_{XY})}{1 - \bar{\rho}_{XY}^2}$?
- Як побудувати надійний інтервал для коефіцієнта кореляції?
- Що таке періодограма?
- Чим відрізняється оцінювання спектральної щільності потужності від оцінювання спектральної функції?
- Що таке статистична гіпотеза?
- У чому полягає відмінність між параметричними та непараметричними гіпотезами?
- Дайте визначення нульової та альтернативної гіпотез.
- Що називають простою та складною статистичними гіпотезами?
- Що таке перевірка гіпотези?
- Дайте визначення області допустимих значень та критичної області.
- Що таке рівень значущості?

- Чим відрізняються помилки першого роду від помилок другого роду?
- Назвіть основні етапи перевірки параметричних нульових гіпотез.
- Що таке потужність критерію?
- Перевірка правильності нульової гіпотези щодо математичного очікування та дисперсії.

1.7.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування

1. За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки

z_i	-6	-4	-2	2	4	6
n_i	5	10	15	20	40	10
ω_i	0,05	0,1	0,15	0,2	0,4	0,1

потрібно: а) побудувати графік комуляти; б) накреслити полігон частот і відносних частот.

2. За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки

z_i	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

потрібно: а) обчислити вибіркове середнє, емпіричну дисперсію та емпіричне стандартизоване відхилення; б) емпіричну медіану та центр розмаху.

3. За вибіркою об'єму $n=41$ визначена зміщена оцінка $D_X = 3$ генеральної дисперсії випадкової величини X . Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

4. Побудувати полігон частот по даному розподілу вибірки:

а)	z_i	2	3	5	6	б)	z_i	15	20	25	30	35
	n_i	10	15	5	20		n_i	10	15	30	20	25

5. Побудувати полігон відносних частот по даному розподілу вибірки:

а)	z_i	2	4	5	7	10	б)	z_i	1	4	5	8	9
	ω_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45		ω_i	0,15	0,25	0,3	0,20,1	

1.7 Завдання для поточного тестування

$$\begin{aligned} \text{в) } z_i & 20 \quad 40 \quad 65 \quad 80 \\ \omega_i & 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \end{aligned}$$

6. За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки

$d = 8$	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
n_i	10	15	20	25	20	10
ω_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2	0,1

потрібно: а) побудувати гістограму; б) визначити емпіричну медіану; в) обчислити середнє вибіркове та вибіркову дисперсію.

7. За заданим статистичними розподілами вибірки випадкових величин X і Y

$X = x_j$	10	20	30	40
n_{ix}	30	20	30	20
$Y = y_j$	2	4	6	8
n_{iy}	10	30	20	40

потрібно обчислити емпіричний коефіцієнт кореляції.

8. Оцінки в балах z_i , одержані абітурієнтами на вступних іспитах з математики, подані дискретним розподілом:

z_i	15	25	35	45	55	65	75	85
n_i	5	10	15	20	25	15	8	2

Обчислити емпіричний коефіцієнт асиметрії.

9. У результаті п'яти вимірювань довжини стержня одним приладом (без систематичних помилок) отримані такі дані (у мм): 92; 94; 103; 105; 106. Визначити: а) вибіркову середню довжину стержня; б) вибіркову і виправлену дисперсії помилок приладу.

10. Довжини заготовок z_i , виготовлених робітником за зміну, та частоти цих довжин n_i подані статистичним розподілом:

z_i , мм	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,55
n_i	4	16	20	30	24	6

Визначити емпіричний коефіцієнт ексцесу.

11. Побудувати гістограму частот по даному розподілу вибірки об'єму $n=100$:

Номер інтервалу l	Частинний інтервал $x_{i+1} - x_i$	n_i	Щільність частоти n_i / d
1	1-5	10	2,5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12,5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

12. Чи є $\hat{\theta}_n$ достовірною оцінкою параметра, якщо

$$P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1 - \frac{D[\hat{\theta}_n]}{\varepsilon^2},$$

де дисперсія оцінки $D[\hat{\theta}_n] = 5/n$, а n - обсяг вибірки?

13. Якій із оцінок $\hat{\theta}_n$ або $\hat{\theta}_m$ потрібно віддати перевагу, якщо $M[\hat{\theta}_n] = \theta$, $M[\hat{\theta}_m] = \theta$, $D[\hat{\theta}_n] = 3$, $D[\hat{\theta}_m] = 2$? Чи буде $\hat{\theta}_n$ незміщеною оцінкою параметра θ у разі, якщо $\theta = 5$, а $M[\hat{\theta}_n] = 6$?

14. Визначити обсяг вибірки n , за якого похибка $\varepsilon = 0,01$ гарантується з ймовірністю 0,999, якщо дисперсія генеральної сукупності становить 25.

15. Визначити довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,95 невідомого математичного очікування нормально розподіленої випадкової величини ознаки X , якщо генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma_X = 5$, вибіркове середнє $\bar{m}_X = 14$, а об'єм вибірки $n = 25$.

16. Похибка цифрового вольтметра розподілена рівномірно в діапазоні $[0,1; 0,6]$. Результати потрапляння похибки вимірювання в певні інтервали у 30 дослідів з перевірки вольтметра подані таким інтервальним рядом:

Частинні інтервали	0,1...0,2	0,2...0,3	0,3...0,4	0,4...0,5	0,5...0,6
Частоти n_j	5	8	6	4	7

Порівняти вибіркові значення середньої арифметичної похибки та оцінки дисперсії генеральної сукупності.

17. Обсяг вибірки партії електроламп дорівнює 100 ламп. Середня тривалість горіння лампи вибірки становить 1000 годин. Визначити з надійною ймовірністю 0,95 довірчий інтервал для середньої тривалості горіння лампи всієї партії у разі, якщо середнє ква-

1.7 Завдання для поточного тестування

дратичне відхилення тривалості горіння лампи $\sigma = 40$ годин. Передбачається, що тривалість горіння ламп розподілена нормально.

18. За даними дев'яти незалежних вимірювань з однаковою точністю певної фізичної величини визначені емпіричне середнє арифметичне результатів вимірювання 30,1 і виправлене середнє квадратичне відхилення $\overline{X^2} = 6$. Оцінити дійсне значення вимірюваної величини за надійним інтервалом, якщо надійна ймовірність $\gamma = 0,99$. Передбачається, що результати вимірювань розподілені нормально.

19. Проведено 10 вимірювань одним приладом (без систематичної похибки) певної фізичної величини X . Виправлене середнє квадратичне відхилення випадкової похибки вимірювань склало 0,8. Визначити точність приладу з надійною ймовірністю 0,95 за умови, що результати вимірювання розподілені нормально.

20. Під час обчислення дисперсії розподілу варіант, розміщених на різних відстанях, вибірка була розбита на п'ять частинних інтервалів, кожний довжиною $d = 12$. Вибіркова дисперсія рівновіддалених варіант (середин частинних інтервалів) $\overline{\sigma^2} = 52,4$. Визначити вибіркову дисперсію з урахуванням поправки Шеппарда.

21. Серед 250 деталей, виготовлених станком-автоматом, виявилось 32 нестандартних. Визначити довірчий інтервал, що покриває з надійною ймовірністю 0,99 невідому ймовірність P виготовлення верстатом нестандартної деталі.

22. Двома методами проведені вимірювання фізичної величини. Отримані такі результати: а) $x_1 = 9,6$; $x_2 = 10,0$; $x_3 = 9,8$; $x_4 = 10,2$, $x_5 = 10,6$; б) $y_1 = 10,4$; $y_2 = 9,7$; $y_3 = 10,0$; $y_4 = 10,3$. Чи можна вважати, що за рівня значущості $\alpha = 0,1$ методи забезпечують однакову точність вимірювання, якщо результати вимірювання розподілені нормально, а вибірки є незалежними?

23. П'ять термодпар відкалібровано при стандартній температурі $\theta = 25^\circ\text{C}$. За результатами вимірювань середнє вибіркове склало $24,8^\circ\text{C}$, а виправлена вибіркова дисперсія $0,7(^\circ\text{C})^2$. Визначити рівень значущості α , за якого справджується нульова гіпотеза про те, що математичне очікування становить $M[\theta] = 25^\circ\text{C}$.

24. За двома незалежними вибірками обсягу $n_1 = 11$ і $n_2 = 14$ відповідно для нормальнорозподілених випадкових величин сукупно-

стей X і Y визначені виправлені вибіркві дисперсії $\tilde{\sigma}_X^2 = 0,76$ і $\tilde{\sigma}_Y^2 = 0,38$. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ прооднакові значення генеральної генеральних дисперсій у разі, якщо альтернативною є гіпотеза $H_1: D(X) > D(Y)$.

25. За двома незалежними вибірками обсягу $n_1 = 14$ и $n_2 = 10$ відповідно для нормальнорозподілених випадкових величин сукупностей X і Y визначені виправлені вибіркві дисперсії $\tilde{\sigma}_X^2 = 0,84$ і $\tilde{\sigma}_Y^2 = 2,52$. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: D(X) = D(Y)$ прооднакові значення генеральної генеральних дисперсій у разі, якщо альтернативною є гіпотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

26. Середнє напрацювання на відмову приладів старої конструкції в 10 випробуваннях склало в середньому 6,8 місяців за середньоквадратичного відхилення 0,08 місяця. Прилади нової конструкції в 6 випробуваннях пропрацювали в середньому 7,5 місяців за середньоквадратичного відхилення 0,8 місяця. Визначити, чи є нова конструкція приладу більш надійною за стару?

2 Стаціонарні випадкові процеси

2.1 Визначення стаціонарності у вузькому та широкому значеннях

Зауважимо, що стаціонарні випадкові процеси є зручною математичною моделлю та достатньо точною апроксимацією реальних фізичних явищ. Як зазначалось раніше, будь-який випадковий процес $X(t)$ характеризується або ймовірнісними, або часовими характеристиками, які визначені на основі ймовірнісних. Такі характеристики базуються на поданні випадкового процесу $X(t)$ системою із однієї, двох, трьох чи, в загальному випадку, n випадкових величин $X(t_k)$; $X(t_k)$, $X(t_{k+1})$; $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ відповідно для вибраних перерізів у точках t_1 ; t_1 , t_2 ; t_1 , t_2 , ..., t_n .

Задаючи систему випадкових величин і визначаючи відповідні ймовірнісні та статистичні характеристики, ми не звертали увагу на те чи будуть вони змінюватися під час одночасного зсуву перерізів на величину Δt , тобто чи залишаться вони такими самими у відповідних зсунутих перерізах $t_1 + \Delta t$; $t_1 + \Delta t$, $t_2 + \Delta t$; $t_1 + \Delta t$, $t_2 + \Delta t$, ..., $t_n + \Delta t$. Фактично, йдеться про вплив на характеристики випадкових процесів зміни початку відліку часу.

Випадковий процес називається стаціонарним у вузькому значенні, якщо закони розподілу ймовірності будь-якого порядку, що описують його властивості, не залежать від вибору початку відліку часу, тобто не змінюються, якщо всі моменти t_1 , t_2 , ..., t_n зсунути на довільний інтервал часу Δt .

У випадках, коли хоча б один із законів розподілу (будь-якого порядку) змінюється при зсуві початку відліку часу, то випадковий процес вважається **нестаціонарним**.

► **Приклад.** Припустімо, що в перерізі t_k випадковий процес $X(t)$ характеризується одновимірною функцією щільності ймовірності $p_1(X_k, t_k)$. При переході до перерізу в точці $t_k + \Delta t$ маємо $p_1(X_k, t_k + \Delta t)$. Якщо останній закон буде відрізнятися від $p_1(X_k, t_k)$, то можна однозначно стверджувати, що процес $X(t)$ є нестаціонарним.

Отже,

- ✦ **Умовою стаціонарності процесу у вузькому значенні є незалежність його ймовірнісних характеристик всіх порядків від 1 доп без виключення від вибору моменту відліку часу:**

$$p_1(X_1, t_1) = p_1(X_1, t_1 + \Delta t);$$

$$p_2(X_1, X_2; t_1, t_2) = p_2(X_1, X_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta t); \quad (2.1)$$

$$p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) = p_n(X_1, \dots, X_n; t_1 + \Delta, \dots, t_n + \Delta t).$$

Системі рівнянь (2.1) можна поставити у відповідність еквівалентне співвідношення

$$X(t) = X(t + \Delta t), \quad (2.2)$$

із якого випливає, що

- ✦ **стаціонарна у вузькому значенні випадкова функція переходить сама в себе під час довільного зсуву в часі на Δt всіх її реалізацій.**

Останнє може означати і таке:

- ✦ **стаціонарний випадковий процес розвивається в часі нескінченно довго; він немає ні початку, ні кінця.**

Із урахуванням (4.2) для стаціонарного процесу, наприклад,

$$p_1(X_k, t_k) = p_1(X_k, t_k + \Delta t) \Big|_{t_k = -\Delta t} = p_1(X_k, 0) = p_1(X_k), \quad (2.3)$$

Тоді справедливою є форма запису одновимірного диференціального закону $p_1(X)$ без часового аргументу, що відповідає фіксованому моменту часу.

Враховуючи (2.2), а також те, що для процесу $X(t)$ математичне очікування для зсунутої на довільний проміжок часу його копії

$$M[X(t_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) dX_k,$$

дістанемо

2.2 Особливості автокореляційних функцій стаціонарних процесів

$$\begin{aligned} M[X(t_k + \Delta t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k + \Delta t) dX_k = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) dX_k = \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k) dX_k = M[X(t_k)]. \end{aligned}$$

Отже,

- ✦ **середнє значення стаціонарного випадкового процесу у всіх перерізах є сталим.**

Тоді можна записати: $M[X(t)] = M[X]$.

- ✦ **Очевидно, що середній квадрат та дисперсія стаціонарного випадкового процесу, які визначаються через $p_1(X_k)$, також є характеристиками не окремих його перерізів, а процесу в цілому, тобто є величинами постійними та незалежними від часової змінної:**

$$\overline{X^2(t)} = \overline{X^2}; \quad \sigma_X^2(t_k) = \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2.$$

Незмінність в часі математичного очікування стаціонарного процесу означає, що при графічному зображенні всі його реалізації будуть над віссю абсцис (при $m_X > 0$; рис. 2.1, а), під нею (при $m_X < 0$; рис. 2.1, б). Якщо середнє значення дорівнює нулю, то відхилення реалізацій в середньому в додатню чи від'ємну сторону (вверх чи вниз) будуть однаковими (рис. 2.1, в).

Підсумовуючи, стверджуємо, що,

- ✦ **якщо середнє значення чи дисперсія не постійні величини, то це є достатнім, щоби вважати процес або сигнал нестаціонарним.**

Водночас, незмінність у часі тільки цих двох характеристик не є підставою вважати процес чи сигнал стаціонарним у вузькому значенні.

Розглянемо тепер друге рівняння системи (2.1). Воно справджується за будь-якого зсуву Δt , у тому числі і для $\Delta t = -t_1$, що відповідає перенесенню початку відліку часу в точку нуль (початок координат).

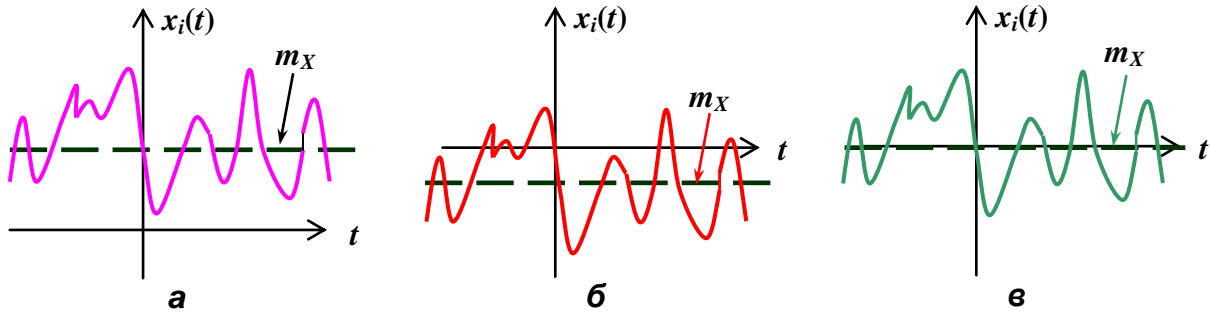


Рисунок 2.1.- Приклад реалізації стаціонарного випадкового процесу: а – математичне очікування додатне; б – математичне очікування від'ємне; в – математичне очікування дорівнює нулю.

У результаті

$$\begin{aligned} p_2(X_1, X_2; 0, t_2 - t_1) &= p_2(X_1, X_2; t_1, t_2) = \\ &= p_2(X_1, X_2; \tau) = p_2(X_1, X_\tau; \tau), \end{aligned}$$

де $\tau = t_2 - t_1$.

✦ **Стаціонарність випадкового процесу означає інваріантність двовимірної функції щільності ймовірності до окремо взятих моментів часу t_1 та t_2 і її залежність тільки від відстані між ними.**

Оскільки, двовимірна функція щільності ймовірності визначає кореляційні характеристики (двовимірні моментні функції другого порядку), то для нецентрованого стаціонарного процесу його автокореляційна функція

$$\begin{aligned} K_X(t_k + \Delta t, t_{k+1} + \Delta t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_k X_{k+1} p_2(X_k, X_{k+1}; t_k + \Delta t, t_{k+1} + \Delta t) dX_k dX_{k+1} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_k X_{k+1} p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) dX_k dX_{k+1} = K_X(t_k, t_{k+1}). \end{aligned}$$

Вважатимемо, що $t_k = -\Delta t$, тоді

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_{k+1}) &= K_X(0, t_{k+1} - t_k) = K_X(\tau); \\ K_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} X X_\tau p_2(X, X_\tau) dX dX_\tau = \langle X(t) X(t + \tau) \rangle. \end{aligned}$$

2.2 Особливості автокореляційних функцій стаціонарних процесів

Отже,

- ✦ **функція автокореляції стаціонарного випадкового процесу є функцією не моментів визначення перерізів t_k, t_{k+1} , а тільки відстані між ними.**

Звідси випливає, що

- ✦ **функція кореляції стаціонарного випадкового процесу є характеристикою статистичного зв'язку між його миттєвими значеннями в перерізах, що розміщені на відстані τ , незалежно від того на якій ділянці процесу (сигналу) вибрані ці перерізи.**

Такі ж висновки та співвідношення можна отримати для функцій автокореляції та коефіцієнта автокореляції центрованого стаціонарного випадкового процесу:

$$B_X(t_k, t_{k+1}) = B_X(\tau) = \langle \dot{X}(t) \dot{X}(t + \tau) \rangle;$$

$$\rho_X(t_k, t_{k+1}) = \rho_X(\tau) = \frac{B_X(\tau)}{\sigma_X^2} = \frac{K_X - m_X^2}{\sigma_X^2}.$$

Випадкові процеси, які характеризуються тільки постійними математичним очікуванням, середнім квадратом та дисперсією, а також кореляційними функціями одного аргументу τ , як відстані між перерізами, називають стаціонарними у широкому значенні.

Зрозуміло, що із стаціонарності у вузькому значенні завжди випливає стаціонарність у широкому, але не навпаки.

► **Приклад.** Випадковий процес $X(t)$ утворено реалізаціями $x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, де A_m та ω_0 є величинами сталими, а початкова фаза φ – випадкова величина з рівномірним законом розподілу $p_{1\varphi}(\varphi_k, t_k)$ в інтервалі $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Визначити кореляційну функцію процесу.

Раніше було показано, що рівномірному закону розподілу $p_{1\varphi}(\varphi_k, t_k)$ відповідає синусоподібний закон розподілу для заданого процесу $p_{1X}(X_k, t_k) = 1/[\pi\sqrt{A_m^2 - X_k^2}]$, математичне очікування якого дорівнює

нулю: $m_X(t) = m_X = 0 = \text{const}$, а дисперсія $y_X^2(t) = A_m^2/2 = y_X^2 = \text{const}$. Ці результати безпосередньо впливають з незалежності $p_{1X}(X_k, t_k) = 1/[\pi\sqrt{A_m^2 - X_k^2}]$ від змінної часу t_k .

Тоді кореляційна функція заданого процесу

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_{k+1}) &= \langle A_m \cos(\omega_0 t_k + \varphi) A_m \cos(\omega_0 t_{k+1} + \varphi) \rangle \\ &= \langle \frac{A_m^2}{2} \cos(\omega_0(t_k + t_{k+1}) + 2\varphi) \rangle + \langle \frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0(t_k - t_{k+1}) \rangle = \\ &= \frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau = K_X(\tau), \end{aligned}$$

де враховано, що математичне очікування суми процесів дорівнює сумі математичних очікувань складових, а математичне очікування числа є саме число.

Таким чином, заданий випадковий процес задовольняє всі умови, потрібні для того, щоб забезпечити стаціонарність у широкому значенні.



► **Приклад.** Випадковий процес утворено реалізаціями гармонічної форми з амплітудою A_m , що є випадковою величиною з довільним законом розподілу, а частота ω_0 та початкова фаза φ - дійсні числа.

Математичне очікування такого процесу $m_X(t) = \overline{A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)} = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ не залежить від часу тільки тоді, коли середнє значення $\overline{A_m} = 0$. Отже, в загальному випадку процес, що розглядається, буде нестационарним.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Якщо середнестатистичне значення, середній квадрат чи дисперсія не постійні величини, то це є достатнім, щоби вважати процес нестационарним. Водночас, незмінність у часі тільки цих двох



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: стаціонарний процес у вузькому та широкому значенні.

2. Коли хоча б один із законів розподілу (будь-якого порядку)

2.2 Особливості автокореляційних функцій стаціонарних процесів

характеристик не є підставою вважати процес стаціонарним у вузькому значенні.

2. Функція кореляції стаціонарного випадкового процесу є характеристикою статистичного зв'язку між його миттєвими значеннями в перерізах, що розміщені на відстані τ , незалежно від того на якій ділянці процесу вибрані ці перерізи.

3. Із стаціонарності у вузькому значенні завжди випливає стаціонарність у широкому, але не навпаки.

змінюється під час зсуву початку відліку часу, то випадковий процес вважається нестаціонарним.

3. Середнє статистичне значення, середній квадрат та дисперсія стаціонарного випадкового процесу є величинами постійними.

4. Стаціонарність випадкового процесу означає інваріантність двовимірної функції щільності ймовірності до окремо взятих моментів часу t_1 та t_2 і її залежність тільки від відстані між ними.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: стаціонарний процес у вузькому та широкому значенні.

2.2 Особливості автокореляційних функцій стаціонарних процесів

Основною метою цього розподілу є узагальнення властивостей автокореляційних функцій стаціонарних процесів, які є дуже важливими з практичного погляду.

➤ **За нульового зсуву між перерізами ($\tau = 0$) автокореляційна функція нецентрованого стаціонарного випадкового процесу дорівнює його середньому квадрату, центрованого – дисперсії, а коефіцієнт автокореляції – одиниці:**

$$K_X(0) = \overline{X^2}; \quad B_X(0) = \sigma_X^2; \quad c_X(0) = 1. \quad (2.4)$$

Це випливає із означення вказаних функцій:

$$K_X(0) = K_X(\tau)|_{\tau=0} = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle|_{\tau=0} = \langle X(t)X(t) \rangle = M[X^2(t)] = \overline{X^2}.$$

➤ **Функції кореляції стаціонарного процесу є парними відносно зсуву τ (властивість парної симетрії):**

$$B_X(\tau) = B_X(-\tau); \quad K_X(\tau) = K_X(-\tau); \quad \rho_X(\tau) = \rho_X(-\tau). \quad (2.5)$$

Раніше була доведена властивість симетрії в загальному випадку. Наприклад, для нецентрованого випадкового процесу

$$K_X(t_k, t_{k+1}) = K_X(t_{k+1}, t_k).$$

Для стаціонарного процесу

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_{k+1}) &= K_X(t_{k+1} - t_k) = K_X(t_{k+1}, t_k) = K_X(t_k - t_{k+1}) = \\ &= K_X(-(t_{k+1} - t_k)) \Rightarrow K_X(\tau) = K_X(-\tau). \end{aligned}$$

Властивість парної симетрії або парності дає змогу обчислювати функції кореляції тільки для додатних значень її аргументу τ , а результат для від'ємних визначати на її основі.

Найбільшого значення функція кореляції набуває, зазвичай, за нульового значення її аргументу. Для періодичних процесів можна вказати і інші значення аргументу, за яких функції кореляції набувають такого самого значення, що і при $\tau = 0$. Тому вважається:

➤ **значення функції кореляції для будь-яких значень її аргументу за абсолютним значенням не перевищують тих, що визначаються нульовим значенням аргументу:**

$$|K_X(\tau)| \leq K_X(0); \quad |B_X(\tau)| \leq B_X(0); \quad |\rho_X(\tau)| \leq \rho_X(0). \quad (2.6)$$

Відомо, що середнє значення випадкового процесу, що не набуває від'ємних значень, є невід'ємним.

Дійсно, для процесу (сигналу) $[X(t) \pm X(t+\tau)]^2$, коли $X(t)$ є стаціонарним процесом (сигналом), його математичне очікування

$$\begin{aligned} M_1\{[X(t) \pm X(t+\tau)]^2\} &= M_1\{X^2(t) \pm 2X(t)X(t+\tau) + X^2(t+\tau)\} = \\ &= \overline{X^2(t) + X^2(t+\tau) \pm 2X(t)X(t+\tau)} \geq 0. \end{aligned}$$

2.2 Особливості автокореляційних функцій стаціонарних процесів

Тоді

$$\overline{X^2(t) + X^2(t + \tau)} \geq \left| \overline{2X(t)X(t + \tau)} \right| \geq |2K_X(\tau)|.$$

Для стаціонарних процесів і сигналів $\overline{X^2(t)} = \overline{X^2(t + \tau)}$, тому

$$\overline{2X^2(t)} \geq |2K_X(\tau)| \pm K_X(\tau) \leq \overline{X^2} \leq K_X(0).$$

- **Зв'язок між кореляційною функцією $K_X(\tau)$ нецентрованого та $B_X(\tau)$ центрованого стаціонарного випадкового процесу відображається такою формулою:**

$$K_X(\tau) = B_X(\tau) + m_X^2. \quad (2.7)$$

Останнє співвідношення безпосередньо випливає із означення зазначених кореляційних функцій і є частковим випадком зв'язку між ними для довільного (нестационарного) процесу.

- **Функція кореляції випадкового нецентрованого стаціонарного процесу $X(t)$ з ненульовим математичним очікуванням містить в собі постійну складову (рис. 2.2, б).**

У разі, якщо $m_X \neq 0$ справедливості наведеного твердження впливає з формули (2.7).

Розглянемо випадковий процес $X(t) = N(t) + m_N$. Припустімо, що $m_N = 0$. Тоді автокореляційна функція

$$\begin{aligned} K_X(\tau) &= M_1[(N(t) + m_X)(N(t + \tau) + m_X)] = M_1[(N(t)N(t + \tau)] \\ &+ M_1[m_X(N(t))] + M_1[m_X(N(t + \tau))] + M_1[m_X m_X] \\ &= K_N(\tau) + m_X m_N + m_X m_N + m_X^2, \end{aligned}$$

де враховано, що для стаціонарного процесу $M_1[(N(t))] = M_1[N(t + \tau)]$.

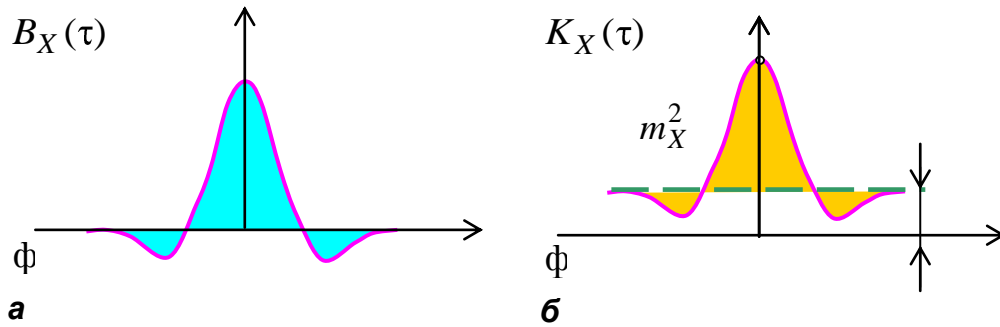


Рисунок 4.2 - До зв'язку між кореляційними функціями центрованого та не-центрованого випадкових стаціонарних процесів.

Зважаючи на те, що $m_N = 0$, остаточно отримуємо:

$$K_X(\tau) = K_N(\tau) + m_X^2.$$

- **Кореляційна функція $B_Z(\tau)$ алгебраїчної суми некорельованих чи незалежних центрованих процесів $\dot{X}(t)$ і $\dot{Y}(t)$ дорівнює алгебраїчній сумі кореляційних функцій його складових:**

$$B_Z(\tau) = B_X(\tau) + B_Y(\tau). \quad (2.8)$$

Раніше було встановлено, що якщо центровані процеси чи сигнали $X(t)$ і $Y(t)$ незалежні, отже і некорельовані, то їхня взаємна кореляційна функція $B_{XY}(\tau) = 0$.

Тоді

$$\begin{aligned} B_Z(\tau) &= \langle [\dot{X}(t) \pm \dot{Y}(t)][\dot{X}(t+\tau) \pm \dot{Y}(t+\tau)] \rangle = \\ &= \langle \dot{X}(t)\dot{X}(t+\tau) \rangle \pm \langle \dot{X}(t)\dot{Y}(t+\tau) \rangle \pm \langle \dot{Y}(t)\dot{X}(t+\tau) \rangle \pm \langle \dot{Y}(t)\dot{Y}(t+\tau) \rangle = \\ &= B_X(\tau) \pm \underbrace{B_{XY}(\tau)}_0 \pm \underbrace{B_{YX}(\tau)}_0 + B_Y(\tau). \end{aligned}$$

Слід зазначити, що цей висновок є справедливим для будь-яких процесів, необов'язково стаціонарних:

$$B_Z(t_k, t_{k+1}) = B_X(t_k, t_{k+1}) \pm B_Y(t_k, t_{k+1}).$$

- **Кореляційна функція $K_Z(\tau)$ алгебраїчної суми некорельованих чи незалежних нецентрованих процесів або сигналів $X(t)$ і $Y(t)$ дорівнює алгебраїчній сумі кореляційних функцій**

2.2 Особливості автокореляційних функцій стаціонарних процесів

складових та подвоєного добутку їхніх математичних очікувань:

$$K_Z(\tau) = K_X(\tau) \pm K_Y(\tau) \pm 2m_X m_Y. \quad (2.9)$$

Ця властивість доводиться аналогічно попередній із урахуванням того, що взаємна кореляційна функція незалежних, а значить, некорельованих центрованих процесів (необов'язково стаціонарних) $B_{XY}(\tau) = 0$.

- **Кореляційна функція $K_Z(\tau)$ процесу $Z(t)$, що є добутком двох незалежних випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$, дорівнює добуткові кореляційних функцій співмножників:**

$$K_Z(\tau) = K_X(\tau)K_Y(\tau). \quad (2.10)$$

За означенням автокореляційної функції та з урахуванням того, що математичне очікування добутку незалежних процесів визначається добутком їхніх математичних очікувань, маємо:

$$\begin{aligned} K_Z(\tau) &= \langle Z(t)Z(t+\tau) \rangle = \langle [X(t)Y(t)][X(t+\tau)Y(t+\tau)] \rangle = \\ &= \langle [X(t)X(t+\tau)][Y(t)Y(t+\tau)] \rangle = \\ &= \langle [X(t)X(t+\tau)] \rangle \cdot \langle [Y(t)Y(t+\tau)] \rangle = K_X(\tau)K_Y(\tau). \end{aligned}$$

Аналогічний висновок справджується також для центрованих процесів і сигналів:

$$B_Z(\tau) = B_X(\tau)B_Y(\tau).$$

Слід звернути увагу, що властивість «добутку» є справедливою і для нестаціонарних процесів.

- **Кореляційна функція періодичного процесу є періодичною того самого періоду.**

► **Приклад.** Випадковий процес $X(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ із рівномірним законом розподілу початкової фази, як було встановлено раніше, характеризується кореляційною функцією

$$K_X(\tau) = B_X(\tau) = \frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad (2.11)$$

що є періодичною з періодом процесу $\omega_0 t = 2\pi$.



Ця властивість є справедливою, коли, наприклад, випадковий процес містить декілька статистично незалежних періодичних складових. Тоді відповідно до (2.9) автокореляційна функція суми таких складових дорівнює сумі періодичних функцій кореляції кожної складової окремо. Дуже цікавою з практичного погляду є ситуація, коли кожна реалізація $x_i(t)$ процесу $X(t)$ є періодичною і подається рядом Фур'є. Для періодичних процесів функція кореляції - періодична, тому її також можна подати рядом Фур'є. У загальному випадку ряд Фур'є функції автокореляції буде містити більшу кількість складових, ніж ряд Фур'є процесу $X(t)$. Тільки у разі, якщо гармонічні складові характеризуються параметрами, що є статистично незалежними, кількість членів ряду Фур'є періодичного процесу та його функцій кореляції збігаються.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Властивість парної симетрії або парності дає змогу обчислювати функції кореляції тільки для додатних значень її аргументу, а результат для від'ємних визначати на її основі.

2. Значення функції кореляції для будь-яких значень її аргументу за абсолютним значенням не перевищують тих, що визначаються нульовим значенням аргументу.

3. Середнє статистичне значення випадкового процесу, що не набуває від'ємних значень, є невід'ємним.



Слід запам'ятати:

1. Властивість парної симетрії та «добутку».

2. За нульового зсуву між перерізами ($\tau = 0$) автокореляційна функція нецентрованого стаціонарного випадкового процесу дорівнює його середньому квадрату, центрованого – дисперсії, а коефіцієнт автокореляції – одиниці.

3. Кореляційна функція алгебраїчної суми некорельованих чи незалежних центрованих процесів і дорівнює алгебраїчній сумі кореляційних функцій його складових.

4. Формули:

2.2 Особливості автокореляційних функцій стаціонарних процесів

4. Властивість «добутку» за умови статистичної незалежності співмножників справджується як для нестационарних та стаціонарних процесів.

5. У загальному випадку ряд Фур'є функції автокореляції періодичного стаціонарного процесу буде містити більшу кількість складових, ніж ряд Фур'є самого процесу. Тільки у разі, якщо гармонічні складові характеризуються параметрами, що є статистично незалежними, кількість членів ряду Фур'є періодичного процесу та його функцій кореляції збігаються.

$K_X(\Phi) = B_X(\Phi) + m_X^2$ - зв'язок між кореляційними функціями нецентрованого та центрованого стаціонарного випадкового процесу;

$K_Z(\Phi) = K_X(\Phi) \pm K_Y(\Phi) \pm 2m_X m_Y$ - зв'язок між кореляційними функціями сумарного нецентрованого стаціонарного процесу та його складових.

5. АКФ періодичного стаціонарного процесу є періодичною функцією відносно аргументу з тим самим періодом, що і у початкового процесу, а її амплітуда АКФ визначається середньою потужністю процесу.



Треба вміти:

1. Застосовувати особливості кореляційних функцій стаціонарних випадкових процесів під час розв'язування завдань визначення кореляційних властивостей процесів, що є результатом певних перетворень над заданими процесами.

2.3 Особливості взаємних кореляційних функцій стаціонарних процесів

Стаціонарно-зв'язані випадкові процеси. Розглянемо два випадкових процеси $X(t)$ і $Y(t)$, кожний з яких окремо задовольняє умовам стаціонарності.

Два стаціонарних процеси є стаціонарно-зв'язаними, якщо для будь-якого n багатовимірні спільні закони розподілу ймовірності не змінюються під час одночасного довільного зсуву моментів відліку вздовж часової осі на довільний інтервал Δt .

Наприклад, для двовимірних законів розподілу стаціонарно-зв'язані випадкові процеси задовольняють таку умову:

$$p_2(X_1, Y_2; t_1, t_2) = p_2(X_1, Y_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t).$$

Як відомо, мірою статистичного зв'язку між двома процесами є двовимірна моментна функція другого порядку: для нецентрованих $X(t)$ і $Y(t)$ процесів – це взаємна кореляційна функція $K_{XY}(t_k, t_{k+1})$; для центрованих процесів – функція взаємної кореляції $B_{XY}(t_k, t_{k+1}) = \langle \dot{X}(t_k) \dot{Y}(t_{k+1}) \rangle$.

За визначенням, зокрема, для неперервних процесів

$$K_{XY}(t_k, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_k Y_{k+1} p_2(X_k, Y_{k+1}; t_k, t_{k+1}) dX_k dY_{k+1}.$$

Враховуючи властивості стаціонарно-зв'язаних процесів, останнє співвідношення можна записати в такій формі:

$$K_{xy}(t_k, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_k Y_{k+1} p_2(X_k, Y_{k+1}; t_k + \Delta t, t_{k+1} + \Delta t) dX_k dY_{k+1} = K_{xy}(t_k + \Delta t, t_{k+1} + \Delta t).$$

Для будь-якого Δt , зокрема, і $\Delta t = -t_k$, дістанемо

$$K_{XY}(t_k, t_{k+1}) = K_{XY}(0, t_{k+1} - t_k) = K_{XY}(\tau). \quad (2.12)$$

✦ **Взаємна кореляційна функція стаціонарно-зв'язаних випадкових процесів є функцією тільки зсуву між перерізами і не залежить від початку відліку часу або моментів часу визначення перерізів.**

Зважаючи на таку властивість, у формулах для взаємних кореляційних стаціонарно-зв'язаних функцій не записують позначення моментів часу:

$$K_{XY}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} XY_{\Phi} p_2(X, Y_{\Phi}, \Phi) dX dY_{\Phi} = \langle X(t) Y(t + \Phi) \rangle;$$

$$B_{XY}(\Phi) = \langle (Y(t) - m_Y)(X(t + \Phi) - m_X) \rangle; \quad (2.13)$$

$$c_{XY}(\Phi) = \frac{B_{XY}(\Phi)}{(\pm y_X)(\pm y_Y)}.$$

2.3 Особливості взаємних кореляційних функцій стаціонарних процесів

Можна показати, що при зміні порядку слідування індексів

$$K_{YX}(t_k, t_{k+1}) = K_{YX}(\tau) = K_{XY}(-\tau) \quad (2.14)$$

Якщо два процеси є стаціонарними, але не стаціонарно-зв'язаними, то функція взаємної кореляції буде залежати як від початку відліку часу t_k , так і часового інтервалу τ .

✦ **Функції взаємної кореляції незалежно від виду процесу не задовольняють умову симетрії відносно слідування процесів (порядку слідування нижніх індексів):**

$$K_{XY}(t_k, t_{k+1}) \neq K_{YX}(t_k, t_{k+1}); \quad B_{XY}(t_k, t_{k+1}) \neq B_{YX}(t_k, t_{k+1}). \quad (2.15)$$

У разі, якщо процеси є стаціонарно-зв'язаними, то існує особливий вид симетрії відносно аргументу (**властивість дзеркального відображення**), що подається такими співвідношеннями:

$$K_{XY}(\tau) = K_{YX}(-\tau); \quad B_{XY}(\tau) = B_{YX}(-\tau). \quad (2.16)$$

Дійсно, за визначенням

$$K_{XY}(-\tau) = \langle X(t)Y(t-\tau) \rangle = \left\{ \begin{array}{l} t-\tau = t' \\ t = t'+\tau \end{array} \right\} = \langle X(t'+\tau)Y(t') \rangle = K_{XY}(\tau).$$

На відміну від функцій автокореляції максимальне значення функції взаємної кореляції стаціонарно-зв'язаних випадкових процесів не обов'язково відповідає співпадаючим у часі перерізам, тобто коли $\tau=0$. Такий максимум може бути за будь-якого значення τ . Проте

✦ **для стаціонарно-зв'язаних процесів миттєве значення їхньої взаємної кореляційної функції не перевищує середнього геометричного від початкових значень автокореляційних функцій окремих процесів:**

$$\begin{aligned} |K_{XY}(\tau)| &\leq \sqrt{K_X(0)K_Y(0)} = \sqrt{X^2 Y^2}; \\ |B_{XY}(\tau)| &\leq \sqrt{B_X(0)B_Y(0)} = \sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} = \pm \sigma_X \sigma_Y. \end{aligned} \quad (2.17)$$

✦ **Функція взаємної кореляції двох нецентрованих незалежних процесів (не обов'язково стаціонарно-зв'язаних) дорів-**

нює добуткові їхніх математичних очікувань, а центрованих – нулю:

$$K_{XY}(t_k, t_{k+1}) = \overline{X(t_k)Y(t_{k+1})} = \overline{X(t_k)}\overline{Y(t_{k+1})} = m_X(t_k)m_Y(t_{k+1}); \quad (2.18)$$

$$B_{XY}(t_k, t_{k+1}) = 0.$$

Наведена властивість є наслідком властивості середньостатистичного значення за відповідних вимог до процесів співмножників.

✦ **Якщо $X(t)$ – стаціонарний процес, а $X'(t)$ – результат його диференціювання, то взаємна кореляційна $X(t)$ і $X'(t)$ за умови, що вони є стаціонарно-зв'язаними, визначається похідною по τ від функції автокореляції початкового процесу:**

$$K_{XX'}(\tau) = dK_X(\tau)/d\tau; \quad B_{XX'}(\tau) = dB_X(\tau)/d\tau. \quad (2.19)$$

Дійсно, якщо враховувати, що за означенням похідної

$$X'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t},$$

а результатом диференціювання стаціонарного процесу є процес також стаціонарний, то функція взаємної кореляції

$$\begin{aligned} K_{XX'}(\tau) &= M[X(t)X'(t + \tau)] = M\left[X(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t + \tau) - X(t + \tau)}{\Delta t}\right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M[X(t)X(t + \Delta t + \tau)] - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M\left[\frac{X(t)X(t + \tau)}{\Delta t}\right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K_X(\Delta t + \tau) - K_X(\tau)}{\Delta t} = K_X'(\tau). \end{aligned}$$

Як відомо, початкове значення $K_X(0) = X^2$ функції автокореляції $K_X(\tau)$ є її максимальним значенням. Ураховуючи, що $K_X(\tau)$ – є функцією парною, згідно (2.19) початкове значення функції взаємної кореляції, а отже, і похідної від функції автокореляції $K_X'(\tau) = K_{XX'}(\tau)|_{\tau=0} = 0$. Це означає, що миттєві значення стаціонарно-зв'язаних процесів $X(t)$ і $X'(t)$ у співпадаючих перерізах є некорельованими величинами, але статистично залежними. Однак, у разі стаціона-

2.3 Особливості взаємних кореляційних функцій стаціонарних процесів

рного процесу $X(t)$ з нормальним законом розподілу ймовірностей такий процес і його похідна є не тільки некорельованими, а і статистично незалежними.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Стаціонарно-зв'язаними можуть бути тільки процеси, кожен з яких задовольняє умови стаціонарності.

2. Миттєві значення стаціонарно-зв'язаних процесів $X(t)$ і $X'(t)$ у співпадаючих перерізах є некорельованими величинами, але статистично залежними. Однак, стаціонарний процесу $X(t)$ з нормальним законом розподілу ймовірності і здиференційований процес $X'(t)$ є не тільки некорельованими, а і статистично незалежними.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: стаціонарно-зв'язані випадкові процеси.

2. Визначати взаємні кореляційні функції стаціонарно-зв'язаних випадкових процесів.

3. Застосовувати особливості взаємних кореляційних функцій стаціонарно-зв'язаних випадкових процесів під час кореляцій-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: стаціонарно-зв'язані випадкові процеси.

2. Якщо два процеси є стаціонарними, але не стаціонарно-зв'язаними, то функція взаємної кореляції буде залежати як від початку відліку часу t_k , так і часового інтервалу τ .

3. Властивість дзеркального відображення.

4. Для стаціонарно-зв'язаних процесів миттєве значення їхньої взаємної кореляційної функції не перевищує середнього геометричного від початкових значень автокореляційних функцій окремих процесів.

5. Функція взаємної кореляції двох нецентрованих незалежних процесів (не обов'язково стаціонарно-зв'язаних) дорівнює добуткові їхніх математичних очікувань, а центрованих – нулю.

6. Формули для визначення взаємних функцій кореляції стаціонарно-зв'язаних процесу і процесу, що є результатом його диференціювання:

$$K_{XX'}(\tau) = dK_X(\tau) / d\tau;$$

ного аналізу систем.

$$B_{XX'}(\tau) = dB_X(\tau)/d\tau.$$

2.4 Практична значущість взаємних кореляційних функцій

Застосування взаємних кореляційних функцій для розв'язання завдань перетворення інформації пов'язано з системами, на входах яких діє два і більше випадкових процесів чи сигналів.

Розглянемо випадковий процес $Z(t)$, що є адитивною сумішшю корисного процесу $X(t)$ та шуму $Y(t)$. Припустімо, що $X(t)$ та $Y(t)$ є стаціонарними та незалежними. Тоді для центрованого процесу $\dot{Z}(t)$ функція кореляції

$$\begin{aligned} B_Z(\Phi) &= \langle \dot{Z}(t)\dot{Z}(t+\Phi) \rangle = \langle [\dot{X}(t) + \dot{Y}(t)][\dot{X}(t+\Phi) + \dot{Y}(t+\Phi)] \rangle \\ &= \langle \dot{X}(t)\dot{X}(t+\Phi) + \dot{X}(t)\dot{Y}(t+\Phi) + \dot{Y}(t)\dot{X}(t+\Phi) + \dot{Y}(t)\dot{Y}(t+\Phi) \rangle = \\ &= B_X(\Phi) + B_{XY}(\Phi) + B_{YX}(\Phi) + B_Y(\Phi). \end{aligned} \quad (2.20)$$

- ✦ Отже, автокореляційна функція адитивної суміші стаціонарних випадкових процесів дорівнює алгебраїчній сумі АКФ процесів-складових та всіх можливих їхніх взаємних кореляційних функцій.

Виходячи з статистичної незалежності, процеси $X(t)$ та $Y(t)$ є і некорельованими, а отже $B_{XY}(\tau) = B_{YX}(\tau) = 0$. Остаточно

$$B_Z(\tau) = B_X(\tau) + B_Y(\tau). \quad (2.21)$$

З урахуванням зв'язку між кореляційними функціями нецентрованого та центрованого випадкових процесів АКФ суміші нецентрованих незалежних стаціонарних процесів

$$K_Z(\tau) = K_X(\tau) + K_Y(\tau) + 2m_X m_Y. \quad (2.22)$$

► **Приклад.** Розглянемо гармонічний процес $X(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, де φ – випадковий параметр із рівномірним законом розподілу. Такий процес називають *монохроматичним стаціонарним випадковим проце-*

2.4 Практична значущість взаємних кореляційних функцій

сом(СВП). Як відомо, функція кореляції такого процесу $K_X(\tau) = B_X(\tau) = (A_m^2/2)\cos\omega_0\tau$.

Припустімо, що $Y(t)$ - статистично незалежний від сигналу $X(t)$ шум із нульовим математичним очікуванням $m_Y = 0$ та функцією кореляції $B_Y(\tau) = K_Y(\tau) = A_0^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Тоді відповідно до (2.22) та з урахуванням того, що $m_Y = m_X = 0$, суміш характеризується функцією кореляції

$$K_Z(\tau) = B_Z(\tau) = (A_m^2/2)\cos\omega_0\tau + A_0^2 \exp(-\alpha|\tau|),$$

графік якої, коли потужність $P_X = B_X(0) = A_m^2/2$ періодичного сигналу набагато менше потужності $B_Y(0) = A_0^2$ шуму, зображено на рис. 2.3. Із графіка і формули ясно, що для великих значень зсуву між перерізами τ АКФ суміші наближається до АКФ корисного сигналу:

$$B_Z(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{=} B_X(\tau).$$

Тому при використанні належного методу вимірювання АКФ корисного слабкого сигналу, подавленого потужним шумом $B_Z(\tau)$, з'являється можливість виділення його слабкого сигналу з суміші.

■

► **Приклад.** Ще одним прикладом виділення слабкого, але відомого сигналу із суміші з шумом, пов'язаного з операцією формування взаємної функції кореляції, може слугувати функціонування радіолокаційної системи. Передавач такої системи генерує сигнал $X(t)$. Вхідний сигнал радіолокаційного приймача

$$Y(t) = aX(t - \tau_3) + N(t),$$

де τ_3 - час поширення сигналу від передавача до приймача (наприклад, деякої реальної цілі) та в зворотньому напрямку; $N(t)$ - шум приймача; a - стала, яка набагато менше за одиницю.

Зазвичай середня потужність сигналу $X(t - \tau_3)$ набагато менша за потужність шуму $N(t)$. Обчислимо функцію взаємної кореляції сигналів $X(t)$ та $Y(t)$, зважаючи на те, що вони є стаціонарно-зв'язаними

та з нульовими математичними очікуваннями:

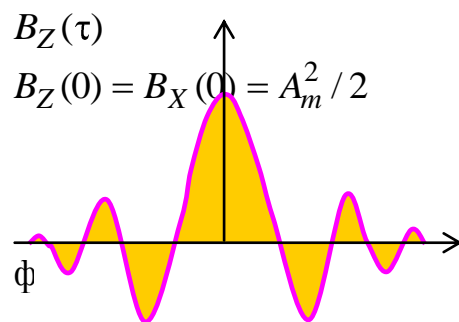


Рисунок 2.3 - Автокореляційна функція суміші.

$$\begin{aligned}
 K_{XY}(\phi) = B_{XY}(\phi) &= M[X(t)Y(t+\phi)] = M[X(t)a(X(t+\phi-\phi_3)) + N(t+\phi)] = \\
 &= M[X(t)aX(t-\phi_3+\phi)] + M[X(t)N(t+\phi)] = \\
 &= aB(\phi-\phi_3) + B_{XN}(\phi).
 \end{aligned}$$

Оскільки сигнали $X(t)$ та $N(t)$ є статистично незалежними, то їхня взаємна кореляційна функція $B_{XN}(\tau) = 0$. Тоді

$$B_{XY}(\tau) = aB_X(\tau - \tau_3).$$

Функція $B_X(\tau - \tau_3)$ приймає максимальне значення, яке дорівнює середній потужності процесу $X(t)$, як відомо, за нульового значення її аргументу. Таким чином, визначення відстані $\tau = \tau_3$ до цілі зводиться до знаходження максимуму ВКФ $B_{XY}(\tau)$.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. АКФ алгебраїчної суми двох статистично незалежних центрованих стаціонарних процесів визначається алгебраїчною сумою АКФ складових, а для нецентрованих процесів ще і подвоєним добутку мстаїхніх статистичних середніх.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: монохроматичний стаціонарний випадковий процес.

2. Автокореляційна функція адитивної суміші стаціонарних випадкових процесів дорівнює алгебраїчній сумі АКФ процесів-складових та всіх можливих їхніх взаємних кореляційних функцій.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: монохроматичний стаціонарний випадковий процес.

2. Застосовувати взаємні кореляційні функції стаціонарних процесів для вирішення проблеми виділення корисного процесу із суміші цього процесу з завадою.

2.5 Ергодичні процеси та їхні кореляційні характеристики

Розглянемо одну довільну реалізацію $x_i(t)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ (рис. 2.4) на нескінченно довгому інтервалі часу $T \rightarrow \infty$.

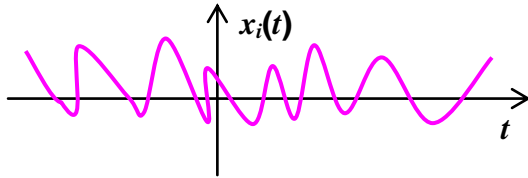


Рисунок 2.4 - Реалізація стаціонарного випадкового процесу.

Визначимо середнє значення цієї однієї реалізації за час T усередненням у часі за відомою формулою:

$$X_{\text{cp}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(\lambda) d\lambda.$$

Відомо, що $X_{\text{cp}} = X_{\text{=}}$ називають постійною складовою реалізації $x_i(t)$.

Аналогічно,

$$X_{\text{д}} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i^2(\lambda) d\lambda}$$

- середньоквадратичне значення реалізації $x_i(t)$ нецентрованого процесу та

$$X_{\text{д}\sim} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_i(\lambda) - X_{\text{cp}})^2 d\lambda}$$

- середньоквадратичне значення змінної складової реалізації $x_i(t)$ або реалізації центрованого процесу.

Квадрат середньоквадратичного значення змінної складової реалізації

$$X_{\text{д}\sim}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_i(\lambda) - X_{\text{cp}})^2 d\lambda$$

є величиною, пропорційною середній потужності цієї складової, а потужність постійної складової - квадрату X_{cp}^2 середнього значення.

Повна потужність реалізації в цілому: $X_{\text{д}}^2 = X_{\text{д}\sim}^2 + X_{\text{cp}}^2$.

Тепер припустімо, що середнє значення випадкового процесу $X(t)$ (його математичне очікування) m_X , отримане усередненням по всіх реалізаціям, збігається з середнім значенням $X_{\text{cp}} = X_{\text{=}}$ його окремої реалізації $x_i(t)$; середній квадрат $\overline{X^2}$ – з квадратом її середньоквадратичного значення $X_{\text{д}}$, а дисперсія σ_X^2 – з квадратом середньоквадратичного значення її змінної складової. За таких умов

$$m_X = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k) dX_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(\lambda) d\lambda;$$

$$\overline{X^2} = M[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_k^2 p_1(X_k) dX_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^2(\lambda) d\lambda;$$

$$\sigma_X^2 = M[\dot{X}^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (X(t) - m_X)^2 p_1(X_k) dX_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(\lambda) - X_{\text{cp}})^2 d\lambda.$$

Стаціонарні випадкові процеси, для яких усереднення по ансамблю (по всіх реалізаціям) дає такий самий результат як усереднення в часі за однією реалізацією нескінченної тривалості, називають ергодичними.

Слід звернути увагу на те, що еквівалентність операцій усереднення повинна виконуватись під час обчислення всіх можливих статистичних характеристик. Ось чому процес буде ергодичним перш за все тільки тоді, коли, він є стаціонарним у широкому значенні. Це є *необхідною умовою*.

Достатньою умовою ергодичності випадкового стаціонарного процесу є прямування до нуля границі АКФ, коли її аргумент $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_X(\tau) = 0. \quad (2.23)$$

Слабкішою є вимога, що носить назву *умови Слуцького*:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(\tau) d\tau = 0. \quad (2.24)$$

Користуючись однією реалізацією процесу, можна визначити функцію автокореляції ергодичного процесу за такою формулою:

2.5 Ергоди́чні процеси та їхні кореляційні характеристики

$$K_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(\lambda) x_i(\lambda + \tau) d\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) x_i(t + \tau) dt .$$

Для ергоди́чних процесів $X(t)$ і $Y(t)$ функція взаємної кореляції

$$K_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) y_s(t \pm \tau) dt .$$

Аналогічні співвідношення можна записати і для центрованих ергоди́чних процесів.

Таким чином, для ергоди́чного процесу одна реалізація достатньо великої тривалості є типовим представником статистичного ансамблю в цілому. Вивчаючи таку одну реалізацію, ми можемо достатньо точно охарактеризувати відповідний стаціонарний випадковий процес. Такий підхід лежить в основі практично всіх підходів експериментального дослідження випадкових процесів і сигналів, а точніше, визначення їх статистичних характеристик.

► **Приклад.** На вході системи із N однотипних безінерційних підсилювачів діють сигнали, що є реалізаціями стаціонарного процесу $X(t)$, середнє значення якого m_X . Коефіцієнти передачі підсилювачів K_s ($s = \overline{1, N}$) є випадковими величинами з дисперсією y_k^2 та математичним очікуванням m_k . Порівняти середнє значення, дисперсію та функцію кореляції вихідного випадкового процесу підсилювачів, розраховані усередненням по всім реалізаціям та одій із них.

Сукупність реалізацій на виході всіх підсилювачів утворює випадковий процес $Y(t) = K_s X(t)$, кожна реалізація якого $y_s(t) = K_s x_s(t)$.

На виході s -го підсилювача середнє значення реалізації

$$m_{ys} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K_s x_s d\lambda = K_s m_{xs} ;$$

дисперсія

$$\sigma_{ys}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (y_s(\lambda) - m_{ys})^2 d\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (K_s x_s(\lambda) - K_s m_{xs})^2 d\lambda = K_s^2 \sigma_{xs}^2 ;$$

функція кореляції центрованого процесу

$$\begin{aligned}
 B_{y_s}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (y_s(t) - m_{Y_s})(y_s(t + \tau) - m_{Y_s}) dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (K_s x_s(t) - K_s m_{X_s})(K_s x_s(t + \tau) - K_s m_{X_s}) dt = K_s^2 B_{X_s}(\tau) = K_s^2 (K_{X_s}(\tau) - m_{X_s}).
 \end{aligned}$$

Все це статистичні характеристики розраховані за однією реалізацією. Тепер визначимо відповідні характеристики за ансамблем реалізацій.

Середнє значення (математичне очікування) з урахуванням того, що випадкова величина K та процес $X(t)$ є статистично незалежними

$$m_Y(t) = M_1[KX(t)] = M_1[K]M_1[X(t)] = m_K m_X = \text{const.}$$

Отже, математичне очікування вихідного процесу є величиною сталою.

Зрозуміло, що середнє статистичне за однією реалізацією та ансамблем не збігаються: $m_{Y_s} = K_s m_{X_s} \neq m_Y(t) = m_K m_X$.

Функція автокореляції центрованого вихідного процесу $\dot{Y}(t) = \dot{K}\dot{X}(t)$, який що є, як і вхідний процес, стаціонарним

$$\begin{aligned}
 B_Y(\tau) &= \langle \dot{Y}(t)\dot{Y}(t + \tau) \rangle = M_1[(Y(t) - m_Y(t))(Y(t + \tau) - m_Y(t + \tau))] = \\
 &= M_1[(KX(t) - m_K m_X)(KX(t + \tau) - m_K m_X)] = \\
 &= M_1[(K^2 X(t)X(t + \tau) - m_K m_X M_1[KX(t + \tau)] + m_K^2 m_X^2) = \overline{K^2 X^2}(\tau) - m_K^2 m_X^2.
 \end{aligned}$$

Дисперсію процесу $Y(t)$ обчислимо як початкове значення кореляційної функції:

$$B_Y(0) = \sigma_Y^2 = \overline{K^2 X^2}(0) - m_K^2 m_X^2 = \overline{K^2 X^2} - m_K^2 m_X^2.$$

Результати обчислень за ансамблем реалізацій та одній із них не збігаються. Це наслідок того, що, незважаючи на стаціонарність процесу $Y(t)$, жодна з його реалізацій не є представницькою, а отже вихідний процес $Y(t)$ не є ергодичним.

◻

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Випадковий процес буде

1. Визначення понять: ергоди-

2.5 Ергодичні процеси та їхні кореляційні характеристики

ергодичним перш за все тільки тоді, коли він є стаціонарним у широкому значенні.

2. Для ергодичного процесу одна реалізація достатньо великої тривалості є типовим представником статистичного ансамблю в цілому.

3. Експериментальне визначення статистичних характеристик довільних випадкових процесів ґрунтується на розгляді процесів як ергодичних.

чний випадковий процес

здиференційований та зінтегрований процес, диференційовані та недиференційовані процеси, стаціонарний процес, випадковий процес Вінера.

2. Необхідну та достатню умови ергодичності випадкового процесу.

3. Умову Слуцького:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(\tau) d\tau = 0.$$



Треба вміти:

1. Визначати поняття: ергодичний випадковий процес.
2. Сформулювати необхідну та достатню умови ергодичності випадкових процесів.
3. Записати умову Слуцького.

2.6 Завдання для поточного тестування

2.6.1 Питання для поточного контролю

- Дайте визначення стаціонарного випадкового процесу у вузькому значенні
- Назвіть умову стаціонарності випадкового процесу у вузькому значенні. випадкового процесу
- Для якого процесу справджується таке співвідношення: $X(t) = X(t + Dt)$?
- Чи є функцією часового аргументу середнє статистичне, середньоквадратичне та дисперсія стаціонарного процесу?

- Чи є стаціонарним випадковий процес, математичне очікування якого змінюється в часі?
- Наведіть приклади графічних зображень реалізацій стаціонарного процесу з додатним, від'ємним та нульовим значенням середнього статистичного.
- Чи залежать кореляційні функції стаціонарного процесу від моментів визначення перерізів?
- Дайте визначення стаціонарного процесу у широкому значенні.
- Чи впливає із стаціонарності у широкому значенні стаціонарність випадкового процесу у вузькому значенні?
- Як за кореляційними функціями стаціонарного випадкового процесу визначити середньоквадратичне значення та дисперсію?
- У чому полягає суть властивості парної симетрії автокореляційних функцій випадкових процесів?
- Запишіть рівність, що встановлює взаємний зв'язок між кореляційними функціями стаціонарних нецентрованих та центрованих процесів.формулу.
- У якому разі кореляційна функція суми двох стаціонарних центрованих процесів визначається сумою кореляційних функцій складових: а) процеси некорельовані; б) процеси статистично незалежні; в) процеси некорельовані та статистично незалежні; г) процеси корельовані?
- Запишіть формулу, за якою обчислюється кореляційна функція суми двох некорельованих нецентрованих стаціонарних випадкових процесів.
- У якому разі кореляційна функція добутку двох нецентрованих стаціонарних процесів визначається добутком кореляційних функцій співмножників: а) процеси некорельовані; б) процеси статистично незалежні; в) процеси некорельовані та статистично незалежні; г) процеси корельовані?
- Що таке стаціонарно-зв'язані випадкові процеси?
- Для яких процесів справджується така рівність:

$$K_{XY}(\phi) = K_{YX}(-\phi) ?$$

2.6 Завдання для поточного тестування

- Запишіть рівність, яка відображає властивість дзеркальної симетрії функції взаємної кореляції стаціонарно-зв'язаних випадкових процесів.
- У якому разі взаємна кореляційна функція двох нецентрованих стаціонарних процесів визначається добутком їхніх математичних очікувань: а) процеси некорельовані; б) процеси статистично незалежні; в) процеси некорельовані та статистично незалежні; г) стаціонарні; д) процеси стаціонарно-зв'язані?
- Чому дорівнює взаємна кореляційна функція двох центрованих некорельованих процесів?
- Запишіть формулу для визначення взаємної кореляційної функції стаціонарного процесу та процесу, що є результатом його диференціювання, за умови, що зазначені процеси є стаціонарно-зв'язаними.
- Сформулюйте результат, на якому ґрунтується використання взаємних кореляційних функцій стаціонарно-зв'язаних процесів для виявлення корисних процесів на фоні завад.
- Що таке монохроматичний стаціонарний випадковий процес?
- Дайте визначення ергодичного процесу.
- Сформулюйте необхідну та достатню умову ергодичності стаціонарного процесу.
- Запишіть співвідношення, яке відображає умову Слуцького.
- У чому полягає практична значущість ергодичних процесів?

2.6.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Якими властивостями та характеристиками наділений випадковий процес, для якого справджується така рівність: $X(t) = X(t + Dt)$?
2. Визначити період кореляційної функції $K_X(\tau)$ випадкового стаціонарного процесу $X(t) = A_m \cos 300t + B_m \cos(700t + \varphi)$.
3. Чи є процес $X(t)$ з кореляційною функцією $K_X(t_k, t_{k+1})$ стаціонарним, якщо його математичне очікування $m_X(t) = m_X$ та дисперсія $\overline{X^2(t)} = \overline{X^2}$ не змінюються в часі?

4. Визначити взаємну кореляційну функцію $K_{YX}(\tau)$ двох стаціонарно - зв'язаних випадкових процесів $Y(t)$ та $X(t)$, якщо кореляційна функція $K_{XY}(\tau) = 16 \exp[-(\tau-1)^2]$.

5. Визначити, які з співвідношень є неправильними та чому:

а) $B_{\dot{X}}(t_k, t_{k+1}) = B_{\dot{X}}(t_{k+1}, t_k)$; б) $K_{XY}(t_k, t_{k+1}) = K_{YX}(t_k, \tau)$;

в) $K_{XY}(\tau, t_k) = K_{XY}(t_k, t_{k+1})$ г) $K_X(t_k, 0) = K_X(t_k, t_k) = \sigma_X^2(t_k)$?

6. Яким із співвідношень задовольняють кореляційні функції стаціонарного випадкового процесу:

а) $K_X(0) > 0$; б) $|K_X(\tau)| \leq \overline{X^2}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau \geq 0$;

г) $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$?

7. Які з наведених співвідношень є справедливими або ні та чому і за яких умов: а) $K_Z(\tau) = K_X(\tau)B_{\dot{Y}}(\tau)$; б) $B_Z(\tau) = B_{\dot{X}}(\tau)B_{\dot{Y}}(\tau)$; в) $\rho_Z(\tau) = \rho_X(\tau) \pm \rho_Y(\tau) \pm 2m_X m_Y$?

8. Які з наведених на рис.2.5 графіків можуть зображувати кореляційні характеристики випадкових стаціонарних процесів?

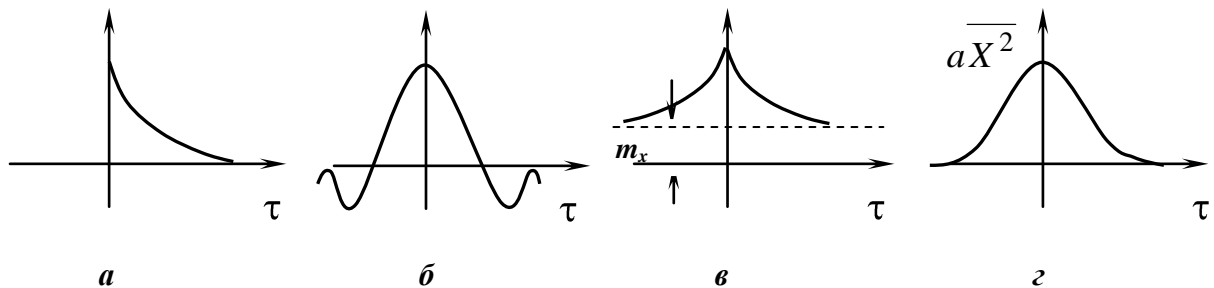


Рисунок 2.5 – Приклади кореляційних функцій.

9. Випадковий процес $X(t) = A$, де A - випадкова величина, математичне очікування якої $m_X = 10$, а дисперсія $\sigma_X^2 = 25$. Цей процес може реєструватися тільки на фоні незалежного від $X(t)$ шуму $N(t)$ з автокореляційною функцією $K_N(\tau) = 100 \exp(-10|\tau|)$. Обчислити автокореляційну функцію суми процесів $X(t)$ та $N(t)$.

10. Два випадкових процеси описуються такими співвідношеннями: $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $Y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi)$, де φ - випадкова величина з рівномірним законом розподілу, а $A, B = \text{const}$. Визначити функцію взаємної кореляції процесів $X(t) + Y(t)$ та $X(t) - Y(t)$.

2.6 Завдання для поточного тестування

11. Обчислити автокореляційну функцію процесу $X(t) - Y(t)$, якщо $K_X(\tau) = 10e^{-5|\tau|} \cos 20\tau$, $K_Y(\tau) = 5 \sin 10\tau / 10\tau$. Процеси $X(t)$ та $Y(t)$ є незалежними.

12. Два стаціонарних незалежних процеси $X(t)$ та $Y(t)$ характеризуються такими автокореляційними функціями $K_X(\tau) = 25e^{-10|\tau|} \cos \pi\tau$, $K_Y(\tau) = 16 \sin 50\pi\tau / 50\pi\tau$. Визначити автокореляційну функцію процесу, що $Z(t) = X(t)Y(t)$.

13. У радіолокаційній системі з рознесеним прийомом приймачі розміщені на такій відстані один від одного, що сигнали $X(t)$, $Y(t)$ і $Z(t)$ з нормальними законами розподілу ймовірності, нульовими значеннями математичних очікувань та дисперсіями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 3$, $\sigma_Z^2 = 12$ є статистично незалежними. Визначити коефіцієнт кореляції R_{UV} для вихідних сигналів $U(t) = X(t) + Z(t)$ і $V(t) = Y(t) + Z(t)$.

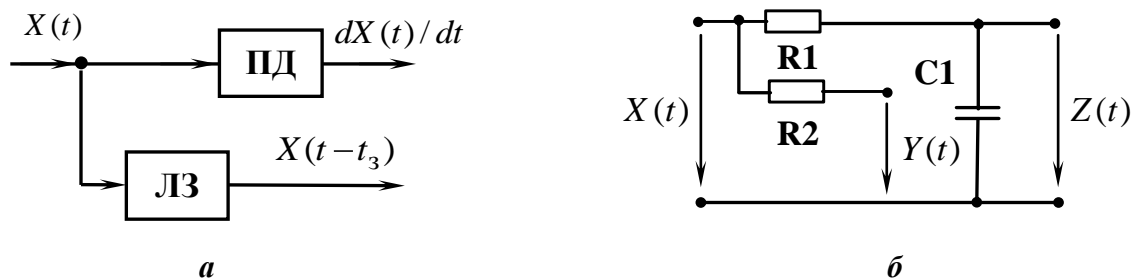


Рисунок 2.6 - Приклади систем перетворення процесів.

14. Радіотехнічна система складається із лінії затримки, час затримки якої t_3 , та пристрою диференціювання (рис. 2.6, а).

Знайти взаємну кореляційну функцію процесів $X(t - t_3)$ та $dX(t)/dt$, якщо $X(t)$ є стаціонарним процесом із нульовим математичним очікуванням та кореляційною функцією $K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|} (1 = \alpha|\tau|)$

15. На вході системи, що складається з двох паралельних RC ланок, діє стаціонарний білий шум $X(t)$ (рис. 2.6, б). Визначити взаємну кореляційну функцію $K_{YZ}(\tau)$ процесів $Y(t)$ та $Z(t)$.

16. Обґрунтувати, які з зображених на рис. 2.7 функцій не можуть бути автокореляційними?

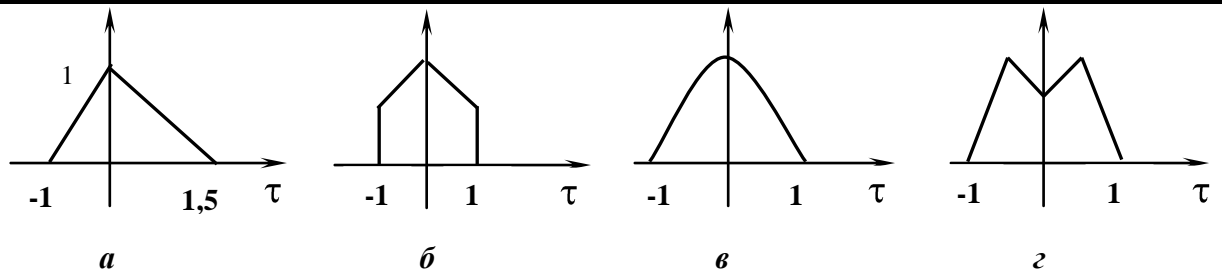


Рисунок 2.7- Графіки функціональних залежностей.

3 Імовірнісні характеристики випадкових процесів

3.1 Математична модель випадкового процесу

Процеси та сигнали можна описати точно визначеними функціями часу та/чи просторової координати. Тоді характер розвитку процесу чи сигналу в майбутньому можливо завбачити достовірно, а їх миттєві значення для будь-яких моментів часу точно визначити. Це процеси чи сигнали з наперед відомими характеристиками та параметрами і називаються вони **детермінованими**.

Фактично, жоден реальний процес не задовольняє зазначене. Неможливо задати достатню кількість параметрів, котра б описувала реальний процес як достовірну подію. За своєю природою вони випадкові. Це означає, що якщо багатократно спостерігати випадковий процес, то кожного разу він буде протікати по-іншому. До таких процесів, перш за все можна віднести процеси, пов'язані з передаванням та прийомом повідомлень, діями заводів, мікроскопічними флуктуаційними явищами в елементах технічних об'єктів тощо.

Прикладами таких процесів можна вважати:

- випромінювані передавачем коливання;
- власні шуми приймальних пристроїв;
- атмосферні, індустриальні завади;
- електричні сигнали каналів зв'язку, які випадковим чином змінюються внаслідок взаємного впливу каналів.

Все це процеси, не наділені абсолютно незмінними параметрами. Ось чому, випадковий процес описується так званою **випадковою функцією** часу чи/та просторової координати. На відміну від детермінованої значення випадкової функції точно завбачені бути не можуть, вони є **випадковими величинами**.

Функція дійсних аргументів називається випадковою, якщо її значення є випадковою величиною для конкретних значень аргументів.

Отже, випадкою вважається така функція, яка в окремому дослідженні може прийняти той чи інший конкретний вигляд, але який, попередньо невідомо.

Підкреслимо, що в якості аргументу випадкової функції може бути не тільки час, а і об'єм, вага, площа, частота, тощо. Так, наприклад, товщина нитки є випадковою функцією відстані до її кінця.

Конкретна функція, яка описує випадковий процес у одному досліді (під час одного спостереження), називається **реалізацією** випадкової функції, процесу чи сигналу. Кожна реалізація вже не є випадковою і подається детермінованою функцією свого аргументу.

Конкретні реалізації процесів називають **траєкторіями**, а функції, що їх описують, **вибірковими функціями**.

Повна сукупність всіх можливих реалізацій випадкового процесу називається **статистичного ансамблю**. Наприклад, таким ансамблем є набір сигналів, які можливо одночасно спостерігати на виходах повністю однакових генераторів напруги. Або послідовність радіоімпульсів на вході радіолокатора, коли їхні параметри випадково змінюються із зміною умов розповсюдження імпульсів.

У подальшому, якщо не буде обумовлене інше, вважатимемо випадкову функцію та її реалізації функціями одного аргументу t .

Довільну випадкову функцію позначатимемо великими буквами латинського алфавіту $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ з вказуванням аргументу t в дужках, а їх відповідні окремі реалізації – малими буквами $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ з індексом знизу, що відбиває номер реалізації. Можливі і інші позначення: наприклад, $\xi(t)$ - випадковий процес, а $\xi^k(t)$ - його k -та реалізація.

Таким чином, випадковий процес визначається множиною функцій (ансамблем)

$$X(t) = \{x_i(t), t \in T\}, \quad (3.1)$$

для яких встановлено множину значень T аргументу t (область визначення випадкового процесу) та множину D_X – область його значень, якій належать можливі значення $X(t)$.

Співвідношення (3.1) разом з областями значень функції та визначення аргументу і становлять **математичну модель випадкового процесу**.

Зважаючи на те, що миттєві значення випадкової функції є також величинами випадковими, випадковий процес і сигнал характеризується додатково ще і ймовірнісною мірою.

3.1 Математична модель випадкового процесу

На рис.3.1 наведено ансамбль із трьох реалізацій довільного випадкового процесу. Ці реалізації мають неперервну структуру. Вони приймають будь-які значення в межах заданої області можливих значень функції та можуть бути визначені для будь-якого значення аргументу t .

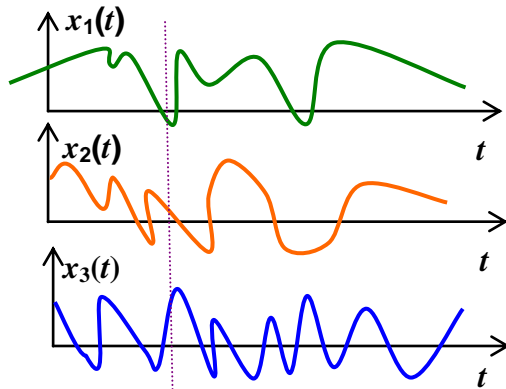


Рисунок 3.1 - Реалізації випадкового процесу.

Таке є визначальним для **неперервних випадкових процесів**

У разі, якщо миттєві значення процесу є величинами дискретними, приймають строго визначені, і ніякі інші, відлікові значення, процеси називаються **дискретними**. Наприклад,

напряга на виході реле, яка випадковим чином приймає значення 0 або 100 В залежно від того замкнені чи розімкнені контакти реле. Одна з можливих реалізацій дискретного випадкового процесу на рис. 3.2.

Підкреслимо, що зовсім не обов'язково, щоб конкретні реалізації випадкового процесу відображались функціями з дуже складною, нерегулярною в часі поведінкою.

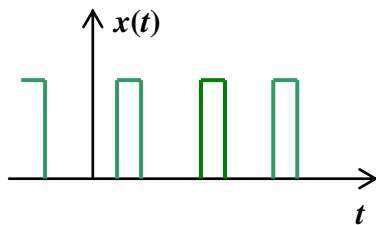


Рисунок 3.2 - Дискретна реалізація випадкового процесу.

Так, наприклад, гармонічне коливання $S_m \cos(\omega t + \varphi)$, у якого один із трьох параметрів S_m , ω , φ є випадковою величиною, що приймає конкретне значення в окремій реалізації. Випадковий характер такого коливання зумовлений неможливістю априорі завбачити значення цього параметру.

Зупинимось на такому понятті як **переріз** випадкового процесу. На рис. 3.1 на відстані t_1 від початку координат проведемо вертикальну пряму та відмітимо точки її перетину з реалізаціями процесу $X(t)$. Ординати цих точок – $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, $x_3(t_1)$ – миттєві значення процесу в момент часу t_1 .

Така сукупність миттєвих значень у довільний момент часу носить назву **перерізу випадкового процесу**:

$$X(t_1) = \{x_k(t_1)\} .$$

Слід зазначити, що $X(t_1)$ є випадковою величиною – дискретною або неперервною чи змішаною залежно від структури (характеру) випадкового процесу.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Для реальних процесів неможливо задати достатню кількість параметрів, яка б описувала їх як достовірну подію. За своєю природою вони випадкові. Це означає, що якщо багатократно спостерігати випадковий процес, то кожного разу він буде протікати дещо по-іншому.

2. На відміну від детермінованої функції значення випадкової є випадковими величинами.

3. Випадкові процеси характеризуються додатково ще і ймовірнісною мірою.



Слід запам'ятати:

1. Характер розвитку детермінованих процесів чи сигналів у майбутньому можливо завбачити достовірно, а їхні миттєві значення для будь-яких моментів часу точно визначити.

2. Визначення понять: випадкова функція, реалізація випадкової функції, траєкторія, вибіркова функція, статистичний ансамбль, математична модель та переріз випадкового процесу.

3. Характерні особливості випадкових неперервних, дискретних та змішаних випадкових процесів.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: випадкова функція, реалізація випадкової функції, траєкторія, вибіркова функція, статистичний ансамбль, математична модель та переріз випадкового процесу чи сигналу.

3.2 Закони розподілу випадкових процесів

Розглянемо ряд перерізів деякого випадкового процесу $X(t)$ в n точках (рис. 3.3), відстань між якими будемо вважати різною. Кожному перерізу t_k відповідає випадкова величина $X(t_k)$, яку можна описати такими ймовірнісними характеристиками, як **одновимірна функція розподілу ймовірності** та **одновимірна функція щільності ймовірності**.

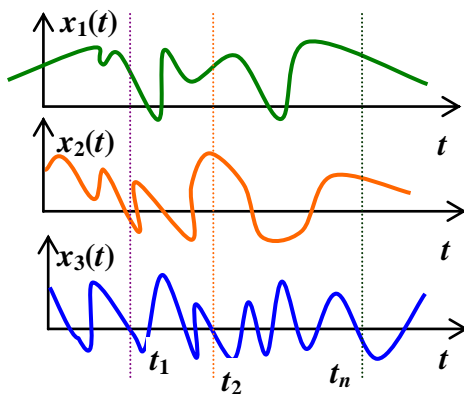


Рисунок 3.3 - Перерізи випадкового процесу.

Очевидно, що в різних перерізах ці функції, в загальному випадку, будуть різними. Випадковий процес у цьому разі можна охарактеризувати випадковою величиною, що змінює свої ймовірнісні властивості зі зміною аргументу t . Однак слід враховувати, що миттєві значення процесу в сусідніх перерізах (якщо відстань між ними невелика) в якійсь мірі залежать одне від одного. Тобто, конкретне значення в одному перерізі визначає з деякою

ймовірністю наступне (сусіднє). Отже, випадковий процес на інтервалі $[t_1, t_n]$ можна оцінювати системою із 1, 2, 3, ..., n випадкових величин, для яких встановлені відповідні ймовірнісні характеристики з урахуванням зв'язку між випадковими величинами в різних перерізах. Тоді йдеться про **одновимірні, двовимірні, тривимірні, ..., n – вимірні ймовірнісні** характеристики (**закони розподілу**) випадкового процесу.

3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу

Такі закони є ймовірнісними характеристиками випадкового процесу відносно одного перерізу і характеризують процес у статичі.

Інтегральний закон. Припустімо, що в момент часу t_k переріз процесу визначається випадковою величиною $X(t_k) = \{x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)\}$. Крім того, зафіксуємо деякий рівень X_k можливих миттєвих

значень процесу $X(t)$. Очевидно, що для заданого ансамблю деякі реалізації в точці t_k набудуть значень, які перевищать X_k , а інші – що будуть меншими за X_k . При зміні рівня X_k , наприклад, на X_{k+1} , зміниться і кількість реалізацій, які в точці t_k перевищують цей рівень. Цікаво б було знати: наскільки ймовірно, що всі реалізації випадкового процесу набудуть в точці t_k значень, менших за вибраний рівень X_k . На це і дає відповідь одновимірний інтегральний закон розподілу ймовірності випадкової величини або **одновимірна функція розподілу** $F_1(X_k, t_k)$.

Функція розподілу ймовірності $F_1(X_k, t_k)$ визначає ймовірність того, що випадкова величина $X(t_k)$ в перерізі t_k набуде значення, яке не перевищить рівень X_k :

$$F_1(X_k, t_k) = P(X(t_k) < X_k). \quad (3.2)$$

Таким чином, всі реалізації випадкового процесу $X(t)$ перетнуть переріз у точці t_k нижче рівня X_k з ймовірністю $F_1(X_k, t_k)$ (рис. 3.4, а).

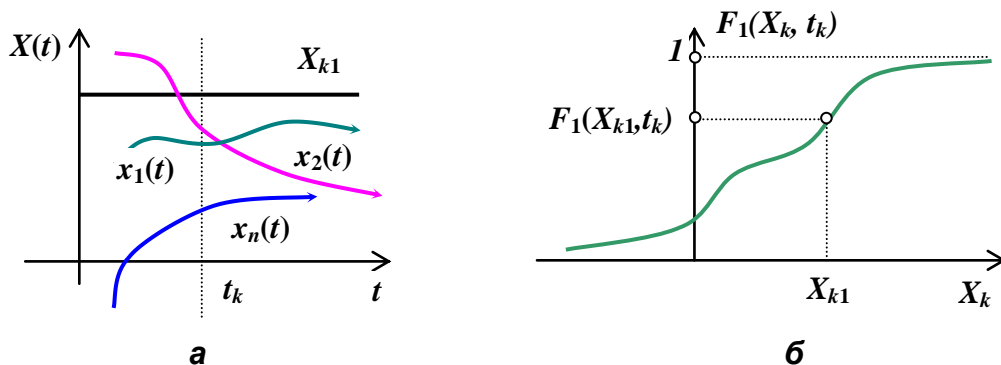


Рисунок 3.4 - До визначення одновимірної функції розподілу ймовірності.

Зрозуміло, що іншому випадковому процесу буде відповідати своя одновимірна функція розподілу. На рис. 3.4, б показана одна із можливих функцій розподілу випадкового процесу, реалізації якого в перерізі t_k проходять нижче рівня X_{k1} з ймовірністю $F_1(X_{k1}, t_k)$. Слід зазначити, що одновимірна функція розподілу є функцією одного аргументу X_k , а величина t_k є її параметром.

Основні властивості одновимірної функції розподілу:

- $F_1(X_k, t_k)$ – не випадкова функція дійсного аргументу X_k ;

3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу

- $F_1(X_k = -\infty, t_k) = 0$ - ймовірність того, що випадкова величина в будь-який момент часу прийме значення, яке не перевищує мінус нескінченність, дорівнює нулю;
- $F_1(X_k = \infty, t_k) = 1$ - подія, за якої значення випадкової величини будуть завжди меншими нескінченності, є достовірною;
- $F_1(X_k, t_k)$ є неспадною функцією, значення якої лежать в межах $[0,1]$ і при $X_2 \geq X_1$, $F_1(X_2) > F_1(X_1)$.

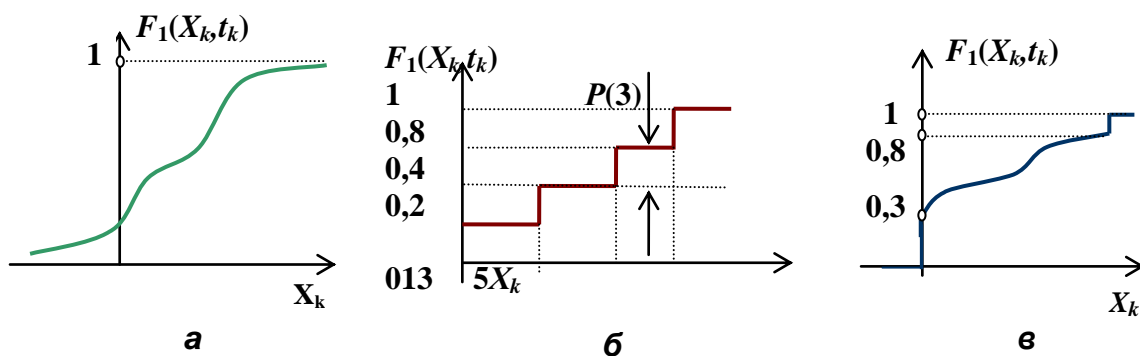


Рисунок 3.5 - Одновимірна функція розподілу ймовірностей неперервного (а), дискретного (б) та змішаного (в) процесів.

Згідно з останньою властивістю для неперервної випадкової величини $X(t_k)$ закон розподілу $F_1(X_k, t_k)$ описується неперервною, неспадною без стрибків функцією (рис. 3.5, а).

Для дискретної випадкової величини функція розподілу $F_1(X_k, t_k)$ виражається через суму одиничних ступінчастих функцій $1(t) = \sigma(t)$ з ваговими коефіцієнтами P_i (рис. 3.5, б), кожний з яких є ймовірністю того, що випадкова величина $X(t_k)$ в перерізі t_k прийме значення X_i :

$$F_1(X_k, t_k) = \sum_{i=1}^n P_i \sigma(X_k - X_i),$$

де $P_i = P(X_i) = P(X_{i-1} < X(t_k) \leq X_i) = F_1(X_i) - F_1(X_{i-1})$. Графічно $P(X_i)$ - висота сходинки функції розподілу ймовірностей, що відповідає значенню X_i .

Змішаний випадковий процес характеризується комбінацією неперервних і дискретних величин, а отже, неперервних та стрибкоподібних ділянок на графічному зображенні функції розподілу ймовірностей (рис. 3.5, в).

► **Приклад.** Одновимірна функція розподілу випадкового процесу

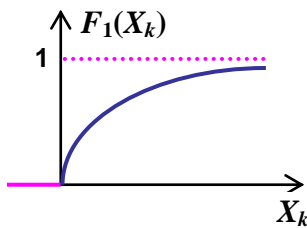


Рисунок 3.6 - Приклад інтегрального закону розподілу ймовірності.

$$F_1(X_k, t_k) = \begin{cases} 0, & -\infty < X_k < 0; \\ 1 - e^{-X_k}, & 0 \leq X_k < \infty. \end{cases}$$

Графічне зображення подано на рис. 3.6. Визначити ймовірність того, що

а) $X(t_k) \leq 0,25$; б) $0,3 < X(t_k) \leq 0,7$; в) $X(t_k) > 0,5$.

Задана функція $F_1(X_k, t_k)$ задовольняє всім властивостям інтегрального закону розподілу ймовірності.

$$P(X(t_k) \leq 0,25) = F_1(0,25) = 1 - e^{-0,25} = 0,2212;$$

$$P(0,3 < X(t_k) \leq 0,7) = F_1(0,7) - F_1(0,3) = 1 - e^{-0,7} - 1 + e^{-0,3} = 0,2442;$$

$$P(X(t_k) > 0,5) = 1 - F_1(0,5) = 1 - P(X(t_k) \leq 0,5) = 1 - 1 + e^{-0,5} = 0,6065.$$



► **Приклад.** Дискретний випадковий процес характеризується $F_1(X_k, t_k)$, що зображена на рис. 3.7. Обчислити: а) ймовірність того, що $X(t_k) \leq 5$; б) сумарну ймовірність значень 0, 1, 3, 5; в) ймовірність того, що $1 < X(t_k) \leq 5$.

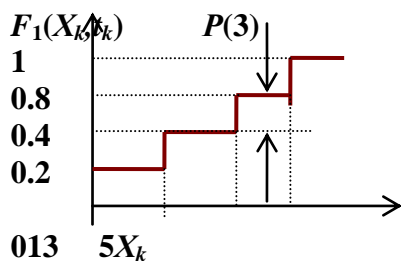


Рисунок 3.7 - Функція розподілу дискретного процесу.

Ймовірність $P(X(t_k) \leq 5) = F_1(5) = 1$ (береться верхнє значення функції розподілу).

Сумарна ймовірність значень 0, 1, 3, 5 є такою:

$$P(0) + P(1) + P(3) + P(5) = 0,2 + 0,2 + 0,4 + 0,2 = 1.$$

Ймовірність приналежності до зазначеного інтервалу:

$$P(1 < X(t_k) \leq 5) = F_1(5) - F_1(1) = 1,0 - 0,4 = 0,6.$$

Математична модель функції розподілу ймовірності:

$$\begin{aligned} F_1(X_k, t_k) &= P(0)\sigma(X_k - 0) + P(1)\sigma(X_k - 1) + P(3)\sigma(X_k - 3) + P(5)\sigma(X_k - 5) = \\ &= 0,2\sigma(X_k - 0) + 0,2\sigma(X_k - 1) + 0,4\sigma(X_k - 3) + 0,2\sigma(X_k - 5). \end{aligned}$$



3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу

Диференціальний закон розподілу ймовірності, або **функція щільності ймовірності** характеризує швидкість зміни функції розподілу.

Для перерізу в точці t_k **одновимірною функцією щільності ймовірності** $p_1(X_k, t_k)$ випадкової величини $X(t_k)$ визначається як границя відношення ймовірності приналежності її значень до інтервалу $[X_k, X_k + dX_k]$ до довжини цього інтервалу dX_k за умови, що його довжина $dX_k \rightarrow 0$:

$$p_1(X_k, t_k) = \lim_{dX_k \rightarrow 0} \frac{P(X_k \leq X(t_k) \leq X_k + dX_k)}{dX_k}. \quad (3.3)$$

Розмірність одновимірної функції щільності ймовірності є оберненою до розмірності величини $X(t_k)$.

Згідно з визначенням ймовірність того, що всі реалізації випадкового процесу в момент часу t_k набудуть значень, які лежать в інтервалі dX_k (рис. 3.8), дорівнює $p_1(X_k, t_k)dX_k = dF_1(X_k, t_k)$. Така ймовірність називається **елементом ймовірності**.

Це дозволяє записати диференціальний закон розподілу у вигляді:

$$p_1(X_k, t_k) = dF_1(X_k, t_k) / dX_k. \quad (3.4)$$

Згідно з (3.4) знаходимо зв'язок між одновимірними інтегральним та диференціальним законами розподілу ймовірності в інтегральній формі:

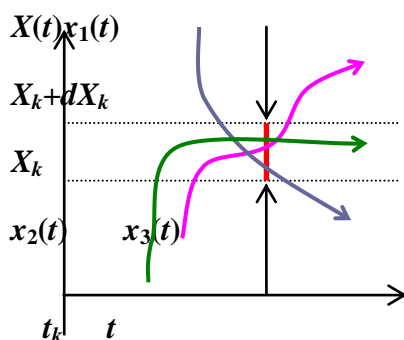


Рисунок 3.8 – До визначення одновимірного диференціального закону розподілу.

$$F_1(X_k, t_k) = \int_{-\infty}^{X_k} p_1(\lambda_k, t_k) d\lambda_k = \quad (3.5)$$

$$= P(-\infty < X(t_k) \leq X_k).$$

Формули (3.4) та (3.5) пояснюють походження назв диференціального та інтегрального законів.

Відомі наступні властивості одновимірної щільності ймовірностей:

➤ **невід'ємність (додатня визначеність):**

$$p_1(X_k, t_k) \geq 0. \quad (3.6)$$

Оскільки $F_1(X_k, t_k)$ є неспадаючою, то згідно з (1.4) $p_1(X_k, t_k) \geq 0$;

➤ **нормованість:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) dX_k = 1. \quad (3.7)$$

Співвідношення (3.7) називають **умовою нормування**, яка відображає той факт, що які б значення не набувала величина $X(t_k)$, вони завжди будуть в межах інтервалу $(-\infty, \infty)$.

Виходячи із геометричного значення визначеного інтегралу, відповідно до (3.5) ймовірність попадання значень випадкового процесу в одному перерізі в інтервал $(-\infty, X_k]$ дорівнює площі, обмеженій зверху графіком одновимірної функції щільності ймовірності, а знизу відрізком $(-\infty, X_k]$ осі абсцис (рис. 3.9). За умовою нормування площа, обмежена графіком одновимірної функції щільності ймовірності і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

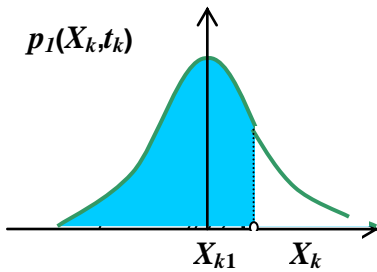


Рисунок 3.9 – Графічна інтерпретація одновимірної функції щільності ймовірності.

У практичних застосуваннях дуже корисне і таке співвідношення:

$$P(a \leq X(t_k) \leq b) = \int_a^b p_1(X_k, t_k) dX_k = F_1(b; t_k) - F_1(a; t_k). \quad (3.8)$$

◆ **Ймовірність того, що значення процесу $X(t)$ в перерізі t_k будуть знаходитися в інтервалі $[a, b]$ дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу.**

Геометрично - це площа, обмежена на інтервалі $[a, b]$ графіком одновимірного диференціального закону та віссю абсцис (інтервалом $[a, b]$).

► **Приклад.** Визначити відношення між константами α та β для функції $p_1(X_k) = \alpha e^{-\beta|X_k|}$, яка описує закон розподілу Лапласа.

Згідно з умовою нормування

3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\beta|X_k|} dX_k =$$

$$\int_{-\infty}^0 \alpha e^{\beta X_k} dX_k + \int_0^{\infty} \alpha e^{-\beta X_k} dX_k = \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta X_k} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta X_k} \Big|_{-\infty}^0 = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}.$$



Серед різноманітних законів розподілу ймовірності особливе місце з ряду причин займає **нормальний закон**.

Одновимірна функція щільності ймовірності для нормального закону

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_k - m_X(t_k))^2}{2\sigma_X^2}}; -\infty < X_k < \infty, \quad (3.9)$$

де $m_X(t_k)$ - математичне очікування процесу або його середньостатистичне значення; σ_X - середньоквадратичне значення (стандартне відхилення).

Коротко зупинимося на головних із причин.

➤ **Нормальний закон розподілу служить доброю математичною моделлю різних реальних явищ.**

Наприклад, шум, який породжується тепловим рухом електронів у провіднику (**дробовий шум** у електронних приладах, природа якого зумовлена статистичною незалежністю переміщення носіїв заряду).

➤ **Нормальний закон розподілу належить до числа небагатьох, які дають змогу описувати процеси не через одну, а довільну систему випадкових величин.**

➤ **Випадковий процес із нормальним законом розподілу ймовірності повністю описується одновимірними моментними функціями першого $m_X(t)$ та другого $\sigma_X^2(t)$ порядків.** Для інших процесів таке твердження не є справедливим.

➤ **Будь-які лінійні операції над процесами з нормальним законом розподілу дають процес із законом розподілу такого самого виду.**

- Повний статистичний аналіз більшості систем (лінійних чи нелінійних) можливий за умов, що випадкові процеси характеризуються нормальним (гауссовим) законом розподілу.
- Виходячи з того, що багато реальних явищ, які носять випадковий характер, є результатом суперпозиції окремих подій, відповідно до *центральної граничної теореми*, незалежно від виду функції щільності ймовірності окремих складових (а дуже часто вони невідомі), можливо очікувати, що функція щільності ймовірності сумарного процесу буде нормальною.

Графік нормальної функції щільності ймовірності подано на рис. 3.10, а.

Основні його особливості:

- Має дзвонову форму з одним максимумом, що відповідає математичному очікуванню $m_X(t_k)$.
- Графік є симетричним відносно значення математичного очікування.
- Максимальне значення функції обернено, а її ширина прямо пропорційна середньоквадратичному значенню σ_X .
- На рівні 0,607 функція $p_1(X_k, t_k)$ має ширину $2y_X$. Для відповідних значень аргументу абсолютне значення похідної $p_1(X_k, t_k)/dX_k$ досягає максимуму.

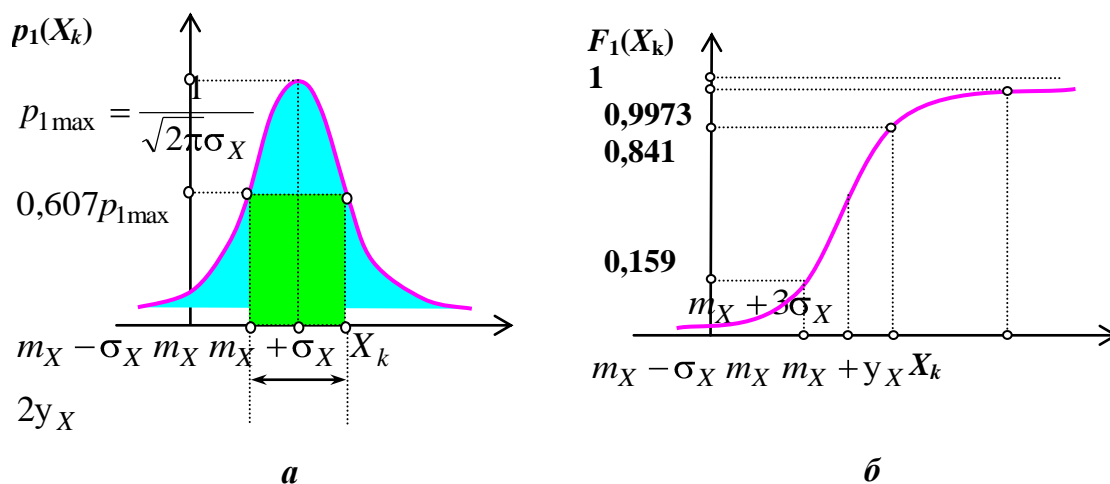


Рисунок 3.10 – Диференціальний (а) та інтегральний (б) нормальний закон розподілу ймовірності.

3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу

Функція розподілу ймовірності $F_1(X_k)$ для нормального закону не може бути записана компактно через елементарні. Для обчислення її значень використовують **табульовані функції**. Слід звернути увагу, що єдності в цьому питанні немає. Розглянемо різні підходи.

На основі табульованого інтервалу виду

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.10)$$

функція розподілу

$$F_1(X_k, t_k) = \Phi\left(\frac{X_k - m_X}{\sigma_X}\right). \quad (3.11)$$

Інтеграл (3.10) за формою в точності збігається з функцією розподілу **нормованого гауссового закону** розподілу, для якого математичне очікування $m_X = 0$, а дисперсія $\sigma_X^2 = 1$. Такі параметри є характерними для центрованих гауссових випадкових процесів. Ось чому (3.10) називають ще **нормованою функцією розподілу** або **інтегралом ймовірності**.

Значення інтегралу $\Phi(s)$ ймовірності наводяться в таблицях, як правило, для невід'ємних значень аргументу s . Тому часто є корисним додаткове співвідношення:

$$\Phi(-s) = 1 - \Phi(s). \quad (3.12)$$

Деякі автори для інтеграла ймовірності $\Phi(s)$ використовують позначення виду $\text{erf}(s) = \Phi(s)$ і називають його **функцією похибок**.

Однак інші автори визначають функцію похибок так:

$$\text{erf}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi(\sqrt{2}s) - 1 \quad (3.13)$$

і також називають її **функцією Лапласа** або **інтегралом похибок** чи **інтегралом ймовірності похибок**.

Така різноманітність опису інтегрального нормального закону потребує уважного ставлення до визначень, що зустрічаються в літературі для дослідження процесів із нормальним законом

розподілу. Графік нормальної функції розподілу ймовірності зображено на рис. 3.10, б.

► **Приклад.** Визначити ймовірність того, що в перерізі t_k відхилення миттєвих значень процесу $X(t)$ з нормальним законом ліворуч і праворуч від середнього не перевищать $l\sigma_X$.

За означенням ймовірність попадання у вказаний інтервал

$$\begin{aligned} P(m_X - l\sigma_X < X_k < m_X + l\sigma_X) &= F(m_X + l\sigma_X) - F(m_X - l\sigma_X) = \\ &= \Phi\left(\frac{l\sigma_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(-\frac{l\sigma_X}{\sigma_X}\right) = \Phi(l) - 1 + \Phi(l) = 2\Phi(l) - 1. \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що значення інтегралу ймовірності $\Phi(3)=0,99865$, то $P(|X_k - m_X| \leq 3\sigma_X) = 2\Phi(3) - 1 = 0,99865 \times 2 - 1 = 0,9973 \approx 1$.

◆ **Ймовірність відхилення миттєвих значень випадкового процесу з нормальним законом розподілу від математичного очікування ліворуч і праворуч на $3\sigma_X$ приблизно дорівнює одиниці.**

Іншими словами, випадковий процес із нормальним законом розподілу в перерізі t_k малоімовірно може відхилитися від $m_X(t)$ на величину, що перевищує $3\sigma_X(t)$. У літературі цей висновок називають “**правилом трьох сигм**”.

◻

Слід вказати і інші подання нормального диференціального закону розподілу ймовірності:

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\rho^2(X_k - m_X(t_k))^2}{E^2}}; \quad -\infty < X_k < \infty, \quad (3.14)$$

де $E = \rho\sqrt{2}$ - **ймовірнісне** або **середнє відхилення**; $\rho = 0,476936$.

► **Приклад.** Можливий результат вимірювання тривалості $t_{\text{імп}}$ відеоімпульсу подпорядковується нормальному закону розподілу. Ймовірнісне відхилення E методу вимірювання дорівнює 0,001 с. Визначити

3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу

таке число ε , за якого з ймовірністю 0,997 задовольняється нерівність $|t_{\text{имп}} - t_0| < \varepsilon$, де t_0 - дійсне значення тривалості відеоімпульсу.

За умовою t_0 математичне очікування процесу вимірювання тривалості відеоімпульсу, результати якого визначають випадкову величину $t_{\text{имп}}$, розподілену нормально.

Ймовірність відхилення 0,997 даних експерименту від дійсного значення t_0 задовольняє умову:

$$P(t_0 + \varepsilon \leq t_{\text{имп}} \leq t_0 - \varepsilon) = \Phi\left(\frac{t_0 + \varepsilon - t_0}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{t_0 - \varepsilon - t_0}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,997.$$

Ураховуючи (3.12), дістанемо

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = 0,997 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0,9985.$$

Інтеграл ймовірності набуває такого значення, коли аргумент $(\varepsilon / \sigma) = 2,97$. Шукане значення

$$\varepsilon = 2,97\sigma = 2,97E / \rho\sqrt{2} = 2,97 \cdot 0,001 / 0,436976 \sqrt{2} = 0,0044 \text{ с.}$$

■

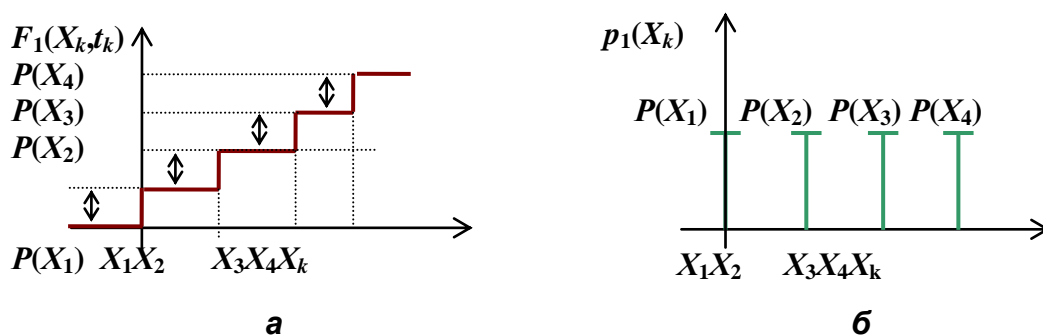


Рисунок 3.11 - Інтегральний (а) та диференціальний (б) закони розподілу ймовірності дискретного процесу.

Відповідно до (3.14) одновимірний диференціальний закон розподілу такого процесу

$$p_1(X_k, t_k) = P(X_1, t_k)\delta(X_k - X_1) + P(X_2, t_k)\delta(X_k - X_2) + \dots$$

Отже, у разі дискретних процесів функція щільності ймовірності $p_1(X_k, t_k)$ є послідовністю дельта-імпульсів, зосереджених у точках

$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ із площею кожного, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина $X(t_k)$ набуває значення відповідно $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ (рис. 3.11, б).

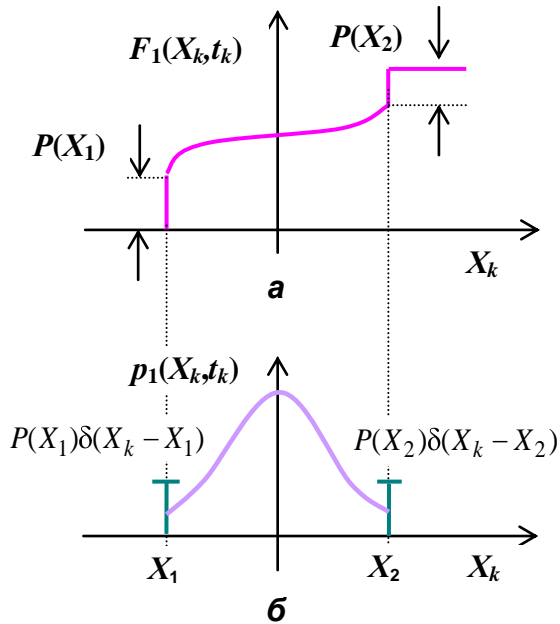


Рисунок 3.12 - Інтегральний (а) та диференціальний (б) закони розподілу змішаного процесу.

Поняття дельта-функції застосовується при записі диференціального закону і для процесів змішаного типу (дискретно-неперервних). Одновимірна функція розподілу ймовірності таких процесів поряд з ділянками плавного зростання містить стрибки (рис. 3.12, а), висота яких пропорційна ймовірностям набування величиною $X(t_k)$ дискретних значень.

Функція щільності в цих точках набуває нескінченних значень, що відображається дельта-імпульсами з площею відповідної ймовірності (рис. 3.12, б).

► **Приклад.** Знайти функцію щільності ймовірності процесу $X(t)$, для якого функція розподілу $F_1(X_k, t_k)$ є такою, як зображено на рис. 3.13, а.

Математична модель заданої функції розподілу ймовірності є такою:

$$F_1(X_k, t_k) = P(-1)\sigma(X_k + 1) + P(1)\sigma(X_k - 1) + P(2)\sigma(X_k - 2).$$

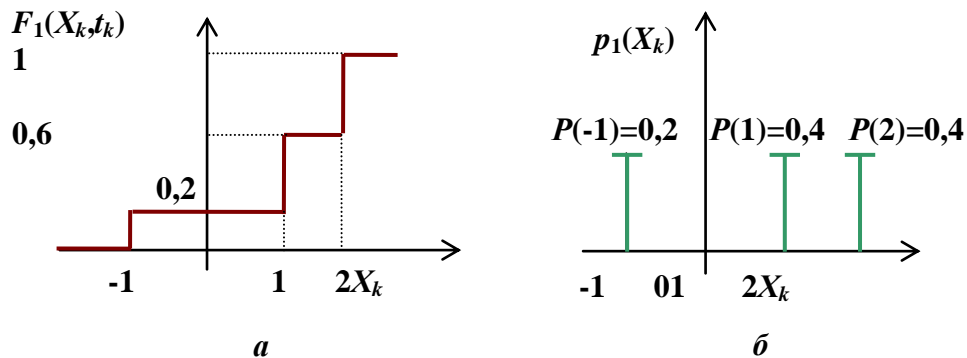


Рисунок 3.13 - Приклад функції розподілу (а) та функції щільності (б) ймовірності дискретного процесу.

3.2.1 Одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу

Диференціювання останнього співвідношення дає функцію щільності ймовірності (див. рис. 3.13, б)

$$p_1(X_k, t_k) = \frac{d F_1(X_k, t_k)}{d X_k} = P(-1)\delta(X_k + 1) + P(1)\delta(X_k - 1) + P(2)\delta(X_k - 2).$$



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Одновимірні закони розподілу ймовірності описують випадковий процес відносно одного перерізу.

2. Будь-які лінійні операції над об'єктами з нормальним законом розподілу дають процес із законом розподілу такого самого виду.

3. Різноманітність опису інтегрального нормального закону потребує уважного ставлення до результатів дослідження процесів із цим законом розподілу, наведених в літературі.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: одновимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу ймовірності, елементи ймовірності на прямій.

2. За інтегральним законом розподілу ймовірності визначати диференціальний та навпа-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: одновимірні інтегральний (функція розподілу) та диференціальний (функція щільності) закони розподілу ймовірності, елемент ймовірності на прямій.

2. Основні властивості інтегрального та диференціального законів розподілу ймовірності.

3. Ймовірність того, що значення процесу $X(t)$ в перерізі t_k будуть знаходитися в інтервалі $[a, b]$ дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу.

4. Особливі властивості нормального закону розподілу ймовірності.

Правило трьох сигм.

5. Зв'язок між одновимірними інтегральним і диференціальним законами розподілу ймовірності.

5. Графічне зображення інтегрального і диференціального

ки. нормального законів розподілу ймовірності.

3. Формулювати правило трьох сигм.

6. Умову нормування:

4. Записувати закони розподілу ймовірності дискретних та змішаних випадкових процесів з використанням ступінчастої та дельта функцій.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) dX_k = 1.$$

3.2.2 Двовимірні закони розподілу ймовірності

Двовимірний інтегральний закон. Виділимо два перерізи процесу $X(t)$ в неспівпадаючі моменти часу t_k та t_{k+1} , яким відповідають випадкові величини $X(t_k)$ та $X(t_{k+1})$. Тоді, ймовірність того, що миттєві значення випадкового процесу в момент часу t_k будуть меншими за X_k , а в момент t_{k+1} - за X_{k+1} визначається функцією

$$F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = \{P(X(t_k) \leq X_k; X(t_{k+1}) \leq X_{k+1})\}.$$

Це означає, що з ймовірністю $F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ будь-яка всі реалізації $x_i(t)$ випадкового процесу $X(t)$ пройдуть в перерізах t_k та t_{k+1} нижче рівня X_k та X_{k+1} відповідно (рис. 3.14, а). Геометрично двовимірна функція розподілу ймовірності дорівнює ймовірності попадання кінця вектора A в область S на площині з осями $X(t_k)$, $X(t_{k+1})$ (рис. 3.14, б).

Двовимірна функція розподілу ймовірності $F_2(X_k, X_{k+1}, t_k, t_{k+1})$ характеризується такими властивостями:

- є не випадковою функцією двох аргументів X_k, X_{k+1} ;
- імовірність того, що будь-яка реалізація $x_i(t)$ випадкового процесу $X(t)$ в точці t_k або t_{k+1} набуде значення менше $-\infty$ навіть, якщо в точках t_{k+1} або t_k відповідно вони не перевищують рівнів X_{k+1} або X_k , дорівнює нулю:

$$F_2(X_k, -\infty) = F_2(-\infty, X_{k+1}) = F_2(-\infty, -\infty) = 0;$$

3.2.2 Двовимірні закони розподілу ймовірності

- подія, що випадковий процес у перерізах t_k та t_{k+1} прийме значення менше за ∞ , є достовірною: $F_2(\infty, \infty) = 1$;
- є неспадною функцією за кожною змінною X_i :

$$F_2(\dot{X}_i, X_j, t_i, t_j) \geq F_2(\ddot{X}_i, X_j, t_i, t_j), \text{ якщо } \dot{X}_i \geq \ddot{X}_i$$

- задовольняє умові узгодженості:

$$F_2(\infty, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = F_1(X_{k+1}, t_{k+1}); F_2(X_k, \infty; t_k, t_{k+1}) = F_1(X_k, t_k).$$

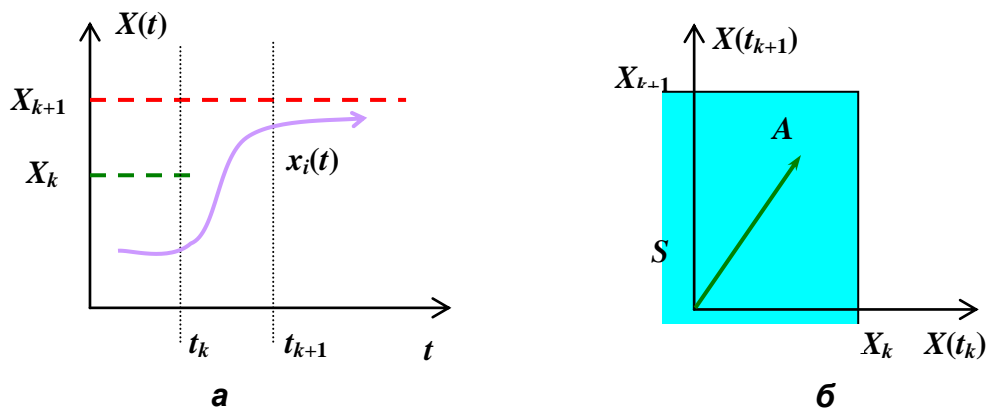


Рисунок 3.14 - До визначення двовимірного інтегрального закону розподілу ймовірності (а) та його геометричної Інтерпретації (б).

- **Приклад.** Двовимірний інтегральний закон розподілу системи із двох випадкових величин

$$F_2(X_k, X_{k+1}) = \frac{1}{\pi^2} (\arctg X_k + \frac{\pi}{2}) (\arctg X_{k+1} + \frac{\pi}{2}). \quad (3.15)$$

Визначити одновимірні функції розподілу $F_1(X_k)$ і $F_1(X_{k+1})$.

Згідно з умовою узгодженості

$$F_1(X_k) = F_2(X_k, \infty) = \frac{1}{\pi^2} (\arctg X_k + \frac{\pi}{2}) (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} (\arctg X_k + \frac{\pi}{2}); \quad (3.16)$$

$$F_1(X_{k+1}) = F_2(\infty, X_{k+1}) = \frac{1}{\pi^2} (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) (\arctg X_{k+1} + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} (\arctg X_{k+1} + \frac{\pi}{2}).$$



Зазначимо, що залежно від типу випадкового процесу подібно до одновимірного інтегрального закону розподілу двовимірна функція розподілу по кожній змінній не містить стрибків для неперервних

процесів і характеризується стрибкоподібними змінами у разі дискретних чи дискретно-неперервних процесів.

Двовимірний диференціальний закон називають ще **двовимірною функцією щільності ймовірності**.

Двовимірна функція щільності ймовірності

$p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ випадкового процесу $X(t)$ є границею відношення ймовірності події, яка полягає в тому, що випадковий процес у момент часу t_k (в перерізі t_k) набуде значення $X(t_k)$ в межах інтервалу $[X_k, X_k + dX_k]$, а в момент часу t_{k+1} – значення $X(t_{k+1})$ в межах інтервалу $[X_{k+1}, X_{k+1} + dX_{k+1}]$, до добутку довжин цих інтервалів ($dX_k \cdot dX_{k+1}$) за умови, що останні прямують до нуля:

$$p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = \lim_{\substack{dX_k \rightarrow 0 \\ dX_{k+1} \rightarrow 0}} \frac{P \left\{ \begin{array}{l} X_k \leq X(t_k) \leq X_k + dX_k; \\ X_{k+1} \leq X(t_{k+1}) \leq X_{k+1} + dX_{k+1} \end{array} \right\}}{dX_k dX_{k+1}}. \quad (3.17)$$

Отже, двовимірна функція щільності ймовірності випадкового процесу $X(t)$ пропорційна сумісній ймовірності того, що всі його реалізації в моменти часу t_k та t_{k+1} пройдуть через “ворота” B_k та B_{k+1} шириною dX_k та dX_{k+1} відповідно (рис. 3.15, а).

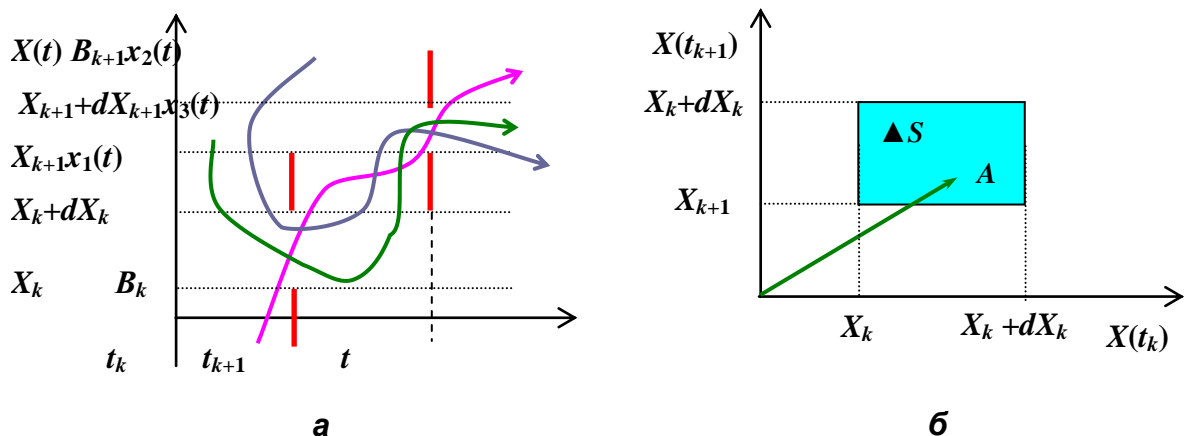


Рисунок 3.15 - До визначення двовимірного диференціального закону розподілу (а) та геометрична інтерпретація двовимірного елемента ймовірності (б).

3.2.2 Двовимірні закони розподілу ймовірності

Розмірність функції $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ є оберненою до квадрату розмірності процесу. Геометрична інтерпретація двовимірного диференціального закону є такою (рис. 3.15, б):

✦ **добуток двовимірної функції щільності ймовірності $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ на $dX_k dX_{k+1}$ дорівнює ймовірності потрапляння кінця радіус-вектора A в область площею $\Delta S = dX_k dX_{k+1}$ площини $X(t_k), X(t_{k+1})$.**

Такий добуток називають **елементом ймовірності на площині**.

Переходячи до нескінченно малих значень dX_k та dX_{k+1} , а також використовуючи визначення функції розподілу $F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$, приходимо до співвідношень, що визначають взаємозв'язок між двовимірними інтегральним та диференціальним законами розподілу ймовірності:

$$p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = \frac{\partial^2 F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})}{\partial X_k \partial X_{k+1}}. \quad (3.18)$$

Двовимірна функція щільності ймовірності $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ залежить від двох змінних X_k та X_{k+1} . Кожній точці площини $X_k, 0, X_{k+1}$, а не прямої, як у випадку одновимірної функції щільності,

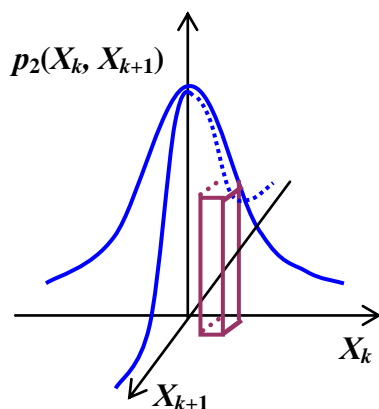


Рисунок 3.16 - Двовимірна функція щільності ймовірності та елемент ймовірності.

відповідає своє значення $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$. У цьому разі $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ описує поверхню, що розміщена над площиною $X_k, 0, X_{k+1}$. Така поверхня називається **поверхнею розподілу** (рис. 3.16). Рельєф цієї поверхні наглядно ілюструє розміщення функції щільності ймовірності над площиною.

Елемент ймовірності на площині $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})dX_k dX_{k+1}$ геометрично позначає об'єм елементарного паралелепіпеда, основа якого має площу $dX_k dX_{k+1}$, а висота дорівнює значенню $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ (рис. 3.16). Додаючи всі ці елементарні

об'єми в межах зміни аргументів X_k та X_{k+1} отримаємо об'єм під поверхнею $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ над площини $X_k, 0, X_{k+1}$, обмежену конкретними значеннями X_k та X_{k+1} :

$$F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_k) = \int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{X_{k+1}} p_2(\lambda_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1}. \quad (3.19)$$

Формула (3.19) дає змогу отримати співвідношення для визначення ймовірності попадання миттєвих значень випадкового процесу, що відповідають двом різним моментам часу, у прямокутник з вершинами $A(X_1, Y_1)$; $B(X_1, Y_2)$; $C(X_2, Y_1)$; $D(X_2, Y_2)$ на площині з координатними осями X_k та X_{k+1} :

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq X(t_k) \leq X_2; Y_1 \leq X(t_{k+1}) \leq Y_2) &= \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_1}^{Y_2} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_k dX_{k+1} = \\ &= \int_{-\infty}^{X_2} \left(\int_{Y_1}^{Y_2} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_{k+1} \right) dX_k - \int_{-\infty}^{X_1} \left(\int_{Y_1}^{Y_2} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_{k+1} \right) dX_k = \\ &= \int_{-\infty}^{X_2} \left[\left(\int_{-\infty}^{Y_2} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_{k+1} - \int_{-\infty}^{Y_1} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_{k+1} \right) \right] dX_k - \\ &- \int_{-\infty}^{X_1} \left[\left(\int_{-\infty}^{Y_2} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_{k+1} - \int_{-\infty}^{Y_1} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_{k+1} \right) \right] dX_k = \\ &= \int_{-\infty}^{X_2} \int_{-\infty}^{Y_2} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_k dX_{k+1} - \int_{-\infty}^{X_2} \int_{-\infty}^{Y_1} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_k dX_{k+1} - \\ &- \int_{-\infty}^{X_1} \int_{-\infty}^{Y_2} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_k dX_{k+1} + \int_{-\infty}^{X_1} \int_{-\infty}^{Y_1} p_2(X_k, X_{k+1}) dX_k dX_{k+1} = \\ &= F_2(X_2, Y_2) - F_2(X_2, Y_1) - F_2(X_1, Y_2) + F_2(X_1, Y_1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

► **Приклад.** Функція розподілу ймовірності системи із двох випадкових величин $F_2(X_k, X_{k+1}) = \frac{1}{\pi^2} (\arctg X_k + \frac{\pi}{2})(\arctg X_{k+1} + \frac{\pi}{2})$.

Визначити ймовірність потрапляння значень величин X_k, X_{k+1} в квадрат: $-1 \leq X_k \leq 1$; $0 \leq X_{k+1} \leq 1$.

Згідно з (3.20)

3.2.2 Двовимірні закони розподілу ймовірності

$$F_2(X_2, Y_2) = F_2(1, 1) = \frac{1}{\pi^2} (\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}) (\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi^2} (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})^2 = \frac{9}{16};$$

$$F_2(X_2, Y_1) = F_2(1, 0) = \frac{1}{\pi^2} (\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}) (\operatorname{arctg} 0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi^2} (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8};$$

$$F_2(X_1, Y_2) = F_2(-1, 1) = \frac{1}{\pi^2} [\operatorname{arctg}(-1) + \frac{\pi}{2}] (\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi^2} (-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{16};$$

$$F_2(X_1, Y_1) = F_2(-1, 0) = \frac{1}{\pi^2} [\operatorname{arctg}(-1) + \frac{\pi}{2}] (\operatorname{arctg} 0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi^2} (-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}.$$

Остаточно шукана ймовірність

$$P(\cdot) = \frac{9}{16} - \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = 0,125.$$



І на завершення приведемо без доведення (які в деяких випадках є дуже прозорими) основні властивості двовимірної функції щільності ймовірності:

➤ **є невід'ємною функцією:**

$$p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) \geq 0. \quad (3.21)$$

Справедливість такої властивості випливає з (1.18) з урахуванням того, що функція розподілу є неспадною по кожному із аргументів;

➤ **задовольняє умову нормування:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(X_k, X_{k+1}, t_k, t_{k+1}) dX_k dX_{k+1} = 1. \quad (3.22)$$

Відповідно до цієї умови ймовірність того, що будь-яка реалізація процесу $X(t)$ в точках t_k та t_{k+1} пройде нижче рівня "нескінченність" дорівнює 1; тобто така подія є достовірною. Геометрично це означає, що повний об'єм між поверхнею розподілу та площиною $X_k, 0, X_{k+1}$, незалежно від закону розподілу щільності ймовірності $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ дорівнює одиниці;

➤ **для неї справджується умова симетрії:**

$$p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = p_2(X_{k+1}, X_k; t_{k+1}, t_k).$$

Ця умова відображає той факт, що за певної перестановки пар (X_i, t_i) значення функції щільності ймовірності не змінюються;

➤ задовольняє умову узгодженості:

$$p_1(X_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) dX_{k+1}; \quad (3.23)$$

$$p_1(X_{k+1}, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) dX_k. \quad (3.24)$$

Дійсно, розглянемо двовимірну функцію розподілу

$$F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{X_{k+1}} p_2(\lambda_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1}.$$

За визначенням це є ймовірність

$$P\{-\infty < X(t_k) \leq X_k; -\infty < X(t_{k+1}) \leq X_{k+1}\}.$$

Спрямувавши, наприклад, $X_{k+1} \rightarrow \infty$, дістанемо

$$F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{X_{k+1}} p_2(\lambda_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} =$$

$$P\{-\infty < X(t_k) \leq X_k; -\infty < X(t_{k+1}) \leq \infty\}.$$

Однак подія, що задовольняє умову $-\infty < X(t_{k+1}) \leq \infty$, є достовірною завжди. Тому сумісна ймовірність того, що випадковий процес у перерізі t_k не перевищить значення X_k , а в перерізі t_{k+1} набуде будь-якого значення, дорівнює ймовірності $P\{-\infty < X(t_k) \leq X_k\}$ і не залежить від значення випадкової величини $X(t_{k+1})$.

Отже,

$$P\{-\infty < X(t_k) \leq X_k; -\infty < X(t_{k+1}) \leq \infty\} = P\{-\infty < X(t_k) \leq X_k\} =$$

$$F_1(X_k, t_k) = \int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\lambda_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = \int_{-\infty}^{X_k} p_1(X_k) dX_k = F_1(X_k, t_k).$$

Здиференціюємо ліву та праву частину останнього співвідношення по X_k :

3.2.2 Двовимірні закони розподілу ймовірності

$$\begin{aligned} \frac{d F_1(X_k, t_k)}{d X_k} &= \frac{d}{d X_k} \left(\int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{X_{k+1}} p_2(\lambda_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{d X_k} \left(\int_{-\infty}^{X_k} p_2(X_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_{k+1} \right) \right) d\lambda_{k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(X_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_{k+1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) dX_{k+1} = p_1(X_k, t_k). \end{aligned}$$

Ураховано, що похідна відінтегралу по його верхній границі збігається зі значенням підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі. Подібний результат можна отримати і для $p_1(X_{k+1}, t_{k+1})$.

Співвідношення (3.23) і (3.24) підтверджують ще одну дуже цікаву особливість нормального закону розподілу:

- ✦ **якщо дві випадкові величини розподілені за нормальним законом, то і кожна із них окремо підпорядкована також нормальному закону розподілу ймовірності;**
- ✦ **двовимірна функція щільності ймовірності статистично незалежних випадкових величин дорівнює добутку одновимірних:**

$$p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = p_1(X_k, t_k) p_1(X_{k+1}, t_{k+1}). \quad (3.25)$$

Подібною властивістю характеризується і двовимірний інтегральний закон розподілу ймовірності.

Дійсно згідно з (3.19) та (3.25)

$$\begin{aligned} F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{X_{k+1}} p_2(\lambda_k, \lambda_{k+1}; t_k, t_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = \\ &= \int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{X_{k+1}} p_1(\lambda_k, t_k) p_1(\lambda_{k+1}, t_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = \\ &= \int_{-\infty}^{X_k} p_1(\lambda_k, t_k) d\lambda_k \int_{-\infty}^{X_{k+1}} p_1(\lambda_{k+1}, t_{k+1}) d\lambda_{k+1} = F_1(X_k) F_1(X_{k+1}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Відповідно до (3.15) та (3.16) випадкові величини, що розглядались у цьому прикладі, є статистично незалежними.

► **Приклад.** Двовимірна функція щільності ймовірності

$$p_2(X_k, X_{k+1}) = A \sin(X_k + X_{k+1}); \quad 0 < X_k \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 < X_{k+1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Визначити: а) постійну A ; б) функції розподілу $F_2(X_k, X_{k+1})$;

$F_1(X_k)$; $F_1(X_{k+1})$; в) ймовірність виконання нерівності $X_k \leq \frac{\pi}{4}$; $X_{k+1} \leq \frac{\pi}{4}$.

Згідно з умовою нормування (3.22)

$$\int_{-\infty}^{X_k} \int_{-\infty}^{X_{k+1}} A \sin(\lambda_k + \lambda_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = 1.$$

Враховавши область визначення змінних і те, що $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ та, дістанемо:

$$\int_0^{\pi/2} [A(\cos X_{k+1} \int_0^{\pi/2} \sin X_k dX_k + \sin X_{k+1} \int_0^{\pi/2} \cos X_k dX_k)] dX_{k+1} = 1.$$

Результати обчислення внутрішніх інтегралів від гармонічних функцій та прозорі перетворення дають шукане значення постійної A :

$$A \int_0^{\pi/2} (\cos X_{k+1} + \sin X_{k+1}) dX_{k+1} = 1 \Rightarrow A(1+1) = 1 \Rightarrow A = 0,5.$$

Двовимірна функція розподілу ймовірності

$$\begin{aligned} F_2(X_k, X_{k+1}) &= \int_0^{X_k} \int_0^{X_{k+1}} A \sin(\lambda_k + \lambda_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = \\ &= \int_0^{X_{k+1}} A(\cos \lambda_{k+1} \int_0^{X_k} \sin \lambda_k d\lambda_k + \sin \lambda_{k+1} \int_0^{X_k} \cos \lambda_k d\lambda_k) d\lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

Після обчислення внутрішніх інтегралів від синуса та косинуса і підстановки меж інтегрування отримаємо остаточний результат:

$$\begin{aligned} F_2(X_k, X_{k+1}) &= A(1 - \cos X_k) \sin X_{k+1} + A(1 - \cos X_{k+1}) \sin X_k = \\ &= A(\sin X_k + \sin X_{k+1} - \sin(X_k + X_{k+1})). \end{aligned}$$

Відповідно до умови узгодженості для інтегрального закону розподілу отримаємо одновимірні функції розподілу:

3.2.2 Двовимірні закони розподілу ймовірності

$$F_1(X_k) = F_2(X_k, \infty) = A(1 \sin X_k + \sin X_{k+1} - \sin(X_k + X_{k+1})) \Big|_{X_{k+1}=\pi/2} = \\ = 0,5(1 - \cos X_k + \sin X_k);$$

$$F_1(X_{k+1}) = F_2(\infty, X_{k+1}) = A(1 \sin X_k + \sin X_{k+1} - \sin(X_k + X_{k+1})) \Big|_{X_k=\pi/2} = \\ = 0,5(1 - \cos X_{k+1} + \sin X_{k+1}).$$

Отримані результати для одновимірного та двовимірного інтегральних законів дають змогу зробити висновок про статистичну залежність випадкових величин $X(t_k)$, $X(t_{k+1})$, оскільки для них (1.26) не виконується.

Імовірність

$$P(X_k \leq \frac{\pi}{4}; X_{k+1} \leq \frac{\pi}{4}) = F_2(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 0,207.$$



Підсумовуючи, ще раз зазначимо, що двовимірний закон розподілу дає ймовірнісний опис властивостей реалізацій випадкового процесу в двох перерізах t_k та t_{k+1} і дозволяє визначити сумісну ймовірність двох станів процесу в цих перерізах.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Двовимірні закони розподілу ймовірності описують випадковий процес відносно двох перерізів.

2. Одновимірні закони розподілу ймовірності можна визначити за двовимірними відповідно до умови узгодженості.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: двовимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: двовимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу ймовірностей, елемент ймовірності на площині.

2. Основні властивості інтегрального та диференціального двовимірних законів розподілу ймовірності.

3. Геометричну інтерпретацію інтегрального та диференціального двовимірних законів розподілу ймовірності.

ймовірності, елемент ймовірності на площині.

2. За інтегральним двовимірним законом розподілу ймовірності визначати диференціальний та навпаки.

3. Визначати закони розподілу ймовірності першого порядку за відповідними двовимірними законами розподілу.

4. Зв'язок між інтегральним і диференціальним двовимірними законами розподілу ймовірності.

5. Двовимірні функція щільності та розподілу ймовірності статистично незалежних випадкових величин дорівнює добутку одновимірних.

3.2.3 Багатовимірні закони розподілу ймовірності

Тільки при збільшенні кількості перерізів, а отже, кількості випадкових величин, можливо досягти повнішого опису статистичного взаємозв'язку між миттєвими значеннями випадкового процесу $X(t)$ в різні моменти часу на деякому інтервалі T . Тоді йдеться про n -вимірні ($n > 2$) або багатовимірні закони розподілу ймовірності як інтегральний, так і диференціальний.

Інтегральний n -вимірний закон розподілу. Припустімо, що випадковий процес $X(t)$ на інтервалі T характеризується системою випадкових величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$, визначених відповідно в моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n .

Очевидно, що випадковий процес буде повністю визначеним, якщо для будь-якого довільного набору значень (рівнів) X_1, X_2, \dots, X_n можливо обчислити ймовірність того, що всі реалізації процесу $X(t)$ в моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n набудуть значень, які не перевищують відповідно рівнів X_1, X_2, \dots, X_n :

$$F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq X_1; X(t_2) \leq X_2; \dots, X(t_n) \leq X_n).$$

Останнє співвідношення описує **інтегральний багатовимірний закон розподілу** ймовірності випадкового процесу, а функція $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ називається n -

3.2.3 Багатовимірні закони розподілу ймовірності

вимірною функцією розподілу ймовірностей випадкового процесу $X(t)$. Аргументи цієї функції є X_1, X_2, \dots, X_n , а t_1, t_2, \dots, t_n є її параметрами.

Вважають, що будь-який випадковий процес є повністю заданим, якщо для будь-якого n та довільних моментів t_1, t_2, \dots, t_n можливо знайти функцію розподілу $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Властивості функції розподілу $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ є природним узагальненням властивостей двовимірної функції розподілу ймовірності $F_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$:

- є невід'язковою функцією її аргументів X_1, X_2, \dots, X_n ;
- $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = 0$, якщо хоча б один (або всі) з її аргументів приймає значення $-\infty$:
- $F_n(X_1, -\infty, X_3, \dots, X_n) = F_n(-\infty, X_2, \dots, X_n) = F_n(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = 0$;
- $F_n(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$ за умови, що всі її аргументи приймають значення $+\infty$.
- є неспадаючою функцією по кожному з аргументів:

$$\begin{cases} F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) > F_n(X'_1, X_2, \dots, X_n), & \text{якщо } X_1 > X'_1; \\ F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) > F_n(X_1, X'_2, \dots, X_n), & \text{якщо } X_2 > X'_2; \\ F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) > F_n(X_1, X_2, \dots, X'_n), & \text{якщо } X_n > X'_n. \end{cases}$$

- задовольняє умову узгодженості:

$$F_m(X_1, X_2, \dots, X_m) = F_n(X_1, X_2, \dots, X_m, \infty, \dots, \infty), \quad m < n.$$

Диференціальний n -вимірний закон розподілу ймовірності (функція щільності ймовірності). Функція розподілу ймовірності $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ визначає сумісну ймовірність подій, пов'язаних із тим, що випадкові величини $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ в моменти t_1, t_2, \dots, t_n не перевищують відповідно рівнів X_1, X_2, \dots, X_n .

Очевидно, ймовірність того, що вказані випадкові величини в моменти t_1, t_2, \dots, t_n набудуть значень відповідно з інтервалів $[X_1, X_1 + dX_1], [X_2, X_2 + dX_2], \dots, [X_n, X_n + dX_n]$ визначається величиною: $p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dX_1 dX_2 \dots dX_n$, де

функцію $p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ називають **диференціальним багатовимірним законом розподілу ймовірності** або **функцією щільності ймовірності n -го порядку**.

Якщо існують частинні похідні від n -вимірної функції розподілу для всіх X_i , то n -вимірну щільність ймовірності можна обчислити за такою формулою:

$$p_n(X_1, X_1, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial X_1 \partial X_2 \dots \partial X_n}.$$

Тоді n -вимірна функція розподілу ймовірності

$$F_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{X_1} \int_{-\infty}^{X_2} \dots \int_{-\infty}^{X_n} p_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n.$$

Як і двовимірна, n -вимірна функція щільності ймовірності $p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ є невід'ємною, а також задовольняє умови нормування, симетрії та узгодженості. Остання дає змогу на основі n -вимірного диференціального закону розподілу обчислити r -вимірний ($r < n$) в перерізах t_1, t_2, \dots, t_n інтегруванням $(n-r)$ -го порядку за всіма "зайвими" аргументами, номери яких перевищують $r(r+1, r+2, \dots, n)$:

$$p_r(X_1, \dots, X_r; t_1, \dots, t_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) dX_{r+1} \dots dX_n.$$

$(n-r)$

Зокрема, одновимірна щільність ймовірності $p_1(X_k, t_k)$ випадкового процесу чи сигналу $X(t)$ може бути обчислена (а не навпаки) шляхом $(n-1)$ -кратного інтегрування багатовимірного диференціального закону за всіма змінними, за винятком X_k :

$$p_1(X_k; t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) dX_1 dX_2 \dots dX_{k-1} dX_{k+1} \dots dX_n.$$

$n-1$

На практиці описи багатовимірних законів розподілу спрощують. Так, у разі, якщо випадкові величини $X(t_k)$ ($1 \leq k \leq n$) є статисти-

3.2.3 Багатовимірні закони розподілу ймовірності

чно незалежними, то n -вимірна функція щільності ймовірності може бути обчислена як добуток одновимірних:

$$p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_1(X_1; t_1) p_1(X_2; t_2) \dots p_1(X_n; t_n).$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Багатовимірні закони розподілу ймовірності описують випадковий процес відносно сукупності перерізів.

2. Випадковий процес є повністю заданим, якщо для нього можна вказати багатовимірну функцію розподілу чи функцію щільності ймовірності.

4. Для системи з n статистично незалежних випадкових величин n -вимірні функція щільності та розподілу ймовірності дорівнює добуткові відповідних одновимірних функцій.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: n -вимірні (багатовимірні) інтегральний та диференціальний закони розподілу ймовірності.

2. Основні властивості інтегрального та диференціального багатовимірних законів розподілу ймовірності.

3. Зв'язок між інтегральним і диференціальним багатовимірними законами розподілу ймовірності.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: n -вимірні інтегральний та диференціальний закони розподілу ймовірності.

2. За багатовимірним інтегральним законом розподілу ймовірності визначати диференціальний та навпаки.

3. Визначати закони розподілу ймовірності менших порядків за відповідними законами розподілу більших порядків.

3.3 Характеристична функція

Пряме перетворення Фур'є від функції щільності ймовірності в математичній статистиці називають **характеристичною функцією** відповідного порядку. Так, пряме перетворення Фур'є від одновимірної функції щільності ймовірності $p_1(X_k, t_k)$ називають одновимірною **характеристичною функцією першого порядку**:

$$\Theta_1(j\nu_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k = \Theta_1(j\nu_k, t_k). \quad (3.27)$$

Двовимірному диференціальному закону $p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1})$ відповідає **характеристична функція другого порядку**

$$\Theta_1(j\nu_k, j\nu_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) \times \exp(+j\nu_k X_k + j\nu_{k+1} X_{k+1}) dX_k dX_{k+1}. \quad (3.28)$$

Багатовимірна характеристична функція (n -вимірна, функція n -го порядку) пов'язана з відповідною функцією щільності ймовірності прямим перетворенням Фур'є:

$$\Theta_n(j\nu_1, j\nu_2, \dots, j\nu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \times \exp(+j\nu_1 X_1 + j\nu_2 X_2 + \dots + j\nu_n X_n) dX_1 \dots dX_n.$$

Зворотне перетворення Фур'є від характеристичної функції n -го порядку дає n -вимірний диференціальний закон розподілу ймовірності:

$$p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_n(j\nu_1, \dots, j\nu_n) \exp(j \sum_{k=1}^n \nu_k X_k) dX_1 \dots dX_n.$$

► **Приклад.** Обчислити функцію щільності ймовірності та характеристичну функцію для випадкового процесу з інтегральним законом розподілу ймовірності $F_1(X_k, t_k) = (1 - e^{-X_k})\sigma(X_k)$.

Для заданого інтегрального закону функція щільності ймовірності

$$p_1(X_k, t_k) = dF_1/dX_k = e^{-X_k}, \quad 0 \leq X_k \leq \infty.$$

3.3 Характеристична функція

Тоді характеристична функція першого порядку

$$\begin{aligned}\theta_1(X_k, t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) e^{jv_k X_k} dX_k = \int_0^{\infty} e^{-X_k} e^{jv_k X_k} dX_k = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-X_k(-jv_k+1)} dX_k = \frac{1}{-jv_k+1} e^{-(-jv_k+1)X_k} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-jv_k}.\end{aligned}$$

■

Наведені формули для визначення характеристичних функцій є справедливими як для неперервних, так і дискретних чи змішаних процесів. Водночас, для дискретних процесів подання диференціальних законів розподілу через дельта функції дає змогу перейти від операції інтегрування при обчисленні характеристичних функцій до операції додавання. Зокрема, одновимірна характеристична функція першого порядку може бути обчислена за такою формулою:

$$\theta_1(jv_k, X_k) = \sum_{s=1}^m P(X_s) e^{jv_k X_s}, \quad (3.29)$$

де X_s - можливі дискретні значення випадкового процесу чи сигналу $X(t)$ в момент часу t_k ; $P(X_s)$ - ймовірності прийняття цих значень.

► **Приклад.** Каналом зв'язку, що знаходиться під дією завад, передається кодова комбінація з двох імпульсів. У результаті незалежної дії кожний імпульс придушується завадою з ймовірністю p . Визначити характеристичну функцію, що визначає число придушених завадою імпульсів.

Число придушених імпульсів – дискретна випадкова величина, можливі значення якої є такими: $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$.

Ймовірності кожного цих значень обчислимо за відомою із теорії ймовірності формулою:

$$P(X_s) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (3.30)$$

де $q = 1 - p$; n - число незалежних дослідів (у нас – це число імпульсів у кодовій комбінації); k - число, яке визначає скільки разів здійсниться відповідна подія в серії із n незалежних дослідів (число імпульсів, яке подається завадою: 0, 1, 2); C_n^k - число сполучень із n величин по k .

Відомо, що

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.31)$$

Згідно з (3.30) і (3.31) отримаємо такі значення для ймовірностей: $P(0) = (1-p)^2$; $P(1) = 2p(1-p)$; $P(2) = p^2$. Тоді згідно з (3.29) характеристична функція

$$\begin{aligned} \theta_1(j\nu_k, X_k) &= \sum_{s=1}^m P(X_s) e^{j\nu_k X_s} = (1-p)^2 + 2p(1-p)e^{j\nu_k} + p^2 e^{j2\nu_k} = \\ &= 1 + 2p(e^{j\nu_k} - 1) + p^2(e^{j\nu_k} - 1)^2. \end{aligned}$$



Зважаючи на те, що характеристичні функції є прямим перетворенням Фур'є відповідної функції щільності ймовірності, для неї виконується умова симетрії, а умови нормування та узгодженості подаються у такій формі:

➤ **умова нормування:** $\theta_n(j0, \dots, 0) = 1$;

➤ **умова узгодженості:**

$$\begin{aligned} \theta_m(j\nu_1, \dots, j\nu_m; t_1, \dots, t_m) &= \theta_n(j\nu_1, \dots, j\nu_m; 0 \dots 0; t_1, \dots, t_m) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) \exp(j\nu_1 X_1 + \dots + j\nu_m X_m) dX_1 \dots dX_m. \end{aligned}$$

($m < n$)

✦ **Характеристична функція n -го порядку для сукупності з n статистично незалежних випадкових величин визначається добутком одновимірних характеристичних функцій кожної випадкової величини:**

$$И_n(j\nu_1, j\nu_2, \dots, j\nu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{s=1}^n И_1(j\nu_s t_s)$$

Дійсно, за означенням:

$$\begin{aligned} \theta_n(j\nu_1, \dots, j\nu_n; t_1, \dots, t_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) \times \\ &\times \exp(+j\nu_1 X_1 + j\nu_2 X_2 + \dots + j\nu_n X_n) dX_1 \dots dX_n. \end{aligned}$$

3.3 Характеристична функція

Відомо, що сумісна багатовимірна щільність ймовірності $p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ статистично незалежних випадкових величин дорівнює добуткові одновимірних функцій щільності ймовірності кожної з них. Тоді

$$\begin{aligned} \theta_n(j\nu_1, t_1; j\nu_2, t_2; \dots; j\nu_n, t_n) = \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_1, t_1) e^{j\nu_1 X_1} dX_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_2, t_2) e^{j\nu_2 X_2} dX_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_n, t_n) e^{j\nu_n X_n} dX_n = \\ \theta_1(j\nu_1, t_1) \theta_1(j\nu_2, t_2) \dots \theta_1(j\nu_n, t_n). \end{aligned}$$

Справедливим є і зворотне твердження.

► **Приклад.** Характеристична функція випадкового процесу з нормальним законом розподілу ймовірності.

Для нормального закону з нульовим математичним очікуванням характеристична функція

$$\theta_1(j\nu_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X_k^2}{2\sigma_X^2}} e^{j\nu_k X_k} dX_k. \quad (3.32)$$

Обчислення інтегралів подібного типу здійснюється з використанням доповнення показника експоненти до повного квадрата:

$$\left[\frac{X_k^2}{2\sigma_X^2} - j\nu_k X_k + \left(j \frac{\nu_k \sigma_X}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] - \left(j \frac{\nu_k \sigma_X}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{X_k}{\sqrt{2}\sigma_X} - j \frac{\nu_k \sigma_X}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\nu_k^2 \sigma_X^2}{2}. \quad (3.33)$$

Введемо нову змінну $Z_k = (X_k / \sigma_X) - j\nu_k \sigma_X$.

Тоді $dZ_k = (1/\sqrt{2}\sigma_X) dX_k$, а згідно з (3.32) та (3.33)

$$\theta_1(j\nu_k) = e^{-\frac{\nu_k^2 \sigma_X^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z_k^2}{2}} dZ_k = e^{-\frac{\nu_k^2 \sigma_X^2}{2}} = e^{-\frac{\nu_k^2}{2\sigma_V^2}}, \quad (3.34)$$

де враховано, що значення інтеграла дорівнює одиниці, а $\sigma_X = 1/\sigma_V$.

- ✦ *За нормального закону розподілу характеристична функція відносно ν_k має таку ж форму, що і функція щільності ймовірностей відносно X_k .*

Відповідно до цього про відхилення будь-якого закону розподілу ймовірності від нормального можна судити по тому, наскільки характеристична функція, що йому відповідає, відрізняється від (1.34).



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Обчислення характеристичних функцій для дискретних процесів і сигналів зводиться до операцій додавання.

2. Характеристична функція n -го порядку для сукупності з n статистично незалежних випадкових величин визначається добутком одновимірних характеристичних функцій кожної випадкової величини.

3. Для нормального закону розподілу характеристична функція має таку саму форму, що і функція щільності ймовірності.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: характеристична функція першого, другого та n -го порядку.

2. Умови, які задовольняє характеристична функція:

$\theta_n(j0, \dots, 0) = 1$ - умова нормування;

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_m(j\nu_1, \dots, j\nu_m; t_1, \dots, t_m) &= \\ &= \mathbb{I}_n(j\nu_1, \dots, j\nu_m; 0, \dots, 0; t_1, \dots, t_m) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) \times \\ &\times \exp(j\nu_1 X_1 + \dots + j\nu_m X_m) dX_1 \dots dX_m \end{aligned}$$

- умова узгодженості.



Треба вміти:

1. Дати визначення поняття «характеристична функція першого, другого та n порядку».

2. Визначати характеристичну функцію для різних законів розподілу неперервних, дискретних та змішаних випадкових процесів.

3.4 Визначення законів розподілу ймовірності за характеристичними функціями

Визначення законів розподілу за характеристичними функціями будемо називати **методом характеристичних функцій**.

Відомо, що для процесу $Y(t)$ відповідно до (3.27) його характеристична функція першого порядку

$$\theta_{1Y}(j\nu_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{1Y}(Y_k, t_k) e^{j\nu_k Y_k} dY_k$$

є середньостатистичним значенням експоненти $\exp(j\nu_k Y_k)$. Якщо $Y(t) = f(X(t))$, то, незалежно від характеру функціонального зв'язку, відповідно до властивостей середньостатистичного значення

$$\theta_{1Y}(j\nu_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) e^{j\nu_k f(X_k)} dX_k.$$

Отже, обчисливши на основі заданих $p_{1X}(X_k, t_k)$ та $Y_k = f(X_k)$ одновимірну характеристичну функцію $\theta_{1Y}(j\nu_k, t_k)$ та застосувавши до неї зворотне перетворення Фур'є, отримаємо одновимірну функцію щільності ймовірності $p_{1Y}(Y_k, t_k)$.

Використання багатовимірних характеристичних функцій дає змогу достатньо легко знаходити і багатовимірні функції щільності ймовірності.

► **Приклад.** Розглянемо процес $Z(t) = X(t) + Y(t)$, який є сумою двох процесів. У кожному з перерізів t_k ($k=1, 2, \dots, n$) будемо вважати $X(t_k)$ та $Y(t_k)$ статистично незалежними величинами. Обчислимо характеристичну функцію першого порядку процесу $Z(t)$ та функцію щільності ймовірності $p_{1Z}(Z_k, t_k)$, за умови, що закони розподілу складових процесів відомі.

Для процесу $Z(t) = X(t) + Y(t)$ характеристична функція

$$\begin{aligned}\theta_{1Z}(j\nu_k, t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1Z}(Z_k, t_k) e^{j\nu_k Z_k} dZ_k = M[e^{j\nu_k Z(t_k)}] = \overline{\exp(\nu_k Z(t_k))} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1Z}(Z_k, t_k) e^{j\nu_k (X_k + Y_k)} dZ_k = \overline{e^{j\nu_k X_k} e^{j\nu_k Y_k}}.\end{aligned}$$

Відомо, що за умови статистичної незалежності, а отже, некорельованості об'єктів середнє значення добутку дорівнює добуткові середніх значень співмножників:

$$\overline{e^{j\nu_k X_k} e^{j\nu_k Y_k}} = \overline{e^{j\nu_k X_k}} \cdot \overline{e^{j\nu_k Y_k}}.$$

Однак, $\overline{e^{j\nu_k X_k}} = \theta_{1X}(j\nu_k, t_k)$, а $\overline{e^{j\nu_k Y_k}} = \theta_{1Y}(j\nu_k, t_k)$. Тому

$$\theta_{1Z}(j\nu_k, t_k) = \theta_{1X}(j\nu_k, t_k) \theta_{1Y}(j\nu_k, t_k).$$

✦ **Характеристична функція суми процесів, незалежних (або некорельованих) у співпадаючі моменти часу, є добутком одновимірних характеристичних функцій її складових.**

Обчисливши зворотне перетворення Фур'є від характеристичної функції $\theta_{1Z}(j\nu_k, t_k)$, дістанемо функцію щільності ймовірності

$$\begin{aligned}p_{1Z}(Z_k, t_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1Z}(j\nu_k, t_k) e^{-j\nu_k Z_k} d\nu_k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1X}(j\nu_k, t_k) \theta_{1Y}(j\nu_k, t_k) e^{-j\nu_k Z_k} d\nu_k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1Y}(j\nu_k, t_k) e^{-j\nu_k Z_k} d\nu_k = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1Y}(j\nu_k, t_k) e^{-j\nu_k (Z_k - X_k)} d\nu_k \right\} dX_k = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1Y}(Y_k, t_k) p_{1X}(Z_k - Y_k) dY_k.\end{aligned}$$

✦ **Одновимірна функція щільності ймовірності суми двох незалежних (некорельованих) процесів дорівнює згортиці функцій щільності ймовірності її складових.**



3.4 Визначення законів розподілу ймовірності за характеристичними функціями

► **Приклад.** Визначити методом характеристичних функцій функцію щільності ймовірності процесу, що є різницею двох статистично незалежних процесів.

Різниці статистично незалежних процесів $Z(t) = X(t) - Y(t)$ із відомими законами розподілу ймовірності складових відповідає характеристична функція $\theta_{1Z}(jv_k, t_k) = \theta_{1X}(jv_k, t_k)\theta_{1Y}(-jv_k, t_k)$.

Тоді за методом характеристичних функцій функція щільності ймовірностей

$$\begin{aligned}
 p_{1Z}(Z_k, t_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1X}(jv_k, t_k) \theta_{1Y}(-jv_k, t_k) e^{-jv_k Z_k} dv_k = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1X}(jv_k, t_k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{1Y}(Y_k, t_k) e^{jv_k Y_k} dY_k \right) e^{-jv_k Z_k} dv_k = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1Y}(-jv_k, t_k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) e^{-jv_k (Z_k - X_k)} dX_k \right) dv_k = \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1Y}(jv_k^*, t_k) e^{jv_k^* (X_k - Z_k)} dv_k^* \right) dX_k = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1Y}(jv_k^*, t_k) e^{jv_k^* (X_k - Z_k)} dv_k^* \right) dX_k = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) p_{1Y}(X_k - Z_k) dX_k.
 \end{aligned}$$



Особлива форма визначення характеристичних функцій через перетворення Фур'є дає змогу використовувати всі його властивості, зокрема і такі:

- **добуткові характеристичних функцій відповідає згортка їхніх перетворень Фур'є;**
- **згортці характеристичних функцій відповідає добуток їх інтегральних перетворень Фур'є.**

► **Приклад.** Обчислити одновимірну функцію щільності ймовірності процесу $Z(t)$, що є сумою статистично незалежних процесів $X(t)$ та

$Y(t)$ із одновимірними законами розподілу відповідно $p_{1X}(X_k, t_k)$ та $p_{1Y}(Y_k, t_k)$.

Функція щільності ймовірностей суми двох випадкових величин визначається згорткою функцій щільності ймовірності кожної випадкової складової:

$$\begin{aligned} p_{1Z}(Z_k, t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(\lambda_k, t_k) p_{1Y}(Z_k - \lambda_k, t_k) d\lambda_k = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1Y}(\lambda_k, t_k) p_{1X}(z_k - \lambda_k, t_k) d\lambda_k. \end{aligned}$$

Відомо, що з точністю до знака пряме перетворення Фур'є від функції щільності ймовірності дає характеристичну функцію. Відповідно до властивостей перетворення Фур'є згортці у часовій області в частотній відповідає операція добутку: $\theta_{1Z}(j\nu_k, t_k) = \theta_{1X}(j\nu_k, t_k) \theta_{1Y}(j\nu_k, t_k)$.

Застосувавши зворотнє перетворення Фур'є до функції $\theta_{1Z}(j\nu_k, t_k)$, дістанемо знайдемо функцію щільності ймовірності $p_{1Z}(Z_k, t_k)$.

Припустимо, що процес $X(t)$ описується одновимірним рівномірним законом розподілу

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq X_k \leq 1; \\ 0 & 1 < X_k, X_k < 0, \end{cases}$$

а процес $Y(t)$ – експоненціальним

$$p_{1Y}(Y_k, t_k) = \begin{cases} e^{-Y_k}, & Y_k \geq 0 \\ 0, & Y_k < 0. \end{cases}$$

Тоді характеристичні функції першого порядку є такими:

- для процесу $X(t)$

$$\theta_{1X}(j\nu_k, t_k) = \int_0^1 e^{j\nu_k X_k} dX_k = \frac{1}{j\nu_k} e^{j\nu_k X_k} \Big|_0^1 = (e^{j\nu_k} - 1) / j\nu_k;$$

- для процесу $Y(t)$

3.4 Визначення законів розподілу ймовірності за характеристичними функціями

$$\theta_{1Y}(j\nu_k, t_k) = \int_0^{\infty} e^{-Y_k} e^{j\nu_k Y_k} dY_k = \frac{e^{-(j\nu_k + 1)Y_k}}{j\nu_k - 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 - j\nu_k};$$

- для процесу $Z(t)$

$$\theta_{1Z}(j\nu_k, t_k) = \theta_{1X}(j\nu_k, t_k) \theta_{1Y}(j\nu_k, t_k) = \frac{e^{j\nu_k} - 1}{j\nu_k(1 - j\nu_k)}.$$

Функція щільності ймовірностей, що відповідає характеристичній функції процесу $Z(t)$,

$$\begin{aligned} p_{1Z}(Z_k, t_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{1Z}(j\nu_k, t_k) e^{-j\nu_k Z_k} d\nu_k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\nu_k} e^{-j\nu_k Z_k}}{j\nu_k(1 - j\nu_k)} d\nu_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\nu_k Z_k}}{j\nu_k(1 - j\nu_k)} d\nu_k = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 - e^{-Z_k}; & 0 \leq Z_k \leq 1; \\ (e^{-Z_k} - 1)e^{-Z_k}. & 1 < Z_k < \infty. \end{cases}$$

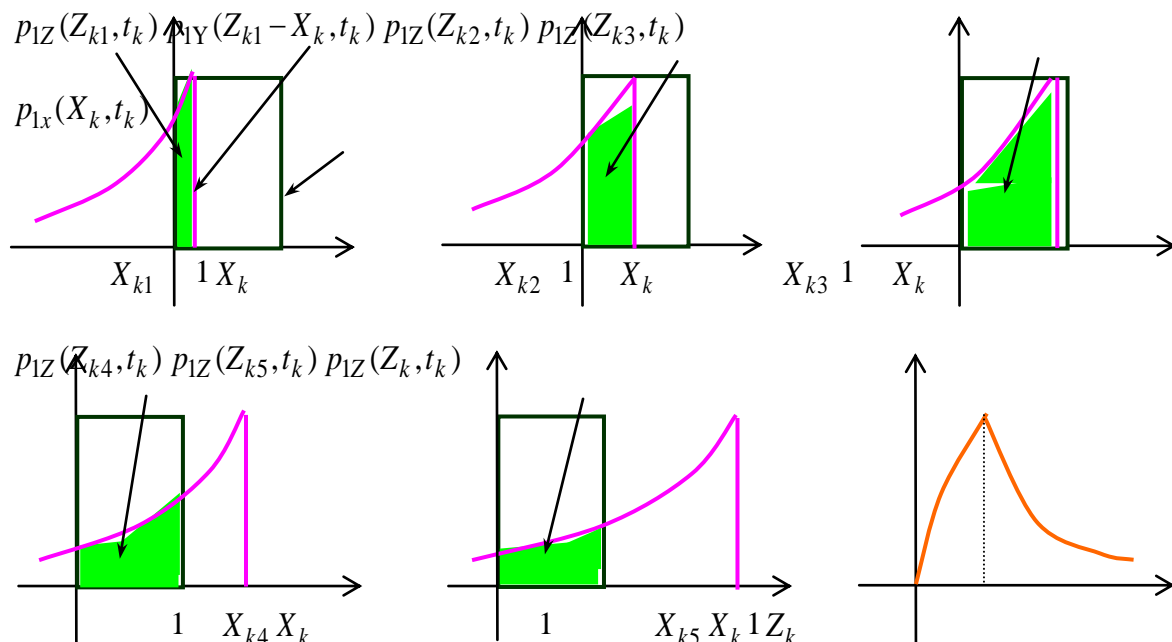


Рисунок 3.17 - Графічна ілюстрація визначення функції щільності ймовірності суми процесів через згортку.



Згортка функцій щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$ та $p_{1Y}(Z - X_k, t_k)$ дає такий самий результат, що підтверджується графічною ілюстрацією, зображеною на рис. 3.17.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Сутність методу характеристикних функцій.
2. Особлива форма визначення характеристикних функцій через перетворення Фур'є дає змогу при її обчисленні використовувати всі його властивості.



Треба вміти:

1. Визначати закони розподілу ймовірності різних процесів за характеристикними функціями.



Слід запам'ятати:

1. Характеристична функція сумистатистично незалежних (або некорельованих) у співпадаючі моменти часу процесів дорівнює добуткові характеристикних функцій складових.
2. Одновимірна функція щільності ймовірності суми двох статистично незалежних (некорельованих) процесів дорівнює згортці одновимірних функцій щільності ймовірності її складових.
3. Добуткові (згортці) характеристикних функцій відповідає згортка (добуток) перетворень Фур'є від них.

3.5 Перетворення змінних під час обчислення законів розподілу

Припустімо, що $p_{1X}(X_k, t_k)$ є заданою одновимірною функцією щільності ймовірності випадкового процесу $X(t)$ в перерізі t_k . Будемо вважати, що кожна випадкова величина $Y(t_k)$ процесу $Y(t)$ визначається відповідною випадковою величиною $X(t_k)$ процесу $X(t)$ для будь-якого t_k за законом

3.5 Перетворення змінних під час обчислення законів розподілу

$$Y(t) = f(X(t), t) . \quad (3.35)$$

Будемо вважати також справедливим і єдине зворотне співвідношення:

$$X(t) = g(Y(t), t). \quad (3.36)$$

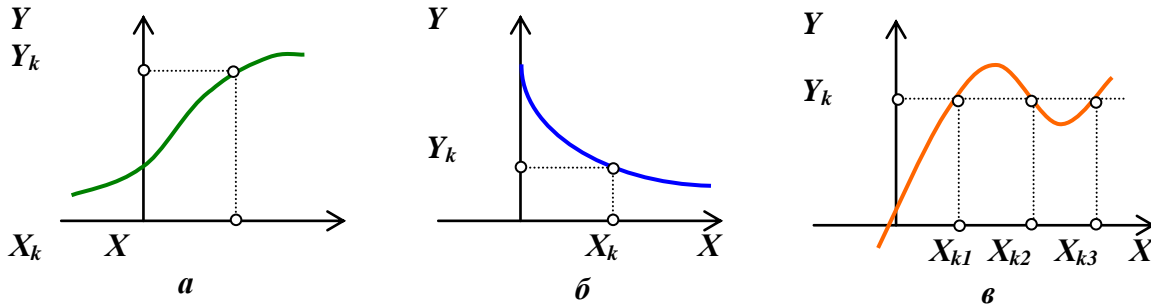


Рисунок 3.18 - Приклади однозначного (а, б) та неоднозначного функціонального зв'язку.

Відповідно до (3.35) – (3.36) кожному значенню функції $Y(t)$ відповідає єдине значення $X(t)$ і навпаки. Кажуть, що між процесами $X(t)$ та $Y(t)$ має місце взаємно-однозначна відповідність (однозначний зв'язок, див. рис 3.18, а і б). На рис. 3.18, в відображена ситуація, коли окремому значенню Y_k відповідає декілька значень аргументу X_k . У цьому разі йдеться про неоднозначний зв'язок між процесами.

Однозначний зв'язок. Розглянемо довільний переріз у точці t_k . Очевидно, що ймовірність потрапляння всіх реалізацій процесу $X(t)$ в інтервал dX_k дорівнює $p_{1X}(X_k, t_k)dX_k$, а відповідна ймовірність для $Y(t)$ та інтервалу dY_k дорівнює $p_{1Y}(Y_k, t_k)dY_k$. Ці події, виходячи з (3.35) і (3.36), рівноймовірні. Тоді $p_{1X}(X_k, t_k)dX_k = p_{1Y}(Y_k, t_k)dY_k$, а

$$p_{1Y}(Y_k, t_k) = p_{1X}(X_k, t_k) \frac{dX_k}{dY_k} = p_{1X}(g(Y_k, t_k), t_k) \left| \frac{dg(Y(t), t)}{dY_k} \right|_{t=t_k}, \quad (3.37)$$

де $\frac{dg}{dY}$ - похідна функції, зворотної до f , а $\left| \frac{dg(Y(t), t)}{dY_k} \right|$ - її абсолютне значення для забезпечення невід'ємності функції $p_{1Y}(Y_k, t_k)$.

Таким чином, щоб обчислити одновимірну функцію щільності ймовірності $p_{1Y}(Y_k, t_k)$ процесу $Y(t)$ за заданою функцією щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$ процесу $X(t)$ з взаємно-однозначним зв'язком (3.35) потрібно:

- за прямим функціональним законом (3.35) визначити зворотний (3.36);
- у формулі, що описує функцію щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$, замінити змінну X_k на $g(Y_k, t_k)$;
- обчислити похідну зворотної функції $g(Y_k, t_k)$ за змінною Y_k ;
- обчислити добуток результатів другого та третього етапів.

► **Приклад.** Припустімо, що між процесами $X(t)$ та $Y(t)$ має місце лінійна залежність: $Y(t) = aX(t) + b$ де a, b – скаляри, що є характерним, наприклад, для підсилювачів у квазілінійному режимі його роботи.

Будемо вважати, що в будь-якому перерізі t_k процес $X(t)$ визначається випадковою величиною $X(t_k)$ з *гаусовим законом розподілу* (3.9). Обчислимо одновимірну функцію щільності ймовірностей $p_{1Y}(Y_k, t_k)$.

У подальшому для скорочення записів параметр t_k будемо опускати. Зворотна функція

$$g(Y_k, t_k) = \frac{Y_k - b}{a}.$$

Підставивши $g(Y_k, t_k)$ у (3.9), дістанемо:

$$p_{1X}(g(Y_k, t_k), t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X(t_k)} e^{-\frac{(g(Y_k, t_k) - m_X(t_k))^2}{2\sigma_X^2(t_k)}}.$$

Похідна від зворотної функції

$$\left| g'(Y_k, t_k) \right| = \left| \frac{1}{a} \right|.$$

3.5 Перетворення змінних під час обчислення законів розподілу

Остаточно,

$$\begin{aligned}
 p_{1Y}(Y_k, t_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X|a|}} e^{-\frac{(\frac{Y_k-b}{a}-m_X(t_k))^2}{2\sigma_X^2(t_k)}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|a|\sigma_X}} e^{-\frac{(Y_k-(b+am_X(t_k)))^2}{2a^2\sigma_X^2(t_k)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y}} e^{-\frac{(Y_k-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}},
 \end{aligned}$$

де $m_Y = m_X a + b$; $\sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$ - відповідно математичне очікування та дисперсія процесу $Y(t)$ в перерізі t_k , як лінійного перетворення процесу $X(t)$.

Отже, закон розподілу процесу $Y(t)$ також є гаусовим із відповідними значеннями m_Y та σ_Y^2 .



► **Приклад** Випадковий процес $X(t)$ задовольняє одновимірному закону розподілу Релея:

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \frac{X_k}{\alpha} e^{-\frac{X_k^2}{2\alpha}}; \quad 0 < X_k < \infty. \quad (3.38)$$

Визначити функцію щільності ймовірності процесу $Y(t) = X^2(t)$.

Для області визначення $0 < X_k < \infty$ між процесами має місце однозначний зв'язок, якому відповідає зворотна функціональна залежність $X(t) = \sqrt{Y(t)}$.

Тоді для $0 < Y_k < \infty$ функція $p_{1X}(g(Y_k, t_k)) = \frac{\sqrt{Y_k}}{\alpha} e^{-\frac{Y_k}{2\alpha}}$, а похідна

$$\frac{dX_k}{dY_k} = \frac{1}{2\sqrt{Y_k}}.$$

Згідно з (3.37) для процесу $Y(t)$ функція щільності ймовірності

$$p_{1Y}(Y_k, t_k) = \frac{\sqrt{Y_k}}{\alpha} e^{-\frac{Y_k}{2\alpha}} \frac{1}{2\sqrt{Y_k}} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{Y_k}{2\alpha}}, \quad 0 < Y_k < \infty. \quad (3.39)$$

Отриманий результат відповідає так званому **експоненціальному закону розподілу**, для якого математичне очікування $m_X(t) = 2\alpha$, а дисперсія $\sigma_X^2 = (2\alpha)^2 = m_X^2$. Експоненціальний закон та його узагальнення часто використовується для розв'язання технічних проблем, пов'язаних із визначенням надійності систем, часу очікування доступу користувачів в яку-небудь систему (канал телефонного, телеграфного зв'язку чи, наприклад, мережу Internet), кількості каналів системи зв'язку, потрібних для реагування на повідомлення користувачів, що надходять у випадкові моменти часу та характеризуються довільною довжиною.

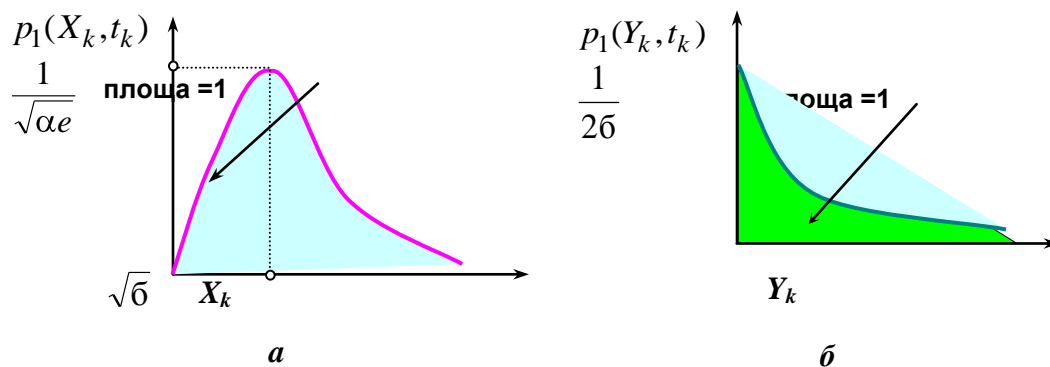


Рисунок 3.19 - Закони розподілу ймовірності:
а – закон Релея; б – експоненціальний односторонній закон.

Зазначимо, що закон розподілу ймовірності Релея має велике практичне значення. Зокрема, щільність ймовірності обвідних вузькосмугових випадкових напруг та струмів, розподілених за нормальним законом, задовольняє закону Релея. Це вперше довів лорд Релей у 1880 році під час дослідження обвідної суми гармонічних коливань різної частоти. Окрім того, цей закон достатньо точно описує розподіл попадань у мішень під час пристрілювання гармат, ракет та іншої зброї.

Графіки функцій $p_{1X}(g(Y_k, t_k))$ та $p_{1Y}(Y_k, t_k)$ зображені на рис. 3.19.



Неоднозначний зв'язок. У цьому разі для визначення функцій щільності ймовірності результуючих процесів застосовують метод характеристичних функцій, який вже розглядався у пункті 3.4 або модифікацію наведеного для однозначного зв'язку способу.

3.5 Перетворення змінних під час обчислення законів розподілу

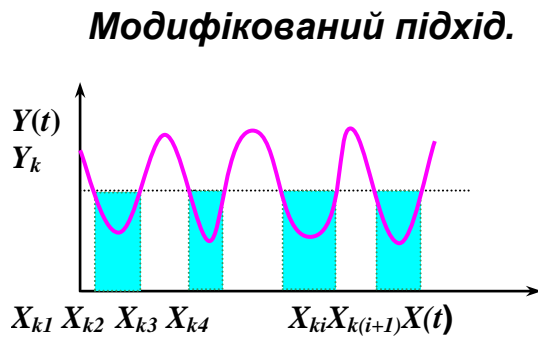


Рисунок 3.20 – Неоднозначний зв'язок між процесами.

Припустимо, що функціональний зв'язок між процесами $Y(t)$ та $X(t)$ є неоднозначним (див. рис. 3.20) і відображається функцією $g(\cdot)$. У цьому разі безпосереднє застосування формули (3.37) для обчислення функції щільності ймовірності процесу $X(t)$ є неможливим.

Відповідно до (3.4) $p_{1Y}(Y_k, t_k) = dF_Y(Y_k, t_k) / dY_k$, де $F_Y(Y_k, t_k)$ відображає ймовірність того, що будь-яка реалізація процесу $Y(t)$ в перерізі t_k набуває значення, не більше за Y_k . Така подія може відбутися, коли миттєві значення процесу $X(t)$ будуть належати або інтервалу $[X_{k1}, X_{k2}]$, або $[X_{k3}, X_{k4}]$, або $[X_{k5}, X_{k6}]$, ..., або $[X_{ki}, X_{k(i+1)}]$. Оскільки, ймовірність того, що $Y(t_k)$ не перевищить Y_k дорівнює ймовірності названих подій, то відповідно до теореми додавання ймовірностей

$$\begin{aligned}
 P(Y(t_k) \leq Y_k) &= P(X_{k1} \leq X(t_k) \leq X_{k2}) + P(X_{k3} \leq X(t_k) \leq X_{k4}) + \dots \\
 &+ P(X_{k,i} \leq X(t_k) \leq X_{k,(i+1)}) = \sum_{i=1}^s P(X_{k,i} \leq X(t_k) \leq X_{k,i+1}) = \\
 &\sum_{i=1}^s [F_X(X_{k,i+1}) - F_X(X_{k,i})] = \sum_{i=1}^s [F_X(g_{i+1}(Y_k)) - F_X(g_i(Y_k))] = F_Y(Y_k).
 \end{aligned}$$

Похідна від правої та лівої частин останнього співвідношення

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_Y(Y_k)}{dY_k} &= \sum_{i=1}^s \frac{d}{dY_k} [F_X(g_{i+1}(Y_k)) - F_X(g_i(Y_k))] = \\
 &= \sum_{i=1}^s \frac{dF_X(g_{i+1}(Y_k))}{d(g_{i+1}(Y_k))} \frac{dg_{i+1}(Y_k)}{dY_k} - \sum_{i=1}^s \frac{dF_X(g_i(Y_k))}{d(g_i(Y_k))} \frac{dg_i(Y_k)}{dY_k}.
 \end{aligned}$$

Якщо тепер врахувати, що за наявності неоднозначності похідні $g_r(Y_k)$; $r = i, i+1$ на початку та кінці інтервалу $[X_{k,i}, X_{k,i+1}]$ протилежного знаку, остаточно дістанемо:

$$\frac{dF_Y(Y_k)}{dY_k} = p_{1Y}(Y_k, t_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^s [p_{1X}(g_{i+1}(Y_k)) |g'_{i+1}(Y_k)| + p_{1X}(g_i(Y_k)) |g'_i(Y_k)|]. \quad (3.40)$$

Таким чином, щоб обчислити одновимірну функцію щільності ймовірності $p_{1Y}(Y_k, t_k)$ процесу $Y(t)$ за заданою функцією щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$ процесу $X(t)$ у разі неоднозначного функціонального зв'язку (3.35) між процесами потрібно:

- за прямим функціональним законом (3.35) визначити зворотний (3.36);

- за зворотною функцією визначити всі інтервали неоднозначності $[X_{k,i}, X_{k,i+1}]$ для прямого функціонального зв'язку (3.35);

- у формулі, що описує функцію щільності ймовірності заданого процесу $p_{1X}(X_k, t_k)$, замінити змінну X_k на зворотну функцію $g(Y_k, t_k)$;

- визначити похідні від зворотної функції $g(Y_k, t_k)$ за змінною Y_k на кінцях інтервалів неоднозначності;

- обчислити одновимірну функцію щільності ймовірності $p_{1Y}(Y_k, t_k)$ згідно з формулою (3.40).

► **Приклад.** Визначити функцію щільності ймовірності процесу $Y(t) = X^2(t)$, що є реакцією напівперіодного квадратичного детектора на випадкову дію $X(t)$. Закон розподілу ймовірностей дії є нормальним із нульовим математичним очікуванням та одиничною дисперсією:

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_k)^2}{2}}. \quad (3.41)$$

Оскільки процес $Y(t)$ не набуває від'ємних значень, то для $Y_k < 0$ $P(Y(t_k) < Y_k) = 0$ і $p_{1Y}(Y_k, t_k) = 0$. Відповідно до зворотного функціонального зв'язку $X(t) = \pm\sqrt{Y(t)}$ будь-якому значенню $Y_k \geq 0$ відповідає або $+\sqrt{Y_k}$, або $-\sqrt{Y_k}$. Таким чином, область допустимих

3.5 Перетворення змінних під час обчислення законів розподілу

миттєвих значень процесу $X(t)$ в перерізі t_k є такою:
 $-\sqrt{Y_k} \leq X_k \leq \sqrt{Y_k} \Rightarrow X_{k,i} \leq X_k \leq X_{k,i+1}$.

Звичайно, що $g_{i+1}(Y_k) = \sqrt{Y_k}$, а $g_i(Y_k) = -\sqrt{Y_k}$. Тоді згідно з (3.41)

$$p_{1X}(g_{i+1}(Y_k)) = p_{1X}(\sqrt{Y_k}) = p_{1X}(\sqrt{Y_k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{Y_k})^2}{2}};$$

$$p_{1X}(g_i(Y_k)) = p_{1X}(-\sqrt{Y_k}) = p_{1X}(-\sqrt{Y_k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{Y_k})^2}{2}}.$$

Ураховавши, що на початку та в кінці інтервалу визначення

$$g'_{i+1}(Y_k) = \frac{1}{2\sqrt{Y_k}}, \quad g'_i(Y_k) = -\frac{1}{2\sqrt{Y_k}},$$

згідно з (3.40) остаточно дістанемо:

$$p_{1Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Y_k/2} \frac{2}{2\sqrt{Y_k}} - \frac{1}{2\pi} e^{-Y_k/2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{Y_k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Y_k}} e^{-Y_k/2}, \quad Y_k \geq 0. \quad (3.42)$$

Функція щільності ймовірності, що визначається (3.42), відповідає **хи-квадратному закону розподілу**. Математичне очікування та дисперсія такого закону подаються простими співвідношеннями: $m_Y = 1$, $\sigma_Y^2 = 2$. Хи-квадратичний закон розподілу використовується для розв'язування завдань, пов'язаних із виявленням сигналів, зокрема, коли за сукупністю відліків досліджуваного процесу потрібно зробити висновок про наявність чи відсутність сигналу на фоні завад.

■

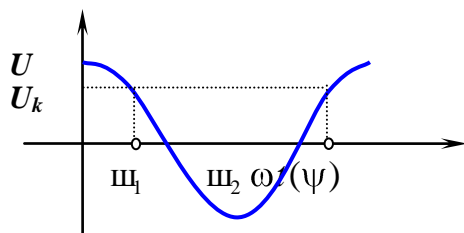


Рисунок 3.21 - Гармонічний сигнал з випадковою рівномірною початковою фазою.

► **Приклад.** Випадковий сигнал є гармонічною напругою $U(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha(t))$ (див. рис. 3.21) із рівномірно розподіленою випадковою фазою: $p_{1\alpha}(\alpha_k; t_k) = 1/2\pi$, $0 \leq \alpha_k \leq 2\pi$. Визначити закон розподілу ймовірностей $p_{1U}(U_k, t_k)$ для миттєвих значень напруги.

Оскільки $U(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha(t)) = U_m \cos \psi(t)$, тоді $\psi(t) = \arccos[U(t)/U_m]$. Згідно з рис. 3.21 на інтервалі $[0, 2\pi]$ одному значенню U_k відповідає два значення випадкової фази ψ_1 та ψ_2 . Причому $\psi_1 = \arccos(U_k/U_m)$, $\psi_2 = \pi + \psi_1$.

На кінцях зазначеного інтервалу

$$g_i(Y_k) = \psi_1 = \arccos \frac{U_k}{U_m} = X_{k,i},$$

$$g_{i+1}(Y_k) = X_{k,i+1} = \arccos \frac{U_k}{U_m} + \pi,$$

а похідні від таких функцій

$$g'_i(Y_k) = \frac{d}{dU_k} \arccos\left(\frac{U_k}{U_m}\right) = -\frac{1}{\sqrt{[1-(U_k/U_m)^2]}} \frac{1}{U_m},$$

$$g'_{i+1}(Y_k) = -g'_i(Y_k) = \frac{1}{\sqrt{[1-(U_k/U_m)^2]}} \frac{1}{U_m}.$$

Відповідно до рівномірного закону розподілу $p_{1ш}(g_i(Y_k)) = p_{1ш}(g_{i+1}(Y_k)) = 1/2\pi$.

Остаточно згідно з (3.40)

$$p_{1U}(U_k, t_k) = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) \frac{1}{U_m} \frac{1}{\sqrt{1-(U_k/U_m)^2}} = \frac{1}{\pi U_m} \frac{1}{\sqrt{1-(U_k/U_m)^2}},$$

що в точності збігається з раніше отриманим результатом і відповідає синусоїдальному закону розподілу.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Певному значенню одного процесу у разі однозначного функціонального зв'язку між процесами відповідає єдине значення іншого та декілька



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: однозначний та неоднозначний зв'язок між процесами.

2. Алгоритм обчислення од-

3.5 Перетворення змінних під час обчислення законів розподілу

значень – у разі неоднозначного зв'язку.

2. Суть методу визначення одновимірної функції щільності ймовірності певного процесу за одновимірною функцією щільності ймовірності іншого у разі однозначного та неоднозначного зв'язку між процесами.

новимірної функції щільності ймовірності певного процесу за одновимірною функцією щільності ймовірності іншого у разі однозначного та неоднозначного зв'язку між процесами.

3. Області практичного застосування експонентціального, χ -квадратного законів розподілу ймовірності та закону розподілу Релєя.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: однозначний та неоднозначний зв'язок між процесами.

2. Сформулювати алгоритми обчислення одновимірної функції щільності ймовірності певного процесу за одновимірною функцією ймовірності іншого у разі однозначного та неоднозначного зв'язку між процесами.

3. Розв'язувати задачі на визначення одновимірних законів розподілу ймовірності одних процесів за законами розподілу інших у разі однозначного та неоднозначного зв'язку між процесами.

3.6 Завдання для поточного тестування

3.6.1 Питання для поточного контролю

- Що таке випадковий процес?
- Чим випадковий процес відрізняється від детермінованого?
- Дайте визначення випадкової функції.
- Як називають певні реалізації випадкового процесу?

- Що таке математична модель випадкового процесу.
- Назвіть особливості неперервних, дискретних та змішаних випадкових процесів.
- Що таке переріз випадкового процесу?
- Дайте визначення одновимірному інтегрального закону розподілу ймовірності.
- Назвіть основні властивості одновимірної функції розподілу ймовірності.
- Які події описують такі співвідношення: а) $F_1(X_k = -\infty, t_k) = 0$; б) $F_1(X_k = \infty, t_k) = 1$?
- Особливості графічного зображення та аналітичного опису одновимірному інтегрального закону розподілу ймовірності неперервних, дискретних та змішаних процесів.
- Яких значень набуває функція розподілу ймовірності?
- Дайте визначення одновимірному диференціальному закону розподілу ймовірності.
- Що таке елемент ймовірності на прямій?
- Особливості графічного подання та аналітичного опису одновимірному диференціальному закону розподілу ймовірності неперервних, дискретних та змішаних процесів.
- Запишіть співвідношення, які описують взаємозв'язок між одновимірними інтегральним та диференціальним законами розподілу ймовірності.
- Назвіть основні властивості одновимірному диференціальному закону розподілу ймовірності.
- Обчисліть інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) dX_k$.
- Запишіть формулу для обчислення значень випадкової величини, які потрапляють в інтервал $[a, b]$.
- Як можна визначити значення одновимірної функції розподілу ймовірності $F_1(X_k, t_k)$ за графіком функції щільності ймовірності $p_1(X_k, t_k)$?

3.6 Завдання для поточного тестування

- Чому дорівнює площа, обмежена графіком одновимірної функції щільності ймовірності та віссю абсцис?
- Запишіть вирази, які описують закон розподілу Лапласа та нормальний закон.
- Наведіть графічне зображення одновимірних диференціального та інтегрального нормального закону розподілу.
- Назвіть фактори, які визначають особливу значущість нормального закону розподілу.
- Сформулюйте результат, який визначає центральна гранична теорема.
- Законом розподілу якого виду описуються випадкові процеси, що є результатом лінійних перетворень над процесами, підпорядкованими нормальному закону розподілу ймовірності?
- Сформулюйте результат, який визначає правило трьох сигм.
- Що таке дво- та n -вимірний інтегральний закони розподілу ймовірності?
- Дайте визначення дво- та n - вимірному інтегрального та диференціального законів розподілу ймовірності.
- Наведіть графічну інтерпретацію двовимірних інтегрального та диференціального законів розподілу ймовірності.
- Що таке елемент ймовірності на площині?
- Запишіть співвідношення, які описують взаємозв'язок між двовимірними інтегральним та диференціальним законами розподілу ймовірності.
- Назвіть основні властивості дво- та n - вимірному інтегрального та диференціального законів розподілу ймовірності.
- Як за двовимірною функцією щільності ймовірності $p_2(X_k, X_{k+1}, t_k, t_{k+1})$ визначити одновимірну $p_1(X_k, t_k)$?
- Який результат визначає таке співвідношення:

$$p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_2(X_1; t_1) \cdot p_1(X_2; t_2) \cdots p_1(X_n; t_n)?$$
- Дайте визначення характеристичної функції першого, другого та n -порядків.

- Властивості характеристичної функції.
- Чому дорівнює початкове значення характеристичної функції?
- Запишіть співвідношення, що описує умову узгодженості для дво- та n - вимірних інтегрального та диференціального законів розподілу ймовірності.
- Запишіть формулу для обчислення характеристичної функції першого порядку дискретних випадкових процесів.
- Про що свідчить наступне співвідношення:

$$\theta_n(j\nu_1, j\nu_2, \dots, j\nu_n) = \theta_1(j\nu_1; t_1) \cdot \theta_1(j\nu_2; t_2) \cdots \theta_1(j\nu_n; t_n) ?$$
- Який вид має характеристична функція випадкового процесу з нормальним законом розподілу?
- У чому полягає суть методу характеристичних функцій?
- Взаємозв'язок диференціального закону розподілу з характеристичною функцією
- Довести, що добуток двох характеристичних функцій однакових порядків згортка інтегральних перетворень Фур'є співмножників.
- Довести, що одновимірна функція щільності ймовірності суми (різниці) двох статистично незалежних випадкових процесів визначається згорткою одновимірних функцій щільності ймовірності складових.
- Дайте визначення однозначного та неоднозначного функціонального зв'язків між двома випадковими процесами.
- Наведіть приклади графічної ілюстрації однозначного та неоднозначного функціонального зв'язків між двома процесами.
- У чому полягає суть методу визначення одновимірної функції щільності ймовірності певного процесу за одновимірною функцією щільності ймовірності іншого у разі однозначного та неоднозначного зв'язку між процесами.
- Сформулюйте алгоритми обчислення одновимірної функції щільності ймовірності певного процесу за одновимірною функцією ймовірності іншого у разі однозначного та неоднозначного зв'язку між процесами.

3.6 Завдання для поточного тестування

➤ Назвіть області практичного застосування законів розподілу ймовірності Релея, експоненціального та χ -квадратного.

3.6.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Визначити максимальне значення одновимірної функції щільності ймовірності з областю визначення $[a, b]$ у разі: а) рівномірного закону розподілу; б) трикутного закону розподілу.

2. Область значень випадкової величини $X(t_k)$ задовольняє нерівність $-1 < X(t_k) < 1$. У відкритому інтервалі $(-1, 1)$ вона розподілена рівномірно, а значення -1 та 1 набуває з ймовірністю $0,25$. Потрібно: а) визначити функцію розподілу ймовірності $F_1(X_k)$ та побудувати її графік; б) обчислити ймовірність $P(-1/2 \leq X(t_k) \leq 1/2)$

3. Двовимірна функція розподілу ймовірності

— — —

Визначити, чи є випадкові величини $X(t_k)$ і $Y(t_k)$ незалежними.

4. Функція розподілу

;

Визначити: а) функції щільності ймовірності
б) чи є система випадкових величин залежною?

5. Випадковий процес описується тривимірною функцією розподілу ймовірності $F_3(X_1, X_2, X_3; t_1, t_2, t_3)$. Визначити а) $F_1(X_1; t_1)$; б) $F_2(X_2, X_3; t_2, t_3)$; в) $F_3(-\infty, X_2, X_3)$, $F_3(X_1, -\infty, X_3)$, $F_3(X_1, X_2, -\infty)$.

6. Визначити функцію щільності ймовірності $p_1(Y_k, t_k)$ випадкового процесу $Y(t)$, де ω – не випадкова кутова частота; α і β – незалежні нормально розподілені випадкові величини з нульовими середніми статистичними значеннями (та однаковими дисперсіями)

7. Процес $X(t)$ в перерізі t_k визначається дискретною величиною $X(t_k)$, ряд розподілу ймовірності якої є таким:

	-2	-1	0	1	2
	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4

Потрібно: а) визначити та побудувати графіки функції щільності ймовірності та функції розподілу ймовірності процесу $Z(t) = |X(t)|$.

8. Визначити характеристичну функцію $\theta_{1Y}(jv_k)$ випадкового процесу , де a, b – константи. Вважати заданою характеристичну функцію $\theta_{1X}(jv_k)$ процесу .

9. Визначити одновимірну функцію щільності ймовірності випадкового процесу $X(t) = \alpha + \beta t$, де α та β - взаємно-незалежні випадкові величини, закони розподілу яких є $p_{1\alpha}(\alpha)$ та $p_{1\beta}(\beta)$ відповідно.

10. Визначити функцію щільності ймовірності $p_{1R}(R)$ випадкової величини R , що є опором паралельного з'єднання двох резисторів, опір одного з яких R_0 є величиною детермінованою, а другого r - випадковою величиною з рівномірним законом розподілу на інтервалі $[R_0 - a, R_0 + a]$, де a - число.

11. Одновимірна функція розподілу ймовірності $F_{1X}(X_k, t_k)$ процесу $X(t)$ має такий вигляд:

$$F_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} 0, & -\infty < X_k \leq -1; \\ 0,5 + 0,5X_k, & -1 < X_k < 1; \\ 0, & 1 \leq X_k < \infty. \end{cases}$$

Визначити: 1) функцію щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$; 2) ймовірність того, що а) $X_k > 0,75$; б) $-0,5 \leq X_k \leq 0,5$.

12. Для функції щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k) = a \exp(-b|X_k|)$ випадкового процесу $X(t)$ визначити зв'язок між величинами a та b .

13. Функція щільності ймовірності випадкового процесу $X(t)$ $p_{1X}(X_k, t_k) = 0,25[\sigma(X_k + 2) - \sigma(X_k - 2)]$. Визначити одновимірний диференціальний закон розподілу процесу $Y(t) = X^2(t)$.

14. Функція розподілу $F_{1X}(X_k, t_k)$ процесу $X(t)$ має такий вид:

3.6 Завдання для поточного тестування

$$F_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} A[1 - e^{-(X_k-1)}], & 1 < X_k < \infty; \\ 0, & -\infty < X_k \leq 1. \end{cases}$$

Визначити сталу величину A та функцію щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$.

15. Випадкові процеси $X(t)$ та $Y(t)$ є статистично незалежними і характеризуються такими одновимірними диференціальними законами розподілу ймовірності: $p_{1X}(X_k, t_k) = e^{-X_k} \sigma(X_k)$, $p_{1Y}(Y_k, t_k) = 3e^{-Y_k} \sigma(Y_k)$. Методом характеристичних функцій обчислити функцію щільності ймовірності $p_{1Z}(Z_k, t_k)$ процесу $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

16. Процес $X(t)$ описується одновимірним інтегральним законом розподілу ймовірності

$$F_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} 0, & -\infty < X_k \leq -2; \\ A(1 + \cos bX_k), & -2 < X_k \leq 2; \\ 1, & 2 < X_k < \infty. \end{cases}$$

Обчислити значення A та b , одновимірний диференціальний закон розподілу ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$ та ймовірність того, що $X_k > 1$.

17. Напряга холостого ходу джерела напруги складає 18 В, а його внутрішній опір R_{BH} є випадковою величиною з рівномірним законом розподілу в інтервалі 4...16 Ом. Визначити опір навантаження, що відповідає максимальній розсіюваній в джерелі потужності.

18. Одновимірний диференціальний закон розподілу ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k) = Ae^{-(X_k-1)} \sigma(X_k - 1)$. Визначити значення A та ймовірність того, що $1 < X_k \leq 3$.

19. Характеристична функція $\theta_{1X}(jv_k, t_k)$ випадкового процесу $X(t)$ визначається формулою $\alpha/(\alpha - jV_k)$, а процес $Y(t)$ на інтервалі $[-1, 1]$ подається рівномірним законом розподілу ймовірності. Визначити: а) одновимірну функцію щільності ймовірності $p_{1Z}(Z_k, t_k)$ процесу $Z(t) = X(t) + 2Y(t)$ у разі, що $X(t)$ та $Y(t)$ є статистично незалежними; б) ймовірність того, що $0 < Z(t_k) \leq 1$.

20. Через резистор з опором 2 Ом протікає випадковий струм $I(t)$, функція щільності ймовірності якого подається експоненціальним законом розподілу $p_{1I}(I_k, t_k) = \alpha e^{-\alpha I_k} \sigma(I_k)$, де $\alpha = 2$. Визначити ймовірність того, розсіювана на резисторі перевищить потужність 20 Вт.

21. Функції щільності ймовірності процесів $X(t)$ та $Y(t)$ є такими: $p_{1X}(X_k, t_k) = p_{1Y}(Y_k, t_k) = A e^{-2X_k} \sigma(X_k)$. Визначити: а) значення величини A ; б) ймовірність того, що значення величини $Z(t_k) = 6X(t_k) + Y(t_k)$ не перевищить 0,25.

22. Вольт-амперна характеристика напівпровідникового діода подається рівнянням $i = I_0[\exp(mu) - 1]$, де $I_0 = 10^{-9} \text{ А}$, $m = 25$. Визначити одновимірну функцію щільності ймовірності $p_{1I}(I_k, t_k)$, якщо випадкова напруга на діоді $U(t)$ підпорядкована рівномірному закону розподілу на інтервалі $[0, 1] \text{ В}$.

23. Випадкова величина $X(t_k)$ є рівномірно розподіленою на інтервалі $[0, 5]$. Ймовірність того, що $X(t_k) = 0$ або $X(t_k) = 3$, дорівнює 0,3. Визначити функцію розподілу $F_{1X}(X_k, t_k)$ та побудувати її графік.

24. Випадкова величина $X(t_k)$ набуває таких значень: $-1 \leq X(t_k) \leq 1$. У відкритому інтервалі $(-1, 1)$ вона розподілена рівномірно, а кожне із значень -1 та $+1$ набуває з ймовірністю 0,25. Визначити знайти функцію розподілу $F_1(X_k, t_k)$ та побудувати її графік.

25. Випадкові величини $X(t_k)$ та $Y(t_k)$ пов'язані функціональною залежністю виду $Y(t_k) = 6X(t_k) + 3$. Визначити інтегральний закон розподілу $F_1(Y_k, t_k)$, якщо $p_{1X}(X_k, t_k) = A e^{-2X_k} \sigma(t_k)$.

4 Часові характеристики випадкових процесів

4.1 Загальна характеристика моментних функцій

Багатовимірні закони розподілу ймовірності є найбільш повними характеристиками випадкових процесів. Однак їх практичне застосування пов'язане з рядом проблем, розв'язання яких не завжди можливе. Перш за все йдеться про процеси, закони розподілу ймовірності яких невідомі апріорі. З іншого боку, експериментальне їх виявлення, особливо для великих значень n , є дуже трудомісткою та складною процедурою. Водночас, хоча і менш детальні, але, зазвичай, задовільні з практичного погляду характеристики випадкових процесів, можна отримати визначенням **моментів** випадкових величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ на деякому заданому інтервалі T відповідних перерізах цих процесів. Для випадкового процесу такі моменти визначаються як значеннями випадкової величини в конкретному перерізі (миттєвими значеннями реалізацій випадкового процесу), так і значенням часової змінної.

Отже, моменти випадкових процесів є функціями часу, називаються **моментними функціями часових аргументів** і відносяться до **часових характеристик** випадкових процесів.

Оснoву обчислення моментних функцій, як і моментів випадкових величин, складає **операція усереднення**. Ми вже зустрічались на практиці з такою операцією під час визначення середніх значень детермінованих процесів як функцій часу, зокрема,

- **постійної складової періодичного процесу**

$$S_{\text{ср.пер}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(\lambda) d\lambda;$$

- **середньої потужності процесу**

$$P_{\text{ср}} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(\lambda) d\lambda.$$

У цьому разі оперують з не випадковою функцією часу та обчислюють середні її значення. Така операція називається **усередненням у часі**.

Операція усереднення окремої випадкової величини $X(t_k)$, як сукупності миттєвих значень всіх реалізацій процесу $X(t)$ в перерізі t_k , називається **усередненням по ансамблю** або **статистичним усередненням**.

У теорії випадкових процесів розрізняють **початкові** та **центральні** моментні функції, для позначення яких використовують такі символи: M – для початкової моментної функції; μ (мю) – для центральної моментної функції.

У зв'язку з тим, що моментні функції пов'язані з перерізами, тобто моментами часу, в які визначені випадкові величини $X(t_1), X(t_2) \dots, X(t_n)$, їх характеризують розмірністю і виділяють серед них, подібно законам розподілу ймовірності, **одновимірні, двовимірні та багатовимірні моментні функції**.

Моментні функції, як початкові, так і центральні, крім розмірності, характеризуються ще й **порядком** для чого в позначенні вводиться нижній індекс. Тоді одновимірній моментній функції відповідає однопозиційний індекс, двовимірній – двопозиційний, а n -вимірній – n -позиційний. У разі дво- та більше позиційного індексу порядок моментної функції визначається сумою чисел кожної позиції.

► **Приклад.** Визначити розмірність та порядок моментних функцій.

$M_{H_1}(t_k)$ - одновимірна початкова моментна функція порядку ν_1 ;
 $M_{H_1, H_2}(t_k, t_{k+1})$ - двовимірна початкова моментна функція порядку $\nu_1 + \nu_2$;
 $\mu_2(t_k)$ - одновимірна центральна моментна функція другого порядку;
 $\mu_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ - n -вимірна центральна моментна функція порядку $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$.



Початкові моментні функції. За означенням для випадкового процесу чи сигналу $X(t)$

- **одновимірна початкова моментна функція** $M_{\nu_1}(t_k)$ **порядку** H_1

4.1 Загальна характеристика моментних функцій

$$M_{H_1}(t_k) = M[X^{v_1}(t_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_k^{v_1} p_1(X_k, t_k) dX_k = \langle X^{v_1}(t_k) \rangle; \quad (4.1)$$

- **двовимірна початкова моментна функція** $M_{v_1, v_2}(t_k, t_{k+1})$ порядку $v_1 + v_2$

$$\begin{aligned} M_{v_1, v_2}(t_k, t_{k+1}) &= M[X^{v_1}(t_k), X^{v_2}(t_{k+1})] = \langle X^{v_1}(t_k) \cdot X^{v_2}(t_{k+1}) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_k^{v_1} X_{k+1}^{v_2} p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) dX_k dX_{k+1}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

- **багатовимірна початкова моментна функція** $\sum_{i=1}^n H_i$ -порядку

$$\begin{aligned} M_{v_1, v_2, \dots, v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \langle \prod_{i=1}^n X^{v_i}(t_i) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X_1^{v_1} \dots X_n^{v_n} p_n(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) dX_1 \dots dX_n \end{aligned} \quad (4.3)$$

З практичного погляду найуживанішими є три початкові моментні функції:

- **одновимірна початкова моментна функція першого порядку** $M_1(t_k) = M[X(t_k)] = \langle X(t_k) \rangle$, **математичне очікування** або **середньостатистичне значення** випадкового процесу.

Часто математичне очікування позначають через $m_X(t_k)$ або $\overline{X(t_k)}$. У загальному випадку для довільного перерізу індекс k можна опустити і тоді середньостатистичне значення буде мати позначення $m_X(t)$ або $\overline{X(t)}$;

- **одновимірна початкова моментна функція другого порядку** $M_2(t_k) = M[X^2(t_k)] = \langle X^2(t_k) \rangle$ або **середній квадрат** випадкового процесу. Допускається і таке позначення: $\overline{X^2(t_k)}$ або без індексу k - $\overline{X^2(t)}$;

- **двовимірна початкова моментна функція другого порядку** $M_{1,1}(t_k, t_{k+1}) = M[X(t_k)X(t_{k+1})] = \langle X(t_k)X(t_{k+1}) \rangle$ для одного ви-

падкового процесу чи сигналу, а для двох випадкових процесів чи сигналів $M_{1,1}(t_k, t_{k+1}) = M[X(t_k)Y(t_{k+1})] = \langle X(t_k)Y(t_{k+1}) \rangle$. Щодо назв використовують найрізноманітніші варіанти: **функція кореляції процесу $X(t)$** або **автокореляційна функція (АКФ)**; **функція взаємної кореляції** двох процесів $X(t), Y(t)$ або **взаємнакореляційна функція (ВКФ)**.

Центральні моментні функції будь-якого порядку є часовими характеристиками **центрованого випадкового процесу**, що відрізняється від звичайного (нецентрованого) на величину його математичного очікування. Тобто, якщо $X(t)$ – нецентрований випадковий процес, $m_X(t)$ – його математичне очікування, то відповідний центрований випадковий процес $\dot{X}(t) = X(t) - m_X(t)$. Зустрічаються і інші назви для центрованого процесу $\dot{X}(t)$: **відхилення** випадкового процесу від середнього статистичного або **флуктуація** випадкового процесу.

За своєю структурою співвідношення для центральних моментних функцій збігаються з відповідними співвідношеннями, за якими визначають початкові моментні функції нецентрованих випадкових процесів. Так, багатовимірна порядку $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$ центральна моментна функція

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \langle \prod_{i=1}^n (X(t_i) - m_X(t_i))^{\nu_i} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [X(t_1) - m_X(t_1)]^{\nu_1} [X(t_2) - m_X(t_2)]^{\nu_2} \dots [X(t_n) - m_X(t_n)]^{\nu_n} \times \\ &\quad \times p_n(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dots, \dot{X}_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dX_1 dX_2 \dots dX_n \end{aligned}$$

де $p_n(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dots, \dot{X}_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ – зсунута на $m_X(t)$ функція щільності ймовірності.

Найуживанішими є такі центральні моментні функції:

- **одновимірна центральна моментна функція другого порядку**

4.1 Загальна характеристика моментних функцій

$$M_2(t_k) = \mu[\dot{X}^2(t_k)] = \mu[(X(t_k) - m_X(t_k))^2] = \langle [X(t_k) - m_X(t_k)]^2 \rangle,$$

яку називають **середньостатистичним значенням квадрата центрованого випадкового процесу** або просто його **дисперсією**. Використовують і інші позначення для дисперсії: $D_X(t_k)$, $\sigma^2(t_k)$;

- **двовимірні центральні моментні функції другого порядку:**

для центрованого випадкового процесу $\dot{X}(t)$ (його функція кореляції або автокореляційною функція)

$$\begin{aligned} \mu_{1,1}(t_k, t_{k+1}) &= \mu[\dot{X}(t_k)\dot{X}(t_{k+1})] = \\ &= \mu[X(t_k) - m_X(t_k)][X(t_{k+1}) - m_X(t_{k+1})] \rangle; \end{aligned}$$

для двох центрованих випадкових процесів

$$\mu_{1,1}(t_k, t_{k+1}) = \mu[\dot{X}(t_k)\dot{Y}(t_{k+1})] = \mu[X(t_k) - m_X(t_k)][Y(t_{k+1}) - m_Y(t_{k+1})] \rangle.$$

Попередні викладки дають змогу зробити такий висновок:

- ✦ **розмірність моментних функцій визначається кількістю перерізів, а її порядок сумою степенів кожної випадкової величини відповідного перерізу, які характеризують випадковий процес.**

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Моментні функції є часовими характеристиками випадкового процесу.
2. Моментні функції характеризуються розмірністю та порядком.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: усереднення у часі та за ансамблем, моментна функція, одно-, дво- та n -вимірні початкові та центральні моментні функції, розмірність та порядок моментної функції.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: усереднення у часі та за ансамблем, моментна функція, одно-, дво- та n -вимірні початкові та центральні моментні функції, розмірність та порядок моментної функції.

2. Визначати порядок та розмірність моментних функцій.

2. Різні назви одно- та двовимірних початкових та центральних моментних функцій.

3. Розмірність моментної функції визначається кількістю перерізів, а її порядок сумою степенів кожної випадкової величини відповідного перерізу, які характеризують випадковий процес.

4.2 Одновимірні моментні функції першого порядку

Початкова одновимірна моментна функція першого порядку (математичне очікування або середньостатистичне значення) визначається усередненням випадкової величини $X(t_k)$ за ансамблем реалізацій процесу $X(t)$ будь-якого типу:

$$m_X(t) = \overline{X(t)} = M_1(t_k) = M[X(t_k)] = \langle X(t_k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) dX_k. \quad (4.4)$$

Якщо врахувати, що $p_1(X_k, t_k) dX_k$ (елементарна ймовірність) є величиною безрозмірною, то згідно з (4.4) розмірність математичного очікування визначається розмірністю процесу.

У випадках, коли йдеться про дискретний випадковий процес, який в перерізі t_k характеризується дискретною випадковою величиною $X(t_k)$, що набуває конкретного (точно визначеного) із області значень процесу значення, під час обчислення одновимірної початкової моментної функції першого порядку застосовують формулу

$$m_X(t_k) = M[X(t_k)] = \sum_{i=1}^s X_i(t_k) P(X_i(t_k), t_k), \quad (4.5)$$

4.2 Одновимірні моментні функції першого порядку

де $X_i(t_k)$ - допустимі (точно визначені) значення випадкової величини $X(t_k)$ в перерізі t_k ; $P_i(X_i(t_k), t_k)$ - ймовірність того, що дискретна величина $X(t_k)$ в перерізі t_k набуває значення, яке збігається з $X_i(t_k)$; s – число перерізів, яке в загальному випадку є нескінченним.

Таким чином, середнє значення дискретного випадкового процесу визначається сумою добутків можливих миттєвих дискретних значень його реалізацій в одному перерізі на ймовірності цих значень. Причому сума може бути як обмеженою (верхній індекс s є величиною кінцевою), так і нескінченною (верхній індекс ∞).

✦ **Середнє значення дискретної випадкової величини буде зміщуватися в бік тих її значень, які мають більшу ймовірнісну вагу, а за однакових ймовірностей – у бік більших абсолютних значень випадкової величини.**

Дослідження підтверджують, що оцінкою математичного очікування є середнє арифметичне отриманих у результаті великої кількості дослідів значень випадкової величини:

$$M[X(t_n)] = \frac{X_1 k_1 + X_2 k_2 + \dots + X_s k_s}{n}$$

де n – загальна кількість дослідів; k_s - кількість дослідів, в результаті яких спостерігалось значення X_s .

Слід відзначити, що на відміну від випадкового процесу $X(t)$ математичне очікування є детермінованою функцією. Ясно, що $m_x(t)$ для конкретного значення аргумента t_k є числом. При переході до іншого перерізу буде змінюватися в загальному випадку і значення математичного очікування $m_X(t)$.

► **Приклад.** Випадковий процес в перерізі t_k характеризується випадковою дискретною величиною $X(t_k)=[0, -2, -5, 6, 8]$, ймовірності значень якої задані рядом $P_i(X_i(t_k), t_k)=[0,1; 0,2; 0,4; 0,2; 0,1]$

Визначити математичне очікування.

Згідно з (4.5) математичне очікування такого процесу

$$m_X(t) = 0,1 \cdot 0 - 0,2 \cdot 2 - 0,4 \cdot 5 + \\ + 0,2 \cdot 6 + 0,1 \cdot 8 = -0,4.$$

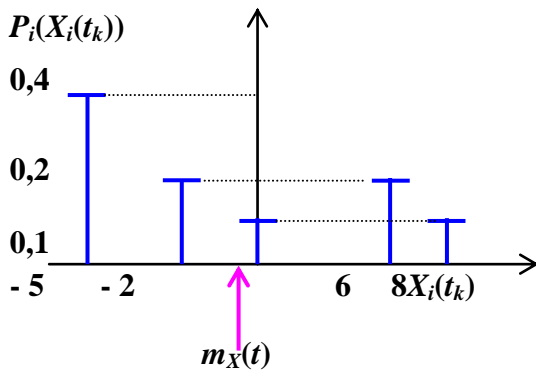


Рисунок 4.1 – До визначення математичного очікування.

На рис. 4.1 відображені значення випадкової величини, ймовірності кожного з них та математичне очікування. Результат підтверджує факт зміщення (зсуву) значення математичного очікування в бік тих значень випадкової величини, які мають більшу ймовірність.

► **Приклад.** Визначити математичне очікування процесу $X(t)$, який в перерізі t_k характеризується рівномірним законом розподілу ймовірності миттєвих значень його реалізацій:

$$p_1(X_k, t_k) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq X_k \leq b; \\ 0, & a > X_k; \quad a > X_k > b. \end{cases} \quad (4.6)$$

Графічне зображення функції щільності ймовірностей для цього закону подано на рис. 4.2.

Площа обмежена графіком цієї функції дорівнює 1, що відповідає умові нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) dX_k = \int_a^b p_1(X_k, t_k) dX_k = \int_a^b \frac{1}{b-a} dX_k = \frac{X_k}{b-a} \Big|_a^b = 1.$$

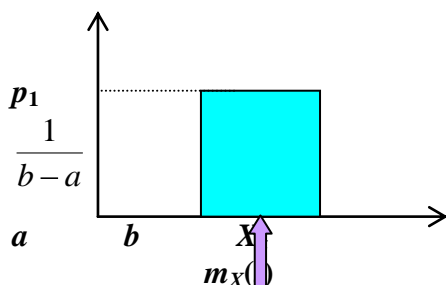


Рисунок 4.2 – Рівномірний закон розподілу і його математичне очікування.

Математичне очікування

$$m_X(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t_k) p_1(X_k, t_k) dX_k = \\ = \int_a^b X_k \frac{1}{b-a} dX_k = \\ = \frac{1}{b-a} \frac{X_k^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$



4.2 Одновимірні моментні функції першого порядку

- ✦ Отже, **математичне очікування випадкового процесу з однаковими параметрами рівномірного закону розподілу в кожному перерізі буде однаковим і становить половину суми максимального та мінімального значень, яких набувають вибіркові функції в певному перерізі.**

Очевидно, коли абсолютні значення максимального та мінімального значень випадкової величини збігаються, то математичне очікування дорівнює нулю. Це є наслідком більш загального висновку:

- ✦ **математичне очікування випадкової величини з симетричним відносно осі ординат диференціальним законом розподілу ймовірності дорівнює нулю.**

► **Приклад.** Визначити математичне очікування для випадкового гармонічного процесу, амплітуда якого є випадковою з рівномірним законом розподілу в інтервалі $[0, A_{\max}]$, а частота ω_0 та початкова фаза α_0 являються детермінованими та сталими (рис.4.3):

$$X(t) = A_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha_0) = A_{\max} \cos \psi(t).$$

У перерізі t_k миттєві значення $X(t_k)$ процесу $X(t)$ можуть бути в межах від 0 до $A \cos \psi(t_k)$.

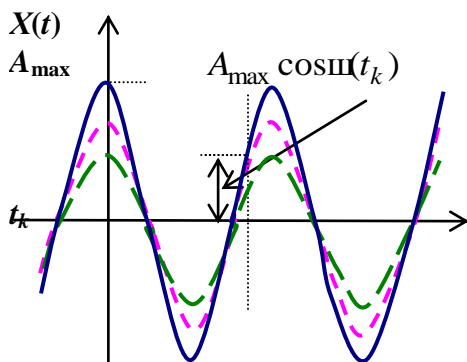


Рисунок 4.3 - Реалізації гармонічного випадкового процесу.

Будемо вважати, що $\cos \psi(t_k) > 0$. Виходячи з того, що амплітуда A_{\max} є величиною рівномірною, випадкова величина $X(t_k)$ буде також задовольняти рівномірному закону розподілу ймовірності:

$$p_1(X_k, t_k) = \frac{1}{A_{\max} \cos \psi(t_k)},$$

$$0 \leq X_k \leq A_{\max} \cos \psi(t_k).$$

Тоді математичне очікування такого процесу

$$m_X(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) dX_k = \int_0^{A_{\max} \cos \psi(t_k)} \frac{1}{A_{\max} \cos \psi(t_k)} X_k dX_k =$$

$$\frac{1}{A_{\max} \cos \Psi(t_k)} \frac{X_k^2}{2} \Big|_{A_{\max} \cos \Psi(t_k)}^0 = \frac{1}{2} A_{\max} \cos \Psi(t_k).$$

Такий самий результат отримаємо, врахувавши, що

$$A_{\max} \cos \Psi(t_k) m_X(t_k) = \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}$$



Цей приклад підтверджує, що математичне очікування в загальному випадку є функцією часу t , навіть якщо закони розподілу в різних перерізах t_1, t_2, t_3, \dots збігаються.

Значення випадкового процесу в точці t_k може збігатися або ні з математичним очікуванням, виходячи з імовірнісних характеристик процесу в цьому перерізі. Ось чому математичне очікування випадкового процесу вважається тим рівнем, що змінюється з часом, рівнем, відносно якого коливаються всі його реалізації (див. рис. 4.4).

Слід зазначити ще і таке: *одновимірною початковою функцією першого порядку $m_X(t)$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення.*

Властивості математичного очікування. Перш за все

- ✦ **математичне очікування не випадкового об'єкта K є сам об'єкт K :**

$$M[K] = K;$$

- ✦ **математичне очікування добутку випадкового процесу чи сигналу $X(t)$ на не випадкову величину K дорівнює добуткові математичного очікування процесу чи сигналу $X(t)$ на K :**

$$M[KX(t_k)] = KM[X(t_k)].$$

4.2 Одновимірні моментні функції першого порядку

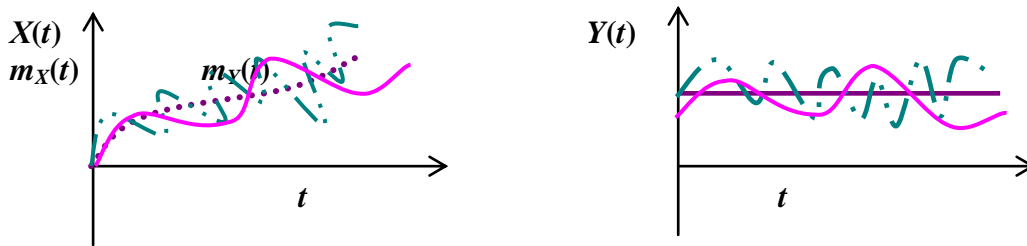


Рисунок 4.4 - До визначення математичного очікування процесу.

Тепер розглянемо два процеси або сигнали $X(t)$ та $Y(t)$. Припустимо, що ці процеси в перерізах $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$ характеризуються випадковими величинами $X(t_1), Y(t_1); X(t_2), Y(t_2); \dots, X(t_k), Y(t_k); \dots$, які є незалежними, тобто такими, що закон розподілу однієї величини, наприклад $X(t_k)$, не залежить від того, якого значення набуває $Y(t_k)$. За таких умов справедливим є таке:

✦ **математичне очікування алгебраїчної суми (добутку) названих процесів визначається алгебраїчною сумою (добутком) математичних очікувань доданків (співмножників):**

$$M[k_1 X(t_k) + k_2 Y(t_k)] = k_1 M[X(t_k)] + k_2 M[Y(t_k)];$$

$$M[KX(t_i)Y(t_i)] = KM[X(t_i)]M[Y(t_i)] = Km_X(t_i)m_Y(t_i).$$

Слід підкреслити, що математичне очікування алгебраїчної суми процесів відповідає алгебраїчній сумі їх математичних очікувань для не обов'язково, незалежних чи *некорельованих*, процесів. Водночас це не є справедливим для операції множення процесів. Так,

$$M[XY] = m_X m_Y + B_{XY},$$

якщо процеси є *корельованими*.

У останньому співвідношенні друга складова B_{XY} відображає кореляційні властивості двох процесів і називається **взаємною кореляційною функцією двох центрованих випадкових процесів**.

І тільки для процесів некорельованих

$$M[XY] = M[X]M[Y].$$

► **Приклад.** Випадкові величини $X(t_k)$ і $Y(t_k)$, що визначають відповідно дискретні незалежні випадкові процеси чи сигнали $X(t)$ та $Y(t)$, характеризуються такими параметрами:

$$X(t_k) \Rightarrow \begin{matrix} X_i(t_k) = -1, 1; \\ P_i(X_i(t_k)) = 0,4; 0,6. \end{matrix} \quad Y(t_k) \Rightarrow \begin{matrix} Y_i(t_k) = 2, 4; \\ P_i(Y_i(t_k)) = 0; 0,4. \end{matrix}$$

Визначити математичне очікування кожного з процесів та суми процесів у перерізі t_k .

Математичне очікування кожного з процесів:

$$\begin{aligned} m_X(t_k) &= 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0,4 = 0 + 1,6 = 1,6; \\ m_Y(t_k) &= -1 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 = -0,4 + 0,6 = 0,2. \end{aligned}$$

Математичне очікування суми процесів

$$M[X(t_k) + Y(t_k)] = 0,2 + 1,6 = 1,8.$$



Математичне очікування центрованих процесів. Очевидно, що математичне очікування центрованого випадкового процесу або сигналу дорівнює нулю:

$$\mu_1(t_k) = \mu[\dot{X}(t_k)] = \mu[X(t_k) - m_X(t_k)] = 0.$$

Дійсно за означенням

$$\begin{aligned} M[\dot{X}(t_k)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_k p_1(\dot{X}_k, t_k) d\dot{X}_k = \int_{-\infty}^{\infty} (X_k - m_X(t_k)) p_1(\dot{X}_k, t_k) d\dot{X}_k = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) dX_k - \int_{-\infty}^{\infty} m_X(t_k) p_1(\dot{X}_k, t_k) d\dot{X}_k = m_X(t_k) - m_X(t_k) = 0. \end{aligned}$$

Під час перетворень останнього виразу враховано умову нормування для функції щільності ймовірності, а також такі співвідношення: $d\dot{X}_k = dX_k$; $p_1(\dot{X}_k, t_k) d\dot{X}_k = p_1(X_k, t_k) dX_k$.

4.2 Одновимірні моментні функції першого порядку

► **Приклад.** Визначити математичне очікування для випадкового процесу, який в перерізі t_k характеризується центрованою випадковою величиною $\dot{X}(t_k)=[0,4; -1,6; -4,6; 6,4; 8,4]$, ймовірнісні значень якої є такими: $P_i(X_i(t_k)) = 0,1; 0,2; 0,4; 0,2; 0,1$.

Математичне очікування

$$\mu(t_k) = \sum_{i=1}^s \dot{X}_i(t_k) P_i(\dot{X}_i(t_k), t_k) =$$

$$0,4 \cdot 0,1 - 1,6 \cdot 0,2 - 4,6 \cdot 0,4 + 6,4 \cdot 0,2 + 8,4 \cdot 0,1 = 0.$$



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Середньостатистичне значення дискретної випадкової величини зміщується в бік тих її значень, які мають більшу ймовірнісну вагу, а за однакових ймовірностей – у бік більших абсолютних значень.

2. Одновимірна моментна функція першого порядку (математичне очікування) випадкового процесу вважається тим «рівнем», що змінюється з часом, відносно якого коливаються всі його реалізації.

3. Середньостатистичне значення центрованого випадкового процесу дорівнює нулю:



Треба вміти:

1. Визначати поняття: математичне очікування або се-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: математичне очікування або середньостатистичне значення випадкового процесу.

2. Середнє значення дискретного випадкового процесу визначається сумою добутоків можливих миттєвих дискретних значень його реалізацій в одному перерізі на ймовірності цих значень.

3. Оцінкою математичного очікування є середнє арифметичне отриманих у результаті великої кількості дослідів значень випадкової величини:

4. Математичне очікування випадкового процесу з однаковими параметрами рівномірного закону розподілу в кожному перерізі буде однаковим і становить половину суми максималь-

редньостатистичне значення випадкового процесу.

2. Сформулювати властивості одновимірної початкової і центральної моментних функцій першого порядку.

3. Визначати одновимірні початкові і центральні моментні функції першого порядку випадкових процесів.

ного та мінімального значень, яких набувають вибіркові функції в певному перерізі.

5. Середньостатистичне значення випадкової величини з симетричним відносно осі ординат диференціальним законом розподілу ймовірності дорівнює нулю.

6. Властивості одновимірної моментної функції першого порядку.

4.3 Одновимірні моментні функції другого порядку

Миттєве значення $M[X^2(t_k)] = M_2(t_k)$ одновимірної початкової моментної функції другого порядку або середній квадрат випадкового процесу $X(t)$ в перерізі t_k обчислюється усередненням за ансамблем квадрата випадкової величини $X(t_k)$:

$$M[X^2(t_k)] = M_2(t_k) = \langle X^2(t_k) \rangle = \overline{X^2(t_k)} = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t_k) p_1(X_k, t_k) dX_k. \quad (4.8)$$

Для дискретних процесів можна скористатися і таким співвідношенням:

$$M[X^2(t_k)] = M_2(t_k) = \langle X^2(t_k) \rangle = \overline{X^2(t_k)} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2(t_k) P_i(X_i, t_k). \quad (4.9)$$

► **Приклад.** Для процесу, який характеризується параметрами, що відповідають рис. 4.1, середній квадрат

$$\langle X^2(t_k) \rangle = 0^2 \cdot 0,1 + (-2)^2 \cdot 0,2 + (-5)^2 \cdot 0,4 + 6^2 \cdot 0,2 + 8^2 \cdot 0,1 = 24,4.$$



4.3 Одновимірні моментні функції другого порядку

► **Приклад.** Визначити середній квадрат або миттєве значення одновимірної початкової моментної функції другого порядку для випадкової величини $X(t_k)$ з рівномірним законом розподілу:

$$M_2(t_k) = \int_a^b \frac{1}{b-a} X_k dX_k = \frac{1}{b-a} \frac{X_k^3}{3} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$



На відміну від математичного очікування $m_X(t)$ середній квадрат $M_2[X(t_k)]$ завжди набуває додатних значень.

Згідно з (4.8) та (4.9) розмірність середнього квадрата визначається розмірністю процесу в квадраті: $[X(t)] = 1 \text{ A} \Rightarrow [M_2(t_k)] = 1 \text{ A}^2$.

Ось чому, наприклад, у електричних системах середній квадрат співвідноситься до середньої потужності, яка виділяється на резисторі з опором у 1 Ом під час протікання через нього струму в 1 А із постійною та змінною складовими.

► **Приклад.** Математичне очікування квадрата випадкового гармонічного процесу $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) = A \cos \psi(t)$ з випадковою амплітудою та рівномірним її законом розподілу і не випадковими іншими параметрами

$$\begin{aligned} M_2(t_k) &= \langle X^2(t_k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X_k^2 p_1(X_k, t_k) dX_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A_{\max} \cos \psi(t_k)} X_k^2 dX_k = \\ &= \frac{1}{A_{\max} \cos \psi(t_k)} \frac{X_k^3}{3} \Big|_0^{A_{\max} \cos \psi(t_k)} = \frac{A_{\max}^2 \cos^2 \psi(t_k)}{3}. \end{aligned}$$



Одновимірна центральна моментна функція другого порядку є настільки важливою характеристикою випадкових процесів і сигналів, що отримала спеціальну назву **дисперсія** (розсіювання) та позначення $D_X(t_k)$ або $\sigma_X^2(t_k)$.

За означенням дисперсія $\sigma_X^2(t) = \mu_2(t_k) = M[\dot{X}^2(t_k)]$ (одновимірна центральна моментна функція другого порядку) є математичним очікуванням (середнім значенням) квадрата центрованого процесу $\dot{X}^2(t)$ або квадрата відхилення випадкового процесу від середнього значення:

$$\overline{\dot{X}^2(t_k)} = \sigma_X^2(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} [X(t_k) - m_X(t_k)]^2 p_1(X_k, t_k) dX_k = M[\dot{X}^2(t_k)]. \quad (2.10)$$

Для дискретних процесів дисперсію обчислюють як суму добутків квадратів можливих відхилень миттєвих значень випадкового процесу від середнього на ймовірності відхилень у відповідних перерізах:

$$\sigma_X^2(t_k) = D_X(t_k) = \sum_{i=1}^{\infty} [X(t_k) - m_X(t_k)]^2 P_i(\dot{X}_i(t_k)) \quad (4.11)$$

Як середній квадрат, так і дисперсія мають розмірність квадрата миттєвого значення випадкового процесу. Наприклад, якщо $X(t)$ відповідає напрузі, то $\sigma_X^2(t)$ має розмірність $[B^2]$.

Графічна ілюстрація одновимірної центральної моментної функції другого порядку неперервного та дискретного процесів із однаковими значеннями математичних очікувань показана на рис. 4.5 та 2.6 відповідно. Як впливає з формул (4.10) та (4.11), чим більше відхилення процесу в обидва боки від середнього значення і чим більше ймовірність цих відхилень, тим більша дисперсія.

Слід звернути увагу і на те, що центральна моментна функція другого порядку (дисперсія), як і інші моментні функції, є функціями не випадковими. Окрім того, середнє статистичне може приймати як додатні, від'ємні так і нульові значення; дисперсія – завжди додатня.

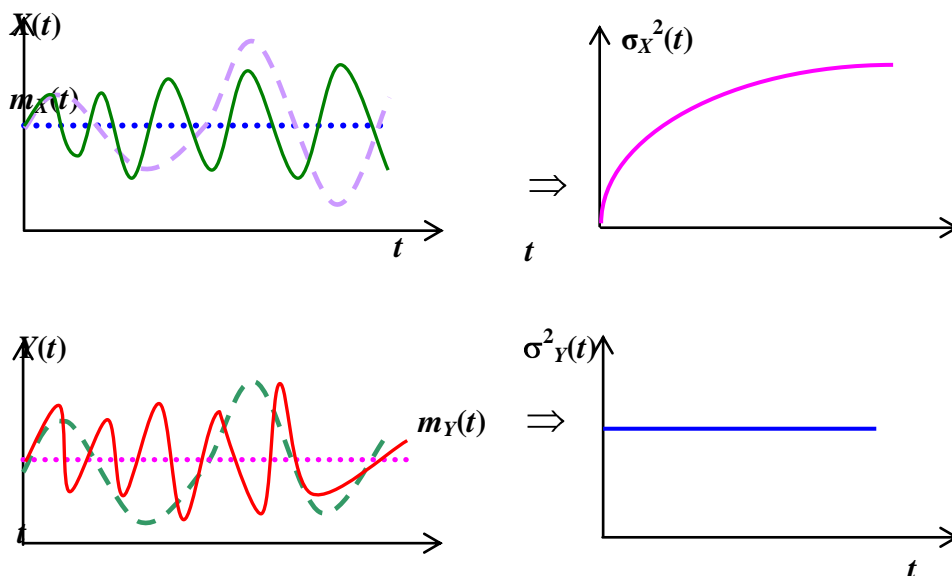


Рисунок 4.5 - Неперервні процеси з однаковим математичними

4.3 Одновимірні моментні функції другого порядку

очікуваннями і різними дисперсіями.

► **Приклад.** Дискретний випадковий процес $X(t)$ у момент t_k характеризується випадковою величиною $X(t_k) = [0, 2, -5, 6, 8]$ та ймовірностями її значень $P_i = P(x_i(t_k)) = [0,1; 0,2; 0,4; 0,2; 0,1]$. Визначити дисперсію.

Відповідно до (4.10) дисперсія

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t_k) &= (0+0,4)^2 0,1 + (-2+0,4)^2 0,2 + (-5+0,4)^2 0,4 + (6+0,4)^2 0,2 + \\ &+ (8+0,4)^2 0,1 = 0,016 + 0,512 + 8,464 + 8,192 + 7,056 = 27,24. \end{aligned}$$

□

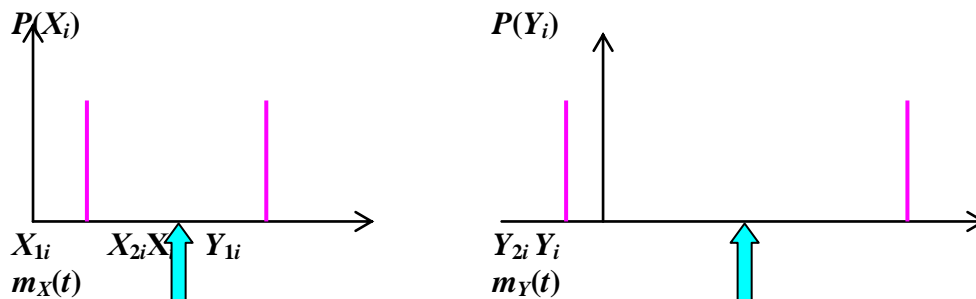


Рисунок 4.6 - Закони розподілу ймовірності двох дискретних процесів із однаковими математичними очікуваннями та різними дисперсіями.

► **Приклад.** Дисперсія випадкового процесу з рівномірним законом розподілу.

Відповідно до (4.10) та з урахуванням (4.6)

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t) &= \int_a^b X_k^2 p_1(X_k, t_k) dX_k = \int_a^b \left(X_k - \frac{b+a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dX_k = \\ &= \underbrace{\int_a^b \frac{1}{b-a} X_k^2 dX_k}_{X^2(t_k)} - \underbrace{\int_a^b \frac{b+a}{b-a} X_k^2 dX_k}_{(b+a)m_X(t_k)} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b+a)^2}{4(b-a)} dX_k}_{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \\ &= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

□

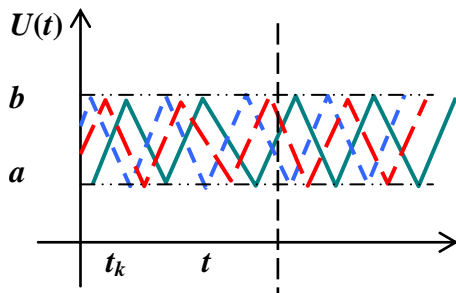


Рисунок 4.7 - Реалізації процесу пилкоподібної форми з рівномірним законом розподілу.

► **Приклад.** Розглянемо незалежне джерело напруги пилкоподібної форми, яке почергово випадково вмикається. Кожному випадковому вмиканню на виході джерела буде відповідати пилкоподібна реалізація, зсунута відносно початку координат вздовж часової осі (рис. 4.7). Установлено, що миттєві значення напруги $U(t)$ в довільному перерізі t_k підпорядковані

рівномірному закону розподілу.

Визначити середній квадрат та дисперсію такого процесу.

Згідно з (4.10) та математичною моделлю рівномірного закону розподілу (4.6) середній квадрат

$$\begin{aligned} M_2(t_k) = \langle x^2(t_k) \rangle &= \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} U_k^2 \frac{1}{b-a} dU_k = \frac{U_k^3}{3} \frac{1}{b-a} = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} \frac{1}{b-a} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Відповідно до (4.11) дисперсія:

$$\begin{aligned} \sigma_U(t_k) &= \int_a^b (U_k - m_U(t_k))^2 \frac{1}{b-a} dU_k = \int_a^b U_k^2 \frac{1}{b-a} dU_k - \\ &- 2 \int_a^b m_U(t_k) \frac{1}{b-a} dU_k + \int_a^b m_U^2(t_k) \frac{1}{b-a} dU_k. \end{aligned}$$

Перша складова в останньому співвідношенні – є середнім квадратом $\overline{U^2(t_k)}$, друга $2m_U^2(t_k)$ - подвоєним значенням квадрата математичного очікування, а третя - квадратом математичного очікування, виходячи з його властивостей.

Тоді

$$\begin{aligned} y_U^2(t_k) = \overline{U^2(t_k)} - m_U^2(t_k) &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3 Одновимірні моментні функції другого порядку

Отже,

✦ *дисперсія дорівнює різниці середнього квадрата та квадрата математичного очікування.*

Цей висновок за аналогію з детермінованими процесами означає, що потужність змінної складової дорівнює різниці потужностей процесу та його постійної складової.

□

► **Приклад.** *Випадковий процес $X(t)$ утворюється гармонічними реалізаціями $x_k(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_k)$, де A_m і ω_0 постійні величини, а початкова фаза φ – випадкова величина з рівномірним законом розподілу в інтервалі $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (рис. 4.8, а). Обчислити математичне очікування та дисперсію випадкової величини φ та процесу $X(t)$.*

У цьому разі миттєві значення процесу $X(t)$ є функціями фазового кута. Тому при обчисленні зазначених характеристик для випадкової фази слід виходити з функції щільності ймовірності фази $p_{1\varphi}(\varphi_k, t_k)$, а для випадкового процесу $X(t)$ – закону розподілу випадкового процесу $p_{1X}(X_k, t_k)$.

Обчислимо закон розподілу $p_{1X}(X_k, t_k)$ за $p_{1\varphi}(\varphi_k, t_k)$. Виділимо інтервал $[X_k, X_k + dX_k]$ (див рис. 4.8, б для однієї реалізації). Тоді ймовірність того, що в момент часу t_k миттєві значення реалізацій потраплять в цей інтервал дорівнює $p_{1X}(X_k, t_k)dX_k$.

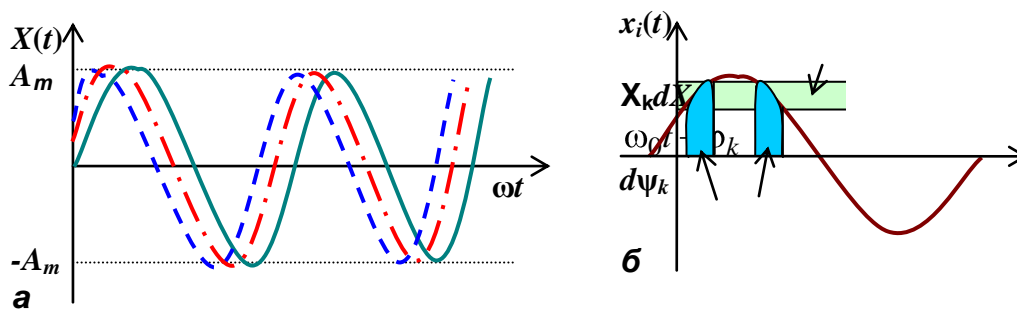


Рисунок 4.8 - Гармонічний процес із рівномірною випадковою початковою фазою: а – реалізації випадкового процесу; б – до визначення закону розподілу.

Виходячи з того, що миттєві значення процесу $X(t)$ є функціями значень початкової фази $\varphi(t)$ і фазового кута $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$, можна стверджувати, що ймовірність $p_{1X}(X_k, t_k)dX_k$ визначається ймовірністю потрапляння значень випадкової фази в один із заштрихо-

ваних фазових інтервалів. Якщо ймовірність потрапляння випадкової фази в фазовий інтервал $[\psi_k, \psi_k + d\psi_k]$ позначити через $p_{1\psi}(\psi_k, t_k)d\psi_k$, то ймовірність потрапляння в один із двох буде такою:

$$2p_{1\psi}(\psi_k, t_k)d\psi_k = p_{1X}(X_k, t_k)dX_k = 2p_{1\phi}(\phi_k, t_k)d\phi_k = 2\frac{1}{2\pi}d\phi_k.$$

Останнє співвідношення випливає з того, що випадкова фаза $\psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$ та початкова випадкова фаза $\phi(t)$ відрізняються невідповідною величиною $\omega_0 t$, а отже їхні закони розподілу ідентичні.

Тоді

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \frac{1}{\pi} \frac{d\psi_k}{dX_k} = (1/\pi)(1/|dX_k/d\psi_k|).$$

Оскільки

$$\left| \frac{dX_k}{d\psi_k} \right| = \left| \frac{d}{d\psi_k} A_m \cos \psi_k(t) \right| = A_m \sin \psi_k = A_m \sqrt{1 - \cos^2 \psi_k} = A_m \sqrt{1 - \frac{X_k^2}{A_m^2}},$$

то остаточно,

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \frac{1}{\pi A_m} \frac{1}{\sqrt{1 - [X_k / A_m]^2}}, \quad -A_m \leq x_k \leq A_m \quad (4.15)$$

Абсолютне значення похідної введено на тій підставі, що щільність ймовірності задовольняє умову невід'ємності.

Графік функції $p_{1X}(X_k, t_k)dX_k$ зображено на рис. 4.9.

Математичне очікування випадкової початкової фази

$$m_\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k p_{1\phi}(\phi_k, t_k) d\phi_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k d\phi_k = \frac{\pi - \pi}{2} = 0.$$

Тоді математичне очікування випадкового процесу

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_{1X}(X_k, t_k) dX_k = \int_{-A_m}^{A_m} \frac{X_k}{\pi A_m \sqrt{1 - x_k^2 / A_m^2}} dX_k = \int_{-A_m}^{A_m} \frac{1}{\pi} \frac{X_k dX_k}{\sqrt{A_m^2 - X_k^2}} = 0.$$

4.3 Одновимірні моментні функції другого порядку

Оскільки математичне очікування дорівнює нулю, то графік $p_{1X}(X_k, t_k)$ є симетричним відносно початку координат.

Такий самий результат отримаємо, скориставшись визначенням математичного очікування процесу, що є функцією іншого (процес $X(t)$ є функцією $\varphi(t)$) та властивістю інтеграла від парної функції в симетричних межах:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\varphi_k) p_{1\varphi}(\varphi_k, t_k) d\varphi_k = \int_{-\infty}^{\infty} A_m \cos(\omega_0 t_k + \varphi_k) \frac{1}{2\pi} d\varphi_k = \\ &= \frac{1}{2\pi} A_m \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t_k + \varphi_k) d\varphi_k = 0. \end{aligned}$$

Виходячи з того, що математичне очікування як початкової фази, так і процесу в цілому дорівнює нулю, дисперсії $\sigma_{\varphi}^2(t)$ та $\sigma_X^2(t)$ збігаються із їхніми середніми квадратами: $\langle X^2(t_k) \rangle$, $\langle \varphi^2(t_k) \rangle$.

Для рівномірного закону розподілу початкової фази, як відомо,

$$\langle \varphi^2(t) \rangle = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Середній квадрат процесу, а отже, і його дисперсія

$$\sigma_X^2(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} X_k^2 p_{1X}(X_k, t_k) dX_k = \int_{-A_m}^{A_m} X_k^2 \frac{1}{\pi A_m} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{X_k^2}{A_m^2}}} dX_k = \frac{A_m^2}{2}.$$

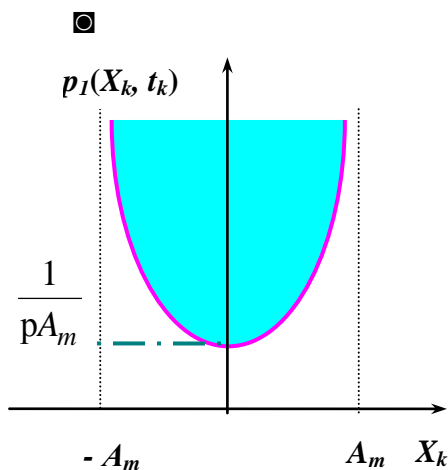


Рисунок 4.9 - Синусоїдальний закон розподілу ймовірності.

Корінь квадратний від дисперсії в літературі називається **середньоквадратичним значенням** процесу. В останньому прикладі середньоквадратичне значення $y_X(t) = \sqrt{y_X^2} = A_m / \sqrt{2}$.

Середньоквадратичне значення випадкового процесу, як і центральна моментна функція другого порядку, характеризує відхилення миттєвих зна-

чень випадкового процесу від середніх, але середньоквадратичне значення $y(t)$ має таку ж розмірність, як і процес. Установлено, що по значенню $\sigma(t_k)$ можна судити про ширину графіка одновимірної функції щільності ймовірності $p_1(X_k, t_k)$.

Як підсумок наведемо характерні властивості дисперсії та середньоквадратичного значення:

- **дисперсія (середньоквадратичне значення) процесу, що не змінюється в часі, дорівнює нулю:**

$$\sigma_X^2(t) = 0; \quad (4.16)$$

- **дисперсія алгебраїчної суми незалежних або некорельованих процесів у моменти часу, що збігаються, є сумою дисперсій її складових:**

$$\sigma^2(X(t) \pm Y(t) \pm Z(t)) = \sigma_X^2(t) + \sigma_Y^2(t) + \sigma_Z^2(t). \quad (4.17)$$

Підкреслимо, що різниці двох незалежних або некорельованих процесів відповідає сума (не алгебраїчна) їхніх дисперсій;

- **дисперсія суми деякого процесу $X(t)$ з незмінним у часі процесом K дорівнює дисперсії процесу $X(t)$:**

$$\sigma^2[X(t) + K] = \sigma_X^2(t). \quad (4.18)$$

Розглянуті приклади підтверджують зв'язок між одновимірними моментними початковими і центральними функціями першого та другого порядків:

$$\begin{aligned} \mu_2(t) = M_2(t) - M_1^2(t) &\Rightarrow \sigma_X^2(t) = \\ &= \langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2 = \langle X^2(t) \rangle - m_X^2(t); \end{aligned} \quad (4.19)$$

- **якщо два випадкові процеси $X(t)$ та $Y(t)$ в кожному перерізі є корельованими, то дисперсія алгебраїчної суми таких процесів визначається за такою формулою:**

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2B_{XY}, \quad (4.20)$$

де B_{XY} - взаємна кореляційна функція двох центрованих процесів;

4.3 Одновимірні моментні функції другого порядку

- дисперсія добутку процесу $X(t)$ на не випадкову величину (зокрема, число) K дорівнює добутку квадрата числа на дисперсію $\sigma_X^2(t)$:

$$M[K^2 \dot{X}^2(t_k)] = K^2 M[\dot{X}^2(t_k)] \Rightarrow$$

$$M\{[K^2 \dot{X}^2(t_k)] - 2K^2 X(t_k)m_X(t_k) + K^2 m_X^2(t_k)\}. \quad (4.21)$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Середньостатистичне значення дискретної випадкової величини зміщується в бік тих її значень, які мають більшу ймовірнісну вагу, а за однакових ймовірностей – у бік більших абсолютних значень.

2. Одновимірна центральна моментна функція другого порядку (дисперсія) випадкового процесу є оцінкою відхилення його реалізацій від середньостатистичного значення.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: двовимірні початкова та центральна моментні функції другого порядку або середній квадрат та дисперсія випадкового процесу, середньоквадратичне відхилення.

2. Сформулювати властивості дисперсії та середньоква-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: двовимірні початкова та центральна моментні функції другого порядку або середній квадрат та дисперсія випадкового процесу, середньоквадратичне відхилення.

2. Середній квадрат та дисперсія завжди набувають додатних значень.

3. Для дискретних процесів дисперсію обчислюють як суму добутків квадратів можливих відхилень миттєвих значень випадкового процесу від середнього на ймовірності відхилень у відповідних перерізах.

4. Дисперсія визначається різницею середнього квадрата та квадрата математичного очікування

5. Властивості дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

6. Формули:

дратичного відхилення.

3. Визначати одновимірні початкові і центральні моментні функції другого порядку випадкових процесів.

$(b-a)^2/12$ - дисперсія рівномірного розподілу

4.4 Взаємозв'язок одновимірних моментних та характеристичних функцій

Обчислення одновимірних моментних функцій за характеристичними. Розглянемо одновимірну характеристичну функцію

$$\theta_1(j\nu_k, t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k \quad (4.22)$$

та обчислимо за аргументом ν_k першу похідну від неї:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1(j\nu_k, t_k)}{d\nu_k} &= \frac{d}{d\nu_k} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k = \\ &= j \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k. \end{aligned}$$

У разі, якщо $\nu_k = 0$, дістанемо:

$$\left. \frac{d\theta(j\nu_k, t_k)}{d\nu_k} \right|_{\nu_k=0} = j \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) dX_k = jM_1(t_k) = jm_X(t_k).$$

✦ **Початкове значення (для $\nu_k = 0$) похідної першого порядку від одновимірної характеристичної функції з точністю до постійного множника j визначає математичне очікування або одновимірну початкову моментну функцію першого порядку:**

$$m_X(t_k) = M_1(t_k) = M[X(t_k)] = -j \left. \frac{d\theta(j\nu_k, t_k)}{d\nu_k} \right|_{\nu_k=0} \quad (4.23)$$

Друга похідна від одновимірної характеристичної функції

4.4 Взіємозв'язок одновимірних моментних та характеристичних функцій

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_1(j\nu_k, t_k)}{d\nu_k^2} &= \frac{d^2}{d\nu_k^2} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} X_k^2 p_1(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k \end{aligned}$$

Тоді середній квадрат

$$M[X^2(t_k)] = \langle X^2(t_k) \rangle = (-j)^2 \frac{d^2 \Psi_1(j\nu_k, t_k)}{d\nu_k^2} \Big|_{\nu_k=0} \quad (4.24)$$

✦ **Одновимірна моментна функція другого порядку з точністю до $(-j)^2$ пропорційна другій похідній від одновимірної характеристичної функції в точці $\nu_k = 0$.**

► **Приклад.** Розглянемо процес $X(t)$ з експоненціальним законом розподілу

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-X_k/\alpha}, & X_k \geq 0; \\ 0, & X_k < 0. \end{cases}$$

В перерізі t_k математичне очікування такого процесу

$$\begin{aligned} m_X(t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_{1X}(X_k, t_k) dX_k = \int_{-\infty}^{\infty} X_k \frac{1}{\alpha} e^{-X_k/\alpha} dX_k = \\ &= X_k \frac{1}{\alpha} e^{-X_k/\alpha} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-X_k/\alpha} dX_k = \alpha. \end{aligned}$$

Середній квадрат:

$$\begin{aligned} M_2(t_k) = M[X^2(t_k)] &= \int_{-\infty}^{\infty} X_k^2 p_{1X}(X_k, t_k) dX_k = \int_0^{\infty} X_k^2 \frac{1}{\alpha} e^{-X_k/\alpha} dX_k = \\ &= [X_k^2 (-e^{-X_k/\alpha})]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2X_k e^{-X_k/\alpha} dX_k = 2\alpha^2. \end{aligned}$$

Тоді дисперсія може бути обчислена як різниця між середнім квадратом та квадратом середнього значення:

$$\sigma_X^2 = M_2(t_k) - (m_X(t_k))^2 = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2.$$

Обчислимо ці ж величини на основі характеристичної функції першого порядку.

$$\begin{aligned} \theta_{1X}(j\nu_k, t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{1X}(X_k, t_k) e^{j\nu_k X_k} dX_k = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{X_k}{\alpha}} e^{j\nu_k X_k} dX_k = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-X_k(-j\nu_k + \frac{1}{\alpha})} dX_k = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(1/\alpha) - j\nu_k} e^{-X_k(\frac{1}{\alpha} - j\nu_k)} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{1 - j\nu_k \alpha}. \end{aligned}$$

Перша похідна від характеристичної функції

$$\frac{d\theta_1}{d\nu_k} = \alpha j \frac{1}{(1 - j\nu_k \alpha)^2},$$

а початкове значення похідної $[d\theta_1 / d\nu_k]_{\nu_k=0} = \alpha j$.

Тоді згідно з (4.23) $m_X(t_k) = \alpha$.

Початкове значення другої похідної

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \theta_1}{d\nu_k^2} \right|_{\nu_k=0} &= \left. \frac{d}{d\nu_k} \left(\frac{d\theta_1}{d\nu_k} \right) \right|_{\nu_k=0} = \left. \frac{-\alpha j 2(j\nu_k \alpha - 1)\alpha j}{(j\nu_k \alpha - 1)^4} \right|_{\nu_k=0} = \\ &= \left. \frac{-2j^3 \nu_k \alpha^3 + j^2 2\alpha^2}{(j\nu_k \alpha - 1)^4} \right|_{\nu_k=0} = j^2 2\alpha^2. \end{aligned}$$

Відповідно до (4.24) середній квадрат $M[X^2(t_k)] = 2\alpha^2$

Результати розрахунків із використанням характеристичних функцій повністю збігаються з отриманими раніше на базі визначень математичного очікування та середнього квадрата.

◻

► **Приклад.** Гармонічне коливання $S(t) = A_m \cos(\omega_1 t + \varphi(t))$ визначається випадковою початковою фазою $\varphi(t)$ з рівномірним законом розподілу $p_1(\varphi_k, t_k)$ на інтервалі $[-\pi, \pi]$ і детермінованими амплітудою

4.4 Взіємозв'язок одновимірних моментних та характеристичних функцій

та частотою. Визначити середнє статистичне, середній квадрат та дисперсію початкової фази методом характеристичних функцій.

Раніше було встановлено, що математичне очікування початкової фази такого процесу $m_\varphi(t) = 0$, середнє значення квадрата $\langle \varphi^2(t) \rangle = (b^2 + ab + a^2) / 3 = \pi^2 / 3$, а дисперсія $\sigma_\varphi^2(t_k) = \pi^2 / 3$.

Тепер обчислимо ці ж параметри на основі одновимірної характеристичної функції. Для початкової фази заданого гармонічного коливання:

$$\begin{aligned} \theta_1(j\nu_k, t_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\varphi_k, t_k) e^{j\nu_k \varphi_k} d\varphi_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{j\nu_k \varphi_k} d\varphi_k = \\ &= \frac{1}{j2\pi\nu_k} e^{j\nu_k \varphi_k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2j\pi\nu_k} (e^{j\nu_k \pi} - e^{-j\nu_k \pi}) = \frac{1}{\pi\nu_k} \sin \pi\nu_k. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Тоді відповідно до (4.23) та з урахуванням останнього співвідношення

$$m_\varphi(t_k) = -j \frac{d\theta_1(j\nu_k, t_k)}{d\nu_k} \Big|_{\nu_k=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = 0. \quad (4.26)$$

Після двократного диференціювання характеристичної функції та розкриття невизначеності дістанемо середній квадрат та дисперсію:

$$\overline{\varphi^2(t_k)} = \sigma_\varphi^2 = - \frac{d^2\theta_1(j\nu_k, t_k)}{d\nu_k^2} \Big|_{\nu_k=0} = \frac{\pi^2}{3}. \quad (4.27)$$



► **Приклад.** Випадковий процес $X(t)$ у k -ому перерізі визначається дискретною випадковою величиною $X(t_k) = [1, 2, 3, 4]$, ймовірності набуття значень якої задаються рядом $P(X_i) = [0,4; 0,2; 0,1; 0,3]$. Визначити середній квадрат та математичне очікування процесу в заданому перерізі методом характеристичних функцій.

Згідно з означенням для дискретної випадкової величини одновимірною характеристичною функцією

$$\theta_1(jv_k, t_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_i) e^{jv_k X_i} = 0,4e^{jv_k} + 0,2e^{j2v_k} + 0,1e^{j3v_k} + 0,3e^{j4v_k}.$$

Перша похідна від характеристичної функції за її аргументом

$$\frac{d\theta_1(jv_k, t_k)}{dv_k} = j0,4e^{jv_k} + 0,2 \cdot 2je^{j2v_k} + 0,1 \cdot 3je^{j3v_k} + 0,3 \cdot 4je^{j4v_k},$$

а її початкове значення

$$\left. \frac{d\theta_1(jv_k, t_k)}{dv_k} \right|_{v_k=0} = j0,4 + 0,4j + 0,3j + 1,2j = 2,3j.$$

Тоді згідно з (4.23) математичне очікування

$$m_X(t_k) = -j(2,3j) = -j^2 2,3 = 2,3.$$

Для визначення середнього квадрата обчислимо початкове значення другої похідної від характеристичної функції:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\theta_1(jv_k, t_k)}{dv_k^2} \right|_{v_k=0} &= (j^2 0,4e^{jv_k} + 0,4 \cdot 2j^2 e^{j2v_k} + 0,3 \cdot 3j^2 e^{j3v_k} + 1,2 \cdot 4j^2 e^{j4v_k}) \Big|_{v_k=0} = \\ &= j^2 0,4 + 0,8j^2 + 0,9j^2 + 4,8j^2 = 6,9j^2. \end{aligned}$$

Згідно з (4.24) середній квадрат $\overline{X^2(t_k)} = (-j)^2 6,9j^2 = 6,9$.

■

Поновлення одновимірних характеристичних функцій за моментними. Скористаємось поданням експоненціальної функції $\exp(jv_k X_k)$ степеневим рядом:

$$e^{jv_k X_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jv_k X_k)^n}{n!}.$$

Із урахуванням того, що характеристична функція $\theta_1(jv_k, t_k)$ є одновимірною моментною функцією (математичним очікуванням) процесу $\exp(jv_k X_k)$, а також, що сумі випадкових величин відповідає сума їхніх середніх статистичних значень, можна записати:

4.4 Взіємозв'язок одновимірних моментних та характеристичних функцій

$$\theta_1(j\Omega_k, t_k) = \overline{e^{j\Omega_k X_k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\Omega_k)^n}{n!} \overline{X^n(t_k)} = \quad (4.28)$$

$$1 + jm_X(t_k)\Omega_k + j^2 M_2(t_k)\Omega_k^2 / 2! + \frac{1}{3!} j^3 M_3(t_k)\Omega_k^3 + \dots$$

Останнє співвідношення і лежить в основі процедури поновлення характеристичних функцій за моментними.

► **Приклад.** Поновити характеристичну функцію (4.25) за моментними (4.26) та (4.27).

Запишемо по-іншому співвідношення (4.25). Якщо врахувати, що

$$\sin x \approx 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

а

$$\frac{\sin x}{x} \Rightarrow \frac{\sin \pi v_k}{\pi v_k} = 1 - \frac{(\pi v_k)^2}{3!} + \frac{(\pi v_k)^4}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(\pi v_k)^n}{(2n-1)!},$$

то для $n=2$ дістанемо:

$$\frac{\sin \pi v_k}{\pi v_k} = 1 - \frac{(\pi v_k)^2}{3!} = 1 - \frac{(\pi v_k)^2}{6}.$$

Згідно з (4.25)

$$\theta_1(jv_k, t_k) = 1 + j \cdot 0 \cdot v_k + j^2 \frac{\pi^2}{3} v_k^2 / 2! = 1 - \frac{(\pi v_k)^2}{6}.$$

◻

► **Приклад.** Для процесу з експоненціальним розподілом відповідно до (4.28) та з урахуванням значень математичного очікування та середнього квадрату дістанемо його одновимірну характеристичну функцію

$$\theta_{1X}(jv_k, t_k) = 1 + j\alpha v_k + j^2 2\alpha^2 v_k^2 / 2! = 1 + j\alpha v_k + j^2 \alpha^2 v_k^2 = \frac{1}{1 - jv_k \alpha}.$$

Враховано відоме з математики співвідношення:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Визначення одновимірних моментних функцій першого та другого порядків за одновимірними характеристичними функціями та навпаки дає такі самі результати як і під час їхнього визначенням за означенням.

2. Суть методу поновлення характеристичних функцій першого порядку за моментними

1. Початкове значення похідної першого порядку від одновимірної характеристичної функції з точністю до постійного множника j визначає математичне очікування.

2. Одновимірною моментною функцією другого порядку з точністю до $(-j)^2$ пропорційна початковому значенню другої похідної від одновимірної характеристичної функції.



Треба вміти:

1. Визначати одновимірні моментні функції першого та другого порядків за характеристичними функціями першого порядку та поновлювати характеристичні функції за моментними.

4.5 Завдання для поточного тестування

4.5.1 Питання для поточного контролю

- Що таке моментна функція?
- На якій операції ґрунтується визначення моментних функцій випадкових процесів?
- У чому полягає різниця в поняттях «усереднення за часом» та «усереднення за ансамблем».

4.5 Завдання для поточного тестування

- Області застосування понять «усереднення за часом» та «усереднення за ансамблем».
- Що таке розмірність моментної функції?
- Як визначається порядок моментної функції?
- Дайте визначення центрованого та нецентрованого випадкових процесів.
- Чим відрізняються початкові та центральні моментні функції?
- Назвіть найуживаніші початкові та центральні моментні функції та запишіть їхні позначення.
- Які назви використовують для одновимірної моментної функції першого порядку нецентрованого випадкового процесу?
- Розмірність одновимірної моментної функції першого порядку нецентрованого випадкового процесу.
- У чому полягає фізичне значення математичного очікування?
- Запишіть формули для визначення середньостатистичного значення неперервних та дискретних процесів.
- Яких значень може набувати одновимірна початкова моментна функція першого порядку?
- Як визначається оцінка математичного очікування за результатами великої кількості дослідів?
- Наведіть графік та запишіть математичну модель рівномірного закону розподілу.
- За якою формулою обчислюється середнє статистичне випадкової величини з рівномірним законом розподілу в інтервалі $[a, b]$: а) $a + b$; б) $(a + b)^2$; в) $(a + b) / 2$?
- За яких умов одновимірна моментна функція $m_X(t)$ процесу з рівномірним законом розподілу набуває однакових значень у всіх перерізах?
- Як визначається математичне очікування суми випадкових величин?
- Сформулюйте основні властивості одновимірної початкової моментної функції першого порядку.

- Як за графіком одновимірного диференціального закону розподілу випадкової величини визначити чи дорівнює нулю середнє статистичне, чи ні?
- Чому дорівнює одновимірна моментна функція першого порядку центрованого випадкового процесу.
- Дайте визначення одновимірної моментної функції другого порядку.
- Назвіть найуживаніші початкові та центральні моментні функції другого порядку та запишіть їхні позначення.
- Які назви використовують для одновимірної моментної функція другого порядку нецентрованого та центрованого випадкового процесу?
- Розмірність одновимірної моментної функції другого порядку.
- У чому полягає фізичне значення середнього квадрата та дисперсії?
- Запишіть формули для визначення середнього квадрата та дисперсії.
- Яких значень може набувати одновимірна початкова моментна функція другого порядку?
- Запишіть формулу, яка описує взаємозв'язок між математичним очікуванням, середньоквадратичним значенням та дисперсією.
- Наведіть графік синусоподібного закону розподілу ймовірності.
- За якою формулою обчислюється дисперсія випадкової величини з рівномірним законом розподілу в інтервалі $[a, b]$: а) $a + b$; б) $(a + b)^2$; в) $(a + b)^2 / 12$?
- Сформулюйте основні властивості дисперсії.
- За яких умов дисперсія алгебраїчної суми випадкових процесів дорівнює сумі дисперсій складових?
- Взаємозв'язок між максимальним значенням, «шириною» нормальної функції щільності ймовірності та одновимірними моментними функціями першого і другого порядків.

4.5 Завдання для поточного тестування

- Як за характеристичною функцією можна обчислити початкове значення диференціального закону розподілу ймовірності?
- Взаємозв'язок між характеристичною та одновимірною моментною функціями першого та другого порядків.
- Поясніть суть методу поновлення характеристичних функцій за момент ними.

4.5.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Випадковий процес $X(t)$ такими випадковими величинами:
 - а) $X(t_k)$; б) $X^2(t_k)$; в) $X(t_k)$ і $X(t_{k+1})$; г) $X(t_k)$, $X^2(t_{k+1})$ і $X^3(t_{k+2})$.
 Визначити порядок та розмірність моментної функції у кожному варіанті.
2. Випадкова величина $X(t_k)$ набуває значення 0,5, 0,8 та 1,3 з ймовірністю 0,35, 0,45 та 0,2 відповідно. Визначити $m_X(t_k)$, $\overline{X^2(t_k)}$ та $\sigma_X^2(t_k)$.
3. Випадкова величина $X(t_k)$ рівномірно розподілена на інтервалі [0,5]. Ймовірність того, що $X(t_k)=0$ або $X(t_k) = 3$ становить. Визначити математичне очікування $\overline{X(t_k)}$, середній квадрат $\overline{X^2(t_k)}$ та дисперсію $\sigma_X^2(t_k)$.
4. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} m_x(t_k) p_1(x_k; t_k) dx_k$.
5. Область значень випадкової величини $X(t_k)$ задовольняє нерівність U у відкритому інтервалі (-1, 1) вона розподілена рівномірно, а значення -1 та 1 набуває з ймовірністю 0,25. Визначити знайти математичне очікування m_X , середній квадрат $\overline{X^2(t_k)}$ та дисперсію $\sigma_X^2(t_k)$.
6. Визначити математичне очікування m_X та дисперсію $\sigma_X^2(t_k)$ випадкового процесу $X(t)$ де ω_0 є не-випадковими величинами, а початкова фаза φ рівномірно розподілена на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

7. Процес $X(t)$ в перерізі t_k визначається дискретною величиною $X(t_k)$, ряд розподілу ймовірності якої є таким:

	-2	-1	0	1	2
	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4

Обчислити математичне очікування m_Z , середній квадрат $\overline{Z^2(t_k)}$ та дисперсію $\sigma_Z^2(t_k)$.

8. Визначити одновимірну функцію щільності ймовірності випадкового процесу $X(t) = \alpha + \beta t$, де α та β - взаємно-незалежні випадкові величини, закони розподілу яких є $p_{1\alpha}(\alpha)$ та $p_{1\beta}(\beta)$ відповідно.

9. Одновимірна функція розподілу ймовірності $F_{1X}(X_k, t_k)$ процесу $X(t)$ має такий вигляд:

$$F_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} 0, & -\infty < X_k \leq -1; \\ 0,5 + 0,5X_k, & -1 < X_k < 1; \\ 0, & 1 \leq X_k < \infty. \end{cases}$$

Визначити: 1) функцію щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$; 2) ймовірність того, що а) $X_k > 0,75$; б) $-0,5 \leq X_k \leq 0,5$.

10. Опори резисторів певної партії є сукупністю випадкових величин, рівномірно розподілених в діапазоні 100...120 Ом. Пара резисторів, вибраних навмання, з'єднали послідовно. Обчислити: а) ймовірність того, що опір з'єднання не перевищить 220 Ом; б) найбільш імовірне значення опору послідовного з'єднання; в) максимальне значення опору з'єднання.

11. Випадкові величини $X(t_k)$ та $Y(t_k)$ пов'язані функціональною залежністю виду $Y(t_k) = 6X(t_k) + 3$. Визначити середнє значення, середній квадрат та дисперсію $Y(t_k)$, якщо $p_{1X}(X_k, t_k) = Ae^{-2X_k} \sigma(t_k)$.

12. Для функції щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k) = a \exp(-b|X_k|)$ випадкового процесу $X(t)$ визначити математичне очікування математичне очікування за характеристичною функцією.

4.5 Завдання для поточного тестування

13. Функція щільності ймовірності випадкового процесу $X(t)$ $p_{1X}(X_k, t_k) = 0,25[\sigma(X_k + 2) - \sigma(X_k - 2)]$. Визначити математичне очікування, середній квадрат та дисперсію процесу $Y(t) = X^2(t)$.

14. Функція розподілу $F_{1X}(X_k, t_k)$ процесу $X(t)$ має такий вид:

$$F_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} A[1 - e^{-(X_k - 1)}], & 1 < X_k < \infty; \\ 0, & -\infty < X_k \leq 1. \end{cases}$$

Визначити середнє статистичне, середній квадрат та дисперсію.

15. Процес $X(t)$ описується одновимірним інтегральним законом розподілу ймовірності

$$F_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} 0, & -\infty < X_k \leq -2; \\ A(1 + \cos bX_k), & -2 < X_k \leq 2; \\ 1, & 2 < X_k < \infty. \end{cases}$$

Визначити середнє статистичне, середній квадрат та дисперсію.

16. Одновимірний диференціальний закон розподілу ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k) = Ae^{-(X_k - 1)}\sigma(X_k - 1)$. Визначити математичне очікування, середній квадрат та дисперсію випадкової величини $Y(t_k) = X^2(t_k) + 1$.

17. Випадковий процес $X(t)$ описується одновимірним диференціальним законом

$$p_{1X}(X_k, t_k) = \begin{cases} AX_k, & 0 \leq X_k \leq 6; \\ 0, & X_k < 0, X_k > 6. \end{cases}$$

Визначити середнє статистичне $\overline{X(t_k)}$, середній квадрат $\overline{X^2(t_k)}$ та дисперсію $\sigma_X^2(t_k)$.

18. Одновимірний диференціальний закон розподілу ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k) = [2/(1 + X_k)^3]\sigma(X_k)$. Визначити математичне очікування, середній квадрат та дисперсію випадкової величини $Y(t_k) = X^2(t_k) + 1$.

19. Характеристична функція $\theta_{1X}(j\nu_k, t_k)$ випадкового процесу $X(t)$ визначається формулою $\alpha/(\alpha - j\nu_k)$, а процес $Y(t)$ на інтервалі $[-1, 1]$ подається рівномірним законом розподілу ймовірності. Визначити: одновимірну моментну функцію першого порядку для процесу $Z(t) = X(t) + 2Y(t)$ у разі, що $X(t)$ та $Y(t)$ є статистично незалежними.

20. Функції щільності ймовірності процесів $X(t)$ та $Y(t)$ є такими: $p_{1X}(X_k, t_k) = p_{1Y}(Y_k, t_k) = Ae^{-2X_k} \sigma(X_k)$. Визначити математичне очікування, середній квадрат та дисперсію випадкової величини $Z(t_k) = 6X(t_k) + Y(t_k)$.

21. Одновимірна функція щільності ймовірності

$$p_{1X}(X_k, t_k) = 0,1\delta(X_k) + 0,5\delta(X_k - 1) + 0,2\delta(X_k - 2) + 0,1\delta(X_k - 4).$$

Визначити математичне очікування, середній квадрат та дисперсію випадкової величини $Y(t_k) = 2X(t_k) - 3$.

22. Випадковий процес $X(t)$ на інтервалі $[0, 4]$ описується рівномірним законом розподілу. Визначити математичне очікування випадкової величини $Y(t_k) = X^2(t_k)$.

23. Характеристична функція $\theta_{1X}(j\nu_k, t_k)$ випадкового процесу $X(t)$ в перерізі t_k подається таким співвідношенням $\theta_{1X}(j\nu_k, t_k) = \exp(j\nu_k C)$, де C – константа. Визначити одновимірну моментну функцію першого порядку $\overline{X(t_k)}$ та дисперсію $\sigma_X^2(t_k)$.

24. Визначити одновимірну моментну функцію першого порядку $\overline{X(t_k)}$, середній квадрат $\overline{X^2(t_k)}$ та дисперсію $\sigma_X^2(t_k)$ випадкової величини $X(t_k)$, характеристична функція якої $\theta_{1X}(j\nu_k, t_k) = 1/(1 + \nu_k^2)$, де C – константа.

25. Визначити початкове значення $p_{1X}(0)$ функції щільності ймовірності $p_{1X}(X_k, t_k)$ у разі, якщо є заданою характеристична функція $\theta_{1X}(j\nu_k, t_k)$.

26. Визначити характеристичну функцію першого порядку $\theta_{1X}(j\nu_k, t_k)$ у разі, якщо випадковий процес $X(t)$ в перерізі t_k : а) набуває єдиного значення A ; б) набуває двох значень $\pm A$ з однаковими ймовірностями.

5 Кореляційні характеристики випадкових процесів

5.1 Види статистичної залежності

Середнє значення, середній квадрат, дисперсія та інші моментні функції першого та другого порядків як початкові, так і центральні, характеризують випадковий процес $X(t)$ в одному перерізі, що відповідає точці t_k , тобто в статистиці, і є недостатніми для оцінок його динамічних властивостей. Ілюстрацією сказаного може служити співставлення двох процесів $X(t)$ та $Y(t)$, заданих вибірковими функціями на рис. 5.1. Наведені процеси характеризуються приблизно однаковими моментними функціями першого порядку, зокрема, математичним очікуванням $m(t)$ та дисперсією $\sigma^2(t)$. Однак, характер розвитку цих процесів у часі, їхня внутрішня структура істотно відрізняються. Для першого характерні повільні зміни в часі, для другого – швидкі. Отже, одновимірні моментні функції першого порядку та другого порядків не повністю відображають динаміку процесіву часі.

Швидкість розвитку процесу в часі визначають ступенем (рівнем) імовірного зв'язку між миттєвими значеннями всіх його реалізацій у різних перерізах, розміщених на різній відстані один від одного та початку координат. Про такий зв'язок йдеться також і стосовно двох або декількох процесів для відповідних перерізів у неспівпадаючі моменти часу. Кількісною мірою такого ймовірного зв'язку між миттєвими значеннями в двох перерізах, що відповідають довільним моментам часу t_k , t_{k+1} , і є **двовимірні моментні функції другого порядку** аргументами t_k і t_{k+1} або $\tau = t_{k+1} - t_k$ і t_k . Оскільки моментам часу t_k і t_{k+1} відповідають дві випадкові величини $X(t_k)$ і $X(t_{k+1})$ для одного процесу ($X(t_k)$ і $Y(t_{k+1})$ - для двох процесів), то моментні функції другого порядку фактично відображають зміну в часі величини статистичної залежності між двома випадковими величинами. Ймовірну залежність між випадковими величинами називають **кореляцією** між випадковими величинами. Осць чому моментні функції другого порядку ще називають **функціями кореляції** або **кореляційними функціями**.

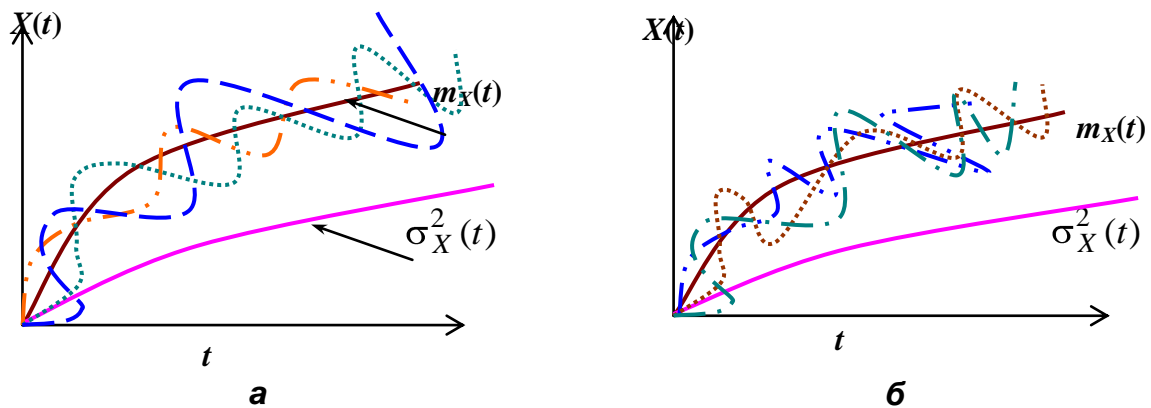


Рисунок 5.1 - Процеси з різною динамікою.

Вважається, що ймовірна залежність займає проміжне місце між двома полярними формами залежності: одна – **повна незалежність**, тобто відсутність зв'язку; друга – найбільш жорстка **функціональна**.

Для ймовірних величин, подій чи процесів повна незалежність (**статистична незалежність**) означає, що закони розподілу ймовірностей одного об'єкта не залежать (не змінюються) від значень іншого. Останнє, наприклад, для системи із n випадкових величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ означає, що багатовимірна функція щільності ймовірностей подається добутком відповідних одновимірних щільностей:

$$p_n(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_1(X_1, t_1)p_2(X_2, t_2)\dots p_n(X_n, t_n).$$

Функціональна залежність відображається деякою функцією між об'єктами. Наприклад, якщо два процеси $X(t)$ та $Y(t)$, задовольняють співвідношенню виду $Y(t) = kX^2(t)$, то кажуть, що між ними має місце нелінійний функціональний квадратичний зв'язок. У цьому разі, якщо $X(t)$ в перерізі t_k набуває значення $X(t_k)$, то процес $Y(t)$ в цьому ж перерізі набуде значення $Y(t_k) = kX^2(t_k)$ з умовною ймовірністю 1. Тобто така подія є завжди достовірною і відбудеться обов'язково.

Під час оцінювання статистичного зв'язку в якості його верхньої межі беруть **лінійну функціональну залежність** між величинами або миттєвими значеннями процесів: $y_i(t_k) = bx_i(t_k)$. Вважається,

5.1 Види статистичної залежності

що кореляція (ймовірний зв'язок) є сильною (гранично повною) за умови лінійного зв'язку між випадковими об'єктами.

Об'єкти **некорельовані** або коли статистичний зв'язок зовсім відсутній, або за наявності функціонального зв'язку, що істотно відрізняється від лінійного. Ось чому статистично незалежні величини (процеси) є некорельованими, водночас, некорельовані величини (процеси) не обов'язково є статистично незалежними.

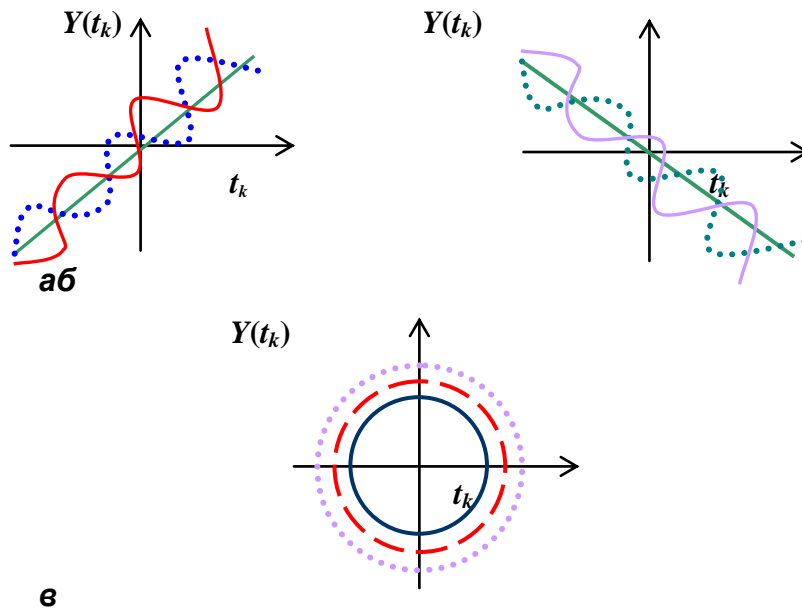


Рисунок 5.2 - Випадкові величини з додатньою (а), від'ємною кореляцією (б) та некорельовані величини (в).

Наведемо графічну ілюстрацію сказаного на прикладі двох випадкових величин $X(t_k)$ та $Y(t_k)$. Домовимося, що кожній парі значень $(X_i(t_k), Y_i(t_k))$ відповідає на декартовій площині зображувальна точка. Тоді у разі, коли між величинами $X(t_k)$ та $Y(t_k)$ є статистичний зв'язок, зображувальні точки розміщуються вздовж деякої прямої лінії, на яку повинні бути потрапляти у разі лінійного функціонального зв'язку між величинами (рис. 5.2, а і б). Хаотичне розташування точок на площині характерне для незалежних, а отже некорельованих величин (рис. 5.2, в). Зазначимо, що рис. 5.2, а описує величину із **додатньою кореляцією**, а рис. 5.2, б – **від'ємною**. Те саме можна було б сказати про випадкові величини $X(t_k)$ і $X(t_{k+1})$ одного процесу або $X(t_k)$ та $Y(t_{k+1})$ двох процесів (сигналів) $X(t)$ та $Y(t)$.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Одновимірні моментні функції першого порядку та другого порядків не повністю відображають динаміку випадкових процесіву часі.

2. Швидкість розвитку процесу в часі визначають ступенем імовірного зв'язку між миттєвими значеннями всіх його реалізацій у різних перерізах, розміщених на різній відстані один від одного та початку відліку.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: кореляція, функція кореляції, статистичний зв'язок, статистична незалежність, функціональна залежність, повна кореляція, некорельованість, додатна та від'ємна кореляції.

2. Статистично незалежні величини (процеси) є некорельованими, водночас, некорельовані величини (процеси) не обов'язково є статистично незалежними.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: кореляція, функція кореляції, статистичний зв'язок, статистична незалежність, функціональна залежність, повна кореляція, некорельованість, додатна та від'ємна кореляції.

5.2 Двовимірні моментні функції другого порядку

Моментна початкова двовимірна функція другого порядку $K_X(t_k, t_{k+1})$ випадкового процесу $X(t)$ є середньостатистичним значенням добутку його миттєвих значень у перерізах, що відповідають моментам часу t_k та t_{k+1} :

5.2 Двовимірні моменти функції другого порядку

$$\begin{aligned}
 K_X(t_k, t_{k+1}) &= \langle X(t_k)X(t_{k+1}) \rangle = M_{1,1}(t_k, t_{k+1}) = \\
 &= M[X(t_k)X(t_{k+1})] = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_k X_{k+1} P_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) dX_k dX_{k+1}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Для дискретного випадкового процесу введена функцію обчислюють за такою формулою:

$$K_X(t_k, t_{k+1}) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m x_i(t_k) x_j(t_{k+1}) P(x_i(t_k), x_j(t_{k+1})) \tag{5.2}$$

При обчисленні сум використовують всі можливі сполучення (комбінації) значень $x_i(t_k)$ та $x_j(t_{k+1})$. Величина $P(x_i(t_k), x_j(t_{k+1}))$ відображає ймовірність того, що випадкова величина $X(t_k)$ в перерізі t_k набуде значення $x_i(t_k)$, а величина $X(t_{k+1})$ в перерізі t_{k+1} значення $x_j(t_{k+1})$ і є законом розподілу двох випадкових величин $X(t_k)$ та $X(t_{k+1})$.

На підставі формули добутку ймовірностей випадкових величин та з урахуванням того, що сумісна ймовірність

$$P(x_i(t_k), x_j(t_{k+1})) = P(x_i(t_k)) P(x_j(t_{k+1}) / x_i(t_k)) = P(x_j(t_{k+1})) P(x_i(t_k) / x_j(t_{k+1})),$$

формулу для моментної двовимірної функції другого порядку дискретних процесів можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 K_X(t_k, t_{k+1}) &= \sum_{i=1}^s x_i(t_k) P(x_i(t_k)) \sum_{j=1}^m x_j(t_{k+1}) P(x_j(t_{k+1}) / x_i(t_k)) = \\
 &= \sum_{j=1}^m x_j(t_{k+1}) P(x_j(t_{k+1})) \sum_{i=1}^s x_i(t_k) P(x_i(t_k) / x_j(t_{k+1})),
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

де $P(x_i(t_k) / x_j(t_{k+1}))$, $P(x_j(t_{k+1}) / x_i(t_k))$ - умовні закони розподілу ймовірності відповідно величини $X(t_k)$ та $X(t_{k+1})$.

Для неперервних величин $X(t_k)$ та $X(t_{k+1})$

$$K_X(t_k, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} X_k p_1(X_k, t_k) \int_{-\infty}^{\infty} X_{k+1} p_1(X_{k+1}, t_{k+1} / X_k, t_k) dX_{k+1} dX_k =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X_{k+1} p_1(X_{k+1}, t_{k+1}) \int_{-\infty}^{\infty} X_k p(X_k, t_k / X_{k+1}, t_{k+1}) dX_k dX_{k+1} = K_X(t_{k+1}, t_k).$$

Отже, функція кореляції процесу $X(t)$ наділена **властивістю симетрії** відносно моментів часу t_k та t_{k+1} , тобто є інваріантною відносно порядку слідування аргументів.

Двовимірною початковою моментною функцією другого порядку $K_X(t_k, t_{k+1})$, як міра статистичного зв'язку між миттєвими значеннями одного й того самого процесу $X(t)$, називається **кореляційною функцією нецентрованого процесу, автокореляційною функцією (АКФ) або функцією автокореляції**.

► **Приклад.** Визначити функцію кореляції випадкового процесу $X(t)$ з нормальним законом розподілу між випадковими величинами $X(t_k)$ та $X(t_{k+1})$:

$$p_2(X_k, X_{k+1}; t_k, t_{k+1}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{X_k^2 - 2\rho X_k X_{k+1} + X_{k+1}^2}{2(1-\rho^2)}\right].$$

За означенням кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_{k+1}) &= \langle X(t_k) X(t_{k+1}) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_k X_{k+1} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{X_k^2 - 2\rho X_k X_{k+1} + X_{k+1}^2}{2(1-\rho^2)}\right] dX_k dX_{k+1}. \end{aligned}$$

Подамо подвійний інтеграл у такому вигляді:

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_{k+1}) &= \langle X(t_k) X(t_{k+1}) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} X_k \exp\left[\frac{X_k^2}{2}\right] dX_k \int_{-\infty}^{\infty} X_{k+1} \left[\exp\left[-\frac{(X_{k+1} - \rho X_k)^2}{2(1-\rho^2)}\right]\right] dX_{k+1}. \end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X_{k+1}}_U \underbrace{\exp\left[-\frac{(x_{k+1} - \rho x_k)^2}{2(1-\rho^2)}\right]}_{dv} dX_{k+1} = X_{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(X_{k+1} - \rho X_k)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dX_{k+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

5.2 Двовимірні моменти функції другого порядку

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(X_{k+1} - \rho X_k)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dX_{k+1} \right] dU.$$

Інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(X_{k+1} - \rho X_k)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dX_{k+1} &= \left(\begin{array}{l} \frac{X_{k+1} - \rho X_k}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} = Y \\ dX_{k+1} = dY / \sqrt{2(1-\rho^2)} \end{array} \right) = \\ &= \sqrt{2(1-\rho^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dY = 2\sqrt{2(1-\rho^2)} \int_0^{\infty} e^{-Y^2} dY = \sqrt{2(1-\rho^2)} \sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}. \end{aligned}$$

Ураховано, що останній визначений інтеграл є табличним і дорівнює $\sqrt{\pi}/2$.

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} dU = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} dX_{k+1} = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} X_{k+1}.$$

Якщо врахувати, що змінна U для $X_{k+1} = \rho X_k$ дорівнює нулю, то $\sqrt{2\pi(1-\rho^2)} X_{k+1} = \rho \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} X_k$.

Остаточно

$$\begin{aligned} K_X(t_k, t_{k+1}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} X_k e^{-\frac{X_k^2}{2}} dX_k \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} \rho X_k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rho \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X_k^2 e^{-\frac{X_k^2}{2}} dX_k}_{\sqrt{2\pi}} = \rho. \end{aligned}$$

◼

Двовимірна початкова моментна функція другого порядку, визначена для двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$, є середньостатистичним значенням добутку миттєвих значень процесу $X(t)$ в перерізі t_k чи t_{k+1} та процесу $Y(t)$ відповідно в перерізі t_{k+1} чи t_k і називається **взаємною кореляційною функцією (ВКФ) двохнецентрованих процесів** або **функцією взаємної кореляції**.

На відміну від функції автокореляції, для якої $K_X(t_k, t_{k+1}) = K_X(t_{k+1}, t_k)$, взаємна кореляційна функція залежить як від порядку (послідовності) слідування аргументів, так і процесів (множників). Ось чому

$$K_{XY}(t_k, t_{k+1}) \neq K_{YX}(t_k, t_{k+1}).$$

Структура формул, що застосовується під час обчислення кореляційних функцій двох процесів, така сама, як і (5.1) та (5.2):

$$K_{XY}(t_k, t_{k+1}) = \langle X(t_k)Y(t_{k+1}) \rangle = M[X(t_k)Y(t_{k+1})] \quad (5.4)$$

$$K_{YX}(t_k, t_{k+1}) = \langle Y(t_k)X(t_{k+1}) \rangle = M[Y(t_k)X(t_{k+1})] \quad (5.5)$$

► **Приклад.** Визначити функцію кореляції процесу $X(t)$ кожна реалізація якого є послідовністю прямокутних відеоімпульсів тривалості $t_{\text{імп}}$ (рис. 5.2, а), що набувають значення $+A_m$ або $-A_m$ з рівною ймовірністю:

$$P(+A_m) = P(-A_m) = 0.5 \quad (5.6)$$

Розглянемо дві випадкові величини $X(t_1)$ та $X(t_2) = X(t_1 + \tau)$, що відповідають моментам часу $t_1, t_1 + \tau$. Очевидно, що $X(t_1)$ та $X(t_1 + \tau)$ є величинами дискретними, кожна з яких може набувати значення або $+A_m$ або $-A_m$ з безумовною ймовірністю відповідно до (5.6). Зважаючи на те, що імпульси різних знаків з'являються незалежно від того, який імпульс був перед цим, можна стверджувати, що у разі, якщо $\tau > t_{\text{імп}}$, випадкові величини $X(t_1)$ та $X(t_1 + \tau)$ є незалежними, а отже некорельованими, і їхня функція автокореляції $K_X(t_k, t_{k+1}) = m_X(t_1)m_X(t_1 + \tau)$.

Розглянемо випадок, коли $\tau < t_{\text{імп}}$. Тоді можлива ситуація, коли імпульс додатньої або від'ємної полярності “покриє” обидва перерізи t_1 та $t_1 + \tau$, а полярність (знак) величини $X(t_1 + \tau)$ повністю визначається знаком $X(t_1)$. А це відповідає статистичній залежності між $X(t_1)$ та $X(t_1 + \tau)$.

Для визначення функції кореляції потрібно знайти закон розподілу ймовірності системи двох випадкових величин $X(t_1)$ та $X(t_1 + \tau)$, а для розглядуваного прикладу ймовірності різних сполучень (комбінацій) можливих значень $X(t_1)$ та $X(t_1 + \tau)$. У данному випадку таких сполучень чотири: (A_m, A_m) ; $(A_m, -A_m)$; $(-A_m, A_m)$; $(-A_m, -A_m)$.

Заозначенням ймовірність $P(A_m, A_m) = P(A_m)P(A_m/A_m)$. Оскільки $P(A_m) = 0,5$, потрібно визначити умовну ймовірність того (події), що величина $X(t_1 + \tau)$ набуде значення $+A_m$, якщо $X(t_1)$ набуває значення $+A_m$.

5.2 Двовимірні моменти функції другого порядку

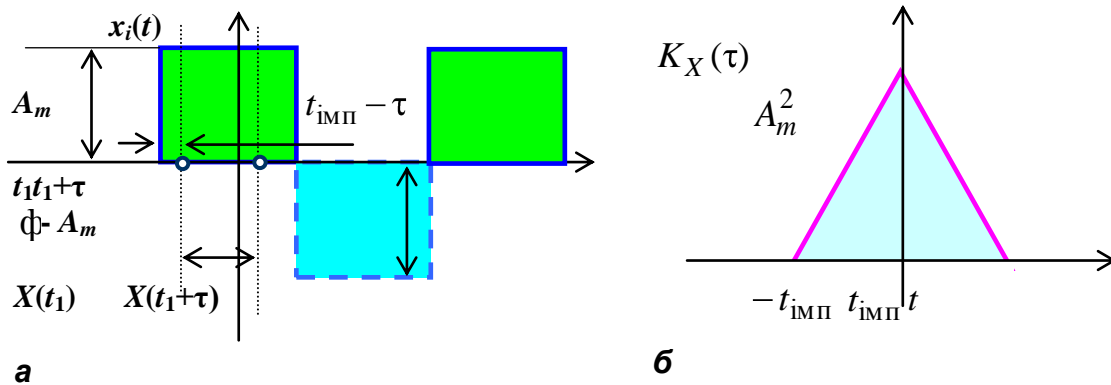


Рисунок 5.3 – Приклад дискретного випадкового процесу (а) та його кореляційна функція (б).

Така подія можлива у двох несумісних випадках:

А. Якщо додатний імпульс починається на відстані від точки t_1 меншій, ніж $t_{\text{імп}} - \tau$ (у цьому разі точка $t_1 + \tau$ обов'язково перекривається).

В. Якщо додатний імпульс розміщується від точки t_1 на відстані більшій, ніж $t_{\text{імп}} - \tau$, але наступний за ним імпульс буде також додатним.

Ймовірність події **А** відповідно до співвідношення мір, як одного з підходів до визначення ймовірності події, становить $P(A) = (t_{\text{імп}} - \tau) / t_{\text{імп}}$.

Тоді ймовірність події **В**

$$P(B) = P(\bar{A})P(+A_m) = (1 - P(A))P(A_m) = 1 - \frac{t_{\text{імп}} - \tau}{t_{\text{імп}}} = 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}},$$

де \bar{A} – протилежна до **А** подія.

Остаточно, на основі теореми додавання :

$$P(A_m / A_m) = P(A) + P(B) = \frac{t_{\text{імп}} - \tau}{t_{\text{імп}}} + 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}} = \frac{t_{\text{імп}} - 0,5\tau}{t_{\text{імп}}} = 1 - 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}.$$

Тоді шукана ймовірність:

$$P(+A_m; A_m) = 0,5 \left(1 - 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}} \right).$$

Результати подібних міркувань до сумісного закону розподілу ймовірностей $X(t_1)$ та $X(t_1 + \tau) = X(t_2)$ подані в таблиці 5.1.

Тоді згідно з (5.3) та табл. 5.1 кореляційна функція

$$\begin{aligned}
 K_X(t_k, t_{k+1}) &= A_m^2 0,5(1 - 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}) + A_m(-A_m)0,25 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}} + \\
 &+ (-A_m)A_m 0,25 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}} + A_m(-A_m)0,5(1 - 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}) = \\
 &= A_m^2(1 - 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}) - 0,5A_m^2 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}} = A_m^2(1 - \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}).
 \end{aligned}$$

Отже, за достатньо малих значень τ ймовірність того, що $X(t_1)$ та $X(t_1 + \tau)$ однакові (з урахуванням знаку) є дуже великою (близькою до 1). При збільшенні τ зв'язок між перерізами слабшає і при $\tau = t_{\text{імп}}$ дорівнює 0. Якщо поміняти місцями перерізи t_1 та $t_2 = t_1 + \tau$, то в наведених вище міркуваннях нічого не зміниться, проте у цьому разі $\tau = t_1 - t_2 < 0$ стає від'ємним. Останнє вказує на симетрію функції кореляції відносно осі ординат. Графік кореляційної функції процесу, що розглядався, зображено на рис. 5.3, б.

Таблиця 5.1

$X(t_2) \backslash X(t_1)$	$+A_m$	$-A_m$
$+A_m$	$0,5(1 - 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}})$	$0,25 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}$
$-A_m$	$0,25 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}$	$0,5(1 - 0,5 \frac{\tau}{t_{\text{імп}}})$



Двовимірні центральні моментні функції другого порядку є мірою статистичного зв'язку між миттєвими значеннями центрованих процесів і визначаються за такою формулою:

- для одного процесу

$$\begin{aligned}
 \mu_{1,1}(t_k, t_{k+1}) &= \mu[\dot{X}(t_k)\dot{X}(t_{k+1})] = B_X(t_k, t_{k+1}) = \\
 &\mu[(X(t_k) - m_X(t_k))(X(t_{k+1}) - m_X(t_{k+1}))];
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

- для двох центрованих процесів

5.2 Двовимірні моменти функції другого порядку

$$\begin{aligned} \mu_{1,1}(t_k, t_{k+1}) &= \mu[\dot{X}(t_k)\dot{Y}(t_{k+1})] = B_{XY}(t_k, t_{k+1}) = \\ &= \mu[(X(t_k) - m_X(t_k))(Y(t_{k+1}) - m_Y(t_{k+1}))] \end{aligned} \quad (5.8)$$

або

$$B_{YX}(t_k, t_{k+1}) = \mu[(Y(t_k) - m_Y(t_k))(X(t_{k+1}) - m_X(t_{k+1}))]. \quad (5.9)$$

Двовимірну центральну моментну функцію другого порядку $B_X(t_k, t_{k+1})$ називають **кореляційною функцією центрованого процесу $\dot{X}(t)$** , а $B_{XY}(t_k, t_{k+1})$ або $B_{YX}(t_k, t_{k+1})$ **взаємною кореляційною функцією** двох центрованих процесів відповідно $\dot{X}(t)$ і $\dot{Y}(t)$ та $\dot{Y}(t)$ і $\dot{X}(t)$. Дуже часто функцію $B_X(t_k, t_{k+1})$ називають **коваріаційною функцією** нецентрованого процесу $X(t)$, а $B_{XY}(t_k, t_{k+1})$ **взаємною коваріаційною функцією** двох нецентрованих процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

Нормовані кореляційні функції. Під час дослідження випадкових процесів та їхніх перетворень різноманітними системами часто користуються **нормованими функціями кореляції центрованих процесів.**

Для центрованого випадкового процесу нормована функція автокореляції

$$R_X(t_k, t_{k+1}) = r_X(t_k, t_{k+1}) = \rho_X(t_k, t_{k+1}) = \frac{B_X(t_k, t_{k+1})}{\sigma_X(t_k)\sigma_X(t_{k+1})}$$

визначається як відношення функції кореляції центрованого випадкового процесу до добутку його дисперсій в перерізах t_k та t_{k+1} .

З урахуванням отриманих раніше результатів, зокрема, що $B_X(t_k, t_{k+1}) = \pm\sigma_X(t_k)\sigma_X(t_{k+1})$ для лінійно зв'язаних величин та $B_X(t_k, t_{k+1}) = 0$ для незалежних (некорельованих) величин, можна стверджувати таке:

- ◆ **нормована функція автокореляції (коефіцієнтом автокореляції), у двох крайніх випадках зв'язку між випадковими об'єктами за абсолютним значенням дорівнює нулю та одиниці.**

Значення ноль відповідає відсутності зв'язку (статистичній незалежності) або наявності функціонального зв'язку, що істотно відрізняється від лінійного, а одиниця - найбільш тісному (лінійному) функціональному зв'язку. Природньо вважати, що між цими двома крайніми випадками, коли зв'язок існує, але не є гранично жорстким, коефіцієнт кореляції набуває значення між 0 та ± 1 .

Коефіцієнт автокореляції $\rho_X(t_k, t_{k+1})$ можна вважати показником того, наскільки змінюється потужність флуктуацій випадкового процесу $X(t)$ при проходженні часу $t_{k+1} - t_k$, починаючи з t_k , або наскільки збереглась форма $X(t)$ в середньому за ансамблем. Значення $\rho = 1$ вказує на те, що форми вибірових функцій $x_i(t)$ процесу $X(t)$ ідентичні, а при $\rho = 0$ - вибірові функції некорельовані, тобто не існує якого-небудь фрагменту вибірової функції $x_i(t_k + \tau)$, де $\tau = t_{k+1} - t_k$, процесу $X(t + \tau)$, який би був частиною вибірової функції $x_i(t_k)$ процесу $X(t)$. Значення $\rho = -1$ засвідчує, що форма вибірової функції процесу $X(t + \tau)$ є дзеркальним відображенням стосовно осі t вибірової функції процесу $X(t)$.

Аналогічно вводять поняття **нормованої функції кореляції двох центрованих процесів** $X(t)$ та $Y(t)$ або **коефіцієнтів взаємної кореляції**:

- для процесів $X(t)$ та $Y(t)$

$$R_{XY}(t_k, t_{k+1}) = \frac{B_{XY}(t_k, t_{k+1})}{\sigma_X(t_k)\sigma_Y(t_{k+1})}$$

- для процесів $Y(t)$ та $X(t)$

$$R_{YX}(t_k, t_{k+1}) = \frac{B_{YX}(t_k, t_{k+1})}{\sigma_Y(t_k)\sigma_X(t_{k+1})}$$

Висновки наведені для коефіцієнта автокореляції є справедливими і для коефіцієнтів взаємної кореляції.

Слід звернути увагу на те, що коефіцієнти кореляції в загальному випадку є функцією двох величин: моментів часу t_k і t_{k+1} , або t_k та інтервалу $\tau = t_{k+1} - t_k$. Очевидно, що зі збільшенням τ статистичний зв'язок між миттєвими значеннями одного процесу або двох процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в неспівпадаючі моменти часу буде зменшуватись. Але для різних за динамікою процесів числові значення τ

5.2 Двовимірні моменти функції другого порядку

очевидно будуть різними. Ось чому випадкові процеси (їх розвиток у часі), як і детерміновані, характеризують ще одним параметром, що тісно пов'язаний з нормованими функціями кореляції, який називають *інтервалом кореляції*.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Конкретний вид ід кореляційної функції істотно залежить від порядку запису в її позначенні аргументів і індексів.

2. Ізі збільшенням відстані між перерізами τ статистичний зв'язок між миттєвими значеннями одного або двох процесів в неспівпадаючі моменти часу буде зменшуватись.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: автокореляційна, взаємнокореляційна функції нецентрованих та центрованих випадкових процесів, нормована автокореляційна (коефіцієнт автокореляції) та нормована взаємнокореляційна (коефіцієнт взаємної кореляції) функція.

2. Нормовані кореляційні функції набувають значень із діапазону $[0, \pm 1]$.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: автокореляційна, взаємнокореляційна функції нецентрованих та центрованих випадкових процесів, нормована автокореляційна (коефіцієнт автокореляції) та нормована взаємнокореляційна (коефіцієнт взаємної кореляції).

2. Обчислювати автокореляційні, взаємнокореляційні функції нецентрованих та центрованих випадкових процесів, нормовані автокореляційні (коефіцієнти автокореляції) та нормовані взаємнокореляційні функції (коефіцієнт взаємної кореляції).

5.3 Особливості кореляційних характеристик

Фізичний зміст кореляційних характеристик. Очевидно, що розмірність автокореляційної функції нецентрованого процесу визначається розмірністю квадрата його миттєвого значення, а взаєм-

ної кореляційної функції – розмірністю добутку миттєвих значень процесів. Можна стверджувати, що для конкретних значень t_k та t_{k+1} значення кореляційної функції пропорційні потужності взаємодії миттєвих значень об'єкта (процесу або двох процесів) у перерізах t_k та t_{k+1} .

У співпадаючих перерізах, коли $t_k = t_{k+1}$, кореляційна функція $K_X(t_k, t_{k+1})$ дорівнює середньому квадрату процесу $K_X(t_k, t_k) = \langle X(t_k)X(t_k) \rangle = M[X^2(t_k)]$ і відображає потужність його миттєвого значення в перерізі t_k .

Із формул (5.7) – (5.9) випливає, що миттєві значення кореляційних функцій центрованих процесів визначають потужності взаємодії відхилень випадкових процесів від середніх значень. Водночас, для співпадаючих перерізів, коли $t_k = t_{k+1}$, функція взаємної кореляції $B_{XY}(t_k, t_{k+1}) = B_{XY}(t_k, t_k) = \sigma_X^2(t_k)$, тобто дисперсії, яка, як відомо, характеризує середню потужність випадкового центрального процесу.

Об'єкти з повною кореляцією. У цьому разі між миттєвими значеннями процесу $X(t)$ в перерізах t_k і t_{k+1} має місце лінійний зв'язок: $X(t_{k+1}) = aX(t_k)$. Тоді згідно з (5.7) маємо:

$$\begin{aligned} B_X(t_k, t_{k+1}) &= \langle \dot{X}(t_k)\dot{X}(t_{k+1}) \rangle = \langle (X(t_k) - m_X(t_k))(X(t_{k+1}) - m_X(t_{k+1})) \rangle = \\ &= \langle (X(t_k) - m_X(t_k))(aX(t_k) - am_X(t_k)) \rangle = a\dot{X}^2(t_k) = a\sigma_X^2(t_k). \end{aligned}$$

Таким чином, при прямо пропорційній залежності між миттєвими значеннями процесу в двох різних моменти часу функція кореляції центрального процесу) пропорційна дисперсії одного з них. Якщо $a=1$, то отримуємо попередній результат, що відповідає співпаданню перерізів t_k та t_{k+1} .

◆ **Повна кореляція еквівалентна нульовому зсуву між перерізами. Чим більше зсув, тим менше кореляція.**

З іншого боку, відомо, що математичне очікування добутку незалежних величин визначається добутком їхніх математичних очікувань. Припустимо, що t_k та t_{k+1} вибрані так, що $X(t_{k+1})$ незалежить від $X(t_k)$. Очевидно, це найбільш ймовірно для одного й то-

5.3 Особливості кореляційних характеристик

го самого процесу, коли перерізи визначені в моменти часу, відстань між якими $\tau = t_{k+1} - t_k$ дуже велика.

Тоді

$$B_X(t_k, t_{k+1}) = \mu[\dot{X}(t_k)\dot{X}(t_{k+1})] = \mu[\dot{X}(t_k)]\mu[\dot{X}(t_{k+1})] = 0,$$

оскільки $\mu[\dot{X}(t_k)] = 0$ і $\mu[\dot{X}(t_{k+1})] = 0$.

✦ **Функція кореляції незалежних центрованих об'єктів дорівнює нулю.**

Виходячи з отриманих раніше результатів, можна зробити такі висновки:

- ✦ **значення функції кореляції центрованих процесів змінюється в межах від 0 до $ay_X^2(t_k)$ або $\sigma_X(t)\sigma_Y(t)$;**
- ✦ **незалежні випадкові величини або процеси є некорельованими з нульовими кореляційними функціями, а отже, енергетично не взаємодіють;**
- ✦ **сильно корельовані величини (процеси) є "лінійно подібними". У цьому разі форми вибіркової функції (реалізацій) випадкового процесу $X(t)$ або форми відповідних реалізацій двох процесів $X(t)$ та $Y(t)$ - ідентичні;**
- ✦ **характер зміни кореляційних функцій від аргументів t_k , t_{k+1} та τ відображає розвиток випадкового процесу в часі. Швидким змінам процесу відповідають швидкі зміни кореляційних функцій і навпаки.**

Останнє впливає з того, що випадкові величини сильно корельовані, якщо t_k та t_{k+1} розміщені близько один від одного. Якщо за малих значень τ кореляція незначна, то таке можливе тільки за умови значної зміни характеру розвитку процесу в часі.

Взаємозв'язок між кореляційними функціями нецентрованого та центрованого випадкового процесів відображається такими формулами:

$$B_X(t_k, t_{k+1}) = K_X(t_k, t_{k+1}) - m_X(t_k)m_X(t_{k+1}) \quad (5.10)$$

або

$$K_X(t_k, t_{k+1}) = B_X(t_k, t_{k+1}) + m_X(t_k)m_X(t_{k+1}) \quad (5.11)$$

Отже, якщо процеси є незалежними, то $B_X(t_k, t_{k+1}) = 0$ і вони є некорельовані. Останнє означає, що функція кореляції нецентрованого випадкового процесу

$$K_X(t_k, t_{k+1}) = m_X(t_k)m_X(t_{k+1}). \quad (5.12)$$

Те саме справедливе для взаємних функцій кореляції.

Отже, двовимірні початкові та центральні моментні функції другого порядку (кореляційні функції нецентрованих та центрованих випадкових процесів) кількісно відображають величину статистичного зв'язку між вибірками в двох перерізах одного процесу чи одиночними вибірками в двох процесах. Значення цих функцій тісно зв'язані з дисперсіями та математичними очікуваннями.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Значення кореляційної функції пропорційні потужності взаємодії миттєвих значень процесу (двох процесів).

2. Швидким змінам процесів відповідають швидкі зміни кореляційних функцій і навпаки.

3. У разі сильно корельованих процесів форми вибіркових функцій (реалізацій) випадкового одного або двох процесів ідентичними.



Слід запам'ятати:

1. Функція кореляції незалежних центрованих процесів дорівнює нулю, а процеси є некорельованими.

2. Повна кореляція еквівалентна нульовому зсуву між перерізами. Чим більше зсув, тим менше кореляція.

3. Функція кореляції нецентрованого випадкового процесу

$$K_X(t_k, t_{k+1}) = m_X(t_k)m_X(t_{k+1}).$$



Треба вміти:

1. За кореляційними функціями різних типів визначати енергетичні характеристики випадкових процесів.

5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих процесів

Дуже важливим видом перетворень процесів, у тому числі і випадкових, є їхнє диференціювання та інтегрування. Очевидно, що під час теоретичного дослідження таких перетворень слід мати в розпорядженні залежності, які б відображали зв'язок між статистичними характеристиками об'єктів таких операцій.

Диференціювання процесів. Розглянемо деякий випадковий процес $X(t)$. Припустимо, що існує його похідна $X'(t)$. Як лінійна операція диференціювання випадкової функції, дає функцію випадкову. В теорії випадкових процесів вважається, що $X'(t) = dX(t)/dt$ є похідною випадкового процесу $X(t)$, якщо справджується така умова:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P \left\{ \left| \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - X'(t) \right| > 0 \right\} = 0. \quad (5.16)$$

З формули (3.16) випливає, що статистичні властивості процесу, який є результатом диференціювання, визначаються різницею миттєвих значень початкового процесу $X(t)$, рознесених у часі на відстань Δt .

Обчислимо математичне очікування випадкового процесу $Y(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$. Будемо вважати, що за певного часового зсуву Δt процес $X(t + \Delta t)$ є копією процесу $X(t)$. У цьому разі випадкові процеси називаються **стаціонарними**. Тоді, з урахуванням властивостей математичного очікування, маємо:

$$M[Y(t)] = M \left[\frac{1}{\Delta t} X(t + \Delta t) - \frac{1}{\Delta t} X(t) \right] = m_x(t) - m_x(t) = 0;$$

$$M \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Y(t) \right] = \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M[Y(t)] \right] = 0.$$

- ✦ **Диференціювання випадкового стаціонарного процесу дає процес із нульовим математичним очікуванням.**

Якщо процес $X(t)$ не є стаціонарним, то

$$\begin{aligned} M[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Y(t)] &= M\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(X(t + \Delta t)) - M(X(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = m'_x(t). \end{aligned}$$

- ✦ **Математичне очікування процесу, що є похідною від заданого нестаціонарного процесу, визначається похідною від математичного очікування останнього.**

Отже, якщо два випадкові процеси пов'язані операцією диференціювання, то у загальному випадку відповідні їм математичні очікування також пов'язані такою самою операцією.

Цей результат є частковим випадком більш загального, характерного для лінійних систем:

- ✦ **середні значення (математичні очікування) процесів на вході та виході лінійної системи, властивості якої описуються лінійним оператором $L(p, t)$, пов'язані тим самим оператором.**

Зрозуміло, що необхідною умовою стаціонарності випадкового процесу є незмінність в часі його математичного очікування. Саме за таких умов операція диференціювання дає нульове значення.

► **Приклад.** Визначити математичне очікування процесу на виході ідеального диференціатора, якщо на його вході діє випадковий процес із середнім значенням $m(t) = \sin t$.

Оскільки вихідний та вхідний процеси зв'язані оператором диференціювання, математичне очікування реакції ідеального диференціатора

$$m_{\text{вих}}(t) = \frac{d}{dt} m_{\text{вх}}(t) = \text{const}.$$



5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих процесів

► **Приклад.** Визначити середнє значення процесу $X(t)$ на вході лінійної системи у вигляді класичного послідовного RC-кола першого порядку (приклад інтегруючої системи; рис. 5.4), якщо її реакція $Y(t) = U_C(t)$ є процесом стаціонарним із математичним очікуванням

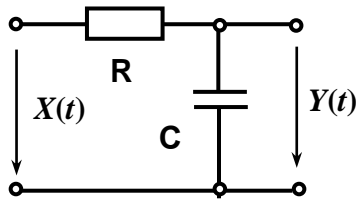


Рисунок 5.4 – RC-система першого порядку.

$$m_Y(t) = m_U(t) = m_Y = \text{const.}$$

Як відомо зв'язок між реакцією $Y(t)$ та дією в такій системі описується диференціальним рівнянням

$$RC \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = X(t).$$

Процес $X(t)$ є сумою двох процесів: $X(t) = Y(t) + Z(t)$, де $Z(t) = RC \frac{dY(t)}{dt}$ з точністю до постійного множника є диференціальним перетворенням процесу $Y(t) = U_C(t)$. Тоді з урахуванням властивостей математичного очікування та зроблених попередньо висновків

$$m_X(t) = m_Y(t) + m_Z(t) = m_Y + RC \frac{d}{dt} m_Y = m_Y.$$

◻

Як відомо, для кількісного оцінювання статистичного зв'язку між миттєвими значеннями процесу слід знати його автокореляційну функцію. Розглянемо функцію кореляції процесу $Y(t) = [X(t + \Delta t) - X(t)] / \Delta t$.

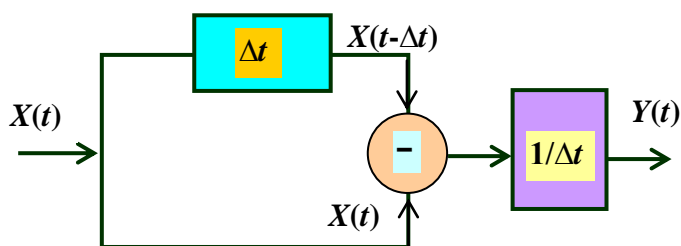


Рисунок 5.5 - Структурна схема лінійної системи.

Такий процес можна розглядати як результат лінійних перетворень над процесом $X(t)$ на зразок затримка в часі на величину Δt , віднімання (алгебраїчне

додавання) та множення (підсилення, повторення або послаблення). Структурна схема лінійної системи, що реалізує ці функції, показана на рис. 3.5.

За означенням

$$\begin{aligned}
K_Y(t_k, t_{k+1}, \Delta t) &= M \left\{ \left[\frac{X(t_k + \Delta t_k) - X(t_k)}{\Delta t_k} \right] \left[\frac{X(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) - X(t_{k+1})}{\Delta t_{k+1}} \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} M[X(t_k + \Delta t_k)X(t_{k+1} + \Delta t_{k+1})] + \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} M[X(t_k)X(t_{k+1})] - \\
&- \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} M[X(t_k + \Delta t_k)X(t_{k+1})] - \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} M[X(t_{k+1} + \Delta t_{k+1})X(t_k)] = \\
&= \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} K_X(t_{k+1} - t_k + \Delta t_{k+1} - \Delta t_k) - \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} K_X(t_{k+1} - t_k - \Delta t_k) - \\
&- \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} K_X(t_{k+1} + \Delta t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{\Delta t_k \Delta t_{k+1}} K_X(t_{k+1} - t_k).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Кореляційну функцію $K_{X'}(t_k, t_{k+1})$ здиференційованого процесу $X'(t)$, отримаємо граничним переходом у останньому співвідношенні, спрямувавши до нуля Δt_k та Δt_{k+1} :

$$\begin{aligned}
K_{X'}(t_k, t_{k+1}) &= \lim_{\Delta t_{k+1} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t_{k+1}} \left[\lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{K_X(t_k + \Delta t_k, t_{k+1} + \Delta t_{k+1})}{\Delta t_k} - \right. \\
&- \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{K_X(t_k, t_{k+1} + \Delta t_{k+1})}{\Delta t_k} - \left. \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{K_X(t_k + \Delta t_k, t_{k+1}) - K_X(t_k, t_{k+1})}{\Delta t_k} \right] = \\
&= \lim_{\Delta t_{k+1} \rightarrow 0} \frac{K'_X(t_k + \Delta t_k, t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) - K'_X(t_k + \Delta t_k, t_{k+1})}{\Delta t_{k+1}} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} \frac{\partial K_X(t_k, t_{k+1})}{\partial t_k} = \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_{k+1}} K_X(t_k, t_{k+1}),
\end{aligned} \tag{5.18}$$

де $K'_X(\cdot)$ позначено похідну від $K_X(t_k, t_{k+1})$ за аргументом t_k .

► **Приклад.** Випадковий процес $X(t)$ характеризується кореляційною функцією $K_X(t_k, t_{k+1}) = D_X \exp(-\alpha(t_{k+1} - t_k)^2)$. Знайти середній квадрат процесу $Y(t)$ на виході ідеального диференціатора.

Згідно з (5.18) кореляційна функція вихідного процесу

$$\begin{aligned}
K_Y(t_k, t_{k+1}) &= \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} \{2D_X \alpha \exp(-\alpha(t_{k+1} - t_k)^2)\} = \\
&= 2\alpha D_X \{\exp(-\alpha(t_{k+1} - t_k)^2) (1 - 2\alpha(t_{k+1} - t_k)^2)\}.
\end{aligned}$$

5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих процесів

За властивостями кореляційної функції середній квадрат визначається її значенням у співпадаючих перерізах: $t_k = t_{k+1} = t$. Тоді отримуємо

$\overline{Y^2(t)} = 2\alpha D_X = D_Y$. Результатом є стала дисперсія, а отже, математичне очікування вихідного процесу дорівнює нулю.



Для стаціонарного процесу функції кореляції не залежать від початку відліку часу, моментів визначення перерізів, а визначаються відстанню $\tau = t_{k+1} - t_k$ між перерізами. Це дає змогу переписати співвідношення (5.17) у такому вигляді:

$$K_Y(t_k, \tau; \Delta t) = \frac{1}{\Delta t^2} [2K_X(t_k, \tau) - K_X(t_k, \tau - \Delta t) - K_X(t_k, \tau + \Delta t)].$$

Спрямовуючи $\Delta t \rightarrow 0$, обчислимо кореляційну функцію похідної $X'(t)$, як границю останнього співвідношення:

$$K_{X'}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} K_Y(\tau, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} [2K_X(\tau) - K_X(\tau - \Delta t) - K_X(\tau + \Delta t)].$$

За умови, що $\Delta t \rightarrow 0$, чисельник та знаменник прямують до нуля. Розкривши невизначеність за правилом Лопітала відносно Δt , дістанемо:

$$\begin{aligned} K_{X'}(\tau) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} K_Y(\tau, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{((\Delta t)^2)'} (2K_X(\tau))' - (K_X(\tau - \Delta t))' - \\ &- (K_X(\tau + \Delta t))' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K_X'(\tau - \Delta t) - K_X'(\tau + \Delta t)}{2\Delta t} = -K_X''(\tau). \end{aligned}$$

Враховано, що похідна від складної функції з від'ємним аргументом $(-\Delta t)$ дає знак мінус перед $K_X'(\tau - \Delta t)$, а також те, що функція $K_X(\tau)$ не залежить від Δt . Тому під час застосування правила Лопітала відносно Δt маємо: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta K_X(\tau) / \Delta t = 0$.

◆ **Кореляційна функція $K_{X'}(\tau)$ процесу $X'(t)$, що є похідною від стаціонарного процесу $X(t)$, дорівнює**

взятій із знаком мінус похідній другого порядку від кореляційної функції $K_X(\tau)$ початкового процесу:

$$K_{X'}(\tau) = -K_X''(\tau). \quad (5.19)$$

Такий самий висновок є справедливим і для кореляційних функцій здиференційованих центрованих процесів:

$$B_{X'}(\phi) = -B_X''(\phi). \quad (5.20)$$

Виходячи з означення кореляційної функції, очевидні і такі співвідношення:

$$K_{X'}(0) = \overline{X'(t)^2}; \quad B_{X'}(0) = \sigma_{X'}^2 = D_{X'}.$$

Отже, умовою диференціювання стаціонарного випадкового процесу є існування другої похідної від його автокореляційної функції.

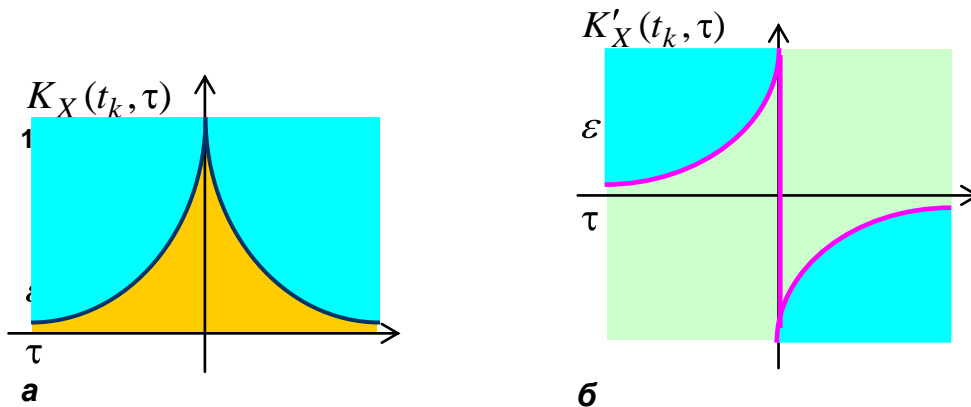


Рисунок 5.6 - Кореляційна функція експоненціального виду (а) та її похідна (б).

Але не будь-яка кореляційна функція задовольняє умову існування похідної другого порядку від неї. Як приклад – це кореляційна функція, що зображена на рис. 5.6, а, перша похідна від якої має розрив першого роду для нульового значення аргументу (рис. 5.6, б) на відміну від функції кореляції, зображеної на рис. 5.7, а. Можна сподіватися, що якщо в околі точки $\tau=0$ для функції кореляції характерні незначні зміни, то похідна другого порядку від неї в цій точці існує (рис. 5.7, б).

Відомо, що уповільнення кореляційної функції відображає достатньо високий рівень статистичного зв'язку між миттєвими значен-

5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих процесів

нями процесу в близьких перерізах. Для процесу, який подається кореляційною функцією, зображеною на рис. 5.6, а, такий зв'язок є слабким.

Якщо випадковий процес $X(t)$ диференціюється n разів, то необхідною умовою цього повинно бути існування всіх $2n$ похідних від його кореляційної функції. Отже, кореляційні функції трикутної та експоненціальної форми мають розрив похідної для нульового значення її аргумента. У цьому разі друга похідна приймає нескінченне значення.

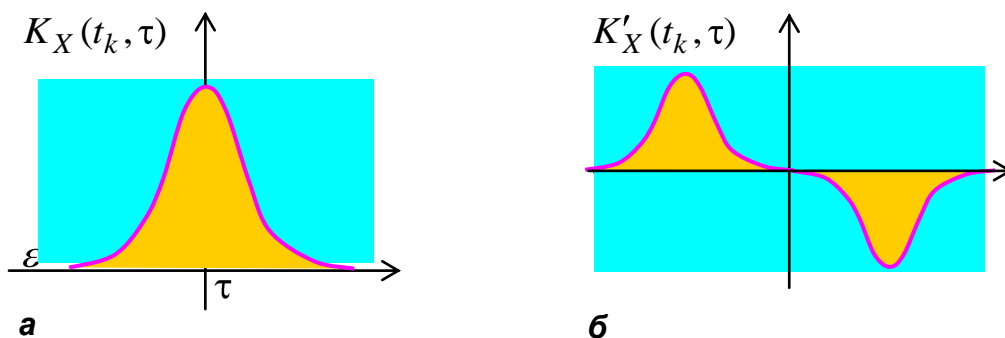


Рисунок 5.7 - Кореляційна функція нормального виду (а) та її похідна (б).

Випадкові процеси, автокореляційні функції яких не задовольняють умову існування другої похідної від них за нульового значення аргументу, називаються недиференційованими.

Дисперсія (середньоквадратичне значення) процесу, який є результатом диференціювання недиференційованого випадкового процесу, дорівнює нескінченності. Виходячи з ототожнення середнього квадрата (дисперсії) процесу з його потужністю, можна зробити висновок, що існування в природі випадкових процесів із автокореляційними функціями вказаного типу неможливе, як немає фізичного змісту процесів з нескінченною потужністю. Однак, незважаючи на це, автокореляційні функції на зразок трикутника та симетричної експоненти є корисними моделями для диференційованих процесів.

► **Приклад.** Визначити функцію кореляції та дисперсію похідної центрованого процесу $\dot{X}(t)$, автокореляційна функція якого

$$B_X(\tau) = \sigma_X^2 \exp[-(\alpha\tau)^2]$$

Здиференціювавши послідовно два рази $B_X(\tau)$, дістанемо:

$$B_X'(\tau) = -2\sigma_X^2 \alpha^2 \tau \exp[-(\alpha\tau)^2]; \quad B_X''(\tau) = -2\sigma_X^2 \alpha^2 \exp[-(\alpha\tau)^2] + 2\sigma_X^2 \alpha^2 \alpha^2 \tau^2 2 \exp[-(\alpha\tau)^2] = 2\sigma_X^2 \alpha^2 (2(\alpha\tau)^2 - 1) \exp[-(\alpha\tau)^2].$$

Остаточно

$$B_{X'}(\tau) = -B_X''(\tau) = 2\sigma_X^2 \alpha^2 (2(\alpha\tau)^2 - 1) \exp[-(\alpha\tau)^2].$$

Дисперсія здиференційованого процесу

$$\sigma_{X'}^2 = B_{X'}(0) = -B_X''(0) = 2\sigma_X^2 \alpha^2.$$

Графіки функцій $B_{X'}(\tau)$ та $B_X(\tau)$ зображено на рис. 5.8.

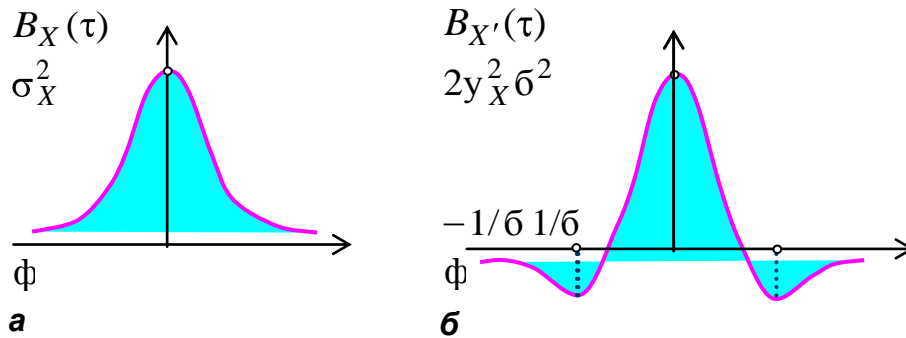


Рисунок 5.8 - Кореляційні характеристики центрованого процесу (а) та похідної від нього (б).



► **Приклад.** Визначити кореляційну функцію процесу на вході лінійної системи у вигляді класичного послідовного RC-кола першого порядку (рис. 5.4), якщо реакція такої системи $Y(t) = U_C(t)$ є процесом стаціонарним із кореляційною функцією $K_Y(\tau) = K_U(\tau) = \sigma_Y^2 \exp(-\alpha\tau^2)$, ($\alpha > 0$).

Раніше показано, що процес $X(t) = Y(t) + Z(t)$, де $Z(t) = RCdY(t)/dt$ - диференціальне перетворення стаціонарного випадкового процесу (СВП) $Y(t)$, а отже, є процесом також стаціонарним. Оскільки функціональний зв'язок між процесами $Z(t)$ та $Y(t)$ відрізняється від прямо пропорційного, то це процеси некорельовані. Тоді, АКФ $K_X(\tau) = K_Z(\tau) + K_Y(\tau)$ вхідного процесу, як кореляційна функція суми некорельованих стаціонарних випадкових процесів.

Відомо, що диференціальне перетворення СВП $Y(t)$ дає процес $Y'(t)$ із кореляційною функцією $K_{Y'}(\tau) = -K_Y''(\tau) = -K_U''(\tau)$. Процес

5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих процесів

$Z(t) = RCY'(t)$, де RC – не випадкова величина, характеризується АКФ $K_Z(\tau) = -(RC)^2 K_Y''(\tau)$. Отже, для вхідного процесу

$$K_X(\tau) = -(RC)^2 K_Y''(\tau) + K_Y(\tau).$$

Двократне диференціювання $K_Y(\tau)$ дає

$$K_Z(\tau) = -K_Y''(\tau) = 2\alpha\sigma_Y^2(1 - 2\alpha\tau^2)\exp(-\alpha\tau^2)(RC)^2.$$

Остаточно

$$K_Z(\tau) = \sigma_Y^2 \exp(-\alpha\tau^2)[(1 - 2\alpha\tau^2)(RC)^2].$$



Інтегрування процесів. Тепер зупинимось на інтегральному перетворенні випадкового процесу $X(t)$, що дає випадковий процес

$$Y(t) = \int_0^t X(\lambda) d\lambda.$$

Такий зв'язок має місце в ідеальних інтегруючих системах між реакцією та дією.

Будемо вважати, що $X(t)$ – нестационарний процес із кореляційною функцією $K_X(t_k, t_{k+1})$ (або $B_X(t_k, t_{k+1})$ для центрованих процесів) чи $K_X(t_k, \tau)$, ($B_X(t_k, \tau)$). Згідно з наведеними раніше висновками відносно дії операторів лінійних систем на моментні функції їхніх реакцій середнє значення інтегралу від випадкової функції дорівнює інтегралу її середнього значення:

$$M[Y(t)] = M\left[\int_0^t X(\lambda) d\lambda\right] = \int_0^t M[X(\lambda)] d\lambda. \quad (5.21)$$

Враховуючи це, маємо функцію кореляції процесу, який є результатом інтегрального перетворення:

$$K_Y(t_k, t_{k+1}) = M[Y(t_k)Y(t_{k+1})] = M\left[\int_0^{t_k} X(\lambda_k) d\lambda_k \int_0^{t_{k+1}} X(\lambda_{k+1}) d\lambda_{k+1}\right] =$$

$$= M \left[\int_0^{t_k} \int_0^{t_{k+1}} X(\lambda_k) X(\lambda_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1} \right] = \quad (5.22)$$

$$= \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k+1}} M[X(\lambda_k) X(\lambda_{k+1})] d\lambda_k d\lambda_{k+1} = \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k+1}} K_X(\lambda_k, \lambda_{k+1}) d\lambda_k d\lambda_{k+1}.$$

Отже, як і у випадку диференціювання процесів, кореляційна функція процесу $Y(t)$, що визначається інтегралом заданого $X(t)$, є результатом послідовної дії оператора системи (в данному випадку інтегрування) на кореляційну функцію $K_X(t_k, t_{k+1})$ вхідного процесу:

$$\begin{aligned} K_Y(t_k, t_{k+1}) &= L(t_{k+1}) \{ L(t_k) [K_X(t_k, t_{k+1})] \} = \\ &= L(t_k) [L(t_{k+1}) \{ K_X(t_k, t_{k+1}) \}]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Якщо процес $X(t)$ є стаціонарним, тоді, як відомо,

$$M[X(t)] = m_X = \text{const}; \quad K_X(t_k, t_{k+1}) = K_X(\tau), \quad \text{де } \tau = t_{k+1} - t_k.$$

Враховуючи (5.21) та (5.22), дістанемо математичне очікування

$$M \left[\int_0^t X(\lambda) d\lambda \right] = \int_0^t M[X(\lambda)] d\lambda = \int_0^t m_X d\lambda = m_X t \neq \text{const} \quad (5.24)$$

та кореляційну функцію

$$K_Y(\tau) = \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k+1}} K_X(\lambda_{k+1} - \lambda_k) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = K_Y(t_k, t_{k+1}) \quad (5.25)$$

випадкового процесу, який є результатом інтегрування стаціонарного.

- ✦ **Математичне очікування випадкового процесу, що є результатом інтегрування стаціонарного, є функцією часу, а його кореляційна функція залежить як від початку відліку часу, так і відстані між перерізами.**

5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих процесів

Останні співвідношення та висновки засвідчують, що інтегральне перетворення стаціонарних процесів дає процес нестаціонарний.

► **Приклад.** Випадковий стаціонарний процес характеризується дельтоподібною функцією кореляції $K_X(\tau) = W_0 \delta(\tau)$ та нульовим математичним очікуванням $m_x = 0$, де W_0 - постійний множник. Визначити функцію кореляції, математичне очікування та дисперсію випадкового процесу Вінера.

Заданий випадковий процес часто називають **білим шумом**, а його інтегральне перетворення $Y(t)$ - **випадковим процесом Вінера**.

Математичне очікування $\overline{Y(t)}$ процесу $Y(t)$ визначимо за формулою (3.21):

$$m_Y(t) = M \int_0^t X(\lambda) d\lambda = \int_0^t m_X(\lambda) d\lambda = 0,$$

оскільки $m_X(t) = 0$.

Відповідно до (5.22) функція кореляції

$$\begin{aligned} K_Y(t_k, t_{k+1}) &= \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k+1}} K_X(\lambda_{k+1} - \lambda_k) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = \\ &= \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k+1}} W_0 \delta(\lambda_{k+1} - \lambda_k) d\lambda_k d\lambda_{k+1} = W_0 \int_0^{t_k} d\lambda_k \int_0^{t_{k+1}} \delta(\lambda_{k+1} - \lambda_k) d\lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

Значення змінних інтегрування λ_{k+1} , λ_k є такими, що визначають область інтегрування прямокутної форми $ОМРН$ зі сторонами $[0, t_k]$ та $[0, t_{k+1}]$ (рис. 5.9). Відповідно до властивостей δ - функції та функції $\delta(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ внутрішній інтеграл дорівнює нулю для всіх пар значень λ_{k+1} , λ_k , крім таких, що задовольняють умову $\lambda_{k+1} = \lambda_k$, тобто одночасно належать прямій $ОА$, яка проходить через початок координат із кутом нахилу до осі абсцис 45° , та прямій $ВС$.

Тоді, якщо $t_k > t_{k+1}$ (рис. 5.9, а), для вказаних пар значень λ_{k+1} , λ_k , інтеграл $\int_0^{t_k} \delta(\lambda_{k+1} - \lambda_k) d\lambda_k$ дорівнює одиниці; $d\lambda_k = d\lambda_{k+1}$;

$0 \leq \lambda_k \leq t_{k+1}$; $0 \leq \lambda_{k+1} \leq t_{k+1}$, а $t_k = t_{k+1}$. У зв'язку з чим функція кореляції $K_Y(t_k, t_{k+1}) = W_0 t_{k+1}$.

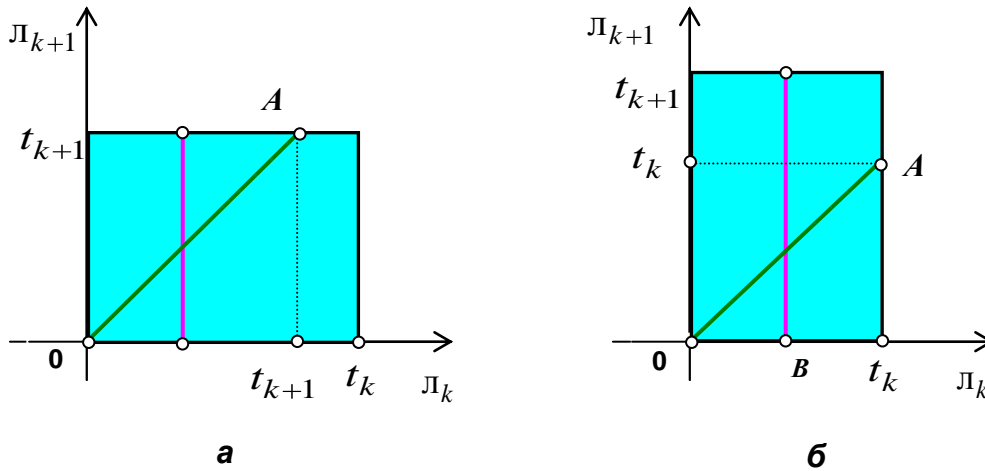


Рисунок 5.9 - До визначення функції кореляції вінеровського випадкового процесу.

У разі, якщо $t_k < t_{k+1}$ (рис. 5.9, б), пряма OA для ненульових пар значень λ_{k+1} , λ_k для інтегралу по λ_{k+1} визначає такі співвідношення: $t_{k+1} = t_k$; $0 \leq \lambda_{k+1} \leq t_k$. Тому тепер кореляційна функція $K_Y(t_k, t_{k+1}) = W_0 t_k$.

Зважаючи на те, що в обох випадках функція кореляції явно залежить від t_k або t_{k+1} , а не від різниці, то вінеровський випадковий процес у широкому значенні є нестационарним.

Дисперсію знаходимо на основі визначеної кореляційної функції $K_Y(t_k, t_{k+1})|_{t_k=t_{k+1}=t} = \sigma_Y^2 = W_0 t$ для співпадаючих перерізів: $t_k = t_{k+1} = t$. Вона не є постійною, а лінійно зростає з часом, що також є ознакою нестационарності зінтегрованого процесу.

■

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Необхідною умовою стаціонарності випадкового процесу є незмінність в часі його математичного очікування.

1. Визначення понять: диференційований та зінтегрований процес, диференційовані та недиференційовані процеси,

5.4 Кореляційні властивості зінтегрованих та здиференційованих процесів

2. Умовою диференціювання стаціонарного випадкового процесу є існування другої похідної від його автокореляційної функції.

3. Середні значення процесів на вході та виході лінійної системи, властивості якої описуються лінійним оператором $L(p, t)$, пов'язані тим самим оператором.

4. Інтегральне перетворення стаціонарних процесів дає процес нестаціонарний



Треба вміти:

1. Визначати поняття: здиференційований та зінтегрований процес, диференційовані та недиференційовані процеси, стаціонарний процес, випадковий процес Вінера.

2. Визначати кореляційні функції здиференційованого та зінтегрованого процесів.

стаціонарний процес, випадковий процес Вінера.

2. Диференціювання випадкового стаціонарного процесу дає процес із нульовим математичним очікуванням.

3. Для стаціонарного процесу функції кореляції не залежать від початку відліку часу, моментів визначення перерізів, а визначаються відстанню $\tau = t_{k+1} - t_k$ між перерізами.

4. Кореляційна функція здиференційованого процесу визначається із знаком мінус похідною другого порядку від кореляційної функції початкового процесу:

5. Математичне очікування випадкового процесу, що є результатом інтегрування стаціонарного, є функцією часу, а його кореляційна функція залежить як від початку відліку часу, так і відстані між перерізами.

5.5 Завдання для поточного тестування

5.5.1 Питання для поточного контролю

- Назвіть види статистичної залежності зв'язку.
- Що означають поняття «статистична незалежність», «функціональна залежність» та «кореляція»?
- У чому полягає різниця між поняттями «кореляція» і «лінійна залежність»?
- Які випадкові об'єкти вважаються некорельованими?
- Що є більш жорсткою вимогою – лінійна залежність, статистична незалежність, нелінійна функціональна залежність та некорельованість?
- У чому полягає різниця між поняттями «процеси лінійно подібної форми» та «процеси корельовані»?
- Чи є статистично незалежними некорельовані процеси?
- Які з характеристик є кількісною мірою кореляції між випадковими величинами (процесами)?
- Що таке додатна та від'ємна кореляції.
- Наведіть графічну ілюстрацію некорельованих випадкових величин та величин із додатною та від'ємною кореляцією.
- Дайте визначення двовимірної початкової та центральної моментних функцій другого порядку.
- Чим відрізняються кореляційні функції нецентрованих та центрованих випадкових процесів?
- Дайте визначення взаємної кореляційної функції нецентрованого та центрованого випадкових процесів..
- У чому полягає фізичний зміст кореляційних функцій?
- Обмеження, що накладаються на кореляційну функцію $K_X(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу.
- Запишіть формули для визначення нормованих кореляційних функцій.

5.5 Завдання для поточного тестування

- Яких значень набуває функція кореляції центрованих випадкових процесів?
- Поясніть, як за графіком кореляційної функції можна оцінити динаміку процесу?
- Яких значень набуває нормована кореляційна функція?
- У чому полягає різниця між коваріаційною, кореляційною та функцією автокореляції.
- Особливості визначення коваріаційної, кореляційної та функції автокореляції для неперервних та дискретних процесів.
- Довести співвідношення $K_x(t_k, t_{k+1}) = m_x(t_k) \cdot m_x(t_{k+1})$.
- Що таке здиференційований випадковий процес?
- Що таке стаціонарний випадковий процес?
- Якими властивостями та характеристиками наділений випадковий процес, для якого справджується така рівність: $X(t) = X(t + \nabla t)$?
- Довести, що диференціювання випадкового стаціонарного процесу дає процес, математичне очікування якого дорівнює нулю.
- Взаємозв'язок середніх значень процесів на вході та виході лінійних систем.
- Запишіть формулу для визначення кореляційної функції здиференційованого випадкового процесу у загальному випадку.
- Запишіть формулу для визначення кореляційної функції процесу, що є результатом диференціювання стаціонарного випадкового процесу.
- Чим визначається початкові значення кореляційних функцій не центрованих та центрованих випадкових процесів.
- Дайте визначення диференційованого випадкового процесу.
- Що таке недиференційований випадковий процес.
- Якого значення набуває автокореляційна функція недиференційованого випадкового процесу за нульового значення її аргументу?
- Особливості статистичних характеристик диференційованих та недиференційованих стаціонарних випадкових процесів.
- Що таке зінтегрований випадковий процес?

- Запишіть формулу, за якою обчислюється математичне очікування ідеального інтегратора.
- Властивості середнього статистичного процесу, що є результатом інтегрування стаціонарного випадкового процесу.
- Чи дає інтегральне перетворення стаціонарного процесу процес стаціонарний?
 - Випадковий процес Вінера.
 - Взаємозв'язок випадкового процесу Вінера з «білим шумом».
 - Що таке дельта – корельований процес?

5.5.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Випадкові процеси $X(t)$, $Y(t)$ і $Z(t)$ задовольняють такі співвідношення: Процес $X(t)$ характеризується математичним очікуванням m_X та дисперсією σ_X^2 . Визначити коефіцієнт кореляції R_{YZ} та взаємну кореляційну функцію K_{YZ}

2. Знайти кореляційну $K_X(t_k, t_{k+1})$ та дисперсію випадкового процесу Вінера, якщо стаціонарний білий шум $\eta(t)$ характеризується нульовим значенням математичного очікування m_η та кореляційною функцією

3. На RC – систему (див. рис. 5.4) починаючи з моменту часу $t = 0$ діє стаціонарний процес $X(t)$ з математичним очікуванням m_X та кореляційною функцією . Визначити математичне очікування $m_U(t)$ та кореляційну функцію $K_U(t_k, \phi)$ напруги $U_C(t)$ на ємнісному елементі C , вважаючи її процесом нестационарним.

4. Радіотехнічна система складається із лінії затримки, час затримки якої t_3 , та пристрою диференціювання (рис. 5.10). Знайти взаємну кореляційну функцію процесів $X(t-t_3)$ та $dX(t)/dt$, якщо $X(t)$ є стаціонарним процесом із нульовим математичним очікуванням m_X та кореляційною функцією

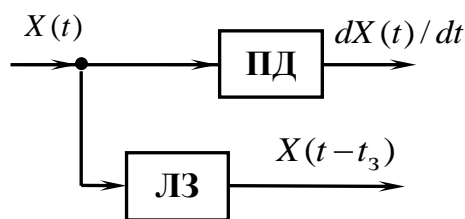


Рисунок 5.10 – Лінійні системи з лінією затримки.

$$K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha|\tau|).$$

5.5 Завдання для поточного тестування

5. На вході системи, що складається з двох паралельних RC ланок(рис. 5.4), діє стаціонарний білий шум $X(t)$. Визначити взаємну кореляційну функцію $K_{YZ}(\Phi)$ процесів $Y(t)$ та $Z(t)$.

6. Визначити, чи є диференційованими стаціонарні випадкові процеси, кореляційні функції яких є такими: 1) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$; 2) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$? 3) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

7. Середня потужність процесів обчислюється за такими формулами: 1) $\frac{N_0}{2\pi} \omega_0^3$; 2) $P_{cp} = \infty$; 3) $P_{cp} = N_0$. Визначити, які з цих процесів є диференційованими?

8. Пояснити, які з аналітичних виразів не можуть бути описом кореляційних функцій:

а) $\exp(-\tau^2)$; б) $|\tau| \exp(-|\tau|)$; в) $10 \exp[-(\tau + 2)]$; г) $\sin^2 \pi \tau / \pi^2 \tau^2$.

9. Обґрунтувати, які з зображених на рис. 5.11 функцій не можуть бути автокореляційними?

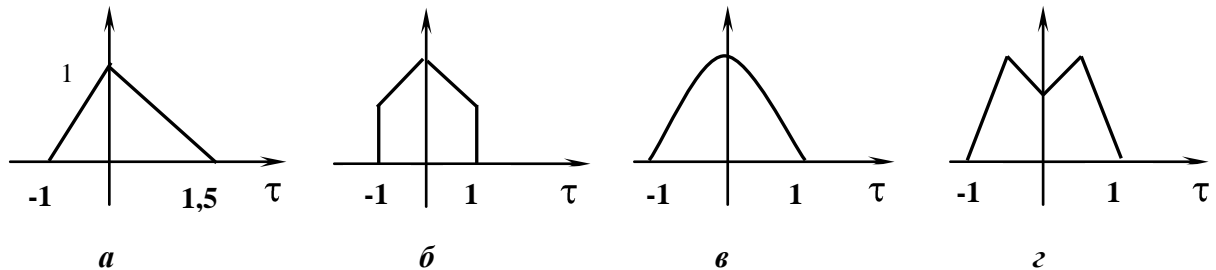


Рисунок 5.11 - Графіки функціональних залежностей.

10. Обґрунтувати, чи може взаємна кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $X(t) = 5 \cos(10t + \varphi_1)$ та його похідної описуватися таким співвідношенням: $K_{XX'}(\tau) = 100 \cos 10\tau$? Початкова фаза φ_1 процесу $X(t)$ подається рівномірним законом розподілу ймовірності.

11. Визначити взаємну кореляційну функцію $K_{XX'}(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t) = 5 \cos(10t + \varphi_1)$ з рівномірним законом розподілу початкової фази φ_1 та здиференційованого процесу.

12. Визначити середньоквадратичне значення здиференційованого процесу, якщо процес $X(t)$ має кореляційну функцію $K_X(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$.

13. Один і той самий стаціонарний випадковий процес подається на ідеальний диференціатор та інтегратор (окремо), реакції яких додаються. Визначити, чи є сумарна реакція стаціонарним процесом.

14. Які з наведених функцій не можуть бути взаємними кореляційними функціями процесів $X(t)$ та $dX(t)/dt$:

$$\text{а) } \alpha e^{-\alpha|\tau|}; \text{ б) } 4\sigma(\tau); \text{ в) } \alpha e^{-\alpha(\tau-1)}; \text{ г) } \alpha(1 - e^{-\alpha|\tau|})?$$

15. Між процесами $X(t)$ та $Y(t)$ має місце лінійний зв'язок: $Y(t) = KX(t)$, де K - стала не випадкова величина. Записати нормальний диференціальний закон розподілу для величини $Y(t_k)$, якщо $X(t_k)$ описується тим самим законом.

16. Які з наведених співвідношень є справедливими і за яких умов: а) $\rho_X(t_k, t_{k+1}) = \frac{K_X(t_k, t_{k+1})}{\pm \sigma_X(t_k, t_{k+1})}$; б) $K_X(t_k, \tau) = \pm \sigma_X(t_k) \sigma_X(t_{k+1})$; в) $B_{\dot{X}}(t_k, t_{k+1}) = \alpha \sigma_X^2(t_k)$ г) $K_X(t_k, t_{k+1}) = 0$?

17. Автокореляційна функція стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ має вигляд $K_X(\tau) = 100e^{-\tau^2} \cos 2\pi\tau + 10 \cos 6\pi\tau + 36$. Визначити функцію кореляції $K_{XX'}(\tau)$, де $X' = dX(t)/dt$.

18. Автокореляційна функція $K_X(\tau)$ стаціонарного процесу $X(t)$ має вигляд $K_X(\tau) = \sin \tau / \tau$. Обчислити функції $K_{XX'}(\tau)$ та $K_{X'}(\tau)$, де $X'(t)$ - здиференційований процес.

6 Спектральні характеристики випадкових процесів

6.1 Особливості спектрального аналізу випадкових процесів

Під час теоретичного дослідження різних перетворень детермінованих процесів лінійними системами для їх спектрального зображення, як відомо, широко застосовується перетворення Фур'є, що дає змогу істотно спростити процедуру аналізу за рахунок переходу від операції згортки у часовій області до звичайної операції множення відповідних характеристик систем та процесів у частотній області. В зв'язку з цим виникає природне запитання: чи є ці методи раціональними під час дії на систему випадкових процесів?

Нагадаємо, що перетворенням Фур'є не випадкового неперіодичного процесу $s(t)$ є комплексна функція частоти $S(j\omega)$ або $S(j2\pi f)$, яка визначається за такою формулою:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow S(j2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.1)$$

за умови, що інтеграл (6.1) існує.

Функцію $S(j\omega) = \pi dA_m / d\omega$ називають **спектральною щільністю комплексних амплітуд детермінованого процесу**. Така функція визначає комплексну амплітуду гармонічної складової з частотою ω в інтервалі $[\omega, \omega + d\omega]$, сума яких відтворює початковий процес $s(t)$.

При спробі застосувати перетворення Фур'є (6.1) до випадкових процесів ми стикаємося з рядом проблем.

Проблема перша. Інтеграл (6.1) існує, коли підінтегральна функція є абсолютно інтегрованою, що забезпечується за абсолютної збіжності інтегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty. \quad (6.2)$$

Практично достатньо, щоб функція $s(t)$ була інтегрованою в квадраті:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \quad (6.3)$$

Інтеграл (6.3) визначає енергію процесу. Отже, перетворення Фур'є існує для процесів із обмеженою енергією. Водночас, наприклад, для ергодичного процесу кожна його вибіркова функція (реалізація) з ймовірністю одиниця характеризується нескінченною енергією, оскільки є заданою на нескінченному відрізку часу. Основною енергетичною характеристикою такого процесу, як відомо, є середня потужність, що дорівнює його середньому квадрату.

✦ Отже, **використання для оцінки властивостей стаціонарних випадкових процесів спектральної щільності амплітуд виду (6.1), що пов'язана з поняттям енергії, неможливо. Слід, виходити з такої енергетичної характеристики, як потужність.**

Проблема друга. Для нестационарного випадкового процесу або $X(t)$, тобто процесу, кожна реалізація якого характеризується в загальному випадку обмеженою енергією, можливе застосування перетворення Фур'є, але з результатом у вигляді *випадкової* комплексної функції частоти:

$$S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (6.4)$$

Проте, як показують теоретичні дослідження, функція $S_X(j\omega)$ характеризує більше не ансамбль реалізацій у цілому, а кожну реалізацію окремо, оскільки певна реалізація функції $S_X(j\omega)$ є індивідуальною характеристикою реалізації процесу $X(t)$.

Головне ж, як відмічалось, полягає у тому, що функція $S_X(j\omega)$ є випадковою. Бажано ж мати таке визначення спектра, яке привело б нас до не випадкової функції частоти.

Ось чому спектральний опис випадкових процесів і сигналів проводять на основі функцій, які визначають розподіл не амплітуд спектральних складових процесу, а їхньої енергії по частотному діапазону.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Для оцінки спектральних властивостей стаціонарних випадкових процесів потрібно застосовувати характеристики, що ґрунтуються на понятті потужності.

1. Спектральний опис випадкових процесів проводять на основі функцій, які визначають розподіл амплітуд спектральних складових процесу, а їхньої енергії по частотному діапазону.

6.2 Спектри нестационарних процесів

Розглянемо нестационарний процес $X(t)$ з обмеженою енергією та спектральною щільністю амплітуд $S_X(j\omega)$, визначеною відповідно до (6.4). У цьому разі, як відмічалось, $S_X(j\omega)$ є випадковою функцією ω , а її кожна реалізація відповідає певній реалізації $x_i(t)$ процесу $X(t)$.

Згідно з теоремою Парсеваля для окремої реалізації $x_i(t)$ її енергія

$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_i^2(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S_x(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(j2\pi f)|^2 df = \\
 &= 2 \int_0^{\infty} |S_x(j2\pi f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Виходячи з визначення інтегралу як суми, величина $W_x(\omega)d\omega$ є енергією dE_x спектральної складової реалізації $x_i(t)$ процесу $X(t)$, що відповідає смузі частот $[\omega, \omega + d\omega]$.

Як впливає з (6.5) функція $W_x(\omega) = |S_x(j\omega)|^2$

$$W_x(\omega) = 2\pi \frac{dE_x}{d\omega} = \frac{dE_x}{df} = |S_x(j\omega)|^2 = |S_x(j2\pi f)|^2 = S_x^2(2\pi f)$$

характеризує розподіл енергії реалізації $x_i(t)$ по осі частот і називається **спектральною щільністю енергії реалізації** $x_i(t)$ або просто її **енергетичним спектром**.

Розмірність енергетичного спектра реалізації - [енергія/Гц].

Застосовуючи операцію усереднення до ансамблю енергетичних спектрів усіх реалізацій, отримаємо **енергетичний спектр нестационарного випадкового процесу** $X(t)$:

$$W_X(\omega) = M_1\{|S_X(j\omega)|^2\}. \quad (6.6)$$

Ураховуючи те, квадрат модуля $|S_X(j\omega)|^2 = S_X(j\omega)S_X^*(j\omega)$, де $S_X^*(j\omega)$ - комплексно-спряжена до $S_X(j\omega)$ функція, а також (6.4). дістанемо:

$$\begin{aligned} W_X(\omega) &= M_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X(t_1)e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} X(t_2)e^{j\omega t_2} dt_2\right\} = \\ &= M_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t_1)X(t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t_1, t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (6.7)$$

де $K_X(t_1, t_2)$ - кореляційна функція нестационарного процесу $X(t)$.

Основні властивості спектральної щільності енергії. Відповідно до означення (6.6) спектральна щільність енергії $W_X(\omega)$:

- є невід'ємною ($W_X(\omega) \geq 0$) і парною відносно частоти;
- не несе інформації про фазові співвідношення спектральних складових;
- є функцією не випадковою та дійсною.

Парність спектральної щільності енергії $W_X(\omega)$ дає змогу оцінювати спектральний розподіл енергії процесу тільки тими його значеннями, що обчислені для додатних значень частоти. Відсутність же у спектрі енергії процесу або сигналу його фазових параметрів є причиною неоднозначного поновлення випадкового процесу за його спектром. Іншими словами, один і той же енергетичний спектр може визначати декілька процесів, зокрема, зсунутих у часі.

ПІДСУМКИ**Необхідно зрозуміти:**

1. Парність спектральної щільності енергії $W_X(\omega)$ дає змогу оцінювати спектральний розподіл енергії процесу тільки за тими його значеннями, що обчислені для додатних значень частоти.

2. Відсутність же у спектрі енергії нестационарного процесу його фазових параметрів є причиною неоднозначного поновлення випадкового процесу за його спектром: один і той самий енергетичний спектр може визначати декілька процесів, зокрема, зсунутих у часі.

**Слід запам'ятати:**

1. Визначення понять: енергетичний спектр нестационарного випадкового процесу

2. Властивості енергетичного спектра нестационарного випадкового процесу.

3. Формулу енергетичного спектра нестационарного випадкового процесу

$$W_X(\omega) = M_1\{|S_X(j\omega)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t_1, t_2) e^{-j\omega(t_1 - t_2)} dt_1 dt_2.$$

**Треба вміти:**

1. Визначати поняття: енергетичний спектр нестационарного випадкового процесу

2. Формулювати та практично застосовувати властивості енергетичного спектра нестационарного випадкового процесу.

6.3 Спектри стаціонарних процесів

Застосовувати перетворення Фур'є безпосередньо до стаціонарного процесу $X(t)$, кожна реалізація якого з ймовірністю одиниця характеризується нескінченною енергією, неможливо. Для того, щоб це перетворення існувало, слід розглянути не весь процес $X(t)$, а його обмежену частину $X_T(t)$, визначену на кінцевому часовому інтервалі $[-T/2, ; T/2]$:

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases} \quad (6.8)$$

Такий обмеженої тривалості процес $X_T(t)$ має кінцеву енергію і для нього існує як перетворення Фур'є $S_T(j\omega)$, так і спектральна щільність енергії

$$M_1\{|S_T(j\omega)|^2\} = M_1\left\{\left|\int_{-T/2}^{T/2} X_T(t)e^{-j\omega t} dt\right|^2\right\}.$$

Проте $M_1\{|S_T(j\omega)|^2\}$ є функцією не тільки частоти, а і часового інтервалу T . Тому доцільно розглядати нормовану відносно T спектральну енергетичну характеристику

$$M_1\left\{\frac{|S_T(j\omega)|^2}{T}\right\} = G_X(\omega) = M_1\left\{\frac{1}{T}\left|\int_{-T/2}^{T/2} X_T(t)e^{-j\omega t} dt\right|^2\right\}. \quad (6.9)$$

Відношення енергії до часу визначає потужність. Ось чому $G_X(\omega)$ називається **спектральною щільністю потужності процесу $X_T(t)$, обмеженої тривалості**. Спрямувавши в (6.9) $T \rightarrow \infty$ та врахувавши, що у цьому разі $X_T(t) \rightarrow X(t)$, дістанемо співвідношення для визначення **спектральної щільності потужності стаціонарного процесу $X(t)$** :

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} M_1\left\{\frac{|S_T(j\omega)|^2}{T}\right\}. \quad (6.10)$$

Спектральну щільність потужності стаціонарного випадкового процесу ще називають **енергетичним спектром** або **спектром потужності**.

✦ Отже, **спектр потужності $G_X(\omega)$ відображає розподіл потужності стаціонарного процесу по частотному діапазону і не несе в собі інформації про його фазові параметри**.

6.3 Спектри стаціонарних процесів

Обчислимо інтеграл від лівої і правої частин (6.10) в межах $(-\infty; \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} M_1 \left\{ \frac{|S_T(j\omega)|^2}{T} \right\} d\omega.$$

Міняючи місцями операції граничного переходу та інтегрування, а також враховуючи, що математичне очікування від інтегралу дає інтеграл математичного очікування, отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M_1 \int_{-\infty}^{\infty} \{|S_T(j\omega)|^2\} d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M_1 \int_{-T/2}^{T/2} \{|S_T(j\omega)|^2\} d\omega.$$

Поділимо ліву і праву частину останнього співвідношення на 2π та врахуємо теорему Парсеваля. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} M_1 \int_{-\infty}^{\infty} \{|S_T(j\omega)|^2\} d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M_1 \int_{-\infty}^{\infty} X_T^2(t) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} M_1 \{X_T^2(t)\} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{X_T^2(t)\} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{X_T^2} \int_{-T/2}^{T/2} dt. \end{aligned}$$

Ураховуючи те, що при $T \rightarrow \infty$ процес обмеженої тривалості $X_T(t) \rightarrow X(t)$, для стаціонарного випадкового процесу дістанемо:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \overline{X^2}. \quad (6.11)$$

Відомо, що середній квадрат випадкового процесу визначає його середню потужність, тому $G_X(\omega) d\omega / 2\pi$ є тією частиною повної потужності, якою наділена спектральна складова з частотою ω із частотного діапазону $[\omega, \omega + d\omega]$.

Тоді

$$G_X(\omega) = 2\pi \frac{d \overline{X^2}}{d\omega} = \frac{d \overline{X^2}}{df}. \quad (6.12)$$

◆ **Спектральна щільність потужності стаціонарного випадкового процесу відображає розподіл його потужності по**

частотному діапазону і для конкретного значення частоти визначає потужність певної спектральної складової.

У цьому і є **фізичний зміст енергетичного спектра** $G_X(\omega)$.

Розмірність спектральної щільності потужності безпосередньо впливає з (6.12): $G_X(\omega) = \text{амплітуда}^2/\text{Гц} = \text{амплітуда}^2 \text{ с}$.

Співвідношення (6.11) дає змогу зробити ще і такий висновок:

✦ **графік спектральної щільності потужності $G_X(\omega)$ та вісь абсцис ω обмежують площу, яка за значенням перевищує потужність нецентрованого випадкового стаціонарного процесу в 2π разів.**

Аналогічно вводиться поняття спектральної щільності потужності центрованого випадкового стаціонарного процесу $\dot{X}(t)$:

$$G_{\dot{X}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} M_1 \left\{ \frac{|S_{\dot{X}}(j\omega)|^2}{T} \right\}.$$

У цьому разі

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\dot{X}}(\omega) d\omega = \sigma_{\dot{X}}^2; \quad (6.13)$$

$$G_{\dot{X}}(\omega) = 2\pi \frac{\sigma_{\dot{X}}^2}{d\omega} = \frac{d\sigma_{\dot{X}}^2}{df}. \quad (6.14)$$

Згідно з (6.13) $G_{\dot{X}}(\omega)$ часто називають **спектральною щільністю дисперсії**.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Для певного значення частоти спектральна щільність потужності стаціонарного випадкового процесу подає потужність певної спектральної складової.

1. Визначення понять: спектральна щільність потужності стаціонарного випадкового процесу, спектральна щільність дисперсії.

2. Спектр потужності відобра-

6.3 Спектри стаціонарних процесів

2. Може існувати декілька періодичних процесів і сигналів із одного і того самого періоду, які мають однакову автокореляційну функцію.

3. Спектр АКФ дає інформацію про розподіл потужностей гармонік періодичного процесу і сигналу по частоті. Такий розподіл можна отримати і на основі процесу (сигналу) за теоремою Парсеваля.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: спектральна щільність потужності стаціонарного процесу, спектральна щільність дисперсії.

2. Записати формули: а) для спектра потужності нецентрованого та центрованого стаціонарних випадкових процесів; б) для взаємозв'язку спектра потужності нецентрованого стаціонарного процесу з середнім квадратом; в) зв'язок спектра потужності центрованого стаціонарного процесу з дисперсією.

3. Обчислювати середню потужність та дисперсію за спектрами потужності.

жає розподіл потужності стаціонарного процесу по частотному діапазону і не несе в собі інформації про його фазові параметри.

3. Розмірність спектральної щільності потужності: амплітуда²/Гц = амплітуда² с.

4. Формули:

$$G_X(\omega) = 2\pi \frac{d\overline{X^2}}{d\omega} = \frac{d\overline{X^2}}{df} \quad -$$

спектр потужності нецентрованого стаціонарного процесу;

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \overline{X^2} \quad - \text{взаємо-}$$

зв'язок спектра потужності нецентрованого стаціонарного процесу з середнім квадратом;

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\dot{X}}(\omega) d\omega = \sigma_X^2 \quad - \text{взаємо-}$$

зв'язок спектра потужності центрованого стаціонарного процесу з дисперсією;

$$G_{\dot{X}}(\omega) = 2\pi \frac{d\sigma_X^2}{d\omega} = \frac{d\sigma_X^2}{df} \quad - \text{спектр}$$

потужності центрованого стаціонарного випадкового процесу.

6.4 Властивості спектральної щільності потужності стаціонарних процесів

Відповідно до означення (див. (6.10)) та з урахуванням того, що математичне очікування невід'ємної функції $|S_T(j\omega)|^2$ є додатним, спектральна щільність потужності $G_X(\omega)$ є

- функцією дійсною, невід'ємною та парною:

$$G_X(\omega) = G_X(-\omega).$$

- Спектри центрованого та нецентрованого процесів задовольняють такому співвідношенню:

$$G_X(\omega) = G_{\dot{X}}(\omega) + 2\pi m_X^2 \delta_X(\omega), \quad (6.15)$$

де m_X - математичне очікування процесу $X(t)$, а $\delta_X(\omega)$ - дельтоподібна складова спектральної щільності потужності $G_X(\omega)$.

Справедливість співвідношення (6.15) підтверджується відомим результатом інтегрування його правої та лівої частин з одночасним множенням на 2π : **середній квадрат дорівнює сумі дисперсії та квадрата математичного очікування.**

Формула (6.15) в позначеннях циклічної частоти набуває такого вигляду:

$$G_X(f) = G_{\dot{X}}(f) + 2\pi m_X^2 \delta_X(f),$$

Зрозуміло, що коли математичне очікування нецентрованого стаціонарного процесу дорівнює нулю, то спектр $G_X(\omega)$ та спектр флуктуацій збігаються.

- ✦ **Відмінність від нуля математичного очікування m_X стаціонарного процесу зумовлює в його спектрі дельтоподібну складову.**

Тому кажуть, що нецентровані процеси з постійними складовими, характеризуються нераціональними спектрами $G_X(\omega)$.

Наведемо обґрунтування цієї властивості з фізичного погляду. Так, постійний процес характеризується нескінченною енергією, але кінцевою середньою потужністю. В частотній області вся така потужність-

6.4 Властивості спектральної щільності потужності стаціонарних процесів

тьзосереджується тільки на нульовій частоті в межах нульового інтервалу, в якому інші складові відсутні. Тому можна вважати, що потужність кінцевої величини відповідає частотному інтервалу нульової ширини. Останнє еквівалентне нескінченному значенню $G_X(\omega)$ на частоті $\omega = 0$, тобто наявності дельта особливості на цій частоті.

Подібна спостерігається у разі, якщо процес $X(t)$ або $\dot{X}(t)$ містить періодичні складові з частотами ω_k . Тоді цим складовим відповідають дельта складові відповідної ваги в спектральній щільності потужності.

► **Приклад.** Для стаціонарного процесу $X(t) = 5 + 10\sin(6t + \varphi_1) + 8\cos(12t + \varphi_2)$, де початкові фази φ_1 та φ_2 є незалежними випадковими величинами з рівномірним законом розподілу в інтервалі $[0, 2\pi]$, визначити: а) частоти складових процесу; б) математичне очікування; в) дисперсію.

За умовою процес $X(t)$ містить постійну складову, а також першу та другу гармоніки з частотами $\omega_1 = 6$ рад/с та $\omega_2 = 12$ рад/с.

Математичне очікування процесу, як суми незалежних складових, визначаємо через суму математичних очікувань кожної складової окремо:

$$m_X = m_{X0} + m_{X1} + m_{X2}; \quad m_{X0} = M_1[5] = 5;$$

$$m_{X1} = M_1[10 \sin(6t + \varphi_1)] = 0; \quad m_{X2} = M_1[10 \cos(12t + \varphi_2)] = 0.$$

Як бачимо, значення математичного очікування $m_X = 5$ збігається з постійною складовою процесу.

Для визначення дисперсії скористаємось взаємозв'язком між середнім квадратом, математичним очікуванням і дисперсією та врахуємо, що середній квадрат стаціонарного процесу характеризує його середню потужність.

Середній квадрат знайдемо згідно з (6.11). В теорії доведено, що стаціонарному випадковому процесу $Y(t) = A + B\cos(\omega_1 t + \varphi)$ з рівномірним законом розподілу початкової фази φ на інтервалі $[0, 2\pi]$ відповідає спектральна щільність потужності :

$$G_Y(\omega) = 2\pi A^2 \delta(\omega) + \frac{\pi}{2} B^2 \delta(\omega - \omega_1) + \frac{\pi}{2} B^2 \delta(\omega + \omega_1) \quad (6.16)$$

з дельта особливостями на частотах $0, -\omega_1$ та ω_1 відповідно (рис. 6.1).

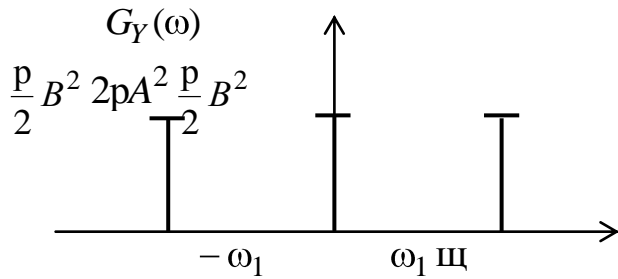


Рисунок 6.1 - Спектр гармонічного процесу з постійною складовою.

Заданий процес $X(t)$ містить дві гармонічні складові. Зважаючи на те, що в межах інтервалу $[0, 2\pi]$ фази розподілені рівномірно, різниці між синусною та косинусною формами складових немає, а результат (6.16) можливо застосувати і для спектральної щільності синусної складової.

вої.

Таким чином, згідно з (6.16) та з урахуванням зроблених зауважень, маємо:

$$\begin{aligned}
 G_X(\omega) &= 2\pi 5^2 \delta(\omega) + \frac{\pi}{2} 10^2 \delta(\omega - 6) + \frac{\pi}{2} 10^2 \delta(\omega + 6) + \\
 &+ \frac{\pi}{2} 8^2 \delta(\omega - 12) + \frac{\pi}{2} 8^2 \delta(\omega + 12) = \\
 &= \pi [50\delta(\omega) + 50\delta(\omega - 6) + 50\delta(\omega + 6) + 32\delta(\omega - 12) + 32\delta(\omega + 12)].
 \end{aligned}$$

Тоді середній квадрат та дисперсія відповідно є такими:

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \pi [50 + 50 + 50 + 32 + 32] = \frac{50}{2} + \frac{100}{2} + \frac{64}{2} = 107.$$

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - m_X^2 = 107 - 25 = 82 \text{ A}^2.$$

Отриманий результат є ще одним підтвердженням того, що середній квадрат процесу визначає його середню потужність. У базисі гармонічних функцій ця потужність відповідно до рівності Парсеваля визначається сумою потужностей гармонік.

■

Характер спектра потужності залежить від середовища, в якому відбувається процес (електричне коло, механічна система, напівпровідник тощо). Одні випадкові процеси характеризуються рівномірним енергетичним спектром у широкому чи нескінченному діапазоні частот, інші – нерівномірним у вузькій частотній смузі. Перші, зокрема, притаманні змінній у часі різниці потенціалів на кінцях будь-якого електричного провідника, що виникає внаслідок теплового руху електронів. Рів-

6.4 Властивості спектральної щільності потужності стаціонарних процесів

номірну спектральну щільність мають і коливання струму в електронних лампах, що зумовлено дискретною природою струму в них.

► **Приклад.** Обчислити середню потужність процесу, спектр якого є рівномірним у смузі частот від 90 до 110 кГц та набуває значення $2 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2/\text{Гц}$.

Оскільки в спектрі відсутності дельта-особливості, то маємо центрований процес, для якого середня потужність всього процесу збігається з потужністю (дисперсією) його флуктуацій:

$$\begin{aligned} \overline{X^2} = \sigma_X^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi \cdot 90 \cdot 10^3}^{2\pi \cdot 110 \cdot 10^3} 2 \cdot 10^{-3} d\omega = \frac{1}{2\pi} 2 \cdot 10^{-3} \omega \Big|_{\omega_H}^{\omega_B} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot (110 \cdot 10^3 - 90 \cdot 10^3) = 40 \text{ В}^2. \end{aligned}$$



► **Приклад.** Стаціонарний випадковий процес характеризується спектральною щільністю потужності

$$G_X(\omega) = \frac{32}{(\omega^2 + 16)}, \text{ В}^2/\text{Гц}.$$

Середня потужність сигналу, що розсіюється на резисторі з опором в 1 Ом

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{32}{(\omega^2 + 16)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot 32 \cdot \arctg \frac{\omega}{4} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \cdot 4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{ В}^2.$$



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Наявність у спектрі нецентрованого стаціонарного випадкового процесу дельтоподібної складової спричинена ненульовим значенням математичного



Слід запам'ятати:

1. Спектр потужності стаціонарного випадкового процесу є функцією дійсною, невід'ємною та парною.

очікування.

2. Якщо математичне очікування нецентрованого стаціонарного процесу дорівнює нулю, то його спектр потужності та спектр потужності флуктуацій збігаються.

3. Характер спектра потужності залежить від середовища, в якому відбувається процес (електричне коло, механічна система, напівпровідник тощо).

2. Рівність, яка встановлює взаємозв'язок спектрів центрованого та нецентрованого стаціонарних процесів:

$$G_X(\omega) = G_{\dot{X}}(\omega) + 2\pi m_X^2 D_X(\omega).$$



Треба вміти:

1. Формулювати властивості спектральної щільності потужності стаціонарних процесів.

2. Записати рівність, яка встановлює взаємозв'язок спектрів центрованого та нецентрованого стаціонарних процесів:

6.5 Фізичний та математичний спектри

Спектральну щільність потужності $G_X(\omega)$ стаціонарного процесу часто називають **двосторонньою спектральною щільністю потужності, двостороннім енергетичним** або просто **математичним спектром** у зв'язку з тим, що визначається такий спектр як для додатних фізичних ($\omega \geq 0$), так і від'ємних ($\omega < 0$) значень частоти. Останні, як відомо, фізичного значення не мають.

Ряд авторів віддають перевагу **односторонньому енергетичному спектру** або **односторонній спектральній щільності потужності** $G_{0X}(\omega)$, які визначають тільки для додатних значень частоти. Односторонній енергетичний спектр $G_{0X}(\omega)$ ще називають **фізичним спектром**.

Між одно- $G_{0X}(\omega)$ та двосторонньою $G_X(\omega)$ спектральною щільністю потужності є відповідний зв'язок, що відображається таким співвідношенням:

- для нецентрованого випадкового стаціонарного процесу

$$G_{0X}(\omega) = \begin{cases} 2G_X(\omega); & \omega \geq 0; \\ 0; & \omega < 0; \end{cases} \quad (6.17)$$

6.5 Фізичний та математичний спектри

- для центрованого випадкового стаціонарного процесу

$$G_{0\dot{X}}(\omega) = \begin{cases} 2G_{0\dot{X}}(\omega); & \omega \geq 0; \\ 0; & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Типові графіки математичного та фізичного спектрів зображені на рис. 6.2.

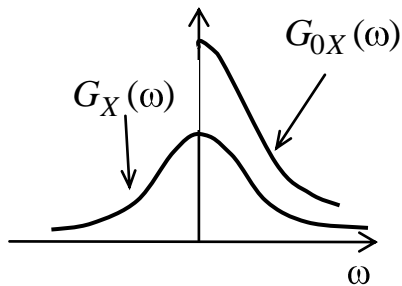


Рисунок 6.2 – Двосторонній та односторонній спектри.

За одностороннім спектром $G_{0X}(\omega)$ можна завжди обчислити двосторонній:

$$G_X(\omega) = \frac{G_{0X}(\omega) + G_{0X}(-\omega)}{2}.$$

Інтегруванням для діапазону додатних (фізичних) частот за одностороннім енергетичним спектром визначаємо середній квадрат та дисперсію стаціонарного процесу і сигналу:

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2G_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_{0X}(\omega) d\omega; \quad (6.19)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_{0\dot{X}}(\omega) d\omega. \quad (6.20)$$

Перехід до циклічної частоти $f = \omega / 2\pi$ замість кругової дає такі співвідношення:

$$\overline{X^2} = \int_0^{\infty} G_{0X}(f) df; \quad (6.21)$$

$$\sigma_X^2 = \int_0^{\infty} G_{0\dot{X}}(f) df. \quad (6.22)$$

✦ **Інтеграл від енергетичного спектра в визначених межах для частотної змінної дає значення середньої потужності нецентрованого чи дисперсії центрованого процесу, яке в точності збігається з площею, обмеженою графіком спектра та віссю абсцис у частині інтервалу зміни частоти.**

Слід зазначити, що в літературі можливі найрізноманітніші підходи щодо введення одностороннього та двостороннього енергетичних спектрів, пов'язані в основному з урахуванням коефіцієнта пропорційності 2π . Останнє серйозно впливає на розмірність.

У нашому випадку розмірність енергетичного спектра $[G_X(\omega)] = [G_{0X}(f)] = \text{ампл}^2/\text{Гц}$.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Математичний спектр потужності визначається як для додатних, так і від'ємних значень частоти, а фізичний – тільки для додатних частот.

2. У літературі можливі найрізноманітніші підходи щодо введення одностороннього та двостороннього енергетичних спектрів, пов'язані з урахуванням коефіцієнта пропорційності 2π .



Треба вміти:

1. Визначати поняття: одно- та двосторонній спектри потужності, математичний та фізичний спектри потужності стаціонарних процесів.

2. За математичним спектром потужності визначати фізичний спектр та навпаки.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: одно- та двосторонній спектри потужності стаціонарного процесу, математичний та фізичний спектри

2. Рівності, які встановлюють взаємозв'язок одно- та двостороннім спектром потужності:

- для нецентрованого випадкового стаціонарного процесу

$$G_{0X}(\omega) = \begin{cases} 2G_X(\omega); & \omega \geq 0; \\ 0; & \omega < 0; \end{cases}$$

- для центрованого випадкового стаціонарного процесу

$$G_{0\dot{X}}(\omega) = \begin{cases} 2G_{0\dot{X}}(\omega); & \omega \geq 0; \\ 0; & \omega < 0. \end{cases}$$

6.6 Взаємозв'язок кореляційних та спектральних характеристик стаціонарних процесів

Радянським ученим А.Я. Хінчином та американським Н. Вінером доведена теорема щодо взаємозв'язку між кореляційними та спектральними характеристиками випадкових стаціонарних процесів. Згідно з цією теоремою спектральна щільність потужності $G_X(\omega)$ ($G_{0X}(\omega)$) стаціонарного нецентрованого $X(t)$ (центрованого $\dot{X}(t)$) процесу та автокореляційна функція $K_X(\tau)$; ($B_X(\tau)$) пов'язані між собою інтегральним перетворенням Фур'є:

- для нецентрованого стаціонарного процесу

$$G_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \quad (6.23)$$

- для центрованого стаціонарного випадкового процесу

$$G_{\dot{X}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad B_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\dot{X}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.24)$$

✦ **Однозначно пов'язані кореляційна функція і спектральна щільність потужності характеризують випадковий процес у двох аспектах - статистичним зв'язком миттєвих значень процесу в неспівпадаючих перерізах та спектрально.**

Маємо аналогію між часовим та спектральним поданням детермінованих процесів, але на відміну від останніх інтегральні співвідношення (6.23) та (6.24) відображають зв'язок не власне процесу, а функції, що є мірою статистичного зв'язку між миттєвими значеннями випадкового процесу та його спектральною характеристикою.

Відмітимо ряд наслідків теореми Вінера-Хінчина.

➤ **Значення спектральної щільності потужності на нульовій частоті (початкове значення) дорівнює інтегралу від автокореляційної функції:**

$$G_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) d\tau; \quad G_{\dot{X}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) d\tau. \quad (6.25)$$

Такий наслідок впливає безпосередньо з (6.23) та (6.24) при підстановці $\omega = 0$.

- Початкове значення автокореляційної функції пропорційне інтегралу від спектральної щільності і дорівнює середній потужності нецентрованого або дисперсії центрованого процесу:

$$K_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \overline{X^2}; \quad B_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\dot{X}}(\omega) d\omega = \sigma_X^2. \quad (6.26)$$

Для доведення (6.26) у співвідношеннях (6.23) та (6.24) достатньо покласти $\tau = 0$.

- Автокореляційна функція стаціонарного випадкового процесу і сигналу є додатньо визначеною.

Виходячи з того, що спектральна щільність $G_X(\omega)$ ($G_{0X}(\omega)$) є невід'ємною функцією частоти, згідно з (6.23) та (6.24) пряме перетворення Фур'є від автокореляційної функції $K_X(\tau)$ ($B_X(\tau)$) повинно бути також невід'ємним. Функції, які задовольняють зазначену умову, і називаються *додатньо визначеними*.

Так, зокрема, функція

$$f(\tau) = 1, \quad |\tau| < \tau_1; \quad 0, \quad |\tau| > \tau_1$$

у вигляді прямокутника, не може бути кореляційною.

Дійсно, пряме перетворення Фур'є такої функції

$$F(j\omega) = \int_0^{\tau_1} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\sin(\omega\tau_1/2)}{\omega\tau_1/2}$$

набуває як додатних, так і від'ємних значень.

6.7 Ширина енергетичного спектра та інтервал кореляції

► **Приклад.** Визначити спектральну щільність потужності випадкового процесу $X(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ з рівномірним законом розподілу випадкової фази φ .

Для такого процесу математичне очікування $m_X = 0$, середній квадрат і

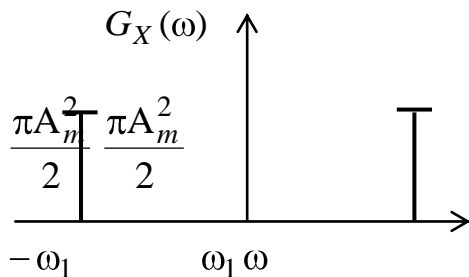


Рисунок 6.3 - Спектр монохроматичного процесу.

дисперсія $\overline{X^2} = \sigma_X^2 = A_m^2/2$, а АКФ $K_X(\tau) = B_X(\tau) = (A_m^2/2)\cos\omega_0\tau$

Отже, це стаціонарний у широкому значенні випадковий процес, який називають **монохроматичним СВП**.

Тоді згідно з (6.23) спектральна щільність потужності такого процесу

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_m^2}{2} \cos\omega_0\tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_m^2}{2} \frac{1}{2} e^{j\omega_0\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_m^2}{2} \frac{1}{2} e^{-j\omega_0\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Відповідно до властивостей перетворення Фур'є

$$\frac{A_m^2}{4} e^{j\omega_0\tau} \leftrightarrow 2\pi \frac{A_m^2}{4} \delta(\omega - \omega_0) = \frac{\pi A_m^2}{2} \delta(\omega - \omega_0); \quad \frac{A_m^2}{4} e^{-j\omega_0\tau} \leftrightarrow \frac{\pi A_m^2}{2} \delta(\omega + \omega_0).$$

Остаточно $G_X(\omega) = \pi A_m^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]/2$.

Таким чином, спектральна щільність монохроматичного СВП складається з двох дельтоподібних складових однакової площі, зсунутих в точки з частотами $\pm\omega_0$ (рис. 6.3).

■

Формули (6.23) та (6.24) можна записати більш компактно в тригонометричній формі, якщо врахувати парність кореляційних та спектральних характеристик:

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cos\omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \sin\omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos\omega\tau d\tau; \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega +$$

$$+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) \sin \omega\tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (6.28)$$

Під час перетворень ураховано подання функції $\exp(\pm j\omega\tau)$ через косинус та синус згідно з формулою Ейлера, властивості парності косинуса та непарності синуса, а також те, що в симетричних межах інтеграл від непарної функції дорівнює нулю, а парної - подвійному значенню інтеграла в односторонніх межах.

Перехід до одностороннього спектра веде до таких співвідношень:

$$G_{0X}(\omega) = 2G_X(\omega) = 4 \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau;$$

$$K_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_{0X}(\omega) \cos \omega\tau d\omega =$$

$$= \int_0^{\infty} G_{0X}(2\pi f) \cos 2\pi f\tau d2\pi f. \quad (6.29)$$

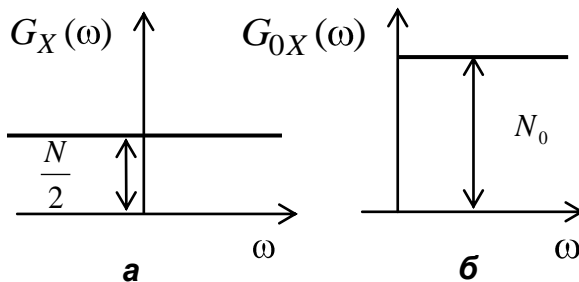


Рисунок 6.4 – Спектр білого шуму:
а- математичний; б – фізичний.

внює нулю: $m_X = 0$.

Згідно з теоремою Хінчина-Вінера автокореляційна функція

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.30)$$

► **Приклад.** Стационарний процес $X(t)$ характеризується рівномірним спектром (рис.6.4,а) $G_X(\omega) = N/2 = \text{const}$, $\forall |\omega| < \infty$. Визначити автокореляційну функцію процесу.

Виходячи з того, що $G_X(\omega)$ не містить δ -особливостей, математичне очікування такого процесу дорі-

6.7 Ширина енергетичного спектра та інтервал кореляції

Як відомо з теорії узагальнених функцій, до яких відноситься і дельта-функція, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \delta(\tau)$.

Тоді $K_X(\tau) = (N/2)\delta(\tau) = B_X(\tau) = \bar{N}_0\delta(\tau)$. АКФ заданого процесу відмінна від нуля при $\tau = 0$. Отже, миттєві значення процесу в неспівпадаючих перерізах, розміщених на нескінченно малій відстані один від одного, є некорельованими. Останнє означає необмежено велику зміну реалізацій такого процесу в часі.

Початкове значення функції кореляції $K_X(0) = B_X(0) = \sigma_X^2$. Отже, процес із рівномірним спектром потужності в нескінченному інтервалі частот характеризується нескінченною середньою потужністю.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Однозначно пов'язані кореляційна функція і спектральна щільність потужності характеризують випадковий стаціонарний процес у двох аспектах - статистичним зв'язком миттєвих значень процесу в неспівпадаючих перерізах та спектрально.

2. Спектр потужності стаціонарного процесу можна визначити за його АКФ у разі, якщо АКФ задовольняє умову додатної визначеності.

3. У разі, якщо миттєві значення випадкового процесу в неспівпадаючих перерізах, розміщених на нескінченно малій відстані один від одного, є некорельованими, то такий про-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: додатньо визначена функція

2. Початкове значення спектральної щільності потужності дорівнює інтегралу від автокореляційної функції:

$$G_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) d\tau;$$

$$G_{\dot{X}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B_X(\tau) d\tau.$$

3. Початкове значення автокореляційної функції пропорційне інтегралу від спектральної щільності і дорівнює середній потужності нецентрованого або дисперсії центрованого процесу:

цес . характеризується необмежено великою зміною його реалізацій в часі.

$$K_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \overline{X^2};$$

$$B_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\dot{X}}(\omega) d\omega = \sigma_X^2 .$$



Треба вміти:

1. Визначати поняття: додатньо визначена функція.
2. Сформулювати результат, який констатує теорема Вінера-Хінчина.
3. Записати тригонометричну форму співвідношення, яке встановлює взаємозв'язок між спектральними та кореляційними характеристиками стаціонарних процесів.
4. Визначати спектри стаціонарних процесів за кореляційними функціями та навпаки.

6.7 Ширина енергетичного спектра та інтервал кореляції

Розглянемо стаціонарний нецентрований випадковий процес або сигнал, односторонній енергетичний спектр якого $G_{0X}(\omega) = G_{0X}(2\pi f)$

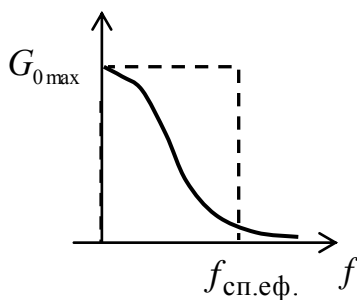


Рисунок 6.5 – До визначення ефективної ширини спектра.

набуває максимального значення $G_{0X}(0) = G_{0X}(2\pi 0) = G_{0Xmax}$ на нульовій частоті (рис. 6.5). Згідно з (6.21) площа між графіком спектра та частотною віссю f дорівнює середньому квадрату, $\overline{X^2} = K_X(0)$ а отже і середній потужності процесу.

Розглянемо також інший процес із рівномірно розподіленим одностороннім спектром у обмеженій смузі частот

$[0, f_{max}] = \Delta f_{сп.еф}$, значення якого на всіх частотах дорівнює G_{0max} .

Площа, обмежена графіком спектра такого процесу і віссю частот f , визначається площею прямокутника $G_{0max} f_{max} = G_{0max} \Delta f_{сп.еф}$. Будемо

6.7 Ширина енергетичного спектра та інтервал кореляції

вважати, що з енергетичного погляду перший та другий процес є еквівалентними. Тоді $G_{0\max} \Delta f_{\text{сп.еф}} = \int_0^{\infty} G_{0X}(2\pi f) df = \overline{X^2}$.

З останнього співвідношення дістанемо:

$$\Delta f_{\text{сп.еф}} = \frac{1}{G_{0\max}} \int_0^{\infty} G_{0X}(2\pi f) df. \quad (6.31)$$

Величина $\Delta f_{\text{сп.еф}}$ називається **ефективною шириною енергетичного спектра**. Зрозуміло, що подібні співвідношення мають місце і для центрованих процесів.

Ширина двостороннього енергетичного спектра вдвічі більша за значення ефективної ширини: $\Delta f_{\text{сп}} = 2\Delta f_{\text{сп.еф}}$.

Практично використовують і інші підходи до визначення ширини енергетичного спектра випадкових процесів. Зазвичай визначають ширину спектра за відповідним рівнем, наприклад, $0,1$ ($0,01$) $G_{0\max}$. (рис. 6.5, б).

У будь-якому випадку значення ширини спектра та інтервалу кореляції задовольняють **співвідношенню невизначеності**:

$$\Delta f_{\text{сп.еф}} \tau_k = O(1). \quad (6.32)$$

- ✦ Таким чином, **чим вужче енергетичний спектр, тим більше інтервал кореляції і навпаки. А, отже, чим динамічніше процес, тим менше інтервал кореляції, в межах якого значно зменшується кореляційна функція, тим слабкішим є статистичний зв'язок між миттєвими значеннями процесу в неспівпадаючих перерізах, тим ширше енергетичний спектр.**

Яскравим прикладом підтвердження цього висновку є білий шум, що характеризується нескінченно великою шириною спектра і нульовим інтервалом кореляції.

Стационарний випадковий процес із рівномірно розподіленою спектральною щільністю потужності та дельтоподібною кореляційною функцією називається білим шумом або дельта-корельованим процесом.

Термін «білий шум» образно підкреслює аналогію з білим (природним) світлом, у якого в межах спектра видимих частот, інтенсивність всіх спектральних складових однакова. Білий шум є абстрактною моделлю. Фізичних процесів подібного типу в природі не існує. Однак, практичне значення такої моделі велике, особливо у разі, якщо енергетичний спектр діючого процесу є рівномірним (постійним) у достатньо широкій смузі частот, причому більш широкій, чим смуга пропускання системи. Зрозуміло, що вид спектра діючого процесу за межами смуги пропускання тоді майже не впливає на параметри вихідного процесу. Тому спектральну щільність діючого процесу можна вважати постійною в усьому частотному діапазоні, а сам процес (діючий) - білим шумом.

Дуже поширеною ідеалізацією реальних явищ є білий шум із обмеженим спектром. Енергетичний спектр цього процесу є рівномірним у кінцевій смузі частот, а за її межами він дорівнює нулю:

$$G_X(\omega) = \begin{cases} N/2, & \omega_1 < |\omega| < \omega_2; \\ 0, & |\omega| < \omega_1, |\omega| > \omega_2. \end{cases} \quad (6.33)$$

Залежно від того, в яких ділянках частотного діапазону зосереджений спектр, а також від співвідношення між його шириною та частотами, що її обмежують, розрізняють:

- **низькочастотний квазібілий шум** (рис. 6.6,а) із нульовою центральною частотою та крайніми частотами $\omega_1 = -\omega_0$, $\omega_2 = \omega_0$;
- **широкосмуговий квазібілий шум** (рис. 6.6,б): $\omega_1 \approx \omega_2 - \omega_1$;
- **вузькосмуговий квазібілий шум** (рис. 6.6,в): $\omega_1 \gg \omega_2 - \omega_1$.

За аналогією з кореляційними функціями вводять поняття **нормованих спектральних щільностей потужності** як відношення спектральної щільності потужності до середньої потужності для нецентрованого процесу чи дисперсії для процесу центрованого:

$$G_{нХ}(\omega) = G_X(\omega) / \overline{X^2}; \quad G_{н\dot{X}}(\omega) = G_{\dot{X}}(\omega) / \sigma_X^2.$$

6.7 Ширина енергетичного спектра та інтервал кореляції

► **Приклад.** Односторонній енергетичний спектр $G_{0X}(\omega) = G_{0X}(2\pi f)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ має вигляд:

$$G_{0X}(\omega) = G_{0X}(2\pi f) = \begin{cases} \frac{8\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}, & f \geq 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

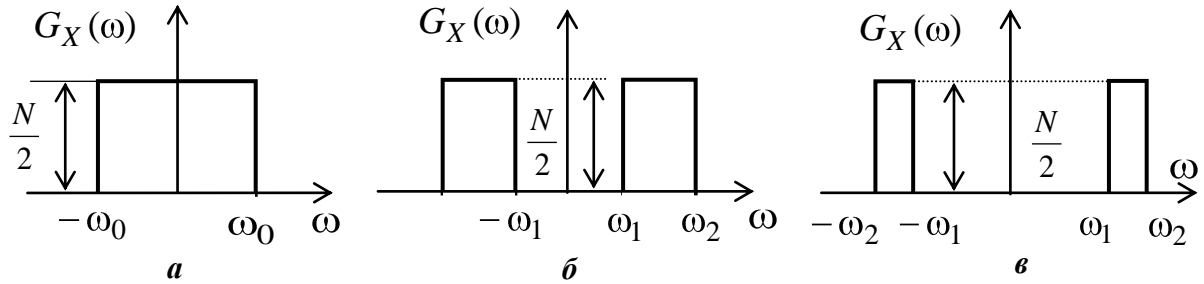


Рисунок 6.6 - Спектри процесів на зразок білого шуму: а - низькочастотного; б - широкосмугового; в - вузькосмугового.

Визначит, як співвідносяться ефективна ширина спектра і ширина спектральної щільності на рівні $0,5G_{0\max}$

Відповідно до (6.31) ефективна ширина спектра

$$\Delta f_{\text{сп.еф.}} = \frac{\alpha}{8} \int_0^{\infty} \frac{8\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi f}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{4}.$$

Ширина спектральної щільності за рівнем $0,5G_{0\max}$ задовольняє таку умову:

$$G_{0X}(\Delta f_{0,5}) = \frac{8\alpha}{\alpha^2 + (2\pi\Delta f_{0,5})^2} = 0,5G_{0\max} = 0,5 \frac{8}{\alpha} = \frac{4}{\alpha}.$$

Очевидні перетворення дають, що $\Delta f_{0,5} = \alpha/2\pi$.

Таким чином, $\Delta f_{\text{сп.еф.}} / \Delta f_{0,5} = \pi/2$.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Чим вужче енергетичний

1. Визначення понять: ефек-

спектр, тим більше інтервал кореляції і навпаки.

2. Чим динамічніше процес, тим менше інтервал кореляції, тим слабкішим є статистичний зв'язок між миттєвими значеннями процесу в неспівпадаючих перерізах, тим ширше енергетичний спектр.

2. Білий шум є абстрактною моделлю фізичних процесів. Практична значущість такої моделі велика, особливо у разі, якщо енергетичний спектр діючого процесу є рівномірним усю частоту, більш широкій, ніж смуга пропускання системи.

тивна ширина спектра стаціонарного процесу, двосторонній енергетичний спектр, інтервал кореляції, білий шум, дельта-корельований процес, низькочастотний, широкосмуговий та вузько смуговий квазібілий шум, нормована спектральна щільність потужності.

2. Методи визначення ширини спектра та інтервалу кореляції.

3. Формулу, яка встановлює взаємозв'язок між шириною спектра та інтервалом кореляції:

$$\Delta f_{\text{сп.еф}} \tau_k = O(1).$$



Треба вміти:

1. Визначати поняття: ефективна ширина спектра стаціонарного процесу, двосторонній енергетичний спектр, інтервал кореляції, білий шум, дельта-корельований процес, низькочастотний, широкосмуговий та вузько смуговий квазібілий шум, нормована спектральна щільність потужності.

2. Розв'язувати задачі на визначення ширини енергетичного спектра стаціонарних випадкових процесів та інтервалу кореляції.

6.8 Завдання для поточного тестування

6.8.1 Питання для поточного контролю

- Особливості спектрального аналізу випадкових процесів.
- Назвіть основні спектральні характеристики випадкових процесів.
- Що таке енергетичний спектр нестационарного випадкового процесу.
 - Яких значень набуває енергетичний спектр нестационарного випадкового процесу: а) невід'ємних; б) невід'ємних і дійсних?
 - Запишіть співвідношення, яке встановлює взаємозв'язок між АКФ та енергетичним спектром нестационарного випадкового процесу.
 - Фізичний зміст енергетичного спектра нестационарного процесу та його розмірність.
 - Яку умову для нестационарного процесу визначає така рівність: $W_X(-\omega) = W_X(\omega)$?
 - Визначення енергетичного спектра (спектра потужності) стаціонарного випадкового процесу.
 - Розмірність спектра потужності та енергетичного спектра нестационарного випадкового процесу.
 - Яку інформацію дає спектр потужності.
 - Чи впливають фазові параметри стаціонарного процесу на його спектр потужності?
 - Запишіть рівність, яка встановлює взаємозв'язок спектра потужності нецентрованого стаціонарного процесу з середнім квадратом та спектра потужності центрованого стаціонарного процесу з дисперсією.
 - У чому полягає фізичний зміст спектра потужності стаціонарного процесу?

- Записати формули: а) для спектра потужності нецентрованого б) центрованого стаціонарних випадкових процесів.
- Запишіть рівність, яка встановлює взаємозв'язок спектрів центрованого та нецентрованого стаціонарних процесів.
- Наведіть обґрунтування з фізичного погляду того, що спектр потужності містить дельтоподібну складову з частотою $\omega = 0$ у разі, якщо середнє статистичне процесу не дорівнює нулю.
- Особливості спектра потужності періодичного процесу.
- Що таке двосторонній та односторонній спектри потужності?
- Дайте визначення фізичного та математичного спектрів стаціонарного випадкового процесу.
- Як за математичним спектром потужності визначити фізичний спектр та навпаки?
- Запишіть формули для визначення потужності процесу та його дисперсії через спектр потужності.
- Яким інтегральним перетворенням визначається взаємозв'язок кореляційних та спектральних характеристик стаціонарних випадкових процесів?
- Як за кореляційною функцією визначити початкове значення спектра потужності?
- Як за спектром потужності визначити початкове значення кореляційної функції?
- Назвіть, які енергетичні характеристики визначають початкові значення відповідних кореляційних функцій.
- Що таке додатньо визначена функція?
- Чи допускаються процеси, кореляційні властивості яких подаються сталими або рівномірно розподіленими АКФ?
- Якого значення набуває середня потужність процесу з рівномірно розподіленим спектром потужності у нескінченному частотному діапазоні?
- Дайте визначення білого шуму?
- Що таке дельта-корельований процес?
- Взаємозв'язок випадкового процесу Вінера з «білим шумом».

6.8 Завдання для поточного тестування

- Кореляційна функція дельта-корельованого процесу.
- Що таке низькочастотний, широкосмуговий та вузькосмуговий квазібілий шум?
 - Наведіть графічне зображення спектрів потужності низькочастотного, широкосмугового та вузькосмугового квазібілого шуму.
 - Подайте графічні зображення АКФ низькочастотного, широкосмугового та вузькосмугового квазібілого шуму
 - Зв'язок між інтервалом кореляції та шириною спектра стаціонарного випадкового процесу.
 - Записати тригонометричну форму співвідношення, яке встановлює взаємозв'язок між спектральними та кореляційними характеристиками стаціонарних процесів.
 - Ширина енергетичного спектра стаціонарного процесу.
 - Що таке ефективна ширина спектра потужності?
 - Дайте визначення інтервалу кореляції
 - У чому полягає сутність енергетичного критерію визначення ширини спектра потужності та інтервалу кореляції?
 - Наведіть графічну ілюстрацію визначення ширини спектра потужності та інтервалу кореляції за інтегральним критерієм.
 - У чому полягає сутність визначення інтервалу кореляції або ширини спектра за критерієм заданого рівня?
 - Фізичний зміст взаємозв'язку інтервалу кореляції та ширини енергетичного спектра стаціонарного процесу.
 - Чи можлива зміна інтервалу кореляції кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу без зміни його спектра потужності?
 - Поясніть у чому полягає практична значимість теореми Вінера-Хінчина.
 - Сформулюйте принцип невизначеності для стаціонарних випадкових процесів.

6.8.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування

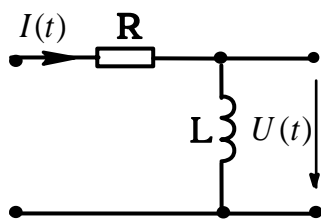


Рисунок 6.7 –RL- коло.

1. На вході RL – системи (рис. 6.7) діє випадковий струм $I(t)$, кореляційна функція якого $K_I(\tau)$. Знайти дисперсію напруги на елементі L та її енергетичний спектр.

2. Реакція лінійної системи на вхідний процес $X(t)$ задовольняє таке співвідношення:

$$Y(t) = (1/T) \int_0^t X(\lambda) d\lambda, \text{ де } T - \text{невипадкова часова}$$

постійна величина; $X(t)$ – білий шум, спектр потужності якого

$G_X(\omega) = A_m^2/4$. Визначити таке значення t_1 , за якого середньоквадратичне відхилення $\sigma_Y = 0,2 B$, якщо

3. Визначити фізичний спектр випадкового процесу $Y(t)$, де $X(t)$ – білий шум, функція кореляції якого $K_X(\tau) = A_m^2/4 \cdot (1 - |\tau|)$, A_m – невідповідна амплітуда, а φ – рівномірно розподілена на інтервалі $[-\pi, \pi]$.

4. Визначити кореляційну функцію процесу за відомого енергетичного спектра $G_X(\omega)$.

5. Визначити частоти ω_{\min} і ω_{\max} , за яких спектральна щільність $G_Y(\omega)$ процесу набуває мінімального та максимального значень. Якими є ці значення? Спектральну щільність $G_X(\omega)$ вважати заданою.

6. На вході ідеального смугового фільтра діє білий шум з енергетичним спектром $G_X(\omega) = F_0 B^2 \cdot c$. У частотному діапазоні

$\omega_1 < \omega < \omega_2$ комплексна частотна функція фільтра $H(\omega) = 1$, а за його межами – нулю. Визначити кореляційну функцію $K_Y(\tau)$ вихідного процесу та його дисперсію σ_Y^2 .

7. На RC – систему (див. рис. 6.8, а) діє випадкова напруга $U_{\text{вх}}(t)$, що є білим шумом з спектральною щільністю

6.8 Завдання для поточного тестування

Визначити дисперсію напруги на резистивному елементі.

8. Визначити дисперсію вхідного струму $I(t)$ лінійної системи (рис. 6.8, б), за умови, що напруга на її виході є стаціонарним випадковим процесом із спектральною щільністю (6.34).

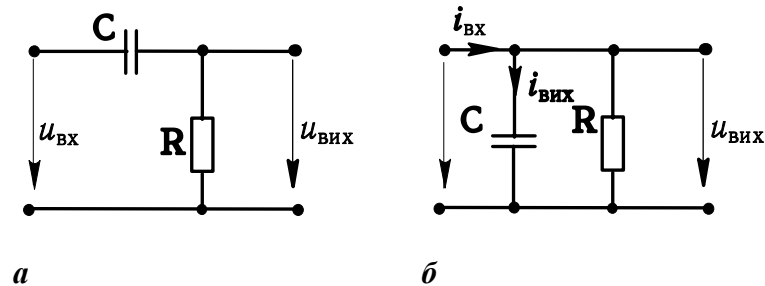


Рисунок 6.8 – Приклади RC систем.

9. Спектральна щільність стаціонарного процесу $X(t)$ подається таким співвідношенням:

Визначити ефективну ширину спектра реакції ідеального інтегратора.

10. Які з зображених на рис. 6.9 функцій не можуть бути енергетичними спектрами стаціонарного випадкового процесу?

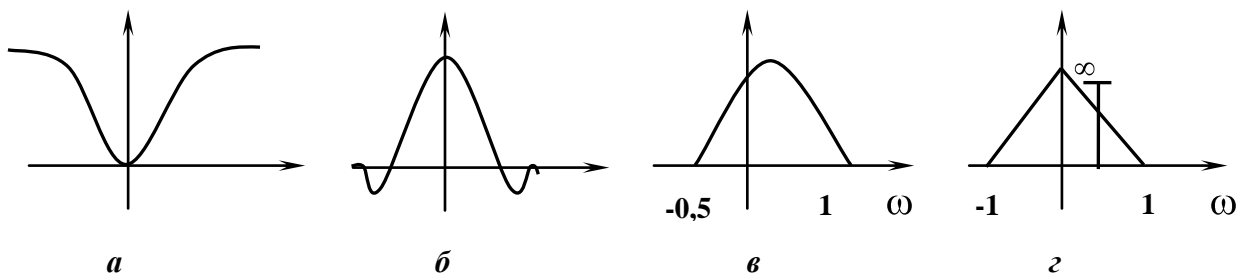


Рисунок 6.9 – Приклади графічного зображення функцій.

11. Як називається такий процес спектральна щільність якого

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 0,01, & |\omega| \leq 100\pi; \\ 0, & |\omega| > 100\pi. \end{cases} \quad (6.35)$$

Визначити ефективну ширину спектра процесу в герцах.

12. Для стаціонарного процесу з спектральною щільністю (6.35) визначити найменше значення τ , за якого його АКФ $K_X(\tau) = 0$.

13. Енергетичний спектр процесу $G_X(\omega) = 9/(\omega^2 + 64)$. Визначити математичне очікування m_X та початкове значення АКФ центрованого процесу $B_{\dot{X}}(0)$.

14. Визначити період кореляційної функції $K_X(\tau)$ випадкового стаціонарного процесу $X(t) = A_m \cos 300t + B_m \cos(700t + \varphi)$.

15. Визначити середню потужність на виході системи, якщо його вихідна напруга $u_{\text{вих}}(t) = 5 + 10\cos\omega t + 20\sin(3\omega t - 30^\circ)$.

16. Визначити аналітично інтервал кореляції за критерієм рівня 0,5 для АКФ стаціонарного процесу, щ має форму трикутного відеоімпульсу.

17. Визначити ширину спектра інтервал кореляції стаціонарного процесу, автокореляційна функція якого $K_X(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

18. Кореляційні характеристики стаціонарних випадкових процесів зображені на рис. 6.10.

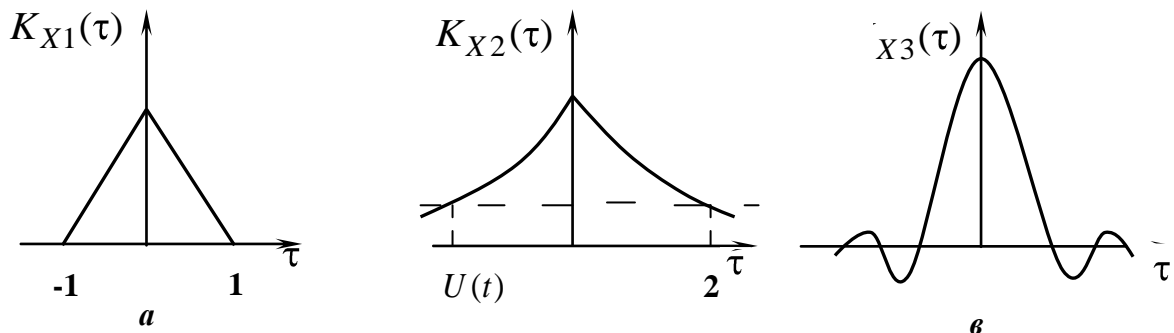


Рисунок 6.10 – Приклади кореляційних функцій.

Побудувати зростаючу послідовність, елементами якої є ширини енергетичних спектрів процесів.

19. Випадковий процес $Y(t)$ отримано диференціюванням стаціонарного процесу $X(t)$ з кореляційною функцією $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$, ($\alpha > 0$). Визначити, як співвідносяться ширини спектрів процесів $Y(t)$ та $X(t)$?

20. Як називається стаціонарний процес, спектральна щільність якого

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 0,005; & 200\pi \leq |\omega| \leq 250\pi; \\ 0, & 200\pi \geq |\omega|, \quad |\omega| \geq 250\pi. \end{cases} \quad (6.36)$$

6.8 Завдання для поточного тестування

Визначити інтервал кореляції. ширину спектра та середню потужність.

21. Для стаціонарного випадкового процесу, спектральна щільність якого подається (6.36) визначити ширину спектра та середню потужність.

22. Довести, які з співвідношень справджуються:

а) $G_X(\omega) = G_{\dot{X}}(\omega) + 2\pi m_X \sigma(\omega)$; б) $G_X(\omega) = G_{\dot{X}}(\omega) + \pi m_X^2 \sigma(\omega - \omega_0)$;

в) $G_X(\omega) = G_{\dot{X}}(\omega) + 2\pi m_X^2 \sigma(\omega)$.

7 Кореляційно-спектральний аналіз перетворень випадкових процесів лінійними системами

7.1 Постановка задачі кореляційного аналізу

Матеріал, що розглядався попередньо, присвячений вибору зручного та ефективного способу подання випадкових процесів у ймовірнісному або статистичному значеннях. Нагадаємо, що ймовірнісний опис випадкового процесу ґрунтується на законах розподілу ймовірності (функції розподілу ймовірності та щільності ймовірності); а статистичний – на характеристиках усереднення за ансамблем реалізацій (моментні функції різних порядків та спектри).

Наступний етап полягає у з'ясуванні того, яким чином ці методи можуть бути застосовані для визначення властивостей реакції системи під час дії на неї випадкового збудження. Очевидно, що вибір того чи іншого підходу зумовлюється як властивостями системи, так і властивостями діючого процесу. Однак, як підтверджує практика, в будь-якому випадку статистичний підхід є більш ефективним: визначення багатовимірних імовірнісних характеристик реакції $Y(t)$ за заданими багатовимірним імовірнісними характеристикам дії $X(t)$ з урахуванням властивостей системи є дуже складним завданням, вирішення якого є проблематичним.

Для більшості прикладних завдань, у тому числі, пов'язаних із прийманням, передаванням та перетворенням інформації, достатньо статистичної моделі реакції, яку можна отримати застосуванням відносно простих математичних операцій до статистичної моделі діючого процесу.

Ось чому в подальшому ми і зупинимося на оцінці перетворень випадкових процесів лінійними в рамках **спектрально-кореляційної теорії**, яка базується на статистичному підході до опису випадкових процесів, тобто на використанні таких його характеристик, як математичне очікування, середній квадрат (дисперсія), кореляційна функція та спектральна щільність. Крім того, в основному будемо розглядати вхідні процеси $X(t)$, які є тільки стаціонарними в широкому значенні. Як відомо, це передбачає незалежність від часового аргументу математичного очікування m_X та середнього квадрату $\overline{X^2}$ або дисперсії σ_X^2 , а та-

7.1 Постановка задачі кореляційного аналізу

кож інваріантність кореляційної функції $K_X(t_k, t_{k+1})$ ($B_X(t_k, t_{k+1})$) відносно моментів часу t_k, t_{k+1} , в яких визначаються перерізи процесу $X(t)$.

Властивості лінійної детермінованої системи у часовій області описуються часовими характеристиками, а у частотній - частотними, кожна з яких є своєрідним відображенням оператора зв'язку F діючого процесу (сигналу) $x(t)$ та реакції $y(t)$. У разі, якщо оператор F не залежить від часової змінної t , лінійна система називається *стаціонарною* або *лінійною системою з постійними параметрами*. Коли така залежність має місце, то маємо нестаціонарну лінійну або просто параметричну систему.

До часових характеристик лінійної системи належить імпульсна $g(t)$ та перехідна $h(t)$ характеристики, які є відгуками системи за нульових початкових умовах на дію, що описується функцією Дірака $\delta(t)$ та функцією Хевісайда $\sigma(t)$ відповідно (рис. 7.1).

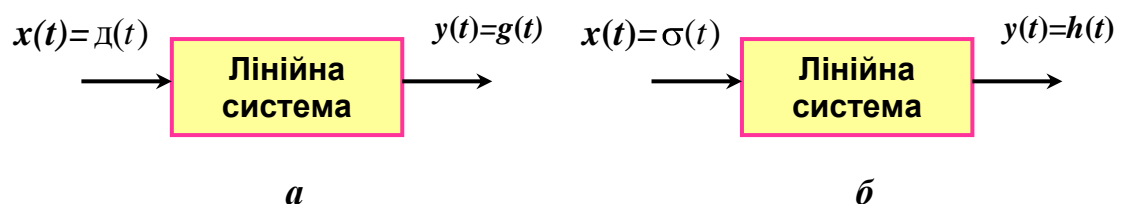


Рисунок 7.1 - До визначення імпульсної (а) та перехідної (б) характеристик.

Для систем, що фізично реалізуються, часові характеристики задовольняють такі співвідношення:

$$\begin{cases} g(t) = 0, & t < 0; \\ h(t) = 0, & t < 0. \end{cases}$$

Вважається, що лінійна система є стійкою, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)| d\lambda < \infty. \quad (7.1)$$

З фізичного погляду співвідношення (7.1) означає, що у стійкій системі власні коливання з часом зменшуються до нуля або не перевищують деякого рівня.

Будемовважати, що на вході лінійної інваріантної в часі (ЛІВ) системи діє випадковий процес $X(t)$ з математичним очікуванням m_X , середнім квадратом $\overline{X^2}$ (дисперсією σ_X^2) та функцією автокореляції

$K_X(\tau)$. Властивості ЛІВ системи подамо її імпульсною $g(t)$ або перехідними $h(t)$ характеристиками, якіє детермінованими (невипадковою) функцією.

Тоді завдання кореляційного аналізу тоді полягає у визначенні відповідних статистичних характеристик реакції $Y(t)$: математичного очікування m_Y , середнього квадрату $\overline{Y^2}$ (дисперсії σ_Y^2), автокореляційної $K_Y(\tau)$ [$B_Y(\tau)$] та взаємно кореляційних $K_{XY}(\tau)$, $K_{YX}(\tau)$ [$B_{XY}(\tau)$, $B_{YX}(\tau)$] функцій.

Якщо $x(t)$ – певна реалізація випадкового процесу $X(t)$, то відповідна реалізація $y(t)$ випадкової реакції $Y(t)$ може бути визначена на основі однієї з відомих форм інтеграла Дюамеля (згортки).

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Статистичний підхід до визначення властивостей реакції лінійної системи під час дії на неї випадкового збудження є більш ефективним за ймовірнісний.



Слід запам'ятати:

1. Суть кореляційного аналізу перетворень випадкових процесів лінійними системами.

2. Умову стійкості лінійної системи:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)| d\lambda < \infty.$$



Треба вміти:

1. Формулювати завдання кореляційного аналізу перетворень лінійними системами стаціонарних випадкових процесів.

7.2 Математичне очікування та середній квадрат реакції

Математичне очікування реакції. За нульових початкових умов відповідно до однієї з модифікацій методу інтеграла Дюамеля (згортки) нестационарна реакція ЛІВ системи на випадкову дію

7.2 Математичне очікування та середній квадрат реакції

$$Y(t) = \int_0^t X(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda. \quad (7.2)$$

Якщо реакція є стаціонарним випадковим процесом, тоді

$$Y(t) = \int_0^\infty X(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda. \quad (7.3)$$

Математичне очікування реакції обчислимо, здійснивши операцію усереднення обох частин виразу (7.2) чи (7.3):

$$m_Y(t) = \langle Y(t) \rangle = \left\langle \int_0^t X(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right\rangle; \quad (7.4)$$

$$m_Y = \langle Y(t) \rangle = \left\langle \int_0^\infty X(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right\rangle. \quad (7.5)$$

Внесемо символ статистичного усереднення під знак інтеграла, що завжди можливе за таких умов. Якщо $Z(t)$ – деякий випадковий процес (або деяка функція від нього), а $f(t)$ – не випадкова функція часу, то середнє статистичне

$$M_1 \left[\int_{t_1}^{t_2} Z(t)f(t)dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} M_1[Z(t)]f(t)dt$$

за умови, що

$$1) \int_{t_1}^{t_2} M_1[Z(t)]|f(t)|dt < \infty;$$

2) процес $Z(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$, в загальному випадку нескінченному, є обмеженим, тобто таким, що його миттєві значення не набувають нескінчених значень.

У випадку, що розглядається, ці умови виконуються. Дійсно, для реальних ситуацій миттєві значення процесу $X(t) = Z(t)$ не можуть набувати нескінчених значень.

Для стаціонарного діючого процесу середнє статистичне $M_1[Z(t)] = m_Z(t) = \text{const}$, тобто не залежить від часової змінної t . З

урахуванням умови стійкості системи (7.1) і того, що $f(t) = g(t)$, дістанемо

$$\int_{t_1}^{t_2} M_1[Z(t)]|f(t)|dt = m_Z \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|dt < \infty.$$

Змінивши в (7.4) та (7.5) послідовність операцій інтегрування та усереднення, отримаємо:

- для стаціонарної реакції

$$m_Y = \int_0^{\infty} \langle X(t-\lambda) \rangle g(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} m_X g(\lambda) d\lambda = m_X \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda; \quad (7.6)$$

- для нестаціонарної реакції

$$m_Y(t) = m_X \int_0^t g(\lambda) d\lambda = m_X h(t). \quad (7.7)$$

✦ **Середнє статистичне значення вхідного випадкового процесу під час перетворення ЛІВ системою змінюється прямо пропорційно площі під графіком імпульсної характеристики системи у разі, якщо дія є стаціонарною, та перехідній характеристиці системи за нестаціонарної дії.**

Як відомо із теорії лінійних систем площа, обмежена імпульсною характеристикою в межах $[0, \infty]$, дає кінцеве значення перехідної характеристики. Перехідна характеристика є реакцією лінійної системи за нульових початкових умов на комутацію постійного процесу одиничної амплітуди, а її кінцеве значення

$$h_{\text{кін}} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\lambda) d\lambda$$

визначає коефіцієнт передачі постійної складової дії в усталеному постійному режимі. Тоді, відповідно до (7.6) дійдемо таких висновків:

✦ **постійна складова m_Y стаціонарного вхідного процесу $Y(t)$ ЛІВ, як реакції на стаціонарний процес $X(t)$, дорівнює**

7.2 Математичне очікування та середній квадрат реакції

добуткові постійної складової m_X дії на коефіцієнт передачі системи в усталеному постійному режимі;

- ✦ **математичне очікування реакції на виході ЛІВ системи дорівнює нулю за нульового значення середнього статистичного дії $X(t)$ або якщо система придрушує постійну складову вхідного процесу.**

► **Приклад.** Математичне очікування випадкової реакції ЛІВ RL-кола, зображеного на рис. 7.2, а на дію гармонічного процесу, середньостатистичне значення якого дорівнює нулю, також набуває нульового значення незалежно від того чи є реакція стаціонарною, чи ні. Це безпосередньо впливає з формул (7.6) та (7.7).

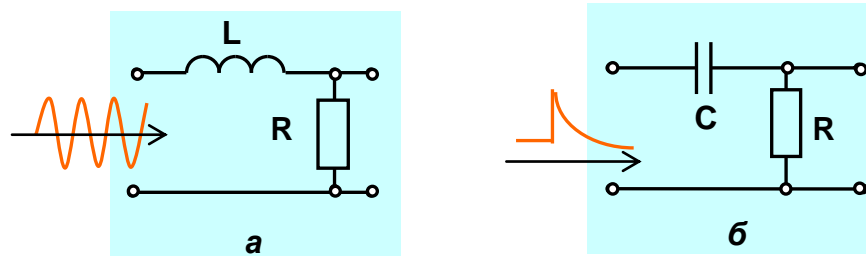


Рисунок 7.2 - Приклади лінійних систем із нульовим математичним очікуванням стаціонарної реакції.

► **Приклад.** Стаціонарна випадкова напруга на резистивному елементі в ЛІВ системі, зображеної на рис. 7.2, б, характеризується нульовим математичним очікуванням навіть за умови, що середньостатистичне значення стаціонарної дії, відмінне від нуля. Підтвердженням цього слугують такі міркування. При $t \rightarrow \infty$ система переходить в постійний режим. Ємнісний елемент не пропускає постійний струм, що спричинює на резистивному елементі нульову напругу.

Перехідна характеристика системи $h(t) = e^{-t/RC} \sigma(t)$, а імпульсна, як похідна від перехідної, - $g(t) = \delta(t) - (1/RC)e^{-t/RC} \sigma(t)$. Кінцеве значення перехідної характеристики дорівнює нулю. Відповідно до (7.6) математичне очікування стаціонарної реакції набуває нульового значення.

Згідно з (7.7) середнє статистичне значення нестационарної реакції $m_U(t) = m_X h(t) = m_X e^{-t/RC} \sigma(t)$.



► **Приклад.** Імпульсна характеристика ЛІВ системи $g(t) = e^{-3t} \sigma(t)$.

На вході системи діє адитивна суміш білого шуму $N(t)$ з нульовим математичним очікуванням та постійної складової $A_0 = 2$ В. Обчислити математичне очікування стаціонарного випадкового процесу на виході такої системи.

Згідно з принципом суперпозиції реакція системи $Y(t)$ складається з суми двох складових $Y_N(t)$ та $Y_A(t)$, де $Y_N(t)$ – реакція системи на дію білого шуму $N(t)$; $Y_A(t)$ – реакція на дію постійної складової.

За властивостями математичне очікування процесу $Y(t)$ є сумою математичних очікувань його складових: $m_Y = m_{Y_N} + m_{Y_A}$. Оскільки білий шум характеризується нульовим математичним очікуванням $m_N(t) = 0$, то

$$m_{Y_N} = m_N \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda = 0.$$

Постійній складовій A_0 в реакції відповідає складова $Y_A(t)$, математичне очікування якої

$$m_{Y_A} = m_N \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda = 2 \int_0^{\infty} e^{-3t} dt = -\frac{2}{3} e^{-3t} \Big|_0^{\infty} = 2/3.$$

Остаточно, $m_Y = 2/3$.



Середній квадрат реакції. Для визначення середнього квадрата (середньої потужності) $\overline{Y^2(t)}$ реакції потрібно обчислити математичне очікування добутку двох інтегралів (7.2) чи (7.3) та ввести дві змінні інтегрування.

Тоді у разі нестационарної реакції

$$\begin{aligned} M_1[Y^2(t)] &= \overline{Y^2} = M_1[Y(t)Y(t)] = M_1\left[\int_0^t X(t-\lambda_1)g(\lambda_1)d\lambda_1 \int_0^t X(t-\lambda_2)g(\lambda_2)d\lambda_2\right] = \\ &= \int_0^t M_1[X(t-\lambda_1)X(t-\lambda_2)]g(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_1 \int_0^t d\lambda_2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

7.2 Математичне очікування та середній квадрат реакції

Середнє статистичне добутку $X(t - \lambda_1)X(t - \lambda_2) = X(t')X(t' - \lambda_2 + \lambda_1)$ є автокореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ з відповідним аргументом:

$$M_1[X(t')X(t' - \lambda_2 + \lambda_1)] = K_X(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Тоді згідно з (7.8)

$$\overline{Y^2(t)} = \int_0^t K_X(\lambda_1 - \lambda_2)g(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_2 \int_0^t d\lambda_1 = \int_0^t K_X(\lambda_1 - \lambda_2) \left[\int_0^t g(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_1 \right] d\lambda_2.$$

Введемо нову змінну $\theta = \lambda_2 - \lambda_1$, тоді $d\theta = d\lambda_2$, а $\lambda_2 = \theta + \lambda_1$, за умови, що λ_1 зафіксовано. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \overline{Y^2(t)} &= \int_0^t K_X(-\theta) \left(\int_0^t g(\lambda_1)g(\theta + \lambda_1)d\lambda_1 \right) d\theta = \int_0^t K_X(\theta) K_d(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^t K_X(\theta) \left[\int_0^t g(\lambda_2)g(\lambda_2 + \theta)d\lambda_2 \right] d\theta, \end{aligned} \quad (7.9)$$

де враховано властивість парної симетрії АКФ функції: $K_X(-\theta) = K_X(\theta)$.

Інтеграл

$$K_g(\theta) = \int_{-\infty}^t g(\lambda)g(\lambda + \theta)d\lambda \quad (7.10)$$

називають **кореляційним інтегралом** або **автокореляційною функцією імпульсної характеристики ЛІВ системи** $g(t)$, як детермінованого процесу.

► **Приклад.** На конденсатор ємності C діє флуктуаційний струм $I(t)$ як стаціонарний процес на зразок білого шуму з автокореляційною функцією $K_X(\tau) = B_X(\tau) = N_0\delta(\tau)/2$. Визначити дисперсію випадкової напруги $U(t)$ на конденсаторі.

За властивостями дисперсія $\sigma_U^2(t) = \overline{U^2(t)} - m_U^2$. Математичне очікування випадкової вихідної напруги набуває нульового значення, оскільки

середнє статистичне значення білого шуму дорівнює нулю. Отже, дисперсія напруги збігається з середнім квадратом.

Напруга на конденсаторі з використанням його лінійної моделі пропорційна інтегралу струму, що протікає через нього. Тоді імпульсна характеристика такої системи

$$g(t) = U(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \delta(\lambda) d\lambda = \sigma(t) / C.$$

Відповідно до (7.10) та з урахуванням (7.9) кореляційний інтеграл

$$K_U(\theta) = \int_0^t \frac{1}{C} \sigma(\lambda) \frac{1}{C} \sigma(\lambda + \theta) d\lambda = \frac{1}{C^2} \int_0^t d\lambda = \frac{1}{C^2} t.$$

Під час обчислення інтегралу враховано, що добуток двох одиничних ступінчатих функцій із вказаними аргументами, відмінний від нуля і дорівнює одиниці тільки на інтервалі інтегрування $[0, t]$.

Згідно з (7.9) середній квадрат випадкової напруги

$$\overline{U^2(t)} = \int_0^t \frac{N_0}{2} \delta(\theta) \frac{1}{C^2} t d\theta = \frac{N_0}{2C^2} t \Big|_{\theta=0},$$

де враховано стробувальну властивість дельта-функції. У разі, якщо $\theta = 0$, то $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, тоді $t_2 = t_1 = t$.

Остаточно дисперсія випадкової напруги на конденсаторі

$$\sigma_U^2(t) = \overline{U^2(t)} = \frac{N_0}{2C^2} t.$$

Залежність дисперсії від часової змінної t вказує на нестационарність випадкової напруги на конденсаторі, що узгоджується з раніше отриманим висновком: *результатом інтегрування стаціонарного процесу є нестационарний процес.*



Цей приклад вказує на можливість спрощення розрахунків, якщо кореляційна функція діючого процесу є дельтоподібною, наприклад, коли вхідна дія є білим шумом. Тоді результат фактично визначається кореляційним інтегралом, а точніше, імпульсною характеристикою системи, а отже її властивостями.

7.2 Математичне очікування та середній квадрат реакції

Дійсно, кореляційна характеристика білого шуму $K_X(\tau) = B_X(\tau) = N_0\delta(\tau)/2$. Відповідно до (7.9) середній квадрат реакції ЛІВ системи

$$\overline{Y^2}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_X(\theta) K_g(\theta) d\theta = \int_0^{t_2} \frac{N_0}{2} \delta(\theta) K_g(\theta) d\theta = \frac{N_0}{2} \delta(\theta) K_g(\theta) \Big|_{\theta=0}.$$

Якщо $\theta = 0$, то $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, а $t_2 = t_1 = t$. Тоді

$$K_g(\theta) \Big|_{\theta=0} = \int_0^{t_2} g(\lambda) g(\lambda + 0) d\lambda = \int_0^{t_2} g^2(\lambda) d\lambda.$$

Остаточно,

$$\overline{Y_N^2} = \frac{N_0}{2} \int_0^{\infty} g^2(\lambda) d\lambda = \sigma_{YN}^2. \quad (7.11)$$

✦ **Середній квадрат реакції ЛІВ системи (середня потужність реакції) на дію білого шуму прямо пропорційний площі, обмеженій графіком квадрата її імпульсної характеристики та відповідним відрізком осі абсцис.**

Для стаціонарної реакції у всіх наведених співвідношеннях для нестационарної реакції слід замість верхньої межі t при інтегруванні брати ∞ .

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Математичне очікування реакції на виході ЛІВ системи дорівнює нулю за нульового значення середнього статистичного дії або якщо система придушує постійну складову вхідного процесу.

2. У разі, якщо кореляційна

1. Визначення понять: кореляційний інтеграл.

2. Середнє статистичне значення вхідного випадкового процесу під час перетворення ЛІВ системою змінюється прямо пропорційно інтегралу від імпульсної

характеристики системи у разі,

функція діючого процесу є дельтоподібною середній квадрат реакції системи її імпульсною характеристикою.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: кореляційний інтеграл.
2. Записати формули для визначення кінцевого значення перехідної характеристики, математичного очікування і середнього квадрата стаціонарної та нестаціонарної реакцій, кореляційного інтегралу.
3. Розв'язувати задачі на визначення математичного очікування і середнього квадрата стаціонарної та нестаціонарної реакцій лінійних систем на випадкову стаціонарну дію.

якщо дія є стаціонарною, та перехідній характеристиці системи за нестаціонарної дії:

2. Формули:

$$h_{\text{кін}} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\lambda) d\lambda \quad -$$

кінцеве значення перехідної характеристики;

$$m_Y = m_X \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda \quad - \text{математичне}$$

очікування стаціонарної реакції;

$$m_Y(t) = m_X \int_0^t g(\lambda) d\lambda = m_X h(t) \quad -$$

математичне очікування нестаціонарної реакції;

$$K_d(\theta) = \int_{-\infty}^t g(\lambda) g(\lambda + \theta) d\lambda \quad -$$

кореляційний інтеграл.

7.3 Автокореляційна функція реакції

Стаціонарної реакція. За визначенням для нецентрованого випадкового стаціонарного процесу $Y(t)$ автокореляційна функція $K_Y(\tau) = \overline{Y(t)Y(t+\tau)}$ у разі, якщо $\tau = 0$ її значення $K_Y(0) = \overline{Y^2}$ визначає середній квадрат стаціонарного процесу. З урахуванням стаціонарності та (7.9)

$$\overline{Y^2} = K_Y(0) = \int_0^{\infty} K_X(-\theta)K_g(\tau)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(-\theta)K_g(\theta)d\theta.$$

Тоді, очевидно, для будь-якого τ

$$K_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau - (\lambda_2 - \lambda_1)) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda + \theta)d\lambda \right] d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau - \theta)K_g(\theta)d\theta. \quad (7.12)$$

♦ **АКФ стаціонарної реакції ЛІВ системи є згорткою в нескінченних межах АКФ діючого стаціонарного процесу та кореляційної функції імпульсної характеристики системи.**

► **Приклад.** Припустімо, що на вході ЛІВ системи діє випадковий процесна зразок білого шуму з $K_X(\tau) = N_0\delta(\tau)/2$. Згідно з (7.12)

$$K_{YN}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \theta)K_g(\theta)d\theta = \frac{N_0}{2} K_g(\theta) \Big|_{\theta=\tau} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda + \tau)d\lambda. \quad (7.13)$$

♦ Таким чином, у разі дії на ЛІВ стійку систему білого шуму кореляційна функція стаціонарного відгуку пропорційна кореляційній функції її імпульсної характеристики (кореляційному інтегралу).



► **Приклад.** На вході системи, зображеної на рис.5.4, діє флуктуаційна напруга $X(t)$ у вигляді білого шуму з нульовим середнім та функцією кореляції $K_X(\tau) = N_0\delta(\tau)/2$. Знайти кореляційну функцію вихідної напруги $Y(t)$ в стаціонарному режимі та інтервал кореляції.

Імпульсна характеристика такої системи $g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \sigma(t)$, де $\alpha = RC$. Тоді, відповідно до (7.13) кореляційна функція реакції

$$\begin{aligned}
 K_{Y\delta}(\tau) &= \frac{N_0}{2} \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha\lambda} \alpha e^{-\alpha(\lambda+\tau)} d\lambda = \frac{N_0\alpha^2}{2} e^{-2\lambda\alpha} e^{-\alpha\tau} d\lambda = \frac{N_0\alpha^2}{2} e^{-\alpha\tau} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha\lambda} d\lambda = \\
 &= -\frac{N_0\alpha^2}{4\alpha} e^{-2\lambda\alpha} e^{-\alpha\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{N_0\alpha^2}{4\alpha} e^{-\alpha\tau} = \frac{N_0\alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|} = \frac{N_0}{2} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|}.
 \end{aligned}$$

У підсумку враховано, що $-\infty < \tau < \infty$, а також те, що кореляційна функція є парною: $K(\tau) = K(-\tau)$.

Природно, що значення функції кореляції в нулі $K_Y(\tau)|_{\tau=0} = \frac{N_0}{2} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|}|_{\tau=0}$ є середнім квадратом реакції, яке збігається у цьому разі з дисперсією $\overline{Y^2} = \sigma_Y^2 = N_0\alpha/4$.

Інтервал кореляції

$$\tau_k = \frac{1}{K_Y(0)} \int_0^{\infty} K(\lambda) d\lambda = \frac{1}{K_Y(0)} \int_0^{\infty} \frac{N_0\alpha}{2} e^{-\alpha\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\lambda} d\lambda = \frac{1}{\alpha} = \tau_c, \quad (7.14)$$

Система, зображена на рис. 3.4 є частковим випадком ЛІВ системи з інтегрувальними властивостями.

✦ Отже, у разі збудження ЛІВ інтегруючої системи першого порядку білим шумом у стаціонарному режимі її вихідний процес характеризується експоненціальною автокореляційною функцією та інтервалом кореляції, що має порядок постійної часу системи.

■

Як відомо, білий шум визначається нульовим інтервалом кореляції, а отже, некорельованістю його миттєвих значень у найближчих перерізах, що можливо тільки за дуже швидкої зміни в часі його реалізації.

Інтервал кореляції реакції інтегруючої системи не дорівнює нулю, а тому вихідний процес розвивається більш повільно. Швидкість його розвитку в часі визначається тільки параметрами системи, зокрема, постійною часу.

Нестаціонарна реакція. За означенням та з урахуванням (7.2) автокореляційна характеристика нестаціонарної реакції

7.3 Автокореляційна функція реакції

$$K_Y(t_k, t_{k+1}) = \langle Y(t_k)Y(t_{k+1}) \rangle = \int_{-\infty}^{t_k} \langle X(t_k - \lambda_1)g(\lambda_1)d\lambda_1 \int_{-\infty}^{t_{k+1}} X(t_{k+1} - \lambda_2)g(\lambda_2)d\lambda_2 \rangle.$$

Внесемо операцію усереднення під знак інтегралу:

$$\begin{aligned} K_Y(t_k, t_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{t_{k+1}} \int_{-\infty}^{t_k} \langle X(t_k - \lambda_1)X(t_{k+1} - \lambda_2) \rangle g(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{t_{k+1}} K_X(t_{k+1} - t_k - (\lambda_2 - \lambda_1)) \left[\int_{-\infty}^{t_k} g(\lambda_1)g(\lambda_2)d\lambda_1 \right] d\lambda_2. \end{aligned}$$

Зафіксуємо λ_1 та введемо нову змінну $\lambda_2 - \lambda_1 = \theta$. Тоді $\lambda_2 = \lambda_1 + \theta$, $d\lambda_2 = d\theta$, а

$$\begin{aligned} K_Y(t_k, t_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{t_{k+1}} K_X(t_{k+1} - t_k - \theta) \left[\int_{-\infty}^{t_k} g(\lambda_1)g(\lambda_1 + \theta)d\lambda_1 \right] d\theta = \\ &= \int_{-\infty}^{t_k} K_X(t_{k+1} - t_k - \theta) K_g(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (7.15)$$

де кореляційний інтеграл тепер

$$K_g(\theta) = \int_{-\infty}^{t_k} g(\lambda_1)g(\lambda_1 + \theta)d\lambda_1. \quad (7.16)$$

► **Приклад.** Знайти кореляційну функцію реакції інтегруючої системи з імпульсною характеристикою $g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \sigma(t)$ у разі дії на неї процесу $X(t)$, кореляційна функція якого $K_X(\tau) = N_0 \delta(\tau) / 2$, вважаючи реакцію нестационарним випадковим процесом.

Згідно з (7.16) кореляційний інтеграл

$$\begin{aligned} K_g(\theta) &= \int_{-\infty}^{t_k} g(\lambda_1)g(\lambda_1 + \theta)d\lambda_1 = \\ &= \int_0^{t_k} \alpha e^{-\alpha \lambda_1} \alpha e^{-\alpha(\lambda_1 + \theta)} d\lambda_1 = \alpha^2 e^{-\alpha \theta} \int_0^{t_k} e^{-2\alpha \lambda_1} d\lambda_1 = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} \alpha^2 e^{-\alpha\theta} e^{-2\alpha\lambda_1} \Big|_{0}^{t_k} = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\theta} (1 - e^{-2\alpha t_k}).$$

Відповідно до (7.15) та з урахуванням стробувальної властивості δ -імпульсу кореляційна функція реакції

$$\begin{aligned} K_Y(t_k, t_{k+1}) &= \int_{-\infty}^{t_{k+1}} \frac{N_0}{2} \delta(t_{k+1} - t_k - \theta) \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\theta} (1 - e^{-2\alpha t_k}) d\theta \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{\alpha}{2} (1 - e^{-2\alpha t_k}) e^{-\alpha\theta} \Big|_{\theta=t_{k+1}-t_k}. \end{aligned}$$

Остаточно, з урахуванням властивості парної симетрії кореляційної функції

$$K_Y(t_k, t_{k+1}) = K_Y(t_k, \tau) = \frac{N_0 \alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha t_k}),$$

де $\tau = t_{k+1} - t_k$.

Значення кореляційної функції для $\tau = 0$ визначає середню потужність нестационарної реакції:

$$P_{\text{cp}} = \overline{Y^2(t)} = \frac{N_0 \alpha}{4} (1 - e^{-2\alpha t_k}); \quad \alpha > 0, t_k \geq 0.$$



Зазначимо, що в теорії систем α – коефіцієнт загасання, наприклад, інтегруючого RC – кола першого порядку (див. рис. 5.4) з імпульсною характеристикою $g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \sigma(t)$, $1/\alpha = \tau_c$ – постійна часу системи. Крім того, $\alpha = \omega_{\text{в.гр}} = 1/\tau_c$ визначає ширину смуги пропускання $\Delta\omega_{\text{гр}}$ системи першого порядку на рівні половинної потужності: $\Delta\omega_{\text{гр}} = \alpha$.

Тоді, середній квадрат стаціонарної реакції інтегруючої системи першого порядку на дію білого шуму

$$\overline{Y_N^2} = \frac{N_0}{2} \frac{\alpha}{2} = \frac{N_0}{4} \Delta\omega_{\text{гр}} = \frac{N_0}{2} \pi \Delta f_{\text{гр}}.$$

7.3 Автокореляційна функція реакції

✦ **Значення середнього квадрату (середньої потужності) реакції інтегруючої системи зростає пропорційно збільшенню її смуги пропускання .**

Подібна ситуація є характерною у разі, коли ширина спектра впадкового процесу на вході ЛІВ системи значно перевищує її смугу пропускання.

► **Приклад.** На вході інтегруючої системи з імпульсною характеристикою $g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \sigma(t)$ діє випадковий процес, кореляційна функція якого $K_X(\tau) = \beta N_0 / 4 e^{-\beta|\tau|}$. Обчислити кореляційну функцію $K_Y(\tau)$ стаціонарної реакції.

За основу беремо формулу (7.12), а також отриманий раніше результат для кореляційного інтегралу: $K_g(\theta) = (\alpha/2)e^{-\alpha|\theta|}$.

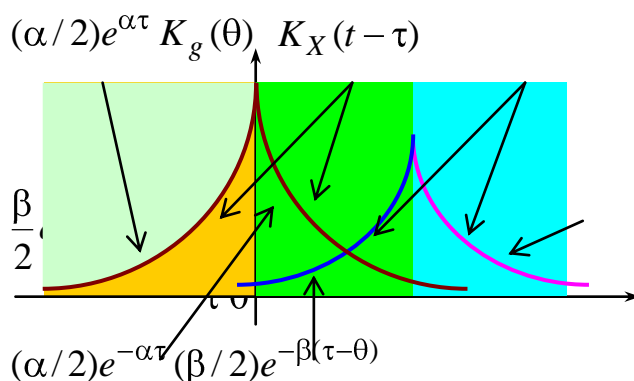


Рисунок 7.3 - До визначення меж інтегрування.

Виходячи з парності $K_Y(\tau)$, розглянемо тільки випадок, коли $\tau > 0$. Визначення меж інтегрування у цьому разі ілюструється рис. 7.3.

Пам'ятаємо, що функція $K_X(\tau - \theta)$ - є дзеркальним відображенням відносно осі ординат функції $K_X(\theta - \tau)$.

Тоді шукана кореляційна функція

$$\begin{aligned}
 K_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau - \theta) K_g(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^0 \frac{\beta N_0}{4} e^{-\beta(\tau - \theta)} \frac{\alpha}{2} e^{\alpha\theta} d\theta + \int_0^{\tau} \frac{\beta N_0}{4} e^{-\beta(\tau - \theta)} e^{-\alpha\theta} \frac{\alpha}{2} d\theta + \\
 &+ \int_{\tau}^{\infty} \frac{\beta N_0}{4} e^{\beta(\tau - \theta)} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha\theta} d\theta = \frac{\alpha\beta N_0}{8(\alpha + \beta)} e^{-\beta\tau} e^{\theta(\alpha + \beta)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{\alpha\beta N_0}{8(\alpha - \beta)} e^{-\beta\tau} e^{-\theta(\alpha - \beta)} \Big|_0^{\tau} - \\
 &- \frac{\alpha\beta N_0}{8(\alpha + \beta)} e^{\beta\tau} e^{-\theta(\alpha + \beta)} \Big|_{\tau}^{\infty}.
 \end{aligned}$$

Після підстановки меж інтегрування та спрощень отримаємо:

$$K_Y(\tau) = \frac{\alpha^2 \beta N_0}{4(\alpha^2 - \beta^2)} \left(e^{-\beta\tau} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \right), \quad (\tau \geq 0).$$

Враховуючи властивість парної симетрії автокореляційної функції, остаточно дістанемо:

$$K_Y(\tau) = \frac{\alpha^2 \beta N_0}{4(\alpha^2 - \beta^2)} \left(e^{-\beta|\tau|} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \right). \quad (7.17)$$

У разі, якщо в (7.17) β спрямувати до ∞ , то

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} K_Y(\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} = \frac{N_0}{2} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|},$$

що відповідає кореляційній функції реакції інтегруючої системи з тією самою імпульсною характеристикою у разі дії на неї білого шуму.

Проте можна показати, що параметр β визначає ширину спектра діючого сигналу: $\beta \sim \Delta\omega_{\text{эф}}$. Припустімо, що ефективна ширина спектра діючого процесу значно перевищує смугу пропускання лінійної системи: $\Delta\omega_{\text{эф}} \sim \beta \gg \alpha$. Подамо (7.17) у такому вигляді:

$$K_Y(\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} \frac{1}{1 - \alpha^2/\beta^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{-(\beta-\alpha)|\tau|} \right).$$

Очевидно, що при $\beta \gg \alpha$ останні два співмножника близькі до одиниці і тоді

$$K_Y(\tau) \approx K_{Y\delta}(\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} = \frac{N_0}{2} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|} = \frac{N_0}{2} K_g(\theta).$$

♦ Таким чином, *якщо ширина спектра діючого процесу на вході ЛІВ системи значно більше за її смугу пропускання, допустимою є апроксимація дії процесом на зразок "білий шум"*.

У цьому разі значно зменшується трудоемність обчислень при збереженні допустимої точності. Так, наприклад, при застосуванні підсилювача з великим коефіцієнтом підсилення в смузі частот 10 МГц найбільш інтенсивною складовою його шумів є та, що зумовлена *дробовим ефектом (дробовий шум)*, ширина спектральної щільності якої досягає 1000 МГц.

7.3 Автокореляційна функція реакції

Відношення α/β при цьому складає 0,01, а похибка від апроксимації дробового шуму білим шумом не перевищує 1%.



Попередній приклад можна розглядати як задачу кореляційного аналізу ЛІВ системи, що складається з каскадно з'єднаних і узгоджених однотипних інтегруючих ланок у разі збудження системи білим шумом (рис. 7.4).

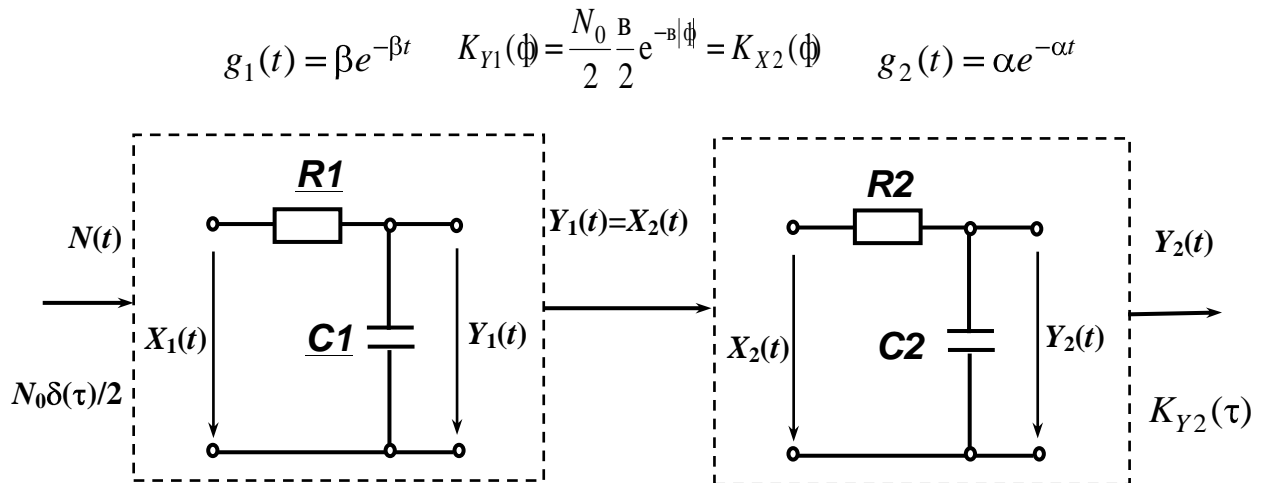


Рисунок 7.4 - Каскадне з'єднання двох однотипних інтегруючих систем.

На рис. 7.5 зображені графіки нормованих кореляційних функцій процесу на виході першої та другої інтегруючих систем для різних значень β/α . Цікаво відмітити не тільки зростання інтервалу кореляції, зумовленого введенням другої інерційної ланки, а також зміну характеру (виду) функції кореляції системи в околі точки $\tau = 0$.

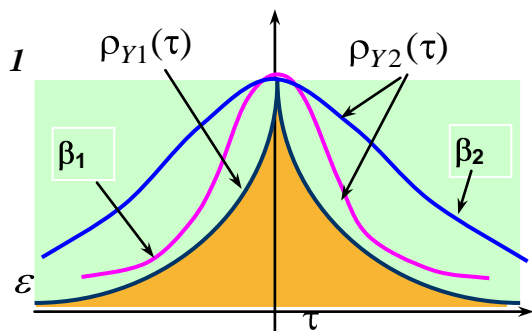


Рисунок 7.5 – Кореляційні характеристики каскадної системи.

Якщо на виході першої ланки процес $Y_1(t)$ не є диференційованим ($K''_{Y_1}(\tau)|_{\tau=0} = \infty$), то процес $Y_2(t)$ на виході всієї системи є диференційованим і має автокореляційну функцію $K_{Y_2}(\tau)$, для якої друга похідна ($K''_{Y_2}(\tau)|_{\tau=0} \neq \infty$). З фізичного погляду це вказує на більшу корельованість миттєвих значень процесу $Y_2(t)$, меншу динамічність його реалізацій.

ПІДСУМКИ**Необхідно зрозуміти:**

1. У разі збудження ЛІВ інтегруючої системи білим шумом у стаціонарному режимі динаміка вихідного процесу визначається тільки параметрами системи, зокрема, постійною часу.

2. Якщо ширина спектра діючого процесу на вході ЛІВ системи значно більше за її смугу пропускання, допустимою є апроксимація дії процесом на зразок білий шум.

**Слід запам'ятати:**

1. АКФ стаціонарної реакції ЛІВ системи є згорткою в нескінченних межах АКФ діючого стаціонарного процесу та кореляційної функції імпульсної характеристики системи.

2. Значення середнього квадрата (середньої потужності) реакції інтегруючої системи на дію білого шуму зростає пропорційно збільшенню її смуги пропускання.

**Треба вміти:**

1. Визначати автокореляційну функцію стаціонарної та нестационарної реакцій лінійної системи на дію білого шуму та процеси, близькі за своїми властивостями до нього.

7.4 Кореляція вхідних та вихідних процесів

Зрозуміло, що реакція $Y(t)$ ЛІВ системи та дія $X(t)$ на неї є взаємозалежними, а отже статично залежними і корельованими. Природа та характер такого статистичного зв'язку відображається, як відомо, взаємними кореляційними функціями. Зокрема, для нецентрованих процесів функція $K_{XY}(\cdot)$ визначає статистичний зв'язок між процесом на вході та реакцією на виході; $K_{YX}(\cdot)$ - статистичний зв'язок між процесом $Y(t)$ на виході ЛІВ системи та $X(t)$ на її вході.

Відомо, що за властивостями $K_{XY}(\tau) \neq K_{YX}(\tau)$. Водночас, справджується властивість дзеркальної симетрії: $K_{XY}(\tau) = K_{YX}(-\tau)$.

7.4 Кореляція вхідних та вихідних процесів

Стаціонарний режим системи. За визначенням взаємна кореляційна функція $K_{XY}(\tau) = \langle X(t)Y(t+\tau) \rangle$. Враховуючи те, що для стаціонарного режиму

$$Y(t) = \int_0^{\infty} X(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda, \quad Y(t+\tau) = \int_0^{\infty} X(t+\tau-\lambda)g(\lambda)d\lambda,$$

дістанемо:

$$\begin{aligned} K_{XY}(\tau) &= \langle X(t) \int_0^{\infty} X(t+\tau-\lambda)g(\lambda)d\lambda \rangle = \langle \int_0^{\infty} X(t)X(t+\tau-\lambda)g(\lambda)d\lambda \rangle = \\ &= \int_0^{\infty} \langle X(t)X(t+\tau-\lambda) \rangle g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} K_X(\tau-\lambda)g(\lambda)d\lambda. \end{aligned}$$

Зазначимо, що спочатку $X(t)$ внесено під знак інтегралу оскільки $X(t)$ не залежить від змінної інтегрування, а потім за відомими правилами під знак інтегралу внесена і операція усереднення.

✦ Таким чином, **взаємна кореляційна функція $K_{XY}(\tau)$ є згортою кореляційної функції вхідного процесу $X(t)$ і імпульсної характеристики ЛІВ системи $g(t)$:**

$$K_{XY}(\tau) = K_X(\tau) * g(\tau). \quad (7.18)$$

Взаємнокореляційна функція

$$\begin{aligned} K_{YX}(\tau) &= \langle Y(t)X(t+\tau) \rangle = \int_0^{\infty} \langle X(t-\lambda)X(t+\tau) \rangle g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} K_X(\lambda+\tau)g(\lambda)d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} K_X(-\lambda-\tau)g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} K_X[(-\tau)-\lambda]g(\lambda)d\lambda = K_{XY}(-\tau), \end{aligned} \quad (7.19)$$

де враховано, що $K_X(\lambda+t) = K_X(-(\lambda+t)) = K_X(-\lambda-t)$, оскільки $K_X(\cdot)$ є функцією парною відносно аргументу.

► **Приклад.** ЛІВ система має імпульсну характеристику $g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \sigma(t)$. На вході такої системи діє білий шум $X(t)$. Знайти $K_{YX}(\tau)$ та $K_{XY}(\tau)$.

Відомо, що кореляційна функція білого шуму $K_X(\tau) = N_0\delta(\tau)/2$. Тоді взаємна кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_{XY}(\tau) &= \int_0^{\infty} K_X(\tau-\lambda)g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(t-\lambda)\alpha e^{-\alpha\lambda} d\lambda = \\ &= \frac{N_0}{2} \alpha e^{-\alpha\lambda} \Big|_{\lambda=\tau} = \frac{N_0}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} = \frac{N_0}{2} g(\tau), \quad \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Згідно з фізичною реалізованістю системи для всіх значень $\tau < 0$ функція $K_{XY}(\tau) = 0$. Отже,

$$K_{XY}(\tau) = \begin{cases} (N_0/2)g(\tau), & \tau \geq 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (7.20)$$

З урахуванням властивості дзеркальної симетрії $K_{XY}(\tau) = K_{YX}(-\tau)$

$$K_{YX}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \geq 0; \\ (N_0/2)g(-\tau), & \tau < 0. \end{cases} \quad (7.21)$$

Дійсно,

$$K_{YX}(\tau) = \int_0^{\infty} K_X(\tau+\lambda)g(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(t+\lambda)g(\lambda)d\lambda = g(\lambda) \frac{N_0}{2} \Big|_{\lambda=-\tau} = \frac{N_0}{2} g(-\tau) \quad (\tau < 0).$$

✦ Отже, у разі дії білого шуму ступінь статистичного зв'язку між стаціонарними дією $X(t)$ та реакцією $Y(t)$ ЛІВ системи визначається властивостями системи (імпульсною характеристикою).



Отриманим результатом часто користуються для експериментального визначення імпульсної характеристики чи її параметрів за кореляційною функцією. Так, наприклад, такий параметр ЛІВ системи, як тривалість імпульсної характеристики, визначає інтервал кореляції, оскільки $t_{\text{ІМП}} = 2,3/\alpha = 2,3\tau$, де τ – постійна часу системи. Прилади для визначення кореляційних функцій називають **корелометрами**.

Режим нестаціонарної реакції. Згідно з інтегралом згортки та (7.2) взаємна кореляційна функція

7.4 Кореляція вхідних та вихідних процесів

$$\begin{aligned}
 K_{XY}(t_k, t_{k+1}) &= \langle X(t_k)Y(t_{k+1}) \rangle = \langle X(t_k) \int_0^{t_{k+1}} X(t_{k+1} - \lambda)g(\lambda)d\lambda \rangle = \\
 &= \int_0^{t_{k+1}} \langle X(t_k)X(t_{k+1} - \lambda) \rangle g(\lambda)d\lambda = \int_0^{t_{k+1}} K_X(t_k, t_{k+1} - \lambda)g(\lambda)d\lambda = \\
 &= \int_0^{t_{k+1}} K_X(t_k, t_{k+1})g(t_{k+1} - \lambda)d\lambda. \tag{7.22}
 \end{aligned}$$

Останні співвідношення можна записати і через величину τ , що визначає відстань між перерізами t_k і t_{k+1} :

$$\begin{aligned}
 K_{XY}(t_k, \tau) &= \langle X(t_k)Y(t_k + \tau) \rangle = \langle X(t_k) \int_0^{t_k + \tau} X(t_k + \tau - \lambda)g(\lambda)d\lambda \rangle = \\
 &= \int_0^{t_k + \tau} \langle X(t_k)X(t_k + \tau - \lambda) \rangle g(\lambda)d\lambda = \int_0^{t_k + \tau} K_X(t_k, t_k + \tau - \lambda)g(\lambda)d\lambda = \\
 &= \int_0^{t_{k+1}} K_X(t_k, t_{k+1})g(t_{k+1} - \lambda)d\lambda. \tag{7.23}
 \end{aligned}$$

► **Приклад.** На вході ідеального інтегратора діє стаціонарний білий шум $N(t)$ з кореляційною функцією $K_N(\tau) = N_0\delta(\tau)/2$. Визначити взаємну кореляційну функцію вхідного $N(t)$ та вихідного $Y(t)$ процесів.

Імпульсна характеристика ідеального інтегратора

$$g(t) = \int_0^t \delta(\lambda)d\lambda = \sigma(t).$$

Оскільки реакція є нестационарною, то відповідно до (7.23) дістанемо шукану взаємну кореляційну функцію:

$$K_{NY}(t_k, \Phi) = \int_0^{t_{k+1}} K_X(t_k, \Phi - \lambda)g(\lambda)d\lambda = \frac{N_0}{2} \int_0^{t_{k+1}} \delta(t_k, \Phi - \lambda)\sigma(\lambda)d\lambda = \frac{N_0}{2} y(t_k, \Phi).$$



ПІДСУМКИ**Необхідно зрозуміти:**

1. у разі дії білого шуму ступінь статистичного зв'язку між стаціонарними дією $X(t)$ та реакцією $Y(t)$ ЛІВ системи визначається властивостями системи (імпульсною характеристикою).

**Треба вміти:**

1. Визначати взаємні кореляційні функції вихідних та вхідних процесів ЛІВ системи у стаціонарному та нестаціонарному режимі її роботи.

**Слід запам'ятати:**

1. Взаємна кореляційна функція $K_{XY}(\tau)$ є згорткою кореляційної функції вхідного процесу $X(t)$ і імпульсної характеристики ЛІВ системи $g(t)$ у стаціонарному режимі її функціонування.

2. Формули для визначення взаємної кореляційної функції реакції та дії ЛІВ системи:

- для стаціонарної реакції

$$K_{XY}(\tau) = \int_0^{\infty} K_X(\tau - \lambda)g(\lambda)d\lambda;$$

- для нестаціонарної реакції

$$K_{XY}(t_k, \tau) = \int_0^{t_{k+1}} K_X(t_k, t_{k+1})g(t_{k+1} - \lambda)d\lambda.$$

7.5 Постановка задачі спектрального аналізу

Під час опису лінійних систем у частотній області оперують із комплексною частотною функцією $F(j\omega)$, яка визначає їхні частотні властивості, є величиною комплексною та обчислюється як відношення комплексного миттєвого значення реакції $\dot{y}(t)$ до комплексного миттєвого значення діючого процесу $\dot{x}(t)$.

$$F(j\omega) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{Y(j\omega)e^{j\omega t}}{X(j\omega)e^{j\omega t}}, \quad (7.24)$$

де - $X(j\omega)$ та $Y(j\omega)$ – спектральні щільності комплексних амплітуд відповідно детермінованих реакції $y(t)$ та дії $x(t)$, як пряме перетворення Фур'є від них:

7.5 Постановка задачі спектрального аналізу

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (7.25)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (7.26)$$

Із теорії лінійних систем відомо, що між комплексною частотною функцією $F(j\omega)$ та імпульсною характеристикою $g(t)$ має місце взаємно-однозначна відповідність, яка також визначається інтегральним перетворенням Фур'є:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-j\omega\lambda} d\lambda; \quad (7.27)$$

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{-j\omega t} dt. \quad (7.28)$$

Випадкові процеси в частотній області з відомих причин характеризуються спектрами потужності дії $G_X(\omega)$ та реакції $G_Y(\omega)$. Зрозуміло, що визначивши спектр реакції $G_Y(\omega)$ за заданим спектром діючого на вході системи процесу $G_X(\omega)$, зможемо відповідно до теореми Вінера-Хінчина обчислити і автокореляційну функцію $K_Y(\tau)$ ($B_Y(\tau)$) реакції, а отже і інші статистичні характеристики, зокрема, середній квадрат, дисперсію та математичне очікування.

♦ Аналіз перетворень випадкових процесів ЛІВ системами у частотній області зводиться до визначення спектральних характеристик реакції за заданими частотними характеристиками системи та спектральними характеристиками діючих процесів.

Припустімо, що на вході ЛІВ системи діє випадковий стаціонарний, а значить нескінченно подовжений у часі, сигнал $X(t)$ із спектральною щільністю потужності

$$G_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |S_{XT}(\omega)|^2 \rangle}{T},$$

де $S_{XT}(\omega) = \{S_{x1}(\omega), S_{x2}(\omega), \dots, S_{xN}(\omega)\}$ - статистичний ансамбль. Елементом $S_{xk}(\omega)$ такого ансамблю є модуль спектральної щільності комплексної амплітуди відповідної реалізації $x_{kT}(t)$ випадкового процесу $X_T(t)$ обмеженої тривалості, який в точності збігається з процесом $X(t)$ на інтервалі $[-T/2, T/2]$ і дорівнює нулю за його межами.

Відповідно до спектрального методу аналізу ЛІВ систем модуль спектральної щільності окремої реалізації реакції

$$S_{yk}(\omega) = F(\omega)S_{xk}(\omega). \quad (7.29)$$

Тоді для випадкової стаціонарної реакції $Y(t)$ спектральна щільність потужності

$$G_Y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |F(\omega)S_{XT}(\omega)|^2 \rangle}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |S_{XT}(\omega)|^2 \rangle}{T} F^2(\omega) = F^2(\omega)G_X(\omega),$$

де враховано, що квадрат $F^2(\omega)$ модуля комплексної частотної функції системи не залежить від T і є величиною детермінованою.

✦ Таким чином, **спектральна щільність потужності стаціонарної реакції $G_Y(\omega)$ ЛІВ системи на випадкову стаціонарну дію визначається добутком спектральної щільності потужності дії $G_X(\omega)$ на квадрат модуля $F^2(\omega)$ комплексної частотної функції системи:**

$$G_Y(\omega) = F^2(\omega)G_X(\omega) = K_p(\omega)G_X(\omega), \quad (7.30)$$

де $K_p(\omega) = F^2(\omega)$ - **коефіцієнт передачі потужності**.

Оскільки співвідношення (7.7) є справедливим для усього частотного діапазону $[-\infty; \infty]$, то воно буде мати силу і тільки для додатних значень частоти, тобто фізичного або одностороннього спектрів:

$$G_{0Y}(\omega) = F^2(\omega)G_{0X}(\omega); \quad (7.31)$$

$$G_{0Y}(2\pi f) = F^2(2\pi f)G_{0X}(2\pi f). \quad (7.32)$$

7.5 Постановка задачі спектрального аналізу

За теоремою Вінера-Хінчина визначаємо кореляційну функцію реакції через спектральні характеристики дії та частотні характеристики системи:

$$K_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) G_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.33)$$

Відповідно до (7.33) середній квадрат реакції

$$\begin{aligned} \bar{Y}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) G_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2F^2(\omega) G_X(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F^2(\omega) G_{0X}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} F^2(2\pi f) G_{0X}(2\pi f) df. \end{aligned} \quad (7.34)$$

є результатом додавання вкладів від добутку спектра потужності складових діючого процесу та частотного коефіцієнта передачі потужності.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Аналіз перетворень випадкових процесів ЛІВ системами у частотній області зводиться до визначення спектральних характеристик реакції за заданими частотними характеристиками системи та спектральними характеристиками діючих процесів.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: комплексна частотна функція лінійної системи, коефіцієнт передачі потужності.

2. Формулювати завдання спектрального аналізу перетворень лінійними системами стаці-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: коефіцієнт передачі потужності

2. Спектральна щільність потужності стаціонарної реакції $G_Y(\omega)$ ЛІВ системи на випадкову стаціонарну дію визначається добутком спектральної щільності потужності дії $G_X(\omega)$ на квадрат модуля $F^2(\omega)$ комплексної частотної функції системи.

3. Рівність, яка встановлює взаємозв'язок між середнім квадратом стаціонарної реакції ЛІВ системи та спектром потужності дії і коефіцієнтом передачі потужності системи:

онарних випадкових процесів.

3. Записати рівність, яка встановлює взаємозв'язок між спектрами потужності стаціонарної реакції та дії ЛІВ системи.

4. Визначати АКФ та середній квадрат стаціонарної реакції ЛІВ системи за спектром потужності дії і коефіцієнтом передачі потужності.

$$\begin{aligned}\bar{Y}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega) G_X(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F^2(\omega) G_{0X}(\omega) d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} F^2(2\pi f) G_{0X}(2\pi f) df.\end{aligned}$$

7.6 Спектральний аналіз інтегруючих та диференціюючих систем

Інтегруюча система. Прикладом такої системи є класичне послідовне електричне RC - коло першого порядку з напругою на ємнісному елементі як її реакцією (див. рис.5.4). Комплексна частотна функція такого кола для зазначеної реакції та вхідної напруги

$$F(j\omega) = K_u(j\omega) = \frac{U_{\text{вих}}(j\omega)}{U_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

а коефіцієнт передачі потужності

$$K_p(\omega) = F^2(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Як відомо спектральна щільність потужності білого шуму $G_X(\omega) = N_0/2$. Тоді згідно з (7.30) спектральна щільність потужності стаціонарної реакції на білий шум

$$G_Y(\omega) = F^2(\omega) G_X(\omega) = K_p(\omega) G_X(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \frac{N_0}{2}.$$

Відповідно до (7.34) середня потужність стаціонарної реакції

7.6 Спектральний аналіз інтегруючих та диференціюючих систем

$$\begin{aligned}\bar{Y}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N_0}{2[1 + (\omega RC)^2]} d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{RC} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{N_0}{4\tau_C} = \frac{N_0\alpha}{4} = \frac{N_0}{4} \Delta\omega_{0,707},\end{aligned}$$

де τ_C - постійна часу системи, α - її коефіцієнт загасання, а $\Delta\omega_{0,707}$ - частота половинної потужності, що визначає умовну смугу пропускання системи.

Такий самий результат дістанемо за початковим значенням АКФ вказаної реакції.

Отже,

✦ **збільшення смуги пропускання інтегруючої системи веде до пропорційного підвищення потужності її вихідних процесів.**

Диференціююча система. Реакція ідеального диференціатора

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t). \quad (7.35)$$

Як відомо, результатом диференціювання стаціонарного процесу є процес стаціонарний. Тоді спектральна щільність потужності реакції

$$G_Y(\omega) = F^2(\omega) G_X(\omega).$$

Комплексна частотна функція ідеального диференціатора $F(j\omega) = j\omega$. Оскільки квадрат її модуля $F^2(\omega) = \omega^2$, то спектр реакції

$$G_Y(\omega) = \omega^2 G_X(\omega). \quad (7.36)$$

Співвідношення (7.36) встановлює зв'язок між спектрами стаціонарних реакції та дії ідеального диференціатора. Варте уваги те, що в спектрі потужності здиференційованого процесу спостерігається послаблення низькочастотних та підсилення високочастотних складових.

► **Приклад.** На вході ідеального диференціатора діє квазібілий низькочастотний шум, спектр потужності якого

$$G_X(\omega) = \begin{cases} N_0/2, & |\omega| \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0, \omega < -\omega_0. \end{cases}$$

Знайти середню потужність реакції.

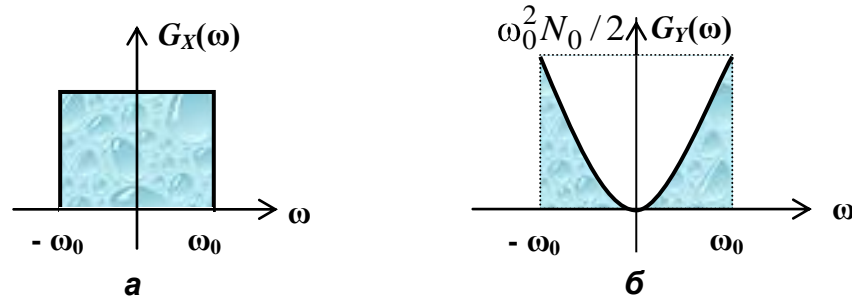


Рисунок 7.6 - Спектри квазібілого низькочастотного шуму (а) та реакції на нього ідеального диференціатора (б).

Згідно з (7.13) спектр потужності реакції

$$G_Y(\omega) = \omega^2 G_X(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega^2 N_0}{2}, & |\omega| \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0; \omega < -\omega_0. \end{cases}$$

Графіки спектрів потужності реакції та дії зображено на рис. 7.6.

Середня потужність реакції (середній квадрат та дисперсія) відповідно до (7.34) пропорційна площі, обмеженій графіком спектра потужності реакції та осями координат:

$$\begin{aligned} \overline{Y^2} = \sigma_Y^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_{0Y}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2 \frac{\omega^2 N_0}{2} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} \omega^2 N_0 d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0^3}{3}. \end{aligned}$$

Оскільки середній квадрат (дисперсія) реакції є обмеженим за значенням, то сама реакція є процесом **диференційованим**.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Збільшення смуги пропускання інтегруючої системи веде до пропорційного підвищення потужності її вихідних процесів.

2. Перетворення на зразок «диференціювання» послаблює низькочастотні складові в спектрі дії та підсилює високочастотні.



Слід запам'ятати:

1. Рівність, яка встановлює зв'язок між спектрами потужності стаціонарних процесів на виході та вході ідеального диференціатора:

$$G_Y(\omega) = \omega^2 G_X(\omega).$$



Треба вміти:

1. Записати рівність, яка встановлює зв'язок між спектрами потужності стаціонарних процесів на виході та вході ідеального диференціатора.

2. Розв'язувати задачі на визначення спектрів потужності стаціонарних вихідних процесів інтегруючих та диференціюючих систем у разі дії на них стаціонарних випадкових процесів.

7.7 Шумова смуга пропускання лінійної системи

Під час інженерних розрахунків лінійних систем, що знаходяться під дією широкосмугового випадкового процесу, оперують поняттям **шумової смуги системи** або **еквівалентної шумової смуги $\Pi_{ш}$** .

Шумова смуга лінійної системи є смугою пропускання такого ідеального смугового фільтра, для якого: а) квадрат модуля $F^2(\omega) = F_0^2$ його комплексної частотної функції (амплітудно-частотної характеристики) дорівнює квадрату максимального значення $F_{\max}^2 = \max |F(\omega)|^2$ АЧХ реальної системи; б) середні квадрати реакцій ідеального фільтра та реальної лінійної системи на той самий білий шум збігаються.

Рівність середніх квадратів сигналівна виходах реальної та ідеальної систем у разі дії на них того самого білого шуму з геометричного погляду означає еквівалентність площ, обмежених графіками квадратів модулів КЧФ систем.

Припустімо, що $G_{0N}(\omega) = N_0$ - односторонній спектр білого шуму $N(t)$. Тоді односторонній спектр реакції системи $G_{0Y}(\omega) = N_0 F^2(\omega)$, а її середній квадрат

$$\overline{Y^2} = \int_0^{\infty} N_0 F^2(2\pi f) df .$$

У разі дії такого шуму на ідеальний фільтр із вказаними властивостями спектр його реакції $G_{0Y}(\omega) = N_0 F_{\max}^2$, а середній квадрат

$$\overline{Y^2} = \int_0^{\infty} N_0 F_{\max}^2 df .$$

Згідно з визначенням шумової смуги пропускання маємо:

$$\int_0^{\infty} N_0 F^2(2\pi f) df = \int_0^{\infty} N_0 F_{\max}^2 df = \int_0^{\Pi_{\text{ш}}} N_0 F_{\max}^2 df .$$

Звідки отримаємо формулу для обчислення еквівалентної шумової смуги пропускання лінійної системи:

$$\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{F_{\max}^2} \int_0^{\infty} F^2(2\pi f) df = \frac{1}{2\pi F_{\max}^2} \int_0^{\infty} F^2(\omega) d\omega . \quad (7.37)$$

✦ Таким чином, **шумова смуга пропускання лінійної системи визначається відношенням площі під графіком квадрата її АЧХ (коефіцієнта передачі потужності) та квадрата максимального значення АЧХ.**

Графічна ілюстрація поняття шумової смуги пропускання лінійної системи подана на рис. 7.7.

Еквівалентну шумову смугу пропускання системи $\Pi_{\text{ш}}$ можна розглядати як ширину спектра процесу, спектральна щільність потужності якого $G_{0Y}(f) = F^2(2\pi f)$ має максимальне значення $G_{0Y \max} = F_{\max}^2 \cdot 3$

7.7 Шумова смуга пропускання лнійної системи

геометричного погляду у цьому разі за ширину спектра береться основа прямокутника висотою $F_{\max}^2 = G_{0Y \max}$ та площею, що дорівнює середньому квадрату процесу $Y(t)$:

$$G_{0Y \max} \Pi_{\text{ш}} = \int_0^{\infty} G_{0Y}(f) df = \overline{Y^2}.$$

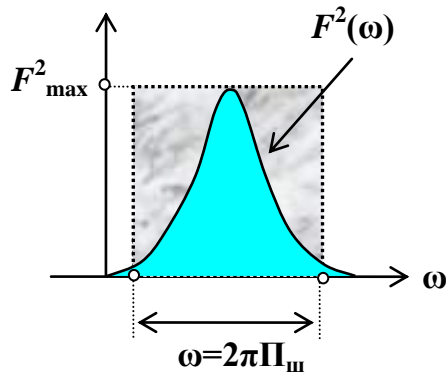


Рисунок 7.7 - До визначення шумової смуги пропускання.

Фактично, за такого підходу довільний процес $Y(t)$ з одностороннім спектром $G_{0Y}(\omega)$ та максимальним його значенням $G_{0Y \max}$ подається іншим процесом із постійною спектральною щільністю потужності $G_{0Y \max}$ в межах смуги частот $\Pi_{\text{ш}}$, яка вибирається із умови рівності середніх потужностей обох процесів.

► **Приклад.** Для інтегруючої RC - системи першого порядку $F_{\max} = 1$,

$$|F(2\pi f)|^2 = 1/(1 + (2\pi f RC)^2).$$

Тоді

$$\Pi_{\text{ш}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 (RC)^2} df = \frac{1}{4RC}.$$

Порівняємо шумову смугу з смугою пропускання зазначеної системи на рівні половинної потужності або, що те саме, на рівні 0,707 (умовною смугою пропускання). Для RC - системи першого порядку, як відомо, умовна смуга пропускання $\Delta f_{0,707} = 1/(2\pi RC)$.

Тоді відношення шумової смуги пропускання до умовної смуги

$$\Pi_{\text{ш}} / \Delta f_{0,707} = \pi / 2. \quad (7.38)$$

♦ Таким чином, для інтегруючої системи першого порядку шумова смуга пропускання в $\pi/2$ разів більша за смугу пропускання на рівні половинної потужності.

■

Перевищення шумової смуги над умовною смугою пропускання є справедливим для будь-яких лінійних систем. Зрозуміло, що відно-

шення $\Pi_{\text{ш}} / \Delta f_{0,707}$ для різних лінійних систем буде іншим. Однак, очевидно, чим ближче графік АЧХ реальної системи наближається до прямокутної форми, тим менше відрізняється шумова смуга $\Pi_{\text{ш}}$ від умовної смуги пропускання $\Delta f_{0,707}$.

Однією з переваг практичного застосування шумової смуги є можливість описувати реакцію навіть дуже складних систем у разі дії на них шумів тільки двома параметрами: шумовою смугою пропускання $\Pi_{\text{ш}}$ та максимумом коефіцієнта передачі потужності $F_{\text{max}}^2 = \max |F(j2\pi f)|^2 = |F(j2\pi f_0)|^2$, які можна знайти експериментально.

► **Приклад.** Під час експериментальних досліджень параметрів приймача системи радіозв'язку встановлено, що його коефіцієнт підсилення $K_u = 10^6$, а шумова смуга пропускання $\Pi_{\text{ш}} = 10 \text{ кГц}$. Тепловий шум $N(t)$ на вході приймача характеризується рівномірною спектральною щільністю потужності в діапазоні сотень мегагерц, що дає змогу вважати його білим шумом.

Визначити ефективне (середньоквадратичне) значення діючого процесу $X(t)$, яке забезпечує на виході приймача відношення сигнал/шум за потужністю, що не перевищує 100, у разі, якщо спектральна щільність шуму $N_0 = 2 \cdot 10^{-20} \text{ В}^2/\text{Гц}$.

Середня потужність шумової складової реакції $\overline{Y_N^2} = N_0 F_{\text{max}}^2 \Pi_{\text{ш}} = \sigma_{YN}^2$, а на компоненти реакції, спричиненої дією корисного процесу $X(t)$

$$\overline{Y_X^2} = F_{\text{max}}^2 \overline{X^2} \Rightarrow \sigma_{YX}^2 = F_{\text{max}}^2 \sigma_X^2,$$

де σ_X^2 - середня потужність діючого процесу. Тоді відношення сигнал/шум

$$\sigma_{YX}^2 / \sigma_N^2 = \frac{F_{\text{max}}^2 \sigma_X^2}{N_0 F_{\text{max}}^2 \Pi_{\text{ш}}} = \frac{\sigma_X^2}{N_0 \Pi_{\text{ш}}} = 100.$$

Остаточно, середньоквадратичне значення діючого процесу

$$\sigma_X = \sqrt{100 N_0 \Pi_{\text{ш}}} = 10 \sqrt{\Pi_{\text{ш}} N_0} = 10 \sqrt{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-20}} = 1,41 \cdot 10^{-7} \text{ В}.$$

7.7 Шумова смуга пропускання лнійної системи

■ Для систем, що описуються нераціональними комплексними частотними функціями, більш доцільним є визначення шумової смуги системи не через АЧХ, а імпульсну характеристику $g(t)$.

Відповідно до теореми Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |F(j2\pi f)|^2 df.$$

Згідно з (6.37) шумова смуга пропускання системи

$$\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{F_{\text{max}}^2} \int_0^{\infty} |F(j2\pi f)|^2 df = \frac{1}{2F_{\text{max}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda) d\lambda. \quad (7.39)$$

Для інтегруючих систем (системи з властивостями ФНЧ) відповідно до зв'язку між імпульсною характеристикою та комплексною частотною функцією початкове значення АЧХ

$$|F(j2\pi f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda = F_{\text{max}}. \quad (7.40)$$

Згідно з (7.39) та (7.40) можемо записати формулу для визначення шумової смуги в часовій області:

$$\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda) d\lambda / \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \right]^2. \quad (7.41)$$

Проте

$$K_{p \text{ max}} = F^2(0) = h^2(\infty) = \left[\int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda \right]^2 = h_{\text{кін}}^2,$$

де $h_{\text{кін}}$ - кінцеве (усталене) значення перехідної характеристики $h(t)$ системи або її коефіцієнт передачі в режимі постійного сигналу

Отриманий результат дає змогу дійти до такого висновку:

✦ **Шумова смуга ЛІВ системи складає половину відношення середнього квадрату реакції системи на дію білого шуму до квадрату математичного очікування цієї самої реакції:**

$$\Pi_{\text{ш}} = \overline{Y^2} / (2m_Y^2). \quad (7.42)$$

Для диференціюючих систем, як відомо,

$$K_{p \max} = F_{\max}^2 = F^2(\infty) = h^2(0) = \left[\int_{-\infty}^0 g(\lambda) d\lambda \right]^2.$$

Таким чином, для визначення максимального значення коефіцієнта потужності у цьому разі слід оцінити початковий стан системи через розрахунок початкового значення перехідної характеристики.

► **Приклад.** Припустімо, що імпульсна характеристика деякої лінійної системи

$$g(t) = \frac{1}{t_{\text{імп}}} [\sigma(t) - \sigma(t - t_{\text{імп}})].$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t_{\text{імп}}} \sigma(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t_{\text{імп}}} \sigma(\lambda - t_{\text{імп}}) d\lambda = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda) d\lambda = \int_0^{t_{\text{імп}}} \frac{1}{t_{\text{імп}}^2} d\lambda = 1/t_{\text{імп}},$$

а шумова смуга системи $\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{2t_{\text{імп}}} / (1)^2 = 1/2t_{\text{імп}}$.

Можна показати, що для такої системи відношення $\Pi_{\text{ш}} / \Delta f_{0,707} = 0,5/0,221 \cong 2,3$.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Шумову смугу пропускання системи можна розглядати як ширину спектра процесу, односторонній спектр потужності якого $G_{0Y}(f)$ збігається з коефіцієнтом потужності $F^2(f)$ системи та набуває максимального зна-

1. Визначення понять: шумова або еквівалентна шумова смуга пропускання лінійної системи.

2. Формули, які встановлюють взаємозв'язок між шумовою смугою пропускання та характеристиками системи:

7.7 Шумова смуга пропускання лнійної системи

чення $G_{0Y_{\max}} = F_{\max}^2$.

2. У межах шумової смуги довільний процес $Y(t)$ з одностороннім спектром $G_{0Y}(\omega)$ та максимальним його значенням $G_{0Y_{\max}}$ подається іншим процесом із постійною спектральною щільністю потужності $G_{0Y_{\max}}$, яка вибирається із умови рівності середніх потужностей процесів.

3. Шумова смуга пропускання є зручною характеристикою властивостей лінійної системи у разі дії на неї процесів, які за своїми властивостями наближаються до білого шуму.

4. З практичного погляду реакцію дуже складних систем у разі дії на них шумів можна описувати тільки двома параметрами, які можна визначити експериментально: шумовою смугою пропускання та максимумом коефіцієнта передачі потужності.

- у частотній області

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ш}} &= \frac{1}{F_{\max}^2} \int_0^{\infty} F^2(2\pi f) df = \\ &= \frac{1}{2\pi F_{\max}^2} \int_0^{\infty} F^2(\omega) d\omega; \end{aligned}$$

- у часовій області

$$\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{2F_{\max}^2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda) d\lambda.$$

3. Особливості визначення максимального значення коефіцієнта потужності через часові характеристики для інтегруючих та диференціюючих систем.

4. Шумова смуга пропускання завжди набуває більших значень, ніж умовна смуга пропускання. Водночас, чим ближче графік АЧХ реальної системи наближається до прямокутної форми, тим менше відрізняється шумова смуга від умовної смуги пропускання.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: шумова або еквівалентна шумова смуга пропускання лінійної системи.

2. Записати формули, які встановлюють взаємозв'язок між шумовою смугою пропускання та характеристиками ЛІВ системи.

3. Визначити максимальне значення коефіцієнта потужності через часові характеристики для інтегруючих та диференціюючих систем.

4. Розв'язувати задачі на визначення шумової смуги пропускання лінійних систем.

7.8 Взаємні спектри реакції та дії

Будемо розглядати ЛІВ систему з стаціонарно-зв'язаними вхідним $X(t)$ та вихідним $Y(t)$ випадковими процесами. Кореляційні властивості таких процесів оцінюються взаємними кореляційними функціями $K_{XY}(\tau)$ та $K_{YX}(\tau)$ у разі, якщо процеси є нецентрованими, та $B_{XY}(\tau)$ і $B_{YX}(\tau)$ - для центрованих процесів.

Відповідно до теореми Вінера-Хінчина пряме перетворення Фур'є взаємних кореляційних функцій $K_{XY}(\tau)$ і $K_{YX}(\tau)$ дає взаємні спектральні щільності потужності $G_{XY}(\omega)$ і $G_{YX}(\omega)$ відповідно:

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (7.43)$$

$$G_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.44)$$

Згідно з (7.18) функція взаємної кореляції

$$K_{XY}(\tau) = K_X(\tau) * g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau - \lambda) g(\lambda) d\lambda. \quad (7.45)$$

Підставивши (7.45) в (7.43), дістанемо:

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau - \lambda) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] g(\lambda) d\lambda.$$

Внутрішній інтеграл є пряме перетворення зсунутої в часі на величину λ АКФ $K_X(\tau)$. Відповідно до властивостей перетворення Фур'є

$$K_X(\tau - \lambda) \leftrightarrow G_X(\omega) e^{-j\omega\lambda}.$$

Тоді

$$G_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) e^{-j\omega\lambda} g(\lambda) d\lambda = G_X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda = G_X(\omega) F(j\omega),$$

7.8 Взаємні спектри реакції та дії

де враховано незалежність $G_{XY}(\omega)$ від змінної інтегрування λ і те, що імпульсна характеристика $g(t)$ ЛІВ системи і її комплексна частотна функція $F(j\omega)$ пов'язані інтегральним перетворенням Фур'є.

Отже, остаточно маємо спектр взаємодії вхідного та вихідного процесів ЛІВ системи:

$$G_{XY}(\omega) = G_X(\omega)F(j\omega). \quad (7.46)$$

Згідно з (7.19) функція взаємної кореляції

$$K_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau + \lambda)g(\lambda)d\lambda. \quad (7.47)$$

У даному разі $K_X(\tau + \lambda) \leftrightarrow G_X(\omega)e^{+j\omega\tau}$. Тоді згідно з (7.44) та (7.47)

$$G_{YX}(\omega) = G_X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{j\omega\lambda}d\lambda = G_X(\omega)F(-j\omega) = G_X(\omega)F^*(j\omega),$$

де $F^*(j\omega)$ комплексно-спряжена до КЧФ $F(j\omega)$ величина.

Отже, спектр взаємодії вихідного та вхідного процесів ЛІВ системи

$$G_{YX}(\omega) = G_X(\omega)F^*(j\omega). \quad (7.48)$$

► **Приклад.** На RC-систему першого порядку з КЧФ $F(j\omega) = 1/(j\omega RC + 1)$ діє білий шум, спектральна щільність якого $G_X(\omega) = N_0/2$. Визначити взаємні спектри $G_{XY}(\omega)$ і $G_{YX}(\omega)$ та функції взаємної кореляції $K_{XY}(\tau)$ і $K_{YX}(\tau)$.

Згідно з (7.46) і (7.48) дістанемо:

$$G_{XY}(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{N_0}{2} \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + 1/RC}; \quad (7.49)$$

$$G_{YX}(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 - j\omega RC} = \frac{N_0}{2} \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega - 1/RC}. \quad (7.50)$$

Функції взаємної кореляції визначимо відповідно до теореми Вінера-Хінчина за властивостями перетворення Фур'є. Відомо, що

$$\frac{A}{j\omega + \alpha} \leftrightarrow Ae^{-\alpha t} \sigma(t).$$

$$\text{Тоді, згідно з (6.49)} \quad K_{XY}(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} \sigma(\tau).$$

З урахуванням (7.50) функція взаємної кореляції

$$\begin{aligned} K_{YX}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \frac{1}{RC[(1/RC) - j\omega]} e^{-j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \frac{1}{RC[(1/RC) + j\omega_1]} e^{j\omega_1\tau} d\omega_1 = K_{YX}(-\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{RC} e^{\tau/RC} \sigma(-\tau). \end{aligned}$$

Останнє співвідношення виконується для від'ємних значень аргументу про що свідчить знак мінус в аргументі одиничної ступінчастої функції.

Таким чином, функція взаємної кореляції $K_{YX}(\tau)$ є дзеркальним відображенням відносно осі ординат функції $K_{XY}(\tau)$ для додатних значень її аргументу. Цей висновок узгоджується з теорією та раніше отриманими результатами для часової області.



ПІДСУМКИ



Треба вміти:

1. Записати формули для визначення взаємних спектрів потужності стаціонарних реакції та дії.

2. Розв'язувати задачі на визначення взаємних спектрів потужності стаціонарних реакції та дії різних лінійних систем.



Слід запам'ятати:

1. Формули для визначення взаємних спектрів потужності стаціонарних реакції та дії:

$$G_{XY}(\omega) = G_X(\omega)F(j\omega);$$

$$G_{YX}(\omega) = G_X(\omega)F^*(j\omega).$$

7.9 Завдання для поточного тестування

7.9.1 Питання для поточного контролю

- Назвіть часові та частотні характеристики лінійної системи
- Запишіть умову, яку задовольняють: а) лінійні системи, що фізично реалізуються; б) лінійні стійкі системи.
- У чому полягає суть кореляційного аналізу перетворень випадкових процесів лінійними системами?
- Вказати, за якою формулою обчислюється математичне очікування стаціонарної реакції ЛІВ системи на стаціонарну випадкову дію:

$$\text{а) } m_Y = \int_0^{\infty} \langle X(t-\lambda) \rangle g(\lambda) d\lambda; \quad \text{б) } m_Y = \int_0^t m_X g(\lambda) d\lambda; \quad \text{в) } m_Y = m_X \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda ?$$
- Запишіть формулу для визначення математичного очікування нестаціонарної реакції ЛІВ системи на стаціонарну дію у часовій області.
- Яка значення набуває математичне очікування стаціонарної реакції ЛІВ системи на стаціонарну дію у разі, якщо кінцеве значення перехідної характеристики системи дорівнює нулю?
- Що таке кореляційний інтеграл?
- Що таке АКФ імпульсної характеристики ЛІВ системи?
- Яка величина визначається скалярним добутком функції кореляції стаціонарної дії та кореляційного інтегралу?
- Запишіть формулу для визначення середнього квадрата стаціонарної реакції ЛІВ системи на стаціонарну дію у часовій області.
- За якою з формулою обчислюється середня потужність та дисперсія стаціонарної реакції ЛІВ системи у часовій області на дію

білого шуму: а) $\overline{Y_N^2} = m_X \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda$; б) $\overline{Y_N^2} = \frac{N_0}{2} \int_0^{\infty} g(\lambda) d\lambda$;

$$\overline{Y_N^2} = \frac{N_0}{2} \int_0^{\infty} g^2(\lambda) d\lambda ?$$

➤ Сформулюйте результат, який визначає згортка стаціонарної дії та кореляційного інтегралу.

➤ Запишіть формулу для визначення АКФ стаціонарної реакції ЛІВ системи на стаціонарну дію.

➤ Доведіть, що у разі дії на ЛІВ стійку систему білого шуму АКФ стаціонарної реакції прямо пропорційна кореляційній функції її імпульсної характеристики.

➤ Які з співвідношень справджуються для інтервалів кореляції білого шуму $\tau_{к.б}$ та стаціонарної реакції інтегруючої системи $\tau_{к.і}$ на його дію: а) $\tau_{к.б} = \tau_{к.і}$; б) $\tau_{к.б} < \tau_{к.і}$; $\tau_{к.б} > \tau_{к.і}$?

➤ Запишіть формули для визначення а) АКФ нестаціонарної реакції ЛІВ системи на стаціонарну дію; б) кореляційною інтегралу у пазі нестаціонарної реакції.

➤ Як зміниться середня потужність стаціонарної реакції інтегруючої ЛІВ системи на дію білого шуму у разі зміни її смуги пропускання: а) збільшенні у 2 рази; б) зменшенні у 2 рази?

➤ Назвіть умову за якої є допустимою апроксимація вхідного процесу білим шумом.

➤ Запишіть формули для визначення ступеню кореляційного зв'язку між вхідними та вихідними процесами ЛІВ системи у разі: а) стаціонарної реакції; б) нестаціонарної реакції.

➤ У чому полягає суть аналізу перетворень випадкових процесів ЛІВ системами у частотній області?

➤ Назвіть характеристики, які визначають властивості об'єктів під час спектрального аналізу.

➤ Що таке коефіцієнт передачі потужності?

➤ Поясніть, які з наведених співвідношень справджуються:

7.9 Завдання для поточного тестування

а) $G_Y(\omega) = K_p(\omega)G_X(\omega)$; б) $G_{0Y}(\omega) = F^2(\omega)G_X(\omega)$; в) $G_{0X}(\omega) = F^2(\omega)G_{0Y}(\omega)$;

г) $G_Y(\omega) = F(\omega)G_X(\omega)$; д) $G_{0Y}(f) = F^2(f)G_{0X}(\omega)$.

➤ Доведіть співвідношення: $m_Y^2 = F^2(0)m_X^2$.

➤ Запишіть рівність, яка встановлює зв'язок між середнім квадратом (дисперсією) та спектром потужності реакції ЛІВ системи.

➤ Запишіть формули для визначення середньої потужності та спектра потужності реакції ідеального диференціатора на стаціонарну дію з певним спектром.

➤ Дайте визначення шумової смуги пропускання системи.

➤ За яких умов визначається шумова смуга пропускання лінійної системи.

➤ Запишіть формулу для визначення шумової смуги системи через коефіцієнт передачі потужності.

➤ Доведіть співвідношення: $2\pi\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{K_{p\text{max}}} \int_0^{\infty} g^2(\lambda)d\lambda$.

➤ Які з співвідношень справджуються для шумової $\Pi_{\text{ш}}$ та умовної $\Delta f_{0,707}$ смуг пропускання ЛІВ системи: а) $\Pi_{\text{ш}} > \Delta f_{0,707}$; б) $\Pi_{\text{ш}} = \Delta f_{0,707}$; в) $\Pi_{\text{ш}} < \Delta f_{0,707}$?

➤ Поясніть, які з наведених співвідношень справджуються:

а) $\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{F_{\text{max}}} \int_0^{\infty} F^2(2\pi f)df$; б) $\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda)d\lambda / [\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)d\lambda]^2$; в)

$\frac{1}{2\pi F_{\text{max}}^2} \int_0^{\infty} F^2(\omega)d\omega$; г) $\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{2F_{\text{max}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\lambda)d\lambda$.

➤ Особливості визначення максимального значення коефіцієнта потужності для інтегруючих і диференціюючих кіл.

➤ Що таке взаємний спектр потужності?

➤ Запишіть формули для визначення спектрів взаємодії через спектр вхідного процесу: а) взаємного спектра вхідного та вихідного процесів; б) взаємного спектра вихідного та вхідного процесів.

7.9.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. На RC -систему (див. рис. 5.4) починаючи з моменту часу $t = 0$ діє стаціонарний процес $X(t)$ з математичним очікуванням m_X та кореляційною функцією $K_X(\tau)$. Визначити математичне очікування $m_U(t)$ та кореляційну функцію $K_U(t_k, \tau)$ напруги $U_C(t)$ на ємнісному елементі C , вважаючи її процесом нестаціонарним.

2. Визначити спектр потужності стаціонарної реакції інтегруючої системи першого порядку (див. рис. 5.4) та побудувати їхні графіки у разі дії на неї: а) низькочастотного квазібілого шуму, спектр потужності якого зображено на рис. 6.6, а; б) монохроматичного процесу (спектр потужності зображено на рис. 6.3)

3. На лінійну систему (див. рис. 7.8, а), що складається з лінії затримки (ЛЗ), час затримки якої τ , та пристрою віднімання (ПВ), діє стаціонарний процес $X(t)$ з нульовим значенням математичного очікування та кореляційною функцією $K_X(\tau)$. Визначити спектральну щільність реакції $G_Y(\omega)$ реакції $Y(t)$ та взаємну спектральну щільність $G_{XY}(\omega)$ стаціонарно зв'язаних процесів $X(t)$ і $Y(t)$.

4. Визначити спектральну щільність $G_{XY}(\omega)$ стаціонарно зв'язаних процесів $X(t)$ і $Y(t)$ в лінійній системі (див. рис. 7.8, а), що складається з лінії затримки (ЛЗ), час затримки якої τ , та пристрою віднімання (ПВ). Збудження системи $X(t)$ є стаціонарним процесом з нульовим значенням математичного очікування та кореляційною функцією $K_X(\tau)$.

5. Для яких процесів та систем справджуються такі співвідношення: а) $K_{YX}(\tau) = \int_0^{\infty} K_X(\tau - \lambda) g(\lambda) d\lambda$; б)

$$K_Y(\tau) = \int_0^{\infty} K_X(\tau - \theta) K_g(\theta) d\theta; \quad \text{в) } K_Y(t_k, \tau) = \int_{-\infty}^{t_k} K_X(\tau - \theta) K_g(\theta) d\theta.$$

6. На вході RC -системи (рис. 7.6, б) діє стаціонарна випадкова напруга $X(t)$ із спектральною щільністю $G_X(\omega)$. Визначити спектральну щільність $G_Y(\omega)$ та $G_Z(\omega)$ напруг $Y(t)$ та $Z(t)$.

7.9 Завдання для поточного тестування

7. Визначити взаємну спектральну щільність $G_{YZ}(\omega)$ напруг $Y(t)$ та $Z(t)$ для RC-системи (рис. 7.8, б), на вході якої діє стаціонарна випадкова напруга $X(t)$ із спектральною щільністю

8. На ЛІВ систему з імпульсною характеристикою системи $g(t) = \alpha e^{-\alpha t} \sigma(t)$ діє монохроматичний монохроматичний стаціонарний випадковий процес. Визначити взаємний енергетичний спектр $G_{XY}(\omega)$

9. Комплексна частотна функція ЛІВ системи $F(j\omega) = j\omega / (j\omega + \alpha)$. Визначити шумову смугу пропускання системи та ширину спектра її реакції на стаціонарну дію, кореляційна функція якої $K_x(\tau) = (A_m^2 / 2) \cos \omega_0 \tau$.

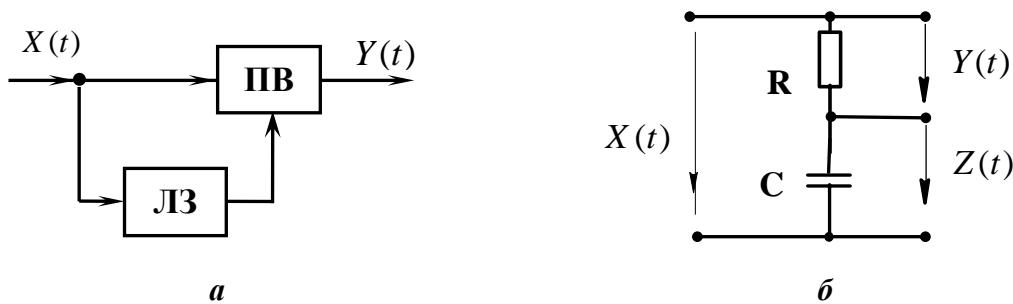


Рисунок 7.8 – Приклади лінійних систем.

10. Перехідна характеристика ЛІВ системи $h(t) = h(0)e^{-\alpha t} \sigma(t)$. Вивести формулу для визначення шумової смуги пропускання системи.

11. Параметри елементів електричного кола, зображеного на рис. 7.9, а є такими: Грунтуючись на імпульсній характеристиці кола отримати співвідношення між шумовою та умовною смугами пропускання.

12. Білий шум зі спектральною щільністю $0,001 \text{В}^2/\text{Гц}$ діє на вході лінійної системи, що складається з інтеграторів із скиданням, з'єднаних каскадно. Імпульсні характеристики інтеграторів зображені на рис. 7.9, б. Визначити дисперсію y_Y^2 сигналу $Y(t)$ та шумову смугу системи $\Pi_{\text{ш}}$, якщо

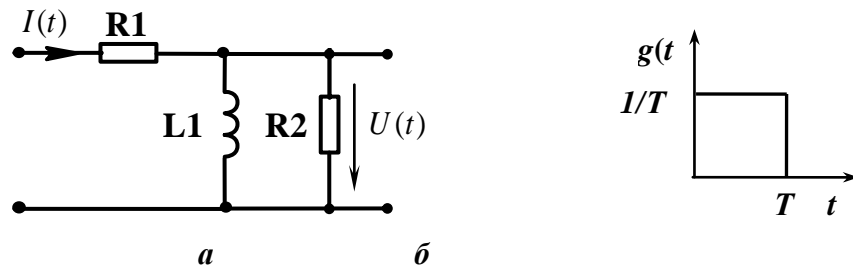


Рисунок 7.9 – Лінійна RL -система (а) та імпульсна характеристика (б)

13. Імпульсна характеристика лінійної системи . Визначити шумову смугу системи та відношення шумової смуги системи до смуги пропускання за рівнем половинної потужності.

14. Для лінійних систем, зображених на рис. 7.2, а та 7.9, а визначити шумову смугу системи та відношення шумової смуги системи до смуги пропускання за рівнем половинної потужності.

15. ЛІВ система описується таким рівнянням «вхід-вихід»: $3Y'(t) + Y(t) = 4X'(t) + X(t)$. Визначити дисперсію стаціонарної реакції системи $Y(t)$, якщо кореляційна функція стаціонарної дії $K_X(\Phi) = 6e^{-2|\tau|}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабак В.П. та ін. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Підручник/ В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. - К.: Техніка, 2004. - 288 с.
2. Бабак В.П., Білецький А.Я., Гуржій А.М. Сигнали і спектри: Навч. посібник. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 520 с. (Рос. мовою).
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник.- М.: Высшая школа, 2000. - 462 с.; ил.
4. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. -М.: Мир, 1989. – 540 с.
5. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и инженерные приложения. – М : Наука, 1991. –384 с.
6. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. - К.: Вища шк., 2004. - 525 с.: іл.
7. Гумен М.Б., Гуржій А.М., Співак В.М. Основи теорії електричних кіл: У 3 кн. Кн. 2 Аналіз лінійних електричних кіл. Частотна область: Підручник / За ред. М.Б. Гумена. – К.: Вища шк., 2004. - 358 с.: іл.
8. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М: Мир, 1989. – 378 с.
9. Кувшинов О.В., Лежнюк О.П., Лівенцева С.П. Методи математичного опису сигналів та завод: Навч. посіб. К.: КВГУЗ, 2000. -136 с.
- 10.Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 336 с.; ил.
- 11.Самойло К.А. и др. Теория случайных процессов. – М.: МИРЭА, 1989. – 76 с., ил.

Додатки

Додаток 1 Таблица значень інтегральної функції нормального розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-U^2/2} dU$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0159	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3900	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5385	5346	5407	5468	5527	5587	5646	4705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778
1,0	6827	6875	6923	6970	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7539	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7812	7850	7887	7923	7959	7994	8030
1,3	8064	8089	8132	8165	8197	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8689	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8970	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	0,91087	0,91273	0,91457	0,91637	0,91714	0,91888	0,92159	92327	92492	92655
1,8	2814	2970	3124	3275	3423	3569	3711	3852	3989	4124
1,9	4257	4387	4514	4639	4762	4882	5000	5116	5230	5341
2,0	5450	5557	5662	5764	5865	5964	6060	6155	6247	6336
2,1	6427	6514	6599	6683	6765	6844	6923	6999	7074	7148
2,2	7219	7289	7358	7425	7491	7555	7619	7679	7739	7798
2,3	7655	7911	7966	8019	8072	8123	8172	8221	8269	8315
2,4	6360	6405	8448	8490	8531	8571	8611	6643	6686	8723
2,5	0,96756	0,98793	0,98626	0,98859	98891	0,98923	0,98953	0,969S3	0,99012	0,99040
2,6	9068	9095	9121	9146	9171	9195	9219	9241	9253	9285
2,7	9307	9327	9347	9367	9386	9404	9422	9439	9456	9473
2,8	9489	9505	9520	9535	9549	9563	9576	9590	9502	9615
2,9	9627	9639	9650	9661	9672	9682	9692	9702	9712	9721
3,0	9730	9739	9747	9755	9763	9771	9779	9786	9793	9800
3,1	9806	9813	9619	9825	9831	9837	9842	984S	9853	S855
3,2	9863	9867	9872	9876	9880	9885	9889	9892	9696	9900
3,3	9903	9907	9910	9912	9916	9919	9922	9925	9928	9930
3,4	9933	9935	9937	9940	9942	9944	9945	9948	9950	9952
3,5	9953	9955	9957	9958	9960	9961	9963	9964	9966	9967
3,6	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9975	9976	9977	9978
3,7	9978	9979	9980	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985
3,8	9986	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9990	9990
3,9	0,999904	0,999908	0,999911	0,999915	0,999919	0,999922	0,999925	0,999928	0,999931	0,999934

Додаток 1 Таблиця значень інтегральної функції нормального розподілу

4,0	9937	9939	9942	9944	9946	9949	9951	9953	9955	9957
4,1	9937	9939	9942	9944	9946	9949	9951	9953	9955	9957
4,2	9973	9974	9976	9977	9978	9979	9980	9980	9981	9982
4,3	9983	9984	9984	9985	9986	9986	9987	9988	9988	9989

Додаток 2 Таблица значень розподілу Стьюдента

$$P(t \leq t_{p,n}) = \int_{-\infty}^{t_{p,n}} p(t) dt$$

Число ступенів свободи, n	P							
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,990	0,995
1	0,325	0,727	1,375	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,832	2,251	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,256	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,256	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,256	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,256	0,532	0,856	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,254	0,527	0,848	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617

Додаток 3 Таблиця значень інтегральної функції розподілу Пірсона

$$P(\chi^2 < \chi_{p,k}^2) = \int_0^{\chi_{p,k}^2} p(x^2) dx^2$$

Число ступенів свободи, n	P											
	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,200	0,800	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,3910	0,1610	0,9810	0,3910	0,016	0,064	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,446	3,22	4,61	5,98	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,000	4,64	6,25	7,81	9,35	11,30	12,80
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,060	1,650	5,99	7,68	9,49	11,10	13,30	14,90
5	0,412	0,554	0,831	1,150	1,610	2,340	7,29	9,24	11,10	12,80	15,10	16,70
6	0,676	0,872	1,240	1,640	2,200	3,070	8,56	10,60	12,60	14,40	16,80	18,50
7	0,989	1,240	1,690	2,170	2,830	3,820	9,80	12,00	14,10	16,00	18,50	20,30
8	1,340	1,650	2,180	2,730	3,490	4,590	11,00	13,40	15,50	17,50	20,10	22,00
9	1,730	2,090	2,700	3,330	4,170	5,380	12,20	14,70	16,90	19,00	21,70	23,60
10	2,160	2,560	3,250	3,940	4,870	6,180	13,40	16,00	18,30	20,50	23,20	25,20
11	2,600	3,050	3,820	4,570	5,580	6,990	14,60	17,30	19,70	21,90	24,70	26,80
12	3,070	3,570	4,400	5,230	6,300	7,810	15,80	18,50	21,00	23,30	26,20	28,50
13	3,570	4,110	5,010	5,890	7,040	8,630	17,00	19,80	22,40	24,70	27,70	29,80
14	4,070	4,660	5,630	6,570	7,790	9,470	18,20	21,10	23,70	26,10	29,10	31,30
15	4,600	5,230	6,260	7,260	8,560	10,300	19,30	22,30	25,00	27,50	30,60	32,80
16	5,140	5,810	6,910	7,960	9,310	11,200	20,50	23,50	26,30	28,80	32,00	34,30
18	6,260	7,010	8,230	9,390	10,900	12,900	22,80	26,00	28,90	31,50	34,80	37,20
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
22	8,64	9,54	11,00	12,3	14,0	16,3	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
24	9,89	10,90	12,40	13,6	15,7	18,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,5
26	11,20	12,20	13,80	15,4	17,3	19,8	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	46,3
26	12,50	13,60	15,30	16,9	18,9	21,6	34,0	37,9	41,3	44,5	46,3	51,0
30	13,80	15,00	16,60	18,5	20,6	23,4	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
	17,20*	17,50	20,60	22,5	24,8	27,8	41,8	46,1	49,9	53,2	57,3	60,3
40	20,70	22,20	24,40	26,5	29,1	32,3	47,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
45	24,30	25,90	28,40	30,6	33,4	36,9	52,7	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2
50	28,00	29,70	32,40	34,8	37,7	41,8	58,2	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
55	31,70	33,60	36,40	39,0	42,1	46,0	63,6	68,6	73,3	77,4	82,3	85,7
60	35,50	37,50	40,50	43,2	46,5	50,6	69,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
65	39,40	41,40	44,60	47,4	50,9	55,3	74,4	80,0	84,8	89,2	94,4	98,1
70	43,30	45,40	48,80	51,7	55,3	59,9	79,7	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
75	47,20	49,50	52,90	56,1	59,8	64,5	85,1	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3
80	51,20	53,50	57,20	60,4	64,3	69,2	90,4	96,6	101,9	106,6	112,3	115,3
85	55,20	57,60	61,40	64,7	68,8	73,9	95,7	102,1	107,5	112,4	116,2	122,3
90	59,90	61,50	65,60	69,1	73,3	78,6	101,1	107,6	112,1	116,1	124,1	128,3
95	63,20	65,90	69,90	73,5	77,8	83,2	106,4	113,0	118,8	123,9	130,0	134,2
100	67,30	70,10	74,20	77,9	82,4	87,9	111,7	118,5	124,3	129,5	135,8	140,2

