УДК 514.18

ПАРАМЕТРИЧНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ГАУСА

Сидоренко Ю.В.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ГАУССА

Сидоренко Ю.В.

GAUSS PARAMETRIC INTERPOLATION FUNCTION

Sydorenko J.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
julia sidorenko <suliko3@ukr.net>

Описаны различные способы параметризации интерполяционной функции Гаусса для построения замкнутых кривых. Предложена модификация параметрической функции Гаусса для визуализации замкнутых кривых в условиях неравномерного каркаса. Приведены примеры работы программы, реализующей вышеупомянутые способы неполиномиальной интерполяции.
Ключевые слова: *параметризация, неполиномиальная интерполяция, интерполяционная функция Гаусса*

Описані різні способи параметризації інтерполяційної функції Гауса для побудови замкнених кривих. Запропоновано модифікацію параметричної функції Гауса для візуалізації замкнених кривих в умовах нерівномірного каркасу. Наводяться приклади роботи програми, яка реалізує вищезгадані способи неполіноміальної інтерполяції.
Ключові слова: *параметризація, неполіноміальна інтерполяція, інтерполяційна функція Гауса*

We describe various methods of parameterization for the Gauss interpolation function that is used for construction of closed curves. We suggest a modification of the Gauss parametric function that is utilized for visualization of closed curves on uneven frames. Illustrative numerical results of software implementing the above methods of non-polynomial interpolation are provided.
Keywords: *parameterization, non-polynomial interpolation, Gauss interpolation function*

1. Вступ

На практиці, при розв'язанні задачі підрахунку наслідків від хімічних уражень, може виникати задача визначення площі ураженої ділянки за умови, коли контрольні точки ділянки утворюють нерегулярний каркас. У цьому випадку необхідно провести інтерполяцію для отримання більш точних результатів. Існуючі способи знаходження проміжних значень при розрахунках мають ряд недоліків, коли вузли інтерполяції розташовані на різних відстанях, та при різких змінах кривизни, а саме, невелику точність або складність реалізації. Тому постала задача проведення неполіноміальної інтерполяції таких процесів. Для цього пропонується використати новий спосіб інтерполяції, а саме метод Гауса, для вирішення поставленої задачі.

2. Метод Гауса

Нехай функція f(x) задана дискретним каркасом точок: $y_i = f(x_i)$, тобто задані пари (x_i, y_i). Задачею інтерполяції є побудова такої функції $\varphi(x)$, що повинна приймати в заданих точках ті ж значення y_i, що й функція f(x), а в проміжних точках відхилення $\varphi(x)$ від f(x) повинно бути мінімальним.

Апроксимуючу функцію побудуємо у вигляді узагальненого многочлена за формулою:

$$\varphi(x)=a_{00}\cdot\psi_1(x)+a_{11}\cdot\psi_2(x)+\ldots+a_{nn}\cdot\psi_n(x),$$

де $\psi_i(x)$ – система деяких незалежних функцій.

В якості $\psi_i(x)$ була вибрана система експоненційних функцій. Запишемо інтерполяційну функцію, яку далі будемо називати Гаус-функцією, у вигляді суми опорних функцій:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x),$$

де $\psi_i(x) = \tilde{y}_i e^{-\alpha(x-x_i)^2}$, i=1, 2, …, n; $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ – базисні значення для функції φ (x) при заданих аргументах $x_1, x_2, \ldots, x_n$; α – деякий коефіцієнт, значенням якого можна варіювати. Будемо α розраховувати за формулою:

$$\alpha = \frac{\pi(n-1)}{k},$$

де $k = (x_{max} - x_{min})^2$, x_{max}, x_{min}– максимальне і мінімальне значення аргументу x, тобто значення кінців відрізку.

Геометрична інтерпретація інтерполяційного методу Гаус-функцій показана на рисунку 1 [1].

Суть методу Гаус-функції полягає в наступному.

Нехай заданий дискретний каркас точок, тобто, пари вигляду (x_i, y_i), i = 1, 2,..., n. Для цих точок необхідно знайти базисні значення $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$, на яких будуватимуться опорні функції $\psi_i(x)$ за формулою:

$$\psi_i(x) = \tilde{y}_i e^{-\pi(n-1)\frac{(x-x_i)^2}{(x_{max}-x_{min})^2}} = \tilde{y}_i e^{-\alpha(x-x_i)^2}.$$

Базисні значення можна знайти, розв'язуючи систему рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_1-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_1-t_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_1-t_n)^2} = y_1, \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_2-t_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_2-t_n)^2} = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_n-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_n-t_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_n-t_n)^2} = y_n \end{cases}$$

Ця система лінійна, матриця системи симетрична відносно головної діагоналі. На головній діагоналі розташовуються одиниці, а інші елементи не перевищують за абсолютною величиною одиниці.

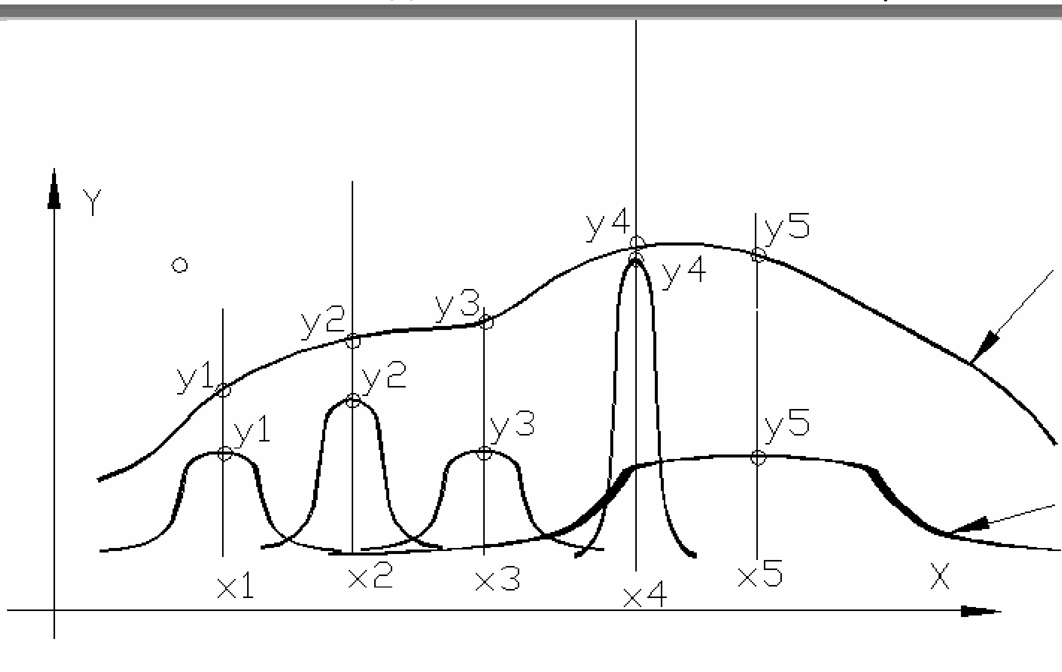

Рис.1. Інтерполяційна функція Гауса

Вказана система легко розв'язується будь-яким чисельним методом, наприклад, методом Гауса.

Вектор-розв'язок цієї системи $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$ використовується для побудови інтерполяційної Гаус-функції:

$$G(x) = \tilde{y}_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(x-x_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(x-x_n)^2}.$$

Запропонований спосіб інтерполяції відрізняється передусім тим, що вплив будь-якого відхилення в експоненціальній залежності зменшується із збільшенням відстані, що зумовлює краще наближення у порівнянні, наприклад, з методом Лагранжа.

Окрім цього, інтерполяційна функція Гауса є n-раз диференційованою і стійкою до малих відхилень початкових даних.

Спосіб інтерполяційної Гаус-функції, на відміну від більшості інших інтерполяційних методів, достатньо легко узагальнюється на n-вимірний простір.

У запропонованому підході є недоліки, загальні для методів з явним визначенням інтерполяційних функцій. Наприклад, замкнені криві і поверхні не можуть бути описані у такий спосіб. Для того, щоб усунути цей недолік, проведемо параметризацію інтерполяційної функції Гауса.

3. Параметризація інтерполяційної функції Гауса

Нехай заданий дискретний каркас точок, тобто пари вигляду (x_i, y_i), $i = 1, 2,..., n$.

Введемо параметр t, призначивши йому такі значення: t=0 у точці (x_1, y_1), t = 1 у точці (x_2, y_2), t = 2 у точці (x_3, y_3), …, t = n-1 у точці (x_n, y_n). Кожна точка, таким чином, буде мати три координати (t_{i-1}, x_i, y_i), $i = 1,\ldots,n$.

Запишемо інтерполяційну функцію Гауса y = y(x) у вигляді системи:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

де $x(t) = \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t-1)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t-n+1)^2}$,

$y(t) = \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t-1)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t-n+1)^2}$.

Для знаходження базисних значень функції x = x(t) потрібно розв'язати систему вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t_1-t_1)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t_1-t_2)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t_1-t_n)^2} = x_1, \\ \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t_2-t_2)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t_2-t_n)^2} = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{x}_1 e^{-\alpha(t_n-t_1)^2} + \tilde{x}_2 e^{-\alpha(t_n-t_2)^2} + \dots + \tilde{x}_n e^{-\alpha(t_n-t_n)^2} = x_n \end{cases}$$

Для визначення базисних значень функції y = y(t) потрібно розв'язати аналогічну систему:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_1-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_1-t_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_1-t_n)^2} = y_1, \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_2-t_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_2-t_n)^2} = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{y}_1 e^{-\alpha(t_n-t_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(t_n-t_2)^2} + \dots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(t_n-t_n)^2} = y_n \end{cases}$$

Таким чином, після отримання параметричних рівнянь та підстановки в ці функції параметру t, отримаємо значення x та y, які будуть утворювати інтерполяційну криву Гауса у параметричному вигляді.

Параметр t можна визначити також як набігаючу довжину ламаної, побудованої за цими точками, тобто як суму довжин відрізків, утворених точками каркасу. Ця функція отримала назву сумарної функції Гауса. У цьому випадку форма кривої буде більш коректно відповідати умовам задачі. Наприклад, якщо точки задавати по спіралі, з різним кроком, по дві біля осей координат, то у випадку параметричної функції Гауса біля заданих точок можливо утворення петель, а сумарна функція Гауса більш схожа на спіраль.

Використання параметричної та сумарної функцій Гауса дозволяє проводити інтерполяцію замкненого каркасу точок. Приклад вирішення задачі побудови фрагменту спіралі зображений на рисунках 2, 3.

4. Модифікований метод Гауса

Для звичайної функції Гауса кінцеве значення функції у кожній точці знаходиться як сума експоненціальних функцій, кількість яких дорівнює кількості базисних точок. Їх вигляд залежить від параметру α, що характеризує швидкість спадання функції. При занадто великому α функції спадають швидко, що призводить до різкого спадання кінцевої функції на проміжку між базовими точками. Занадто велике значення α призводить до різких стрибків функції на проміжках.

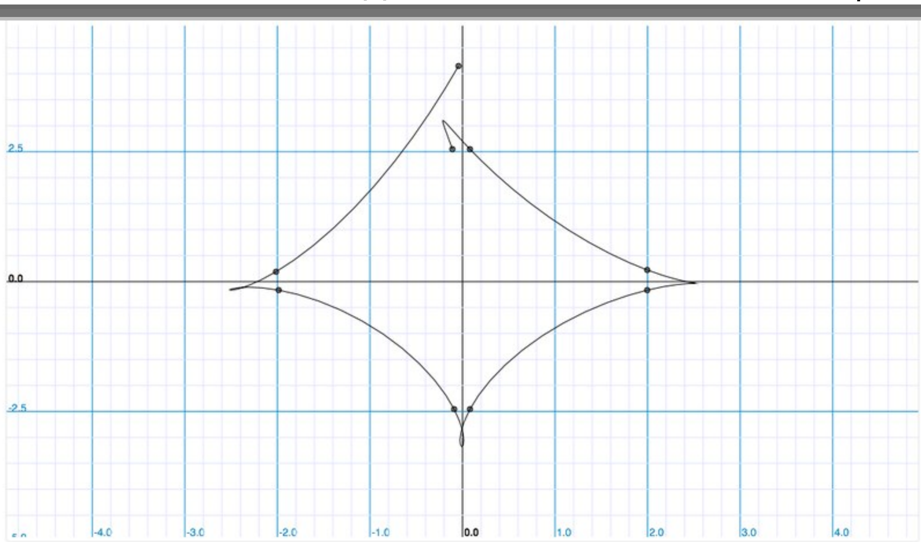

Рис. 2. Інтерполяція із застосуванням параметричної функції Гауса

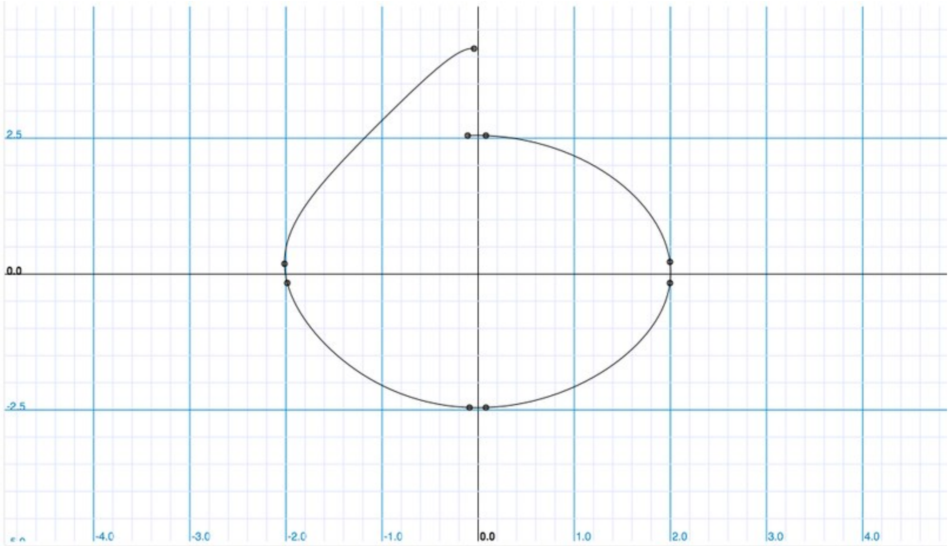

Рис. 3. Інтерполяція із застосуванням сумарної функції Гауса

Зазвичай при розрахунках за допомогою методу Гауса використовувалося постійне значення коефіцієнту α на всьому проміжку інтерполяції. Такий підхід має певні недоліки. Якщо точки не рівновіддалені, то на тих проміжках між базисними точками, довжина яких значно більша за середню, сума експоненціальних функцій буде спадати ближче до середини відрізку, тобто буде спостерігатися «прогин» функції на середині відрізку. На короткому відрізку може спостерігатися стрибок функції. Щоб запобігти таким небажаним явищам було запропоновано розраховувати коефіцієнт α окремо для кожного з відрізків між базисними точками залежно від його довжини за формулою:

$$\alpha = \pi \frac{n-1}{k\left(1+\frac{1}{N}\right)},$$

де $l = (x_l - x_{l+1})^2, x \subset (x_l, x_{l+1})$.

Дана формула дозволила отримати кращі результати при інтерполяції нерівномірного каркасу точок, у якому спостерігаються великі відстані між точками базису. Застосування модифікованого методу Гауса у таких умовах дозволило уникнути прогину функції на великих проміжках.

На рисунку 4 представлене порівняння модифікованого методу Гауса при N=20 зі звичайним методом Гауса та поліномом Лагранжа на прикладі інтерполяції функції квадратного кореня при великій кількості точок та нерівномірному їх розподілі.

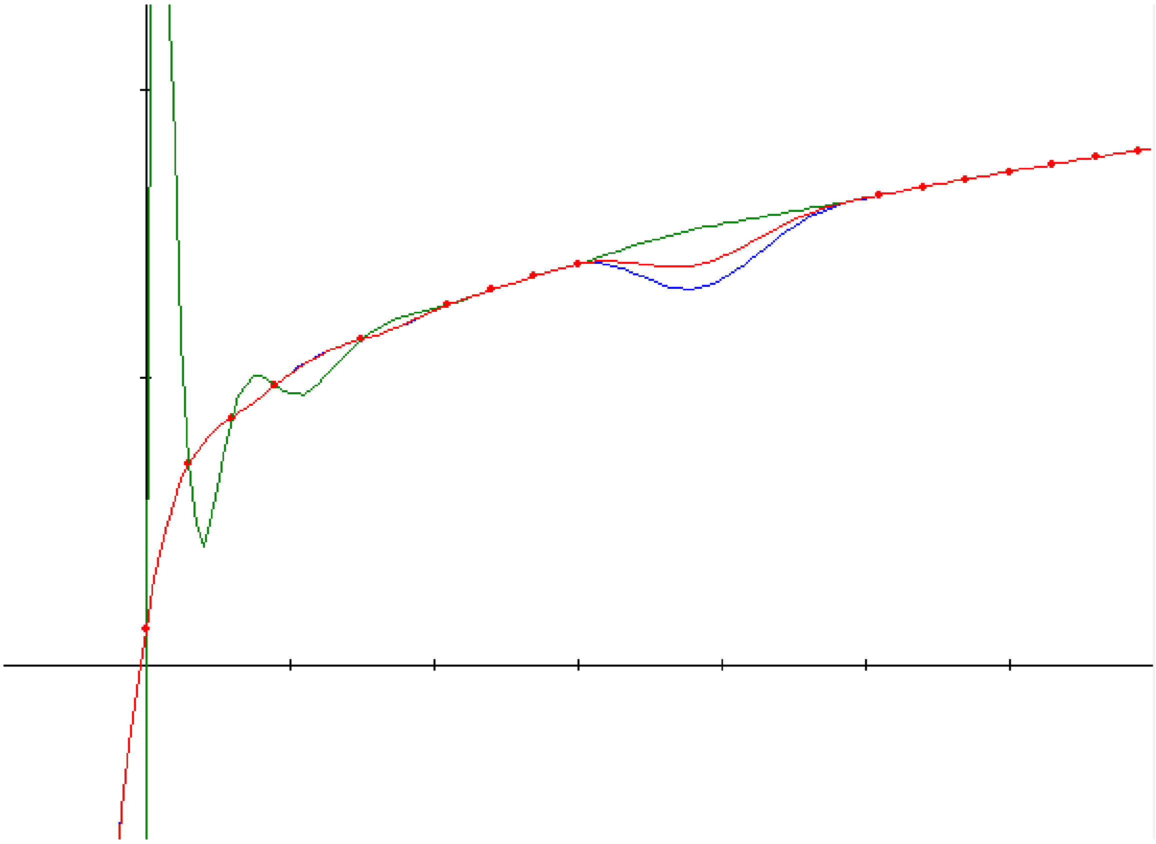

Рис. 4. Порівняння методів інтерполяції Лагранжа, Гауса, Гауса (модифікований)

Як видно з рисунку 4, поліном Лагранжа демонструє стрибки функції при великій кількості точок, а функція звичайного методу Гауса прогинається при великій відстані між точками базису. Функція, що отримана за допомогою модифікованого методу Гауса, показала кращий результат відносно обох вищенаведених функцій.

5. Висновки

Нерівномірність завдання точок каркасу та стрімкі зміни кривини потребує використання неполіноміальних способів інтерполяції. Для цих цілей можна використовувати інтерполяційну функцію Гауса та її модифікації. У випадку, коли точки каркаса утворюють замкнений контур, інтерполяцію можна проводити за допомогою параметричної, або сумарної функції Гауса. Використання цих методів дозволяє підвищити точність результатів порівняно з іншими методами в умовах великої кількості точок та неоднорідності їх положення.

Література

1.Бадаев Ю.И. Интерполяция на основе функций Гаусса [Текст] / Бадаев Ю.И., Сидоренко Ю.В. // Сб. трудов III международной научно-практической конференции "Современные проблемы геометрического моделирования": Тезисы докл. – г. Мелитополь, 5-7 июня 1996г. – с.32-33.

2.Бадаєв Ю.І. Реалізація інтерполяційного методу Гаусс-функції та порівняльний аналіз [Текст] / Бадаєв Ю.І., Сидоренко Ю.В. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, Вип.63 – 1998. – с.33-37.

УДК 519.6:675

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ

Сангинова О.В., [*]Данилкович А.Г., Бондаренко С.Г., Брановицкая С.В., Червинский В.А.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ГРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ

Сангінова О.В., [*]Данилкович А.Г., Бондаренко С.Г., Брановицька С.В., Червінський В.О.

CONSTRAINED OPTIMIZATION TASKS SOLUTION BY USING GRADIENT METHODS

Sanginova O., [*]Danilkovich A., Bondarenko S., Branovitskaia S., Chervinsky V.

Национальный технический университету Украины «КПИ»,
[*]Киевский национальный университет технологии и дизайна, Киев, Украина
olga.sanginova@gmail.com

Решена задача многокритериальной условной оптимизации процесса дубления-жирования меховой овчины с применением модифицированного метода релаксации. Обобщенная целевая функция получена с использованием аддитивного критерия оптимальности. Модифицированный метод релаксации может быть применён при решении задач оптимизации аналогичных процессов.

Ключевые слова: *задача оптимизации, целевая функция, градиентные методы, дубление, меховая овчина*

Розв'язано задачу багатокритеріальної умовної оптимізації процесу дублення-жирування хутрової овчини з використанням модифікованого методу релаксації. Узагальнена цільова функція отримана із застосуванням адитивного критерію оптимальності. Модифікований метод релаксації може бути використаний при розв'язанні задач умовної оптимізації аналогічних процесів.