

ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS MATRICES DE CORRELACION CLASICA Y CICLICA EN ARRAYS DE BANDA ESTRECHA¹

José Ramón Cerquides Bueno - Olga Muñoz Medina - Juan Fernández Rubio
 Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones
 E.T.S.I.T.B - U.P.C.
 Apdo. 30002 - 08071 Barcelona

ABSTRACT

The aim of this communication is to study the differences and similarities between the classic and cyclic correlation matrices of the data snapshots sensed by an array. We will focus our study in the comparison of the eigenvalues decomposition for each matrix. Special attention will be paid on topics like rank and nature of eigenvectors and eigenvalues. Other aspects involved in the estimation of both matrices, such as number of data snapshots required and sensitivity to deviations of the cyclic parameter will be also treated. Finally, we will carry out simulations in order to confirm the previously obtained theoretical results.

INTRODUCCION

El interés por la explotación de las propiedades de cicloestacionaridad mostradas por la mayor parte de las señales de comunicaciones[1] en el procesado de señal en arrays ha experimentado un notable crecimiento recientemente. Nuevas técnicas para abordar los problemas clásicos de estimación de ángulo y conformación de haz basadas en parámetros estadísticos de señales cicloestacionarias han sido desarrolladas por diversos autores[2,3,4]. El objeto de esta comunicación es estudiar las propiedades elementales de la matriz de correlación cíclica (definida más adelante), ya que constituye el elemento de partida para la mayor parte de las nuevas técnicas mencionadas.

Para ello se introduce en primer lugar el modelo de señal habitual en arrays de banda estrecha, definiendo la matriz de correlación cíclica. Seguidamente se estudian sus propiedades básicas, sobre las que se apoya el procesado posterior. Dichas propiedades son comparadas con sus homólogas para la matriz de correlación clásica. Aspectos de implementación práctica tales como el número de muestras necesario para una convergencia aceptable y la sensibilidad frente a pequeños errores en la velocidad de muestreo son también objeto de un análisis intuitivo y empírico. Por último, varias simulaciones nos sirven para confirmar la bondad de los resultados teóricos.

MODELO DE SEÑAL Y NOTACION

El término array define una estructura compuesta por un número determinado de sensores, localizados en diferentes posiciones del espacio. Sea N el número de sensores y $x_i(n)$, $i=1..N$ la señal recibida por el sensor i -ésimo. Cuando sobre dicha estructura incide un cierto número M de señales $s_k(n)$ ($k=1..M$), como muestra la figura 1, el vector $\mathbf{x}(n)=[x_1(n), \dots, x_N(n)]^T$ de señales recogidas en los sensores del array puede expresarse como:

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k=1}^M \mathbf{a}_k s_k(n) + \mathbf{w}(n) \quad (1)$$

donde:

\mathbf{a}_k Vector DOA generalizado de la fuente k -ésima.

$\mathbf{w}(n)$ Ruido térmico aditivo generado en los sensores.

Nótese que los vectores \mathbf{a}_k no sólo tienen en cuenta fenómenos de propagación asociados a las fuentes (p.ej: propagación multicamino), sino también factores asociados a los propios sensores (diagrama de recepción, desajustes de fase en la conversión a banda base, etc.). Bajo las hipótesis de banda estrecha y campo lejano (frente de onda plano) todos estos fenómenos aparecen englobados en un único vector complejo \mathbf{a}_k [5].

La expresión anterior adopta una forma más sencilla definiendo la matriz \mathbf{A} de direcciones de llegada generalizadas como $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M]$, permitiéndonos escribir:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (2)$$

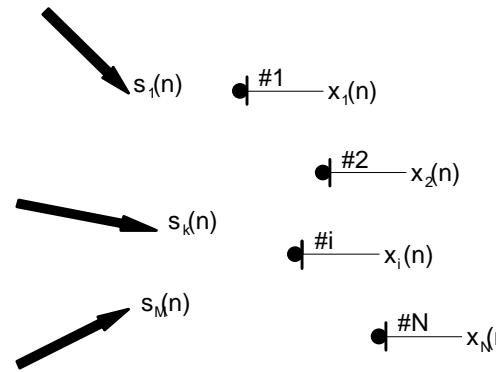


Figura 1

¹Este trabajo ha sido financiado por la CICYT, proyecto TIC92-0800-C05-05

donde $\mathbf{s}(n)=[s_1(n), \dots, s_M(n)]^T$ es el vector de señales incidentes.

Las técnicas habituales de procesamiento de señal en arrays están basadas en el análisis y las propiedades de la matriz de correlación, definida como:

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} \quad (3)$$

Cuando se pretende explotar la cicloestacionariedad de alguna o algunas de las señales incidentes se recurre a la construcción de la matriz de correlación cíclica:

$$\mathbf{R}_{xx}(N, k, m) = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right\} \quad (4)$$

donde N es el período de la función de autocorrelación de la señal deseada, y k, m son parámetros que deben seleccionarse de acuerdo con las propiedades de cicloestacionariedad que dicha señal posea. Obsérvese que si $k=m=0$ o $N=1$, la matriz de correlación cíclica coincide con la matriz clásica. En adelante supondremos que la selección de los parámetros se ha realizado de forma tal que esto no ocurra, y se asumirá que el parámetro N es conocido, simplificando la notación.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA MATRIZ DE CORRELACION CICLICA

Aunque algunos de los resultados que se expondrán a continuación son generalizables con suma sencillez, en lo que sigue limitaremos el análisis bajo la hipótesis de que las fuentes son independientes. Supondremos asimismo que P de las M fuentes presentan autocorrelación cíclica distinta de cero para los parámetros N, k y m seleccionados, mientras que las $M-P$ fuentes restantes tienen una función de autocorrelación cíclica cero para dichos valores de los parámetros. Esto no quiere decir que no sean también cicloestacionarias, sino únicamente que no lo son para los valores de N, m y k elegidos. En esas condiciones podemos establecer los siguientes enunciados para la matriz de correlación cíclica de parámetros N, k y m :

§1. *El rango de la matriz de correlación cíclica es P*

Demostración: Sustituyendo (2) en (4), extrayendo fuera del operador esperanza los términos deterministas y teniendo en cuenta que el ruido está incorrelado con las fuentes, encontramos:

$$\mathbf{R}_{xx}(k, m) = \mathbf{A}E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^H(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right\} \mathbf{A}^H + E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{w}\right\} \quad (5)$$

El término asociado al ruido sólo permanecerá si $m=0$ y el fasor $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=1$. Seleccionando valores de k, N y m que eviten esta situación encontramos:

$$\mathbf{R}_{xx}(k, m) = \mathbf{A}E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{s}(n) \mathbf{s}^H(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right\} \mathbf{A}^H \quad (6)$$

pero como las señales son independientes, la matriz central es diagonal de la forma:

(7)

y por lo tanto la matriz de correlación cíclica tiene rango P (siempre que $P < N$ y que los P vectores DOA generalizados sean linealmente independientes).

La matriz de correlación clásica, por el contrario, tiene rango N . Llevando a cabo un análisis similar para dicha matriz encontramos que los términos diagonales que en la matriz cíclica se hacen ceros en la matriz clásica se cubren con las potencias medias de las $M-P$ señales restantes y el ruido, quedando una matriz de rango completo. La ventaja de la matriz de correlación cíclica es obvia: si los parámetros N, k y m han sido correctamente seleccionados, sólo la información relacionada con las señales deseadas aparece en la matriz, siendo eliminada la información referente a interferencias y ruido.

§2. *La matriz de correlación cíclica tiene un autovalor cero de multiplicidad $N-P$*

Demostración: Directamente a partir del resultado anterior:

$$\dim(\text{null}(\mathbf{R}_{xx}(k,m)))=N-\text{rank}(\mathbf{R}_{xx}(k,m))=N-P \quad (8)$$

luego el autovalor cero debe aparecer con multiplicidad $N-P$

- §3. *El subespacio vectorial generado por los autovectores asociados a los autovalores no nulos de la matriz de correlación cíclica coincide con el que generan los P vectores DOA generalizados de las señales que contribuyen a la matriz*

Demostración: La matriz de correlación cíclica puede expresarse como:

$$\mathbf{R}_{xx}(k, m) = \sum_{i=1}^P \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^H \mathbf{r}_{s_i s_i}(k, m) \quad (9)$$

de forma que para cualquier autovector \mathbf{v}_r asociado a un autovalor λ_r no nulo ($r=1..P$) podemos escribir:

$$\mathbf{R}_{xx}(k, m) \mathbf{v}_r - \lambda_r \mathbf{v}_r = 0 \quad - \quad \sum_{i=1}^P \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^H \mathbf{v}_r - \lambda_r \mathbf{v}_r = 0 \quad (10)$$

de donde se deduce que el autovector \mathbf{v}_r es linealmente dependiente del conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_P\}$. Como esto ocurre para todo $r, r=1..P$, y los autovectores \mathbf{v}_r son l.i., el s.e.v. generado por los dos conjuntos de vectores debe ser el mismo.

El mismo resultado se obtenía para la matriz de correlación clásica, pero cambiando P por M . Nuevamente, la ventaja reside en haber reducido la dimensión del subespacio de señal únicamente a aquellas señales consideradas de interés. En el caso $P=1$, el enunciado §3 cobra especial importancia, ya que la dimensión del s.e.v. de señal es 1, y por tanto el autovector asociado al único autovalor no nulo coincide con el vector DOA generalizado de la señal de interés.

- §4. *El subespacio vectorial generado por los autovectores asociado al autovalor nulo es ortogonal al s.e.v. generado por los vectores DOA generalizados de las P señales de interés.*

Demostración: Al igual que en el punto §3, podemos escribir para \mathbf{v}_q ($q=P+1..M$):

$$\mathbf{R}_{xx}(k, m) \mathbf{v}_q = \sum_{i=1}^P \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^H \mathbf{r}_{s_i s_i}(k, m) \mathbf{v}_q = 0 \quad (11)$$

y como los vectores \mathbf{a}_i son l.i. la única solución a la igualdad anterior viene dada por la ortogonalidad de los vectores \mathbf{a}_i y \mathbf{v}_q , c.p.d.

De nuevo este resultado es importado de su análogo para la matriz de correlación clásica. Se trata de un resultado bien conocido y ha dado lugar a numerosos algoritmos de estimación de direcciones de llegada para señales cicloestacionarias.

Con este resultado damos por concluido el estudio de las propiedades básicas de la matriz de correlación cíclica, y pasamos a estudiar qué ocurre cuando la matriz no se conoce y debe ser estimada a partir de los datos recibidos, lo que constituye la situación más frecuente.

COMPARACION DE LA VELOCIDAD DE CONVERGENCIA

Tal y como ha quedado demostrado en el apartado anterior, el valor esperado de la matriz de correlación cíclica contiene únicamente información sobre las señales deseadas. Desafortunadamente, dicha matriz se desconoce y únicamente podemos aproximarnos a ella a través de una estimación, suponiendo que las señales que intervienen son cicloergódicas. Obviamente, si construimos el estimador:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k, m) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n-m) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (12)$$

obtenemos que se trata de un estimador insesgado, es decir:

$$E\{\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k, m)\} = \mathbf{R}_{xx}(k, m) \quad (13)$$

Un estimador paralelo puede definirse para la matriz de correlación clásica. Para poder comparar la velocidad de convergencia, es decir, para poder determinar el valor de L necesario para tener la misma varianza en la estimación de ambas matrices necesitaremos calcular el factor siguiente:

$$E\left\{\left|\hat{R}_{xx}(k, m) - R_{xx}(k, m)\right|^2\right\} \quad (14)$$

y su homólogo para la matriz de correlación clásica. Incluso en el caso más simple posible (una sola señal incidente sobre un array compuesto por dos sensores), el resultado anterior depende de las estadísticas de 4º orden de las señales que intervienen. Sin embargo, lo que realmente nos interesa es conocer cómo y cuanto se desvían los autovalores y autovectores de la matriz estimada respecto a la ideal. Para ello debemos acudir a la teoría de perturbaciones. Los resultados son aún más desalentadores, ya que las cotas aplicables (Gerschgorin, Ostrowsky) [6] dan márgenes demasiado amplios para resultar útiles. Así pues, únicamente podemos apoyarnos en resultados procedentes de simulaciones como los que se mostrarán en el apartado siguiente. En cualquier caso, parece que los resultados para el autovector asociado a una señal cualquier $s(n)$ están íntimamente ligados al módulo del parámetro $\gamma_{ss}(k, m)$ definido como:

$$\gamma_{ss}(k, m) = \frac{E\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) s^*(n-m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right\}}{E\{s(n) s^*(n)\}} \quad (15)$$

que mide de alguna manera la cantidad de cicloestacionaridad presente en la señal $s(n)$. Los resultados empeoran si $\gamma_{ss}(k, m)$ disminuye. Puesto que la cota superior de este parámetro es 1, la velocidad de convergencia es menor cuando se estima la matriz de correlación cíclica. Es decir, la matriz de correlación cíclica presenta menor fiabilidad en los autovectores que la matriz clásica. Para obtener márgenes de error semejantes se hace necesario aumentar el número de muestras a procesar o la potencia de las señales incidentes. En las simulaciones se ofrece un ejemplo que ilustra esta afirmación.

SENSIBILIDAD FRENTE AL PARAMETRO k

Otro concepto interesante es la sensibilidad de la matriz estimada frente al parámetro k . De hecho, equivale a estudiar la sensibilidad frente a pequeños errores de muestreo, es decir, qué ocurre si este es demasiado lento o demasiado rápido. Denominando Δk al error en el parámetro k , podemos escribir:

$$\hat{R}_{xx}(k + \Delta k, m) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} [x] e^{-j\frac{2\pi}{N}\Delta kn} \quad (16)$$

que, dado que la expresión en el interior del corchete tiende a su valor esperado, puede interpretarse como una transformada de Fourier en Δk de la ventana utilizada para estimar la matriz (en este caso rectangular). El resultado es coherente ya que, cuando $L \rightarrow \infty$, su transformada de Fourier en Δk tenderá a $\delta(\Delta k)$, y éste es precisamente el resultado que se obtiene para la matriz de correlación ideal:

$$R_{xx}(k + \Delta k, m) = \begin{cases} 0 & \Delta k \neq 0 \\ R_{xx}(k, m) & \Delta k = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Aunque este resultado no puede trasladarse directamente sobre su efecto en los autovectores y autovalores de la matriz estimada, por los mismos argumentos que hemos usado en el apartado anterior, si cabe esperar que la tolerancia del sistema a errores en el parámetro k venga limitada por la longitud de la ventana de estimación utilizada. Es decir, el sistema será tanto más robusto cuanto más corta sea la ventana usada. Pero también perderá capacidad de rechazar interferencias y ruido. Este compromiso debe ser resuelto para cada escenario particular y teniendo en cuenta el postprocesado que se realice.

SIMULACIONES

1ª. Descripción: Sobre un array lineal equiespaciado de 5 sensores se hicieron incidir 3 señales BPSK de idéntica potencia (0 dB) pero distinta velocidad de símbolo (2,3 y 5 muestras por símbolo) en distintas direcciones (0°, 30° y -25°). Los valores de N, k y m seleccionados fueron respectivamente 2, 1 y 1.

Resultados: En la figura 2 puede observarse la evolución de los autovalores de ambas matrices de correlación. Se observa como sólo uno de los autovalores de la matriz cíclica (el que se asocia a la señal deseada) permanece, mientras el resto tienden a cero a medida que el número de muestras usado en la estimación crece. En la matriz

clásica, como era de esperar, los autovalores se mantienen distintos de cero tanto para las señales como para el ruido, resultando imposible discriminar señal deseada e interferencias.

2ª. Descripción: Igual que en el ejemplo anterior, pero se retiraron las señales interferentes (-40° y 25°).

Resultados: En la figura 3 se observa el error en la estimación del autovector de señal en ambas matrices en función de la relación señal a ruido, para distintos tiempos de ventana usados en la estimación, donde queda claramente manifiesta la menor fiabilidad de los autovectores de la matriz cíclica, y cómo esta pérdida puede compensarse aumentando el número de muestras utilizado en la estimación de la matriz.

La figura 4 muestra, para una relación SNR de 10 dB y varios tiempos de ventana, el error cometido en la estimación del autovector de señal, en función del error en el parámetro k , Δk . Es interesante observar cómo el error sigue aproximadamente un comportamiento dado por la transformada de Fourier de la ventana utilizada en la estimación. Una consecuencia directa es el aumento de sensibilidad del sistema frente a Δk a medida que el tiempo de ventana aumenta.

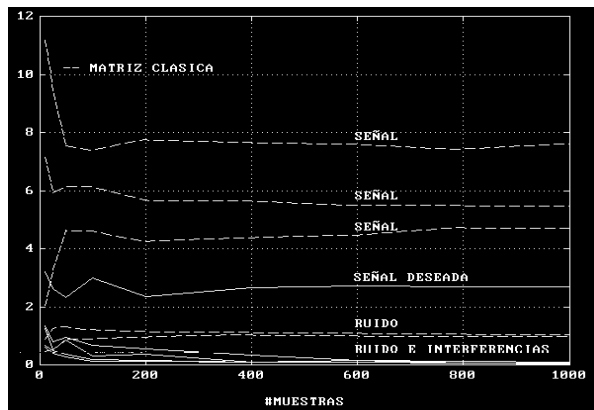


Figura 2. La matriz clásica presenta un autovalor diferenciado por cada una de las señales incidentes. La matriz cíclica sólo distingue la señal deseada.

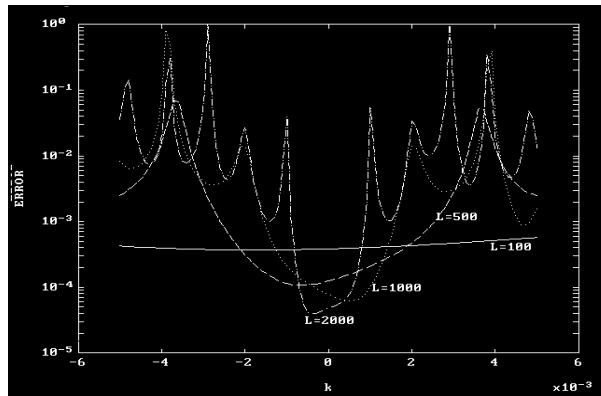


Figura 3. Sensibilidad a la estimación del autovector de señal en función del error en el parámetro k , Δk . Se observa que el comportamiento del error depende de la transformada de Fourier de la ventana usada para la estimación.

CONCLUSIONES

Los resultados mostrados prueban que la matriz de correlación cíclica es una poderosa herramienta de cara a la clasificación y separación de señales, ofreciendo prestaciones superiores a las de la matriz clásica. Sin embargo, para obtener las mismas cotas de error se precisa un aumento considerable de la SNR de las señales o, en su defecto, del tiempo de ventana utilizado. Por último, el estudio de la sensibilidad muestra que ésta empeora de forma directamente proporcional al aumento del tiempo de ventana, pero manteniéndose en cualquier caso en cotas aceptables, lo que facilita la estimación práctica de dicha matriz.

REFERENCIAS

- [1] Gardner, W.A., "Spectral Correlation of modulated signals: Part I & II", IEEE Transactions on Comm., vol. 35, nº 6, pp. 584-601, Jun. 1987
- [2] B.G. Agee, S.V. Schell and W.A. Gardner, "Spectral Self-Coherence Restoral: A New Approach to Blind Adaptive Signal Extraction Using Antenna Arrays", Proc. IEEE, vol. 78, April 1990.
- [3] S.V. Schell, R.A. Calabretta, W.A. Gardner and B.G. Agee, "Cyclic MUSIC Algorithms for Signal-Selective Direction Estimation", Proc. IEEE, ASSP, pp. 2278-2281, Glasgow, Scotland, May 1989.
- [4] J.R. Cerquides, J.A. Fernández-Rubio, O. Muñoz, "Applebaum adaptive beamformer with steering vector estimation for cyclostationary signals", 3rd Workshop Cost #229, Bayona, Pontevedra, 1993.
- [5] R.T. Compton, "Adaptive Antennas", Prentice Hall Inc, 1988.
- [6] J.H. Wilkinson, "The Algebraic Eigenvalue Problem", pp. 63-81, Clarendon Press, Oxford, 1965.