Redes estrella con la M–propiedad[S]

A. M. Encinas[a]

(a) *Departament de Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya.*
E-mail: `andres.marcos.encinas@upc.edu`

Resumen. En este trabajo hacemos una aportación al problema inverso de M–matrices irreducibles, simétricas y singulares, que consiste en determinar cuándo su inversa de grupo es también una M–matriz. Mostramos primero que las matrices involucradas son las asociadas a operadores de Schrödinger sobre redes cuyo potencial está determinado por un peso sobre el conjunto de vértices. Particularizamos el análisis al caso de redes cuyo grafo subyacente es una estrella y mostramos que existen infinitos operadores de Schrödinger sobre ellas que satisfacen la propiedad descrita.

Palabras clave. *M–matrices, Inversa de grupo, Problema inverso de M–matrices, Estrellas.*

---

1 Introducción

Las M–matrices aparecen de forma natural en discretizaciones que involucran operadores diferenciales de tipo elíptico, que pueden ser considerados como una generalización del Laplaciano. Las propiedades de las M–matrices las hacen además especialmente adecuadas para resolver mediante métodos iterativos los sistemas lineales resultantes de tales discretizaciones . Asimismo, en un contexto puramente discreto, las M–matrices aparecen asociadas al tratamiento de diversos problemas relativos a cadenas de Markov, ver por ejemplo [7].

Uno de los problemas más relevantes en la teoría de M–matrices consiste en determinar cuándo la inversa de grupo de una M–matriz irreducible, simétrica y singular es asimismo una M–matriz. Este difícil problema ha generado una enorme cantidad de producción científica y ha podido ser resuelto sólo en casos muy concretos, ver por ejemplo [2, 3, 5, 6].

Como los elementos no diagonales de las M–matrices son no negativos, cada M–matriz puede identificarse con un operador de Schrödinger definido sobre el grafo asociado a la matriz. De esta forma, la irreducibilidad de tal matriz no es

---

[S] Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología a través de los proyectos MTM2011-28800-C02-01 y MTM2011-28800-C02-02.

sino la contrapartida de que el grafo en cuestión sea conexo. En este contexto, y asumiendo que el operador de Schrödinger es singular y semidefinido positivo, el problema citado corresponde a caracterizar aquellos operadores cuya función de Green tiene asociada una M–matriz. Hasta la fecha, la mayor parte de los trabajos en este ámbito tratan con el Laplaciano combinatorio de una red, en cuyo caso el problema planteado consiste en determinar bajo qué condiciones su inversa de grupo es también el Laplaciano combinatorio de una red.

En este trabajo presentamos un análisis del problema general; es decir, referido a cualquier M–matriz irreducible, simétrica y singular, cuando el grafo subyacente es una estrella.

2 Preliminares

En todo este trabajo $\Gamma = (V, E)$ denotará un grafo finito y conexo, sin lazos ni ramas múltiples, con conjunto de vértices V y conjunto de ramas E. Siempre asumiremos que n es el cardinal de V. El conjunto de funciones reales definidas sobre V se denotará por $\mathcal{C}(V)$. El producto escalar estándar sobre $\mathcal{C}(V)$ se denota por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de manera que si $u, v \in \mathcal{C}(V)$ entonces $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{x\in V} u(x)\, v(x)$. Si $u \in \mathcal{C}(V)$, el subespacio de $\mathcal{C}(V)$ ortogonal a u será denotado por $u^{\perp}$.

Una función $\omega \in \mathcal{C}(V)$ se denomina *peso* si satisface que $\omega(x) > 0$ para cada $x \in V$ y además $\langle\omega, \omega\rangle = 1$. El conjunto de pesos se denota por $\Omega(V)$.

Una *red, con grafo subyacente* Γ *y conductancia* c*,* es el par (Γ, c) donde $c\colon V \times V \longrightarrow (0, +\infty)$ es una función simétrica; es decir, tal que $c(x, y) = c(y, x)$ para cada $x, y \in V$, que satisface que $c(x, y) > 0$ sii $\{x, y\} \in E$. Denominamos *grado de la red* a la función $\kappa \in \mathcal{C}(V)$ definida como $\kappa(x) = \sum\limits_{y\in V} c(x, y)$.

El *Laplaciano combinatorio*, o simplemente el *Laplaciano*, de la red Γ es el endomorfismo $\mathcal{L} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ que a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ le asigna la función

$$\mathcal{L}(u)(x) = \sum_{y\in V} c(x, y)\big(u(x) - u(y)\big) = \kappa(x)u(x) - \sum_{y\in V} c(x, y)\, u(y), \quad x \in V. \qquad (1)$$

Es bien conocido que el Laplaciano de una red es un operador autoadjunto, semidefinido positivo, singular y que además $\mathcal{L}(u) = 0$ sii u es una función constante, ya que el grafo subyacente a la red es conexo.

Para cada función $q \in \mathcal{C}(V)$, el *operador de Schrödinger* sobre (Γ, c) con *potencial* q es el endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$ que asigna a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ la función $\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}(u) + qu$.

Si $\omega \in \Omega(V)$, la función $q_\omega = -\omega^{-1}\mathcal{L}(\omega)$ se denomina *potencial determinado por* ω. Claramente, $q_\omega = 0$ sii ω es constante y entonces el operador de

Schrödinger con potencial q_ω es precisamente el Laplaciano de la red . Más generalmente, como $\langle \omega, q_\omega \rangle = 0$ resulta que q_ω toma valores positivos y negativos, excepto cuando ω es constante.

La caracterización de operadores de Schrödinger semidefinidos positivos y singulares está dada por el siguiente resultado, ver [1, Proposición 3.3].

Proposición 1. *Si $q \in \mathcal{C}(V)$, el operador de Schrödinger $\mathcal{L}_q$ es semidefinido positivo y singular sii existe un peso $\omega \in \Omega(V)$ tal que $q = q_\omega$. Además ω está unívocamente determinado y $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = 0$ sii $u = a\omega$, $a \in \mathbb{R}$.*

3 Redes con la M–propiedad

Fijados la red (Γ, c) y el peso $\omega \in \Omega(V)$, las propiedades del operador de Schrödinger $\mathcal{L}_{q_\omega}$ determinan que para cada $f \in \mathcal{C}(V)$ la *ecuación de Poisson* $\mathcal{L}_{q_\omega}(u) = f$ tiene solución sii $f \in \omega^\perp$ y entonces, existe una única solución $u \in \omega^\perp$, ver [4, Proposition 2.1]. En definitiva, $\mathcal{L}_{q_\omega}$ determina un ismorfismo en $\omega^\perp$ cuyo inverso se denomina *operador de Green, respecto de ω.*

Si consideramos $\mathcal{P}_\omega : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$, la proyección sobre ω, definida como $\mathcal{P}_\omega(f) = \langle \omega, f \rangle \omega$, entonces el operador de Green respecto de ω puede identificarse con el endomorphismo $\mathcal{G}_\omega : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ asignando a cada $f \in \mathcal{C}(V)$ la única solución de la ecuación de Poisson con dato $f - \mathcal{P}_\omega(f)$ perteneciente a $\omega^\perp$.

Es sencillo comprobar que $\mathcal{G}_\omega$ es un operador autoadjunto, positivo semidefinido y singular, que $\mathcal{G}_\omega(u) = 0$ sii $u = a\omega$, $a \in \mathbb{R}$ y además que se satisface que

$$\mathcal{L}_{q_\omega} \circ \mathcal{G}_\omega = \mathcal{G}_\omega \circ \mathcal{L}_{q_\omega} = \mathcal{I} - \mathcal{P}_\omega, \tag{2}$$

donde $\mathcal{I}$ es la identidad.

Definimos la *función de Green, respecto de* ω como $G : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G_\omega(x, y) = \langle \mathcal{G}_\omega(\varepsilon_y), \varepsilon_x \rangle$, donde ε_z denota la función de Dirac en $z \in V$. Como para cada $x \in V$, ε_x no puede ser múltiplo de ω, ya que $\omega(y) > 0$ para $y \neq x$, resulta que $G_\omega(x, x) = \langle \mathcal{G}_\omega(\varepsilon_x), \varepsilon_x \rangle > 0$ para cada $x \in V$.

Definición 1. *Diremos que la red (Γ, c) tiene la M–propiedad respecto del peso $\omega \in \Omega(V)$, si $G_\omega(x, y) \leq 0$ para cada $x, y \in V$ con $x \neq y$.*

En el caso particular en el que ω es constante, es decir, cuando el operador de Green es el inverso del Laplaciano combinatorio en el subespacio ortogonal a las funciones constantes, si se satisface la propiedad de la definición anterior, diremos simplemente que la red (Γ, c) tiene la M–propiedad.

Si etiquetamos los vértices de V como $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces el operador de Schrödinger de potencial q puede ser identificado con L_q, la Z–matriz simétrica e irreducible de orden n cuyas entradas no diagonales están dadas por $-c(x_i, x_j)$, $i \neq j$ y cuyas entradas diagonales están dadas por $\kappa(x_i)+q(x_i)$. La irreducibilidad de la matriz L_q está determinada por la hipótesis inicial de que el grafo Γ es conexo.

Con esta identificación, la Proposición 1 establece que L_q es una M–matriz singular sii $q = q_\omega$. Realizando una identificación análoga entre la función de Green y G_ω la matriz de orden n cuyas entradas están dadas por $G_\omega(x_i, x_j)$, entonces G_ω es una matriz simétrica, irreducible, y semidefinida positiva. Además, las identidades (2) implican que $\mathsf{G}_\omega = \mathsf{L}^{\#}_{\mathsf{q}_\omega}$, donde $\mathsf{L}^{\#}_{q_\omega}$ es la *inversa de grupo* de la matriz L_{q_ω}, que en este caso sabemos coincide su inversa de Moore–Penrose.

Por tanto, una red satisface la M–propiedad respecto del peso $\omega \in \Omega$ sii $\mathsf{L}^{\#}_{q_\omega}$ es una M–matriz. En particular, una red satisface la M–propiedad sii la inversa de grupo de su Laplaciano es una M–matriz.

A pesar de su importancia en las aplicaciones, el problema de determinar qué M–matrices irreducibles y singulares satisfacen que su inversa de grupo es también una M–matriz únicamente ha sido abordado en casos muy concretos y, hasta muy recientemente, sólo a la inversa de grupo de laplacianos combinatorios, lo que en nuestra terminología equivale a determinar cuándo una red satisface la M–propiedad.

Así, Y. Chen *et al.* establecieron en [5] que un *camino pesado*; es decir de una red cuyo grafo subyacente es un camino, satisface la M–propiedad sólo cuando el número de sus vértices es menor o igual a 4 y tanto para caminos pesados de 3 ó 4 vértices esta propiedad sólo puede darse bajo severas restricciones sobre los valores de las conductancias. Más generalmente, S.J. Kirkland *et al.* demostraron en [6] que los únicos árboles pesados; es decir, redes cuyo grafo subyacente es un árbol, que satisfacen la M–propiedad son, además de los caminos de orden menor o igual que 4 referidos anteriormente, las estrellas que satisfacen ciertas restricciones sobre las conductancias. En este caso, logran concluir que, bajo dichas restricciones, exiten infinitas estrellas de cualquier número de vértices que satisfacen la M–propiedad.

La aplicación de técnicas de la Teoría del Potencial a este problema, y más concretamente el estudio de las propiedades de los operadores de Schrödinger semidefinidos positivos, permite plantearse el problema con más generalidad. Por ejemplo, en [2] se demostró que para cada n, existen infinitos pesos $\omega \in \Omega(V)$ e infinitas conductancias tales que el correspondiente camino con dicha conductancia tiene la M–propiedad, respecto de ω. Desde el punto de vista de la teoría de matrices esto significa que si bien no existen M–matrices de Jacobi, irreducibles, simétricas, singulares y diagonalmente dominantes de orden mayor que 4, si eliminamos la hipótesis de dominancia en la diagonal, existen familias infinitas de tales matrices para cada orden fijado. No obstante, la descripción completa de este tipo de matrices sigue siendo un problema abierto. Como muestra de su dificultad, basta observar que en el caso $n = 4$ en [3] se determinaron explícitamente hasta 10 familias infinitas de dichas matrices, pero aunque ese estudio es prácticamente exhaustivo, no alcanza a obtener todas las matrices de Jacobi con tal propiedad.

El objetivo de este trabajo es extender los resultados conocidos para redes cuyo grafo subyacente es una estrella.

4 Estrellas con la M–propiedad

En esta sección supondremos que el grafo Γ es una *estrella*, o de forma equivalente un árbol de diámetro igual a 2. Concretamente, Γ representará la estrella de $n+1$ vértices $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, cuyo centro es x_0. Para cada $c_1, \ldots, c_n > 0$, definiremos la conductancia, c, sobre la estrella como $c(x_0, x_j) = c_j$, $j = 1, \ldots, n$ y $c(x_i, x_j) = 0$ en otro caso, ver la Figura 1.

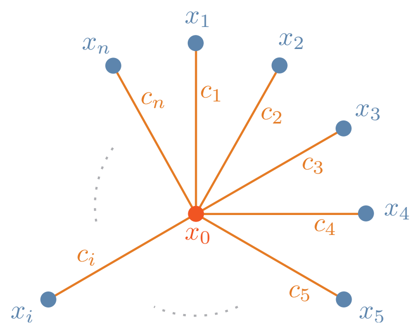

Fig. 1: Estrella de $n+1$ vértices

Resulta entonces que para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ se tiene que

$$\mathcal{L}(u)(x_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j \big(u(x_0) - u(x_j)\big) \text{ y } \mathcal{L}(u)(x_j) = c_j \big(u(x_j) - u(x_0)\big), \;\; j = 1, \ldots, n.$$

En particular, si para cada $\omega \in \Omega(V)$, consideramos $w_j = \omega(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$, entonces $q_\omega(x_j) = \dfrac{c_j}{w_j}(w_0 - \omega_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Teorema 1. *Dados $c_1, \ldots, c_n > 0$ y $\omega \in \Omega(V)$, la estrella (Γ, c) tiene la M–propiedad respecto de ω sii*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k^3}{c_k} \le \frac{w_j}{c_j}, \quad \textit{para cada } j = 1, \ldots, n.$$

Demostración. Aunque no es difícil realizar los cálculos directamente, tomando el valor $\lambda = 0$ en [4, Corolario 5.3], obtenemos que la función de Green de la estrella, respecto de ω, está dada por

$$
\begin{aligned}
G_\omega(x_0, x_0) &= w_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k^3}{c_k}, \\
G_\omega(x_j, x_0) &= w_j \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k^3}{c_k} - \frac{w_j}{c_j} \right], && j = 1, \dots, n, \\
G_\omega(x_j, x_j) &= \frac{w_j^2}{w_0} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k^3}{c_k} - \frac{2w_j}{c_j} \right] + \frac{w_j}{c_j w_0}, && j = 1, \dots, n, \\
G_\omega(x_i, x_j) &= \frac{w_i w_j}{w_0} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k^3}{c_k} - \frac{w_i}{c_i} - \frac{w_j}{c_j} \right], && i, j = 1, \dots, n, \ i \neq j.
\end{aligned}
$$

El resultado es una consecuencia inmediata de las anteriores identidades. $\square$

Observar que al menos una de las desigualdades que aparecen en el resultado anterior ha de ser estricta. En otro caso, $c_j = a w_j$, $a = \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{w_k^3}{c_k} \big)^{-1}$, $j = 1, \dots, n$, lo que implicaría que $1 - w_0^2 = 1$, lo que es imposible, pues $w_0 > 0$.

En el resto de la sección utilizaremos los siguientes convenios y notaciones. El vector nulo de $\mathbb{R}^n$ y el vector cuyas compenentes son todas iguales a 1 se representarán como $\mathsf{0}$ y e, respectivamente.

Si $\mathsf{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{v} \geq 0$ ($\mathsf{v} > 0$) significa que $v_j \geq 0$ ($v_j > 0$), para cada $j = 1, \dots, n$. Si $\mathsf{v} > 0$, entonces v^{-1} denota el vector $\mathsf{v}^{-1} = (v_1^{-1}, \dots, v_n^{-1})$.

Para cada conductancias $c_1, \dots, c_n > 0$ y cada peso $\omega \in \Omega(V)$, consideraremos los vectores $\mathsf{c} = (c_1, \dots, c_n)^\top$ y $\mathsf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\top$ y el conjunto

$$
\mathsf{C}(\omega) = \left\{ \mathsf{c} > 0 : \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k^3}{c_k} \leq \frac{w_j}{c_j} \right\},
$$

que denominaremos conjunto de *conductancias admisibles, respecto de* ω.

El problema de determinar si la estrella (Γ, c) tiene la M–propiedad respecto de $\omega \in \Omega(V)$ se reduce pues a comprobar si $\mathsf{c} \in \mathsf{C}(\omega)$. Nuestra estrategia será determinar, para cada peso $\omega \in \Omega(V)$, el conjunto de conductancias admisibles, respecto de ω; es decir $\mathsf{C}(\omega)$. Para ello, si $\omega \in \Omega(V)$, consideraremos las matrices de orden n

$$\mathsf{J}(\omega)=\begin{bmatrix} w_1^2 & w_2^2 & \cdots & w_n^2\\ w_1^2 & w_2^2 & \cdots & w_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ w_1^2 & w_2^2 & \cdots & w_n^2\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathsf{D}(\omega)=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & w_n\end{bmatrix}^{-1}.$$

La matriz $\mathsf{I}-\mathsf{J}(\omega)$ es una Z–matriz irreducible y diagonalmente dominante con entradas diagonales positivas. Por tanto, es una M–matriz invertible, lo que implica que $\big(\mathsf{I}-\mathsf{A}(\omega)\big)^{-1}>0$. No obstante, podemos obtener este resultado directamente: Como $\mathsf{J}(\omega)^2=(1-\omega_0^2)\mathsf{J}(\omega)$, resulta que

$$\big(\mathsf{I}-\mathsf{J}(\omega)\big)\big(\mathsf{I}+\omega_0^{-2}\mathsf{J}(\omega)\big)=\mathsf{I}-\mathsf{J}(\omega)+\omega_0^{-2}\mathsf{J}(\omega)-\omega_0^{-2}\mathsf{J}(\omega)^2=\mathsf{I}.$$

Este resultado, permite reformular el Teorema 1 de la forma siguiente.

Proposición 2. *Para cada $\omega\in\Omega(V)$, el conjunto de conductancias admisibles respecto de ω, es la imagen del cono de vectores no negativos y no nulos de $\mathbb{R}^n$ por la matriz positiva $\mathsf{D}(\omega)\big(\omega_0^2\mathsf{I}+\mathsf{A}(\omega)\big)$; es decir,*

$$\mathsf{C}(\omega)=\Big\{\mathsf{c}>0:\mathsf{c}^{-1}=\mathsf{D}(\omega)\big(\omega_0^2\mathsf{I}+\mathsf{J}(\omega)\big)\mathsf{a},\ \ \mathsf{a}\geq 0,\ \ \mathsf{a}\neq \mathsf{0}\Big\}$$

Demostración. Basta observar que $c_1,\ldots,c_n>0$ y $\omega\in\Omega(V)$ satisfacen las desigualdades del Teorema sii $\big(\mathsf{I}-\mathsf{J}(\omega)\big)\mathsf{D}(\omega)^{-1}\mathsf{c}^{-1}\geq \mathsf{0}$. □

La proposición anterior tiene como consecuencia inmediata que para cada n y cada peso existen infinitas redes estrella de $n+1$ vértices, es decir infinitas conductancias c sobre la estrella Γ, tales que (Γ,c) tiene la M–propiedad, respecto del peso. En particular, si ω es el peso constante, entonces la red estrella (Γ,c) tiene la M–propiedad sii la conductancia satisface que

$$\mathsf{c}^{-1}=\big(\mathsf{I}+\mathsf{J}\big)\mathsf{a},\ \ \mathsf{a}\geq 0,\ \ \mathsf{a}\neq\mathsf{0}.$$

Este resultado también fue obtenido en [6, Theorem 2.3], y es una de las conclusiones fundamentales de dicho trabajo. En particular, si $n=3$, la anterior identidad es equivalente a que se satisfagan las desigualdades $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{c_1}{c_2}\leq 2$, resultado que también apareció en [5].

En general, describir explícitamente las conductancias admisibles para un peso dado requeriría un análisis complicado de las relaciones que aparecen en la proposición anterior, que es imposible detallar aquí incluso para el caso en el que el peso es constante.

Concluiremos este trabajo cambiando ligeramente el enfoque, mostrando que para cada conductancia c sobre la estrella, existen pesos, de hecho una familia infinita de pesos, tales que (Γ, c) tiene la M–propiedad, respecto de cada uno de ellos.

Corolario 1. *Dados $c_1, \dots, c_n > 0$, para cada $s > 0$ consideremos el escalar $t(s) = (c_1^2 + \cdots + c_n^2 + s^2)^{-\frac{1}{2}}$ y $\omega(s) \in \Omega(V)$ el peso definido como $\omega(s)(x_i) = t(s)c_i$, $i = 1, \dots, n$ y $\omega(s)(x_0) = st(s)$. Entonces $\omega(s) = \omega(s')$ sii $s = s'$ y además $\mathsf{c} \in \mathsf{C}\big(\omega(s)\big)$ para cada $s > 0$.*

Demostración. Observemos primero que $\mathsf{D}(\omega)\big(\omega_0^2\mathsf{I} + \mathsf{J}(\omega)\big)\mathsf{e} = \mathsf{w}^{-1}$, para cada $\omega \in \Omega(V)$. Por otra parte, si $s > 0$ entonces $\omega(s) \in \Omega(V)$ y además $\omega(s) = \omega(s')$ sii $t(s) = t(s')$ y esto ocurre sii $s = s'$. Finalmente, como $\mathsf{w}(s) = t(s)\mathsf{c}$, es suficiente considerar $\mathsf{a} = t(s)\mathsf{e}$ en la Proposición 2. $\square$

Referencias

[1] Bendito, E., Carmona, A. y Encinas, A.M. Potential theory for Schrödinger operators on finite networks, *Rev. Mat. Iberoamericana* **21** (2005), 771–818.

[2] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M. y Mitjana, M. The M-matrix inverse problem for singular and symmetric Jacobi matrices, *Linear Algebra Appl.*, **436** (2012), 1090–1098.

[3] Carmona, A., Encinas, A.M. y Mitjana, M. On the M-matrix inverse problem for singular and symmetric Jacobi matrices, *Electron. J. Linear Algebra*, **24** (2013), 237–254.

[4] Carmona, A., Encinas, A.M. y Mitjana, M. Discrete elliptic operators and their Green operators, *Linear Algebra Appl.*, **442** (2014), 115–134.

[5] Chen, Y., Kirkland, S.J. y Neumann, M., Group generalized inverses of M-matrices associated with periodic and nonperiodic Jacobi matrices, *Linear and Multilinear Algebra* **39** (1995) 325–340.

[6] Kirkland, S.J. y Neumann, M., The M–matrix group inverse problem for weighted trees, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **19** (1998), 226–234.

[7] Neumann, M. y Sze. N.–S., On the inverse mean first passage matrix problem and the inverse M-matrix problem*Linear Algebra Appl.*, **434** (2011), 1620–1630.