

Mgr Joanna Szczepańska

Instytut Finansów, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nysie, Polska

Dr hab.inż., prof.nadzw. Zofia Wilimowska

Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wroclawska, Polska

Logika niepewnych prawdopodobieństw w rachunku opłacalności inwestycji

W artykule przedstawiona została logika niepewnych prawdopodobieństw wg A. Jøsang'a. *Subjective logic* opiera się na subiektywnych przekonaniach o świecie. Dlatego też dla podkreślenia subiektywnego charakteru wypowiedzi używa się terminu „opinia”. Logika subiektywna może być postrzegana jako rozszerzenie zarówno rachunku prawdopodobieństwa jak i logiki binarnej. W artykule autorzy zwracają uwagę na możliwość zastosowania tej teorii w rachunku opłacalności inwestycji w szczególności jako rozszerzenie analizy wartości zaktualizowanej netto NPV.

inwestycje, niepewność, prawdopodobieństwo, logika subiektywna, przekonanie, nieprzekonanie

Inwestycje są nieodłącznym elementem działalności firmy. Bycie konkurencyjnym na rynku oznacza dokonywanie ciągłych nakładów, które w przyszłości bliższej lub dalszej przyczynią się do uzyskania lepszych wyników działalności przedsiębiorstwa poprzez zwiększenie wydajności produkcji czy też poprawę jakości produkowanych wyrobów i świadczonych usług. W związku z tym, że nakłady ponoszone są w chwili obecnej a wyniki gospodarcze, które inwestor planuje osiągnąć dzięki inwestycji spodziewane są dopiero w przyszłości, ogromną rolę w procesie inwestycji odgrywa badanie jej opłacalności. Cała trudność polega na tym, że już dzisiaj inwestor powinien przewidzieć wszystkie scenariusze rozwoju wydarzeń aby skalkulować czy w efekcie końcowym jego działalność okaże się opłacalna czy nie.

Najbardziej znane w literaturze przedmiotu metody, w których wykorzystywane są modele stochastyczne to:

- analiza scenariuszy,
- drzewa decyzyjne,
- metoda symulacyjna.

Analiza scenariuszy polega na opracowaniu trzech scenariuszy: optymistycznego, najbardziej prawdopodobnego i pesymistycznego. Każdemu z nich przyporządkowane jest prawdopodobieństwo wystąpienia. Końcowym wynikiem jest wyznaczenie wartości oczekiwanej NPV i odchylenia standardowego NPV jako miernika ryzyka.

Analiza drzew decyzyjnych stosowana jest zwłaszcza w przypadku projektów złożonych tzn. takich gdzie decyzja podjęta wcześniej ma znaczący wpływ na późniejszy przebieg wydarzeń. W swoim założeniu podobna jest do analizy scenariuszy. Określa się tutaj przewidywane do osiągnięcia przepływy pieniężne z projektu w poszczególnych latach. W rezultacie otrzymuje się również wartość oczekiwaną NPV i odchylenie standardowe NPV.

Metoda symulacyjna polega na skonstruowaniu modelu odwzorowującego wybrany aspekt systemu rzeczywistego i uaktywnieniu go z pomocą technik informatycznych. W przypadku oceny projektów inwestycyjnych procedura obliczania wartości NPV powtarzana będzie wielokrotnie, zgodnie z modelem projektu inwestycyjnego, dla generowanych losowo wartości zmiennych niepewnych wpływających na tę wartość. Końcowym wynikiem takiej symulacji będzie szacunkowa NPV i miara ryzyka [3].

Metody te opierają się na oszacowaniu przepływów pieniężnych projektu inwestycyjnego a następnie zdyskontowaniu ich odpowiednią stopą dyskontową. Inwestor oczekuje określonych korzyści z zaangażowania kapitału finansowego w projekt inwestycyjny. W przypadku przepływów pieniężnych obciążonych większym ryzykiem inwestor dokonuje korekty stopy dyskontowej. Korekta ta musi uwzględniać nie tylko stopę inflacji ale również premię za wielkość ponoszonego ryzyka [5].

W metodach badania opłacalności inwestycji jednym z parametrów modelu jest prawdopodobieństwo uzyskania określonych przepływów z projektu inwestycyjnego. Poziom prawdopodobieństwa wystąpienia danego zdarzenia może być estymowany na wiele różnych sposobów. Może być określany przez inwestora, który wyraża w ten sposób swoje subiektywne przeczucia co do sytuacji w przyszłości. Wynika stąd, że również poziom prawdopodobieństwa zawiera w sobie pewną dozę niepewności, którą również należałoby uwzględnić w rachunku opłacalności inwestycji. Poniżej przedstawione zostanie podejście A. Jøsang'a odnośnie logiki niepewnych prawdopodobieństw, które można by zastosować w rachunku opłacalności inwestycji.

W standardowej logice przyjmuje się wartość: prawda lub fałsz. Jednak tak naprawdę nikt nie jest w stanie określić z całkowitą pewnością, że założenia są prawdziwe czy fałszywe. Dodatkowo, jeśli szacuje się, że założenie jest prawdą, to będzie to zawsze subiektywny osąd i nigdy nie będzie reprezentować zdania ogółu. Wskazuje to na pewne braki w sposobie postrzegania świata jaki proponuje standardowa logika. Jest głównie przeznaczona dla świata wyidealizowanego a nie dla świata rzeczywistego - w szczególności działalności gospodarczej do szacowania opłacalności inwestycji.

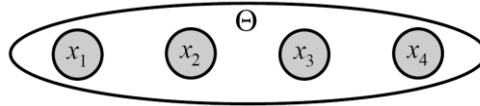
W artykule przedstawione zostanie podejście logiki subiektywnej, którą określa się jako logikę opierającą się na subiektywnych przekonaniach, zdaniach o świecie. Używać się tu będzie terminu „opinia” (opinion) aby zaznaczyć subiektywny charakter głoszonej wypowiedzi. Opinia może być uważana za miarę prawdopodobieństwa zawierającą wtórną niepewność.

W literaturze odróżnia się pojęcie ryzyka od pojęcia niepewności. A.H. Willet za ryzyko uważa zjawisko obiektywne skorelowane z subiektywną niepewnością wystąpienia niepożądanego zdarzenia. Natomiast wg F. Knight'a ryzyko to niepewność mierzalna a niepewność sensu stricto to niepewność niemierzalna. Wg J. Pfeffer'a ryzyko „...jest kombinacją hazardu i jest mierzone prawdopodobieństwem; niepewność jest mierzona przez poziom wiary. Ryzyko jest stanem świata; niepewność jest stanem umysłu” [za:3].

W artykule używać się będzie terminu niepewność (uncertainty) na określenie niepewności związanej z określeniem prawdopodobieństwa. Pomimo, że w literaturze przyjmuje się, że niepewność jest niemierzalna tutaj funkcja niepewności będzie przyjmowała pewne wartości wynikające z subjective logic, której podstawowe definicje zostały przedstawione w dalszej części artykułu.

Pierwszym krokiem jest zdefiniowanie zbioru możliwych sytuacji, które określa się jako ramę możliwości dobrego osądu (frame of discernment) oznaczaną jako Θ . Zawiera ona zbiór możliwych stanów danego systemu, gdzie tylko jeden jest prawdziwy w danym czasie, co oznacza, że system nie może znajdować się w wielu stanach jednocześnie. Z definicji więc wynika, że rama możliwości dobrego osądu Θ jest zawsze prawdziwa, ponieważ z definicji zawiera prawdziwy stan (state). Podstawowe stany zawarte w ramie możliwości dobrego osądu będą nazywane atomowymi stanami (atomic states), ponieważ nie zawierają w sobie podstanów.

Jeśli uważa się, że jeden ze stanów lub kilka z nich znajdujących się w ramie możliwości dobrego osądu mógłby być prawdziwy, można przypisać masę przekonania (belief mass) do tych stanów.



Rysunek 1 – Przykład ramy możliwości dobrego osądu [1]

Przedstawione zostaną podstawowe definicje konieczne dla zrozumienia toku rozumowania logiki subiektywnej.[1]

Definicja 1. Przypisana Masa Przekonania (Belief Mass Assignment). Niech Θ będzie ramą możliwości dobrego osądu. Jeśli z każdym podstanem $x \in 2^\Theta$ liczba $m_\Theta(x)$ jest powiązana tak, że :

1. $m_\Theta(x) \geq 0$,
2. $m_\Theta(\emptyset) = 0$,
3. $\sum_{x \in 2^\Theta} m_\Theta(x) = 1$.

to m_Θ jest nazywane przypisaną masą przekonania (Belief Mass Assignment – BMA) o ramie możliwości dobrego osądu Θ . Dla każdego podstanu $x \in 2^\Theta$, liczba $m_\Theta(x)$ jest zwana masą przekonania o x .

Definicja 2. Funkcja Przekonania (Belief Function – b). Niech Θ będzie ramą możliwości dobrego osądu i niech m_Θ będzie przypisaną masą przekonania o ramie możliwości dobrego osądu Θ . Wtedy funkcja przekonania korespondując z m_Θ jest funkcją $b : 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ zdefiniowaną jako:

$$b(x) = \sum_{y \subseteq x} m_\Theta(y), \quad x, y \in 2^\Theta. \quad (2)$$

Definicja 3. Funkcja Nieprzekonania (Disbelief Function - d). Niech Θ będzie ramą możliwości dobrego osądu i niech m_Θ będzie przypisaną masą przekonania o ramie możliwości dobrego osądu Θ . Wtedy funkcja nieprzekonania korespondując z m_Θ jest funkcją $d : 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ zdefiniowaną jako:

$$d(x) = \sum_{y \cap x = \emptyset} m_\Theta(y), \quad x, y \in 2^\Theta. \quad (3)$$

Definicja 4. Funkcja Niepewności (Uncertainty Function – u). Niech Θ będzie ramą możliwości dobrego osądu i niech m_Θ będzie przypisaną masą przekonania o ramie możliwości dobrego osądu Θ . Wtedy funkcja niepewności korespondując z m_Θ jest funkcją $u : 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ zdefiniowaną jako:

$$u(x) = \sum_{\substack{y \cap x \neq \emptyset \\ y \not\subseteq x}} m_\Theta(y), \quad x, y \in 2^\Theta. \quad (4)$$

Całkowita niepewność może być wyrażona przez przypisanie całej masy przekonania do ramy możliwości dobrego osądu Θ , wtedy taką funkcję nazywa się pustą funkcją przekonania.

Na podstawie powyższych zdefiniowanych koncepcji można stwierdzić, że suma mas przekonania, nieprzekonania i niepewności jest równa 1.

$$b(x) + d(x) + u(x) = 1, \quad x \in 2^\Theta, x \neq \emptyset. \quad (5)$$

Funkcja niepewności reprezentuje niepewność osoby co do prawdziwości danego stanu. Może być interpretowana jako swego rodzaju wypełnienie, uzupełnienie luki pomiędzy

stwierdzeniem prawdy i fałszu, w przypadku braku jednoznacznego przekonania bądź nieprzekonania o prawdziwości danego stanu.

Definicja 5. Relatywna Atomowość (Relative Atomicity – a). Niech Θ będzie ramą możliwości dobrego osądu i niech $x, y \in 2^\Theta$. Wtedy dla każdego $y \neq \emptyset$ relatywna atomowość x względem y jest funkcją $a: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ zdefiniowaną jako:

$$a(x/y) = \frac{|x \cap y|}{|y|}, \quad x, y \in 2^\Theta, y \neq \emptyset. \quad (6)$$

Definicja 6. Funkcja Oczekiwanego Prawdopodobieństwa (Function of Probability Expectation). Niech Θ będzie ramą możliwości dobrego osądu z przypisaną masą przekonania m_Θ , wtedy funkcja oczekiwanego prawdopodobieństwa korespondując z m_Θ jest funkcją $E: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ zdefiniowaną jako:

$$E(x) = \sum_y m_\Theta(y) a(x/y), \quad y \in 2^\Theta. \quad (7)$$

Definicja 7. Zogniskowana rama możliwości dobrego osądu i relatywna atomowość. (Focused Belief Mass Assignment and Relative Atomicity). Niech Θ będzie ramą możliwości dobrego osądu z przypisaną masą przekonania m_Θ i niech $b(x)$, $d(x)$ i $u(x)$ będzie odpowiednio funkcją przekonania, nieprzekonania i niepewności x w 2^Θ . Niech $\tilde{\Theta}^x$ będzie zogniskowaną ramą możliwości dobrego osądu skupioną na x . Zogniskowana przypisana masa przekonania $m_{\tilde{\Theta}^x}$ na $\tilde{\Theta}^x$ jest zdefiniowana następująco:

$$m_{\tilde{\Theta}^x}(x) = b(x), \quad (8)$$

$$m_{\tilde{\Theta}^x}(-x) = d(x),$$

$$m_{\tilde{\Theta}^x}(\tilde{\Theta}^x) = u(x).$$

Zogniskowana relatywna atomowość x jest zdefiniowana przez następujące równanie:

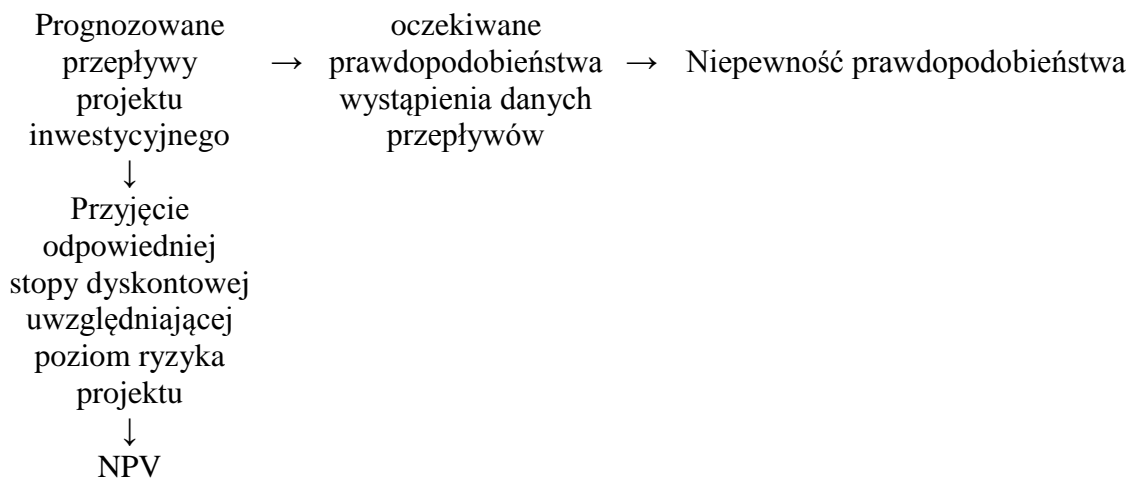
$$a_{\tilde{\Theta}^x}(x) = [E(x) - b(x)]/u(x). \quad (9)$$

Definicja 8. Opinia (Opinion). Niech Θ będzie binarną ramą możliwości dobrego osądu z dwoma stanami atomowymi x i $-x$. Niech m_Θ będzie przypisaną masą przekonania o Θ , gdzie $b(x)$, $d(x)$, $u(x)$, $a(x)$ reprezentują odpowiednio funkcje przekonania, nieprzekonania, niepewności i relatywnej atomowości x w 2^Θ . Wtedy opinia o x , oznaczona jako ω_x jest zdefiniowana jako:

$$\omega_x \equiv (b(x), d(x), u(x), a(x)). \quad (10)$$

5. Logika niepewnych prawdopodobieństw a rachunek opłacalności inwestycji.

Logika niepewnych prawdopodobieństw mogłaby być uzupełnieniem analizy NPV, która polega na sumowaniu oszacowanych przepływów pieniężnych projektu inwestycyjnego zdyskontowanych odpowiednią stopą dyskontową. Stopa ta powinna odzwierciedlać nie tylko wartość pieniądza w czasie ale również poziom ryzyka. Jeśli zastosowalibyśmy logikę niepewnych prawdopodobieństw w rachunku opłacalności inwestycji to otrzymalibyśmy dodatkową zmienną obrazującą poziom ryzyka - niepewności projektu inwestycyjnego, ponieważ oprócz tego, że każdy przepływ zostałby zdyskontowany odpowiednią stopą dyskontową uwzględniającą ryzyko, to również każdy przepływ scharakteryzowany zostałby przez prawdopodobieństwo jego wystąpienia i niepewność wystąpienia tego prawdopodobieństwa.

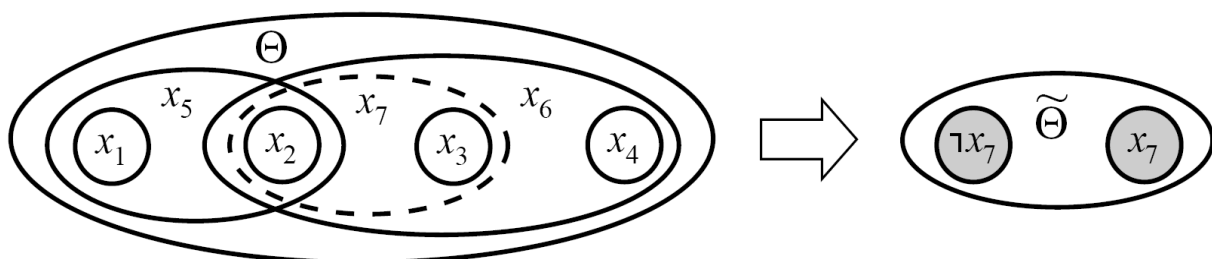


Rysunek 2 – Zmienne opisujące NPV projektu w przypadku zastosowania subjective logic

Projekt przyjmuje się do realizacji gdy wartość NPV jest większa od 0. W przypadku gdy ta dodatnia wartość byłaby stosunkowo niewielka, a dodatkowo, oczekiwane prawdopodobieństwa przepływów projektu niskie, a niepewności prawdopodobieństw wysokie, można by na tej podstawie stwierdzić, że realizacja takiego projektu byłaby zbyt ryzykowna.

6. Przykład

Przyjmijmy, że inwestor określił siedem poziomów przepływu pieniężnego x jakie mogą wystąpić w danym roku. Przepływ x_7 jest sumą przepływów x_2 i x_3 ($x_7 = x_2 \cup x_3$). Obliczmy wartość funkcji przekonania, nieprzekonania, niepewności odnośnie przepływu x_7 .



Rysunek 3 – Zogniskowana rama możliwości dobrego osądu skupiona na x_7 [1]

Na rys.3 masa przekonania jest przypisana do wszystkich stanów obrysowanych ciągiłą linią, a x_7 , który został obrysowany przerywaną linią jest zdefiniowany jako jeden z dwóch stanów atomowych w zogniskowanej ramie możliwości dobrego osądu.

Bazując na następujących danych

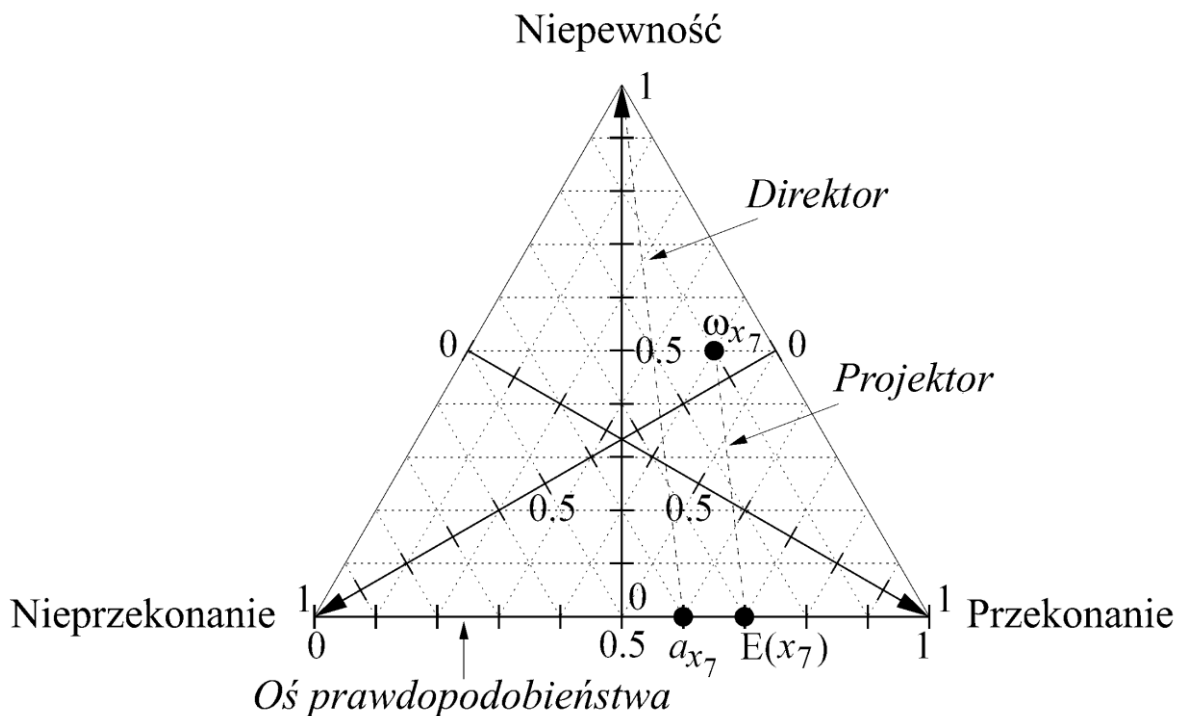
$$m_{\Theta} : \begin{cases} m_{\Theta}(x_1) = 0,10 \\ m_{\Theta}(x_2) = 0,20 \\ m_{\Theta}(x_3) = 0,20 \\ m_{\Theta}(x_4) = 0,00 \\ m_{\Theta}(x_5) = 0,10 \\ m_{\Theta}(x_6) = 0,30 \\ m_{\Theta}(\Theta) = 0,10 \end{cases}$$

otrzymujemy następujące wartości funkcji:

- przekonania $b(x_7) = 0,40$;
- nieprzekonania $d(x_7) = 0,10$;
- niepewności $u(x_7) = 0,50$.

Zogniskowana relatywna atomowość x_7 wynosi $a_{\bar{\omega}_7}(x_7) = 0,60$, a funkcja oczekiwanego prawdopodobieństwa $E(x_7) = 0,70$.

Graficzną ilustracją tego przykładu jest trójkąt.



Rysunek 4 – Trójkąt opinii – przykład ω_{x_7} [1]

Podstawą trójkąta jest oś prawdopodobieństwa. Opinie, które są umiejscowione na niej wyrażają stan, który nie zawiera niepewności a więc można powiedzieć, że są to prawdopodobieństwa określone w tradycyjny sposób. W szczególności opinie umiejscowione w prawym bądź w lewym dolnym rogu są zwane opiniami absolutnymi (absolute opinions) tzn. że co do ich prawdziwości czy też fałszu nie ma absolutnie żadnej niepewności. Natomiast odległość pomiędzy osią prawdopodobieństwa a punktem reprezentującym opinię można zdefiniować jako stopień niepewności. Linie łączące górny wierzchołek trójkąta i punkt relatywnej atomowości nazwano direktorem (director). Linie równoległe do direktora to projektor (projector), który przechodzi przez punkt opinii. Przecięcie projektora z osią prawdopodobieństwa wyznacza wartość oczekiwanego prawdopodobieństwa.

W dzisiejszej dobie istnieją coraz większe potrzeby identyfikacji, pomiaru i kontroli ryzyka. Podejmowanie działań inwestycyjnych jest nieodzownym czynnikiem rozwoju przedsiębiorstwa i zwiększania jego konkurencyjności. Jednakże działania inwestycyjne obarczone są ryzykiem ze względu na rozkład przepływów pieniężnych w czasie. Dlatego też najbardziej istotną kwestią jest aby znaleźć odpowiednią relację między ryzykiem a stopą zwrotu.

W literaturze wyróżnić można trzy grupy miar ryzyka inwestycyjnego a mianowicie miary zmienności (wariancja, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności),

wrażliwości (n.p. współczynnik beta) i zagrożenia (value at risk – VaR). Ze względu na dużą liczbę współzależnych zmiennych odzwierciedlających złożone warunki inwestowania istnieje potrzeba wdrażania skomplikowanych algorytmów oceny projektu inwestycyjnego. Logika subiektywna, która opiera się na subiektywnych przekonaniach o świecie ma wiele wspólnego z inwestorem, który podejmując określoną decyzję inwestycyjną kieruje się nie tylko wynikami matematycznego rachunku ale również intuicją i osobistym przekonaniem o potrzebie i sukcesie danego przedsięwzięcia bądź o jego porażce.

Literatura

1. Jøsang A. : A logic for uncertain probabilities, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol.9, No.3 (June 2001).
2. Kuziak K., Jajuga K., Papla D., Ryzyko rynkowe polskiego rynku akcji – Value at Risk i inne metody pomiaru. W: *Rynek Kapitałowy*, Tarczyński W. (red), Wyd. Uniwersytetu Szczecińskiego, Międzyzdroje 2000.
3. Ostrowska E. : Ryzyko projektów inwestycyjnych, PWE, Warszawa 2002.
4. Pluta W.: Budżetowanie kapitałów, PWE, Warszawa 2000.
5. Szczepańska J., Implementing a real option as a way of reducing investment risk, *Information Systems Applications And Technology ISAT 2003 Seminar*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003
6. Wilimowska Z., *Metodyka budowy efektywnego portfela projektów inwestycyjnych*, Prace Naukowe Instytutu Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej 192, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1997

The paper presents assumptions of subjective logic by A.Jøsang. Subjective logic operates on subjective beliefs about the world. The basic term is “opinion” that can be interpreted as a probability measure containing secondary uncertainty. As such subjective logic can be seen as an extension of both probability calculus and binary logic. Authors draw attention to subjective logic implementation in investment profitability calculus as a complement to Net Present Value.