La resolución numérica de ecuaciones de Viète y su difusión en el curso matemático de Hérigone

P. J. Herrero Piñeyro[1], A. Linero Bas[2], M. R. Massa Esteve[3], A. Mellado Romero[4]

[1] *IES Ricardo Ortega (Fuente Álamo), pjherrero22@gmail.com*
[2] *Departamento de Matemáticas. Universidad de Murcia, lineroba@um.es*
[3] *Departament de Matemàtica Aplicada I. Universitat Politècnica de Catalunya, M.Rosa.Massa@upc.edu*
[4] *IES Francisco Salzillo (Alcantarilla), antonio.mellado2@um.es*

Introducción

Las matemáticas del siglo XVII se caracterizan por el desarrollo de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal gracias a la introducción del cálculo simbólico. La transición de un modo de pensamiento geométrico a un modo de pensamiento más algebraico es una de sus más importantes consecuencias (Mahoney, 1980). A este proceso, que se inició a finales del siglo XVI principalmente a través de la obra de François Viète (1540-1603), y que duró todo el siglo XVII, se le ha llamado algebrización de las matemáticas, (Mancosu, 1996). Una de las obras clave en el inicio de la algebrización es *In Artem analyticen isagoge: seorsim excussa ab opere restitutae mathematicae analyseos seu algebra nova*, (Viète, 1591), en adelante *Arte analítico*, de François Viète, donde el matemático francés marca las directrices de su proyecto de restitución de la matemática a través del análisis. Proyecto que articulará a través de diez tratados que se publicarán entre 1591 y 1640, algunos de manera póstuma. El Arte Analítico de Viète, y en especial su difusión, marcará una gran parte de la matemática del siglo XVII y, por tanto, realizar un análisis de dicha difusión es fundamental para comprender mejor cómo se crearon y evolucionaron los diferentes conceptos, metodologías y procedimientos matemáticos relacionados con el proceso de algebrización.

Entre los difusores de Viète, destaca Pierre Hérigone (1580 - 1643), que escribió un Curso Matemático compuesto de cinco tomos más un suplemento (Hérigone, 1634/1637/1642). Este Curso Matemático es una obra enciclopédica que pretendía abarcar la mayor parte de los conocimientos científicos de la época, desde el álgebra a la astronomía, dando cabida tanto a la matemática pura como a la mixta. Su obra fue singular, así uno de los objetivos que se planteó era realmente ambicioso, introducir un nuevo método usando lenguaje simbólico que le sirviera para realizar demostraciones, sin la ayuda de ningún otro lenguaje. Hérigone no fue un mero transcriptor de las obras de Viète en lenguaje simbólico, sino que usó una notación y método de demostración particulares, que le permitieron generalizar resultados y obtener demostraciones nuevas (Massa, 2008 y 2010).

Nuestro objetivo principal es determinar las aportaciones de Hérigone al proceso de algebrización de las matemáticas. En particular mostramos en este trabajo un ejemplo de cómo difundió la obra de Viète. Para ello revisamos, de manera comparada, la resolución numérica de ecuaciones polinómicas expuesta por los dos matemáticos en sus trabajos, prestando especial interés al uso de la notación simbólica. Empezaremos reflexionando sobre el significado del Arte Analítico de Viète y su relación con el proceso de algebrización, así como valorando la importancia que dentro de dicho *Arte Analítico* tiene la resolución numérica de ecuaciones.

El proceso de algebrización y el *Arte analítico* de Viète

Viète con su Arte analítico intentó restaurar el análisis antiguo, que para los matemáticos griegos era un método geométrico, usando el álgebra, aplicada tanto a magnitudes aritméticas como geométricas. Usó letras para representar tanto las incógnitas como los parámetros o magnitudes conocidas de un problema y creó un procedimiento simbólico de cálculo aplicado a ellas. Las operaciones sobre estas magnitudes representadas por letras eran idénticas tanto si las magnitudes eran numéricas o geométricas, de forma que obtuvo un procedimiento de cálculo abstracto que aplicaba a dichas letras independientemente de la naturaleza de la magnitud que representaban. Viète llamó a estas letras *especies* y al cálculo que definió sobre ellas *Logística especiosa*.

Su método de análisis lo dividió entonces en tres partes, la *zetética*, o el arte de traducir el problema en una o más ecuaciones con una o más incógnitas, la *porística*, o el proceso por el cual se trasforman proporciones o ecuaciones en otras de las que ya se sabe obtener la solución y la *exegética* o el arte de obtener la solución del problema a partir de la última ecuación ya reducida. Al enfrentarse con un problema, tanto aritmético como geométrico, en primer lugar lo traducía al lenguaje de su nuevo sistema abstracto de especies (este es el campo de la zetética) perdiendo las magnitudes su significado intrínseco, sobre ellas actuaba la logística de las especies (porística) para proporcionar una ecuación. Una vez obtenida dicha ecuación, la exegética volvía a traducir el problema al campo aritmético o geométrico dando una solución numérica o una construcción geométrica. Viète introduce, de esta manera, la idea de usar el álgebra especiosa o nueva como método de análisis para resolver tanto problemas aritméticos como geométricos, frente al álgebra antigua o numerosa de las álgebras cosistas.

Al final de la introducción al *Arte Analítico,* Viète expresa con claridad su convicción de que con este nuevo método de análisis se puede resolver cualquier problema: “Finalmente el arte analítico, dotado, en último lugar, con sus tres formas de zetética, porística y exegética, afirma para sí mismo el mayor problema de todos, que es NO DEJAR NINGÚN PROBLEMA SIN RESOLVER”. Pero este convencimiento está fuertemente basado en la certeza de resolver cualquier ecuación, ya que el nuevo método de análisis llevaba a una ecuación como parte final del proceso. Viète escribe dentro del *Arte Analítico* tres tratados sobre exegética, dos geométricos y uno aritmético. Sobre exegética numérica, incluyó el tratado *De Numerosa Potestatum ad exegesim resolutione*, (Viète, 1600) a partir de ahora *De Numerosa Potestatum*, que fue publicado en el año 1600 por uno de sus alumnos, Marino Ghetaldi, donde expuso un método de resolución numérica de ecuaciones que se difundió durante el siglo XVII por diferentes matemáticos (Thomas Harriot, William Oughtred, John Wallis y John Pell en Inglaterra o Pierre Hérigone, James Hume, Jean Prestet y François Dechales en la Europa Continental), siendo el método usado principalmente en la resolución de ecuaciones durante este siglo, (Stedall, 2011).

Difusión de la obra De Numerosa Potestatum de Viète a través del Cursus Mathematicus de Hérigone

Pierre Hérigone es uno de los más importantes difusores de la obra de Viète, en particular expone el método de resolución numérica de ecuaciones en los tomos segundo y sexto de su *Curso Matemático*, pero lo hace de una forma peculiar, añadiendo letras que le permiten exponer de forma más corta y explicar de forma más sencilla y práctica. El uso de las letras es una innovación respecto a la forma habitual de exposición y explicación del método. Pero además, la forma de explicar y exponer el método llevan una impronta pedagógica característica de la obra de Hérigone. Él mismo era consciente de la originalidad en la introducción de letras para representar este proceso y así lo expresa en diferentes partes de su *Curso Matemático*.

> Hemos dado en el capítulo XX de nuestra Álgebra el método que ha inventado Viète, para encontrar el número que vale la raíz de toda ecuación cúbica afectada y pura, y hemos añadido, de nuestra invención, letras que muestran cómo encontrar los divisores, así como los números a sustraer.
>
> Pierre Hérigone. Le Supplement du Cours Mathematique (1642), pág. 42.

> El uso de letras del alfabeto que nosotros hemos inventado para la extracción de raíces de potencias, tanto puras como afectadas, es la mejor invención que se pueda tener para este efecto.
>
> Pierre Hérigone. Le Supplement du Cours Mathematique (1642), pág. 270.

Comparación de las exposiciones de Viète y Hérigone. Conclusiones

El método expuesto en *De Numerosa Potestatum* es una extensión del que se utilizaba en la época para resolver raíces y que ya era conocido desde siglos anteriores, (Rashed, 1994). La solución de la ecuación se calcula cifra a cifra, de izquierda a derecha, y para ello se usa el desarrollo de la potencia de un binomio formado por un término con las cifras conocidas de la solución y otro sólo con la cifra siguiente que se quiere obtener. Por ejemplo, para $x^3 - 10x = 13\,584$ consideramos el binomio $(20 + a)$, que se sustituye en la ecuación. El método se esquematiza en tres pasos fundamentales: calcular una primera aproximación o punto de partida del algoritmo (consiste en obtener el número de cifras de la solución y calcular la primera cifra, en la ecuación anterior 20); calcular el número a sustraer, que se usa para eliminar la parte ya conocida de la ecuación (en la ecuación anterior, $20^3 - 10 \cdot 20 = 7\,800$); calcular el divisor, que se usa para obtener la cifra siguiente de la solución, dividiendo la nueva diferencia entre dicho divisor (en la ecuación anterior, el divisor es $1\,200 + 60 - 10 = 1\,250$, que divide a la diferencia $13\,584 - 7\,800 = 5\,784$, dando 4 como candidato a la nueva cifra). Viète usó tablas donde iba anotando los diferentes resultados intermedios del proceso, de forma que el método se articula a través de dichas tablas (ver imagen 1 para una comparación entre Viète y Hérigone).

Viète usa un lenguaje mayoritariamente retórico con una simbología cosista para las incógnitas, así escribe $x^3 - 10x = 13\,584$ como $1C - 10N\ aequari\ 13{,}584$ (*C* representa x^3 y *N*, x). No usa notación simbólica, lo que le impide escribir de forma general cómo obtener el divisor y el número a sustraer, partes fundamentales del proceso. En cambio, hace un uso magistral de las tablas que ha inventado, diseñando una forma de proceder sobre ellas que, memorizada y con pequeñas adaptaciones a los diferentes grados de las ecuaciones, le permiten obtener la solución buscada. Las tablas son, por tanto, la herramienta básica del método, convirtiéndose en el eje principal sobre el que se articula el proceso. Así, se opera sobre las tablas obteniéndose unos números a partir de los anteriores, y se van colocando los resultados en la columna adecuada de forma que se trabaja sólo sobre las cifras significativas obviando los ceros de la derecha.

198 DE NVMEROSA

PROBLEMA XI.

E Dato in numeris cubo adfecto multa solidi sub latere & dato coëfficiente plano, latus analytice elicere.

Proponatur 1 C − 10 N, æquari 13, 584. Quæritur quanta sit magnitudo 1 N, radixve propositi adfecti cubi.

Ex cubo igitur 13, 584 negate adfecto sub latere, ut eliciantur latera, idem arguente Zetesi erit omnino processus, qui in analysi cubi adfirmate adfecti, nisi quod in divisionibus attendetur coëfficientis plani & regularium in cubo puro divisorum differentia, non etiam summa, ut in adfecto adfirmate cubo. Et cum elicita singularia latera ducentur in idem coëfficiens planum, solidum quod inde fit sub sede coëfficientis desinens (quod quidem in cubo adfirmate adfecto subducebatur) addetur proposito negate adfecto cubo, vel auferetur à solidis ablatitiis. Vt in paradigmate.

Paradigma analyseos cubi adfecti multa solidi sub coëfficiente plano & latere.

I Eductio lateris singularis primi.

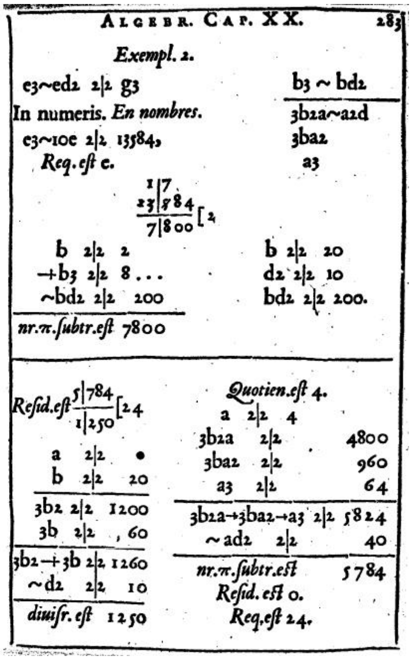
Coëfficiens planum		1 0	*sublaterale.*
Cubus adfectus resolvendus	13	5 8 4	*Tot puncta laterum simplicium, quot cuborum. Puncta cubica.*
Solida prostaphæretica — *Ablatitium*	8		*Cubus lateris primi.*
Solida prostaphæretica — *Adititium*		2 0	*A latere primo in coëfficiens planum.*
Excessus solidi ablatitii	7	8 0	
Cubi adfecti resolvendi reliquum	5	7 8 4	

N 2 4 · Q 4 16 · C 8 64 — *Tot numerales circuli, quot puncta cubica. lateraue singularia.*

II Eductio lateris singularis secundi.

Divisorum pars superior — *Coëfficiens planum.*		1 0	
Cubi adfecti resolvendi reliquum.	5	7 8 4	
Divisorum pars inferior — *Triplum quadratum lateris primi.*	1	2	
Divisorum pars inferior — *Triplum latus primum.*		6	
Differentia divisorum.	1	2 5 0	
Solida ablatitia	4	8	*A latere secundo in triplum quadratum primi.*
		9 6	*A quadrato lateris secundi in triplum latus primum.*
		6 4	*Cubus lateris secundi.*
Summa ablatitiorum.	5	8 2 4	
Solidum adititium.		4 0	*A latere secundo in coëfficiens planum.*
Excessus ablatitiorum, æqualis reliquo resolvendi cubi adfecti.	5	7 8 4	

Itaque



ALGEBR. CAP. XX. 283

Exempl. 2.

e3~ed2 2|2 g3 — b3 ~ bd2

In numeris. *En nombres.* — 3b2a~a2d

e3~10e 2|2 13584, — 3ba2

Req. est e. — a3

1|7
23|584
7|800 [2

b 2|2 2 — b 2|2 20

~+b3 2|2 8... — d2 2|2 10

~bd2 2|2 200 — bd2 2|2 200.

nr.π.subtr.est 7800

Resid.est 5|784 / 1|250 [24

Quotien.est 4.

a 2|2 4

a 2|2 • — 3b2a 2|2 4800

b 2|2 20 — 3ba2 2|2 960

3b2 2|2 1200 — a3 2|2 64

3b 2|2 , 60 — 3b2a~+3ba2~+a3 2|2 5824

~ad2 2|2 40

3b2~+3b 2|2 1260 — *nr.π.subtr.est* 5784

~d2 2|2 10 — *Resid. est* o.

diuisr. est 1250 — *Req.est* 24.

Imagen 1. **La ecuación** $x^3 - 10x = 13584$ **resuelta por Viète (izquierda) y por Hérigone (derecha).**

Hérigone utilizó letras para representar las incógnitas y los parámetros de las ecuaciones usando números para los exponentes, así escribió la misma ecuación como $e3 - 10e\ 2|2\ 13\ 584$ (aquí $2|2$ representa el signo =). Además, cada ejemplo viene acompañado por la ecuación general correspondiente, en este caso $e3 - ed2\ 2|2\ g3$, y en la parte superior derecha aparecen las expresiones generales para calcular el término a sustraer y el divisor. Los procesos de cálculo de Viète son numéricos y se realizan sobre los números de la tabla, mientras que Hérigone al usar letras presenta el procedimiento de forma algebraica. Viète tiene que dar una gran cantidad de ejemplos (20 en total) para las diferentes ecuaciones, presentando una casuística muy amplia. Esto hace que el método sea difícil de memorizar y se necesite tener un ejemplo delante para poder resolver ecuaciones no resueltas hasta ese momento. Por el contrario, la presentación de Hérigone del método en forma simbólica le permite explicarlo sólo con cuatro ejemplos, y por lo tanto de forma más breve y general.

En Hérigone el uso de las tablas pierde importancia y la gana el proceso simbólico con el uso de letras para representar las cifras de la solución, tanto para representar las cifras ya calculadas como las que hay que calcular. Hérigone usa también tablas, pero a diferencia de Viète, son sólo como ayuda a la hora de anotar los cálculos de los números obtenidos. Mientras que Viète opera sobre los números de la tabla y da reglas para obtener cada fila atendiendo a las anteriores, Hérigone obtiene sus resultados de procesos de sustitución en las letras y finalmente usa la tabla para escribir los resultados finales. El desarrollo del método en Hérigone es algebraico, con una notación simbólica que le permite generalizar el proceso mediante una descripción general del mismo, lo que demuestra el poder de la *nueva* Álgebra y del lenguaje simbólico empleado.

Por otro lado es importante resaltar el carácter pedagógico que Hérigone imprime a toda su obra y que aquí se ve reflejado en una explicación más fácil de entender y más corta. Mientras que al seguir el método de Viète uno pierde la justificación de cada paso a lo largo de las tablas, sobre las que se van aplicando las diferentes reglas, al seguir el proceso de Hérigone se ve claramente en cada punto la justificación que nos lleva al siguiente. En este sentido el método queda claramente justificado.

Bibliografía

Hérigone, P. (1634/1637/1642). *Cursus Mathematicus nova, brevi et clara methodo demostratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles, 5 vols. (1634, 1637) plus a supplement (1642).* París.

Mahoney, M. S. (1980). The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century. *Barnes and Noble/Harvester* , 141-156.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the Seventeenth Century.* New York: Oxford University Press.

Massa Esteve, M. R. (2008). Symbolic language in early modern mathematics: the algebra of Pierre Hérigone (1580-1643). *Historia Mathematica , 4* (35), 285-301.

Massa Esteve, M. R. (2012). The role of symbolic languaje in the transformation of mathematics. *Philosophica , 87*, 153-193.

Massa Esteve, M. R. (2010). The symbolic treatment of Euclid’s Elements in Hérigone’s Cursus Mathematicus (1634, 1637, 1642). (A. &. Heeffer, Ed.) *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early-Modern Mathematics, Studies in Logic , 26*, 165-191.

Rashed, R. (1994). The solution of numerical aquations and Algebra: Sharaf Al-Din Al-Tusi and Viète. En R. Rashed, *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra* (págs. 147-204). Springer Netherlands.

Stedall, J. (2011). *From Cardano's great art to Lagrange's reections: filling a gap in the history of algebra.* Zürich: European Mathematical Society.

Viète, F. (1600). *De Numerosa Potestatum ad exegesim resolution. Ex Opere reestitutae mathematicae analyseos, seu, algebra nova Francisci Vietae.* (M. Ghetaldi, Ed.) París.

Viète, F. (1591). *In Artem analyticen isagoge: seorsim excussa ab opere restitutae mathematicae analyseos seu algebra nova.* Tours.