III Jornadas de Ingeniería de Organización
Barcelona, 16-17 de setiembre de 1999

APORTACIONES A LA MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL REPARTO PROPORCIONAL, CON APLICACIONES A LA ORGANIZACIÓN

Bautista, J.[1]; Companys, R.[2]; Corominas, A.[1]

[1] Departamento de Organización de Empresas e Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales
Universidad Politécnica de Cataluña
emails: bautista@ioc.upc.es, corominas@ioc.upc.es
[2] Departamento de Organización de Empresas
Universidad Politécnica de Cataluña
email: companys@oe.upc.es

RESUMEN

El problema del reparto proporcional ha sido estudiado principalmente en relación con el reparto de escaños en una cámara de representantes, pero tiene muchas otras aplicaciones, una de las cuales es la resolución del problema PRV. En este trabajo se generaliza el problema, se propone un algoritmo para resolver el problema generalizado y se presentan algunas de sus aplicaciones a problemas de organización.
Palabras clave: problema del reparto proporcional, optimización combinatoria.

1. INTRODUCCIÓN

Dados un entero positivo, h, y m valores q_i (i=1,...,m), positivos y tales que $\sum_{i=1}^{m} q_i = h$, denominados cuotas, el problema del reparto proporcional consiste en hallar unos valores enteros x_i (i=1,...,m) no negativos y tales que $\sum_{i=1}^{m} x_i = h$ y que sean lo más parecidos posible a las correspondientes q_i.

El valor h puede corresponder al número de unidades indivisibles disponibles de un cierto elemento o recurso y m al número de elementos de un conjunto M, que pueden ser de naturaleza muy variada (partidos políticos, departamentos universitarios, etc.). Es frecuente que las cuotas se determinen proporcionalmente a unos valores positivos asociados a los elementos de M, tales como la población de una circunscripción electoral, el número de votos obtenidos por un partido en unas elecciones, etc. De hecho, las primeras aportaciones formalizadas al problema del reparto proporcional tuvieron lugar, a finales del siglo XVIII, a propósito de la determinación del número de escaños correspondientes a cada uno de los estados en la cámara de representantes de los entonces nacientes Estados Unidos.

Obsérvese que el enunciado del problema del reparto proporcional es impreciso, puesto que la expresión "lo más parecidos posible" admite múltiples interpretaciones y cada una de ellas puede dar lugar a una solución distinta. Si se tiene en cuenta que la forma de plantear el problema puede influir en algo tan importante como el número de escaños que corresponden a una circunscripción o a un partido político, se comprende que el problema del reparto proporcional haya sido objeto de intensos debates en los que han participado tanto matemáticos, en un sentido amplio, como políticos y, por supuesto, personas que en cierto modo reunían ambas condiciones. Tales debates siguen abiertos en nuestros días.

El problema del reparto proporcional puede generalizarse fácilmente sin más que relajar las condiciones impuestas a los valores q_i (es decir, la no negatividad y la suma igual a h). Dados un entero positivo, h, y m valores q_i (i=1,...,m), que ya no cabe denominar cuotas, el problema del reparto, que ya no cabe denominar proporcional, generalizado consiste, pues, en hallar unos valores enteros x_i (i=1,...,m) no negativos y tales que $\sum_{i=1}^{m} x_i = h$ y que sean lo más parecidos posible a las correspondientes q_i.

El resto de esta comunicación comprende una breve discusión sobre el reparto de escaños en una cámara de representantes (punto **2**), el planteamiento del problema del reparto proporcional generalizado como un problema de optimización y la resolución del mismo (punto **3**) y algunas aplicaciones (punto **4**) y finaliza (punto **5**) con unas breves conclusiones

2. EL REPARTO DE ESCAÑOS EN UNA CÁMARA DE REPRESENTANTES

Actualmente nos parece muy natural abordar el problema del reparto proporcional como la minimización de una función de discrepancia entre las x_i y las cuotas. Sin embargo, no ha sido éste el enfoque que históricamente se ha adoptado (Balinski & Young (1982)), sino el de proponer, a partir de razonamientos más o menos explícitos, procedimientos para calcular las x_i.

Así, el método de Hamilton, formulado por este político americano a finales del XVIII y que ha recibido después muchas otras denominaciones, consiste en asignar a cada estado la parte entera de la cuota y los escaños restantes, uno por uno, en el orden correspondiente al de las partes fraccionales de dichas cuotas, de mayor a menor. En la misma época, Jefferson propuso un método (también redescubierto y rebautizado en muchas ocasiones: de hecho coincide con el muy conocido en España método de d'Hondt) a partir de la idea de que el número de habitantes por escaño debería ser idealmente el mismo para todos los estados, con el fin de hacer efectivo el principio “un hombre, un voto”. El método de Jefferson es uno de los infinitos elementos del conjunto de los llamados métodos de divisor, que pueden presentarse como sigue: los escaños se asignan uno por uno; en cada iteración se atribuye el escaño al estado con el mayor cociente $q_i / d(a_i)$, donde a_i es el número de escaños ya asignados al estado i y $d(a)$ está definido para valores enteros no negativos de a y de modo que $a \leq d(a) \leq a+1$ y $d(a) < d(a+1)$; estos métodos también pueden aplicarse calculando los cocientes $q_i / d(a_i)\ \forall i, 0 \leq a \leq h$ y asignando los escaños según el orden de dichos cocientes, de mayor a menor.

Estos métodos de divisor presentan la propiedad de monotonía, a saber, $x_i(h+1) \geq x_i(h)$, de la que no goza el método de Hamilton, en el que con una frecuencia no despreciable se presenta la denominada paradoja de Alabama ($x_i(h+1) < x_i(h)$).

Entre los infinitos métodos de divisor hay cinco que se consideran tradicionales o históricos, los cuales se definen en la tabla siguiente:

Método	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson
$d(a)$	a	$\dfrac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a(a+1)}$	$a+\dfrac{1}{2}$	$a+1$

Huntington (1928) fue el primero en introducir el concepto de optimización en la resolución del problema del reparto proporcional. Definida una medida de desigualdad entre dos estados, se trata de encontrar una asignación de escaños que sea localmente óptima, es decir, tal que no exista ninguna transferencia de un escaño de un estado a otro que mejore la medida de desigualdad; naturalmente, el método para encontrar la solución depende de cómo se defina la medida de desigualdad y es notable que las propuestas por Huntington conducen precisamente a uno de los cinco métodos de divisor históricos.

La optimización de una función de discrepancia entre las cuotas y los valores asignados no ha sido, históricamente, un punto de partida para la definición de un método. No obstante, en Balinski & Young (1983) se sugieren varias funciones para medir el “error” de un reparto, en Athanasopoulos (1993) se menciona la posibilidad de utilizar una función de discrepancia y se sugieren algunas; en Ernst (1994) el hecho de que algunos métodos optimizan ciertas funciones es uno de los argumentos utilizados en el debate jurídico a que se refiere el artículo.

3. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL REPARTO GENERALIZADO COMO LA MINIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DISCREPANCIA

El problema se puede plantear como sigue:

Dados:

m, h (enteros positivos)

$q_i \ (i = 1,\ldots,m)$ (reales)

y funciones $f_i(q_i, x_i)(i = 1,\ldots,m)$ definidas para valores enteros no negativos de x_i y tales que

$$f_i(q_i, x_i) \leq \frac{1}{2}\left[f_i(q_i, x_i - 1) + f_i(q_i, x_i + 1)\right] \qquad \textbf{(1)}$$

Resolver:

$$\textbf{P} \qquad [\text{MIN}]\, z_S = \sum_{i=1}^{m} f_i(q_i, x_i) \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = h \qquad \textbf{(3)}$$

$$x_i \geq 0 \text{ y enteras} \qquad \textbf{(4)}$$

La propiedad **(1)** es parecida a la de convexidad, en el sentido de que si las funciones están definidas para los valores reales de la variable y son convexas, cumplen la propiedad, pero la convexidad , por consiguiente, es una propiedad más fuerte.

Por supuesto, **P** se puede resolver mediante la programación dinámica, pero no es necesario. Obsérvese que el valor de la función objetivo se puede considerar como el resultado de sumar a un valor inicial $\sum_{i=1}^{m} f_i(q_i, 0)$ las aportaciones correspondientes a la asignación de cada una de las h unidades, a saber, $\delta_{ik} = f_i(q_i, k) - f_i(q_i, k-1)$; además, se puede comprobar que la propiedad **(1)** es equivalente a $\delta_{ik} \leq \delta_{i,k+1}$. Por consiguiente, para minimizar z_S basta calcular los valores de las δ_{ik}, ordenarlas de menor a mayor y retener las h primeras, de lo que se deduce una solución óptima (los empates en la ordenación pueden resolverse arbitrariamente, siempre que se respete la regla de que, si $\delta_{ik} = \delta_{i,k+1}$, δ_{ik} debe preceder a $\delta_{i,k+1}$). Además, toda solución óptima corresponde a una ordenación de las δ_{ik} que cumple las condiciones indicadas. Obsérvese también que (1) para encontrar soluciones óptimas basta conocer las δ_{ik} y no se requiere una definición explícita de las funciones f_i; (2) si transformamos las δ_{ik} de modo que se conserve el orden, una solución óptima para las f_i lo será también para las funciones correspondientes a las δ_{ik} transformadas.

En definitiva, el problema puede resolverse mediante el siguiente algoritmo:

AMDG (algoritmo del método del divisor generalizado):

$x_i = 0 \forall i; \theta_i = \delta_{i1} \forall i$
Repetir *h* veces:
Encontrar $i^* = \arg\min_i \theta_i$;
$x_{i^*} = x_{i^*} + 1; \theta_{i^*} = \delta_{i^*, x_{i^*}+1}$

De las propiedades de las soluciones óptimas se desprenden los dos corolarios siguientes:

Corolario 1. Una solución óptima para z_S también minimiza $Z_M = \max_{i|x_i>0} \delta_{ix_i}$.

Corolario 2. Una solución óptima para z_S maximiza $z_M = \min_{\mathrm{i}} \delta_{i,x_i+1}$ y, por consiguiente, si todas las δ tienen el mismo signo, minimiza $\frac{1}{z_M} = \frac{1}{\min_{\mathrm{i}} \delta_{i,x_i+1}} = \max_i \frac{1}{\delta_{i,x_i+1}}$.

La expresión "métodos del divisor generalizados" se justifica en la medida que los métodos del divisor pueden considerarse como un caso particular de los mismos. En efecto, en los métodos del divisor las unidades se asignan en el orden no creciente de los cocientes $\frac{q_i}{d(k-1)}$ y en los métodos generalizados en el orden no decreciente de las δ_{ik} y si definimos $\delta_{ik} = \frac{d_i(k-1)}{q_i}$ el orden no decreciente de las δ_{ik} coincide con el orden no creciente de $\frac{d_i(k-1)}{q_i}$.

4. APLICACIONES

Las situaciones que pueden plantearse como un problema de reparto proporcional, generalizado o no, son muy diversas.

Por ejemplo, dado un programa de producción en el que se especifica para cada período el número de unidades a obtener de cada familia de productos, la distribución de este número entre los productos que componen la familia se puede plantear como un problema de reparto proporcional (Bautista, Companys & Corominas, (1996b)).

Otro ejemplo es el de la asignación de personas o plazas a unidades, tal como puede ocurrir en una universidad cuando se dispone de un cierto número de plazas de profesores a repartir entre los departamentos. Se puede plantear el problema como la minimización de la suma de funciones de discrepancia entre las necesidades de cada unidad y el número de plazas asignadas a la misma.

Un caso parecido es el de distribución de unidades de servicio entre diversos centros que atienden, tal vez con tiempos aleatorios, los flujos de unidades que se dirigen a los mismos. En condiciones muy generales, el número medio de unidades en cada centro (o en la cola), en régimen permanente, y por consiguiente, los tiempos de estancia de las unidades en el sistema (o en la cola) son funciones del número de canales que cumplen la propiedad **(1)** y de ahí que el problema de determinar cómo se distribuye un número de canales dado entre los diversos centros se pueda plantear como un problema de reparto proporcional generalizado, que se puede resolver con el algoritmo AMDG.

También se puede plantear como un problema de reparto generalizado la asignación de un cierto número total de máquinas idénticas con incidencias aleatorias a operarios con tiempos medios distintos, con el fin de maximizar la producción. Si, por ejemplo, el tiempo hasta la aparición de incidencia es exponencial y el tiempo de trabajo manual por incidencia es constante para cada operario, se puede aplicar el modelo de Ashcroft y entonces la diferencia, para cada operario, entre una cota superior del número medio de máquinas funcionando y dicho número medio es una función del número de máquinas asignadas al operario que posee la propiedad **(1)**.

No obstante, nuestro interés por el problema del reparto proporcional (Bautista, Companys & Corominas (1996a) y (1996c)) se suscitó al darnos cuenta de que una parte de uno de los algoritmos propuestos en Miltenburg (1989) para resolver heurísticamente el problema PRV (Product Rate variation Problem, según la terminología introducida en Kubiak (1993)) coincidía de hecho con el método de Hamilton para la asignación de escaños. Una de las formas de plantear el PRV consiste en minimizar la suma de discrepancias, para todos los instantes y para todas las variantes del producto, entre las producciones ideales y las producciones reales. Para dos de las funciones propuestas por Miltenburg (el valor absoluto de la discrepancia y el cuadrado de la misma), la minimización de la suma, para todas las variantes del producto y para un instante dado, de las funciones de discrepancia se puede obtener mediante el método de Hamilton. Por consiguiente, la aplicación sucesiva de dicho método a los diversos instantes proporciona una solución óptima del problema, siempre y cuando no se presente la paradoja de Alabama, es decir, siempre y cuando el número de unidades de una variante correspondientes a un instante t+1 no sea menor que el correspondiente al instante t. Si la función de discrepancia es tal que la optimización puede llevarse a cabo con un método de divisor, se obtiene con seguridad la solución óptima por aplicación sucesiva del método a los diversos instantes, ya que con tales métodos siempre se pueden obtener soluciones que no presentan la paradoja de Alabama; esta observación permite generar una gran variedad de algoritmos para la resolución del PRV. Con los métodos del divisor generalizados, en cambio, puede presentarse la mencionada paradoja; aun así, pueden ser útiles para la resolución del PRV, puesto que, si no obtienen una solución factible, proporcionan una cota inferior del valor óptimo que se puede emplear en un algoritmo de *branch and bound* o de programación dinámica acotada.

Un último ejemplo de aplicación del algoritmo AMDG es la resolución del modelo planteado en Hall et al. (1998) para la minimización de la suma de los valores de los *triggers* en un sistema de producción (el valor del *trigger* es el número de kanbanes que se tienen que acumular antes de que una celda sea autorizada a empezar a producir). El modelo es de la forma:

$$\text{[MIN] } z = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \leq 1$$

$$x_i \geq 1 \ (i=1,\ldots,n)$$

en el cual las c_i son constantes positivas y les variables, enteras, x_i corresponden a los valores de los *triggers*.

En el artículo citado se indica que el modelo se resuelve mediante un procedimiento iterativo implantado mediante una hoja de cálculo. En Woolsey et al. (1999) se propone un procedimiento distinto que se basa en relajar las condiciones de integridad, resolver el modelo relajado mediante la aplicación de las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker (lo que permite obtener expresiones para el cálculo directo, no iterativo, de los valores de las variables) y, finalmente, aplicar una regla de redondeo a los valores obtenidos, dado que la solución ha de ser entera.

El problema se puede plantear también como sigue:

Encontrar el mínimo valor entero de h para el cual $w^*(h) \leq 1$, donde $w^*(h)$ es el valor óptimo de la función objetivo en el problema:

$$\text{[MIN] } w = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = h$$

el cual se resuelve inmediatamente mediante el AMDG que, en caso de óptimo múltiple para la función objetivo z, proporciona una solución óptima que minimiza $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i}$ y, por consiguiente, aquélla para la que la restricción $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \leq 1$ se cumple más holgadamente.

5. CONCLUSIONES

Algunos problemas de asignación de recursos se pueden asimilar al problema del reparto generalizado. Éste se puede plantear como un problema de optimización entera que resulta muy fácil de resolver, mediante el algoritmo AMDG, para una amplia familia de funciones objetivo.

6. REFERENCIAS

ATHANASOPOULOS, B.D. (1993) "The Apportionment Problem and its Application in Determining Political Representation", *ΣΠΟΥΔΑΙ / SPOUDAI*, **43**, 3-4, 212-237.

BALINSKI, M.L., YOUNG, H.P. (1982) *Fair representation*, Yale University Press.

BALINSKI, M.L., YOUNG, H.P. (1983) "Apportioning the United States House of Representatives", *Interfaces*, **13**, 4, 35-43.

BAUTISTA, J., COMPANYS, R., COROMINAS, A. (1996a) *Solving the apportionment problem through the optimization of discrepancy functions*, D.I.T. 96/01, DOE, ETSEIB-UPC.

BAUTISTA, J., COMPANYS, R., COROMINAS, A. (1996b) "Artemisa: un sistema de ayuda a la programación en una empresa del sector del automóvil", *Dirección y organización*, 16, 34-42.

BAUTISTA, J., COMPANYS, R.. COROMINAS, A. (1996c) "A note on the relation between the product rate variation (PRV) problem and the apportionment problem"*, Journal of the Operational Research Society,* 47, 1410-1414.

ERNST, L.R. (1994) "Apportionment Methods for the House of Representatives and the Court Challenge", *Management Science*, **40**, 10, 1207-1227.

HALL, J. D., BOWDEN, R. O., GRANT JR., R. S., HADLEY, W. H. (1998) "An Optimizer for the Kanban Sizing Problem: A Spreadsheet Application for Whirlpool Corporation", *Production and Inventory Management Journal*, **39**, 1, 17-23.

HUNTINGTON, E.V. (1928) "The apportionment of representatives in Congress", *Transactions of the American Mathematical Society*, **30**, 85-110.

KUBIAK, W. (1993) "Minimization of production rates in just-in-time systems: A survey", *European Journal of Operational Research,* **66**, 259-271.

MILTENBURG, J. (1989), "Level Schedules for Mixed-Model Assembly Lines in Just-In-Time Production Systems", *Management Science,* **35**, 192-207.

WOOLSEY, R. E. D., BOWDEN, R. O., HALL, J. D., HADLEY, W. H. (1999) "Closed-form Solution to Kanban Sizing Problem", *Production and Inventory Management Journal*, **40**, 1, 1-3.