

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

Programa de Doctorado

AUTOMATIZACIÓN AVANZADA Y ROBÓTICA

Tesis Doctoral

ESTIMACIÓN DE LA FORMA DE UN OBJETO DEFORMABLE
MEDIANTE INTEGRACIÓN DE VISIÓN Y TACTO

Esteban del Castillo Pérez

Director: Luis Basañez Villaluenga

Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales

Julio de 2013

A la memoria de mis padres Esteban y Antonia, quienes supieron mostrarme el camino del esfuerzo personal como medio natural para superar obstáculos y avanzar hacia un estadio de satisfacción.

A Josefina, mi mejor amiga y compañera, quien ha complementado mi vida y me ha mostrado la existencia de otras más allá del trabajo y el estudio.

A nuestras hijas Gala, Marina y Lidia, y nuestro hijo Arcadi, quienes suponen un estímulo constante.

ESTIMACIÓN DE LA FORMA DE UN OBJETO DEFORMABLE MEDIANTE INTEGRACIÓN DE VISIÓN Y TACTO

Esteban del Castillo Pérez

Resumen

Desde hace varias décadas los robots industriales han demostrado su eficiencia para tareas desarrolladas en entornos perfectamente conocidos. No obstante, surgen importantes complicaciones operativas en entornos limitadamente conocidos, y esto dificulta de manera considerable su uso en muchas áreas de interés, limitando la expansión de la robótica. Esta tesis pretende aportar una pequeña contribución a este vasto problema y, para ello, focaliza su estudio sobre un problema concreto: la manipulación robotizada de objetos deformables.

La operación sobre objetos rígidos no está exenta de problemas, muchos de ellos derivados de información imperfecta, pero al menos se sabe que la forma de estos objetos permanecerá inalterable cuando se los manipule. Es por ello que el trato con objetos deformables requiere abordar el problema desde una nueva perspectiva que pasa, necesariamente, por el uso de algún modelo del objeto que aporte información sobre su forma en función de la actuación del robot. Las dificultades surgen fundamentalmente por dos motivos: el modelo no es perfecto y la actuación del robot no es totalmente conocida. Esto obliga al uso de información externa con la que poder corregir ambas deficiencias, pero con ello tampoco queda resuelto el problema dado que esa nueva información tampoco es perfecta.

Esta tesis aborda el problema de conseguir una buena información sobre la forma de una membrana de caucho natural fijada a una plataforma circular, cuando se la somete a una manipulación robotizada. Para ello se ha diseñado, implementado y validado el modelo exponencial de masas y muelles sobre el que se ha llevado a cabo un completo estudio del comportamiento de la membrana ante diferentes actuaciones del robot. A partir de ahí, y haciendo uso de información sensorial de fuerza, par y visión estereoscópica, se han diseñado, implementado y validado un conjunto de algoritmos de integración sensorial basados en el filtro de partículas y en la fusión probabilística, con los que se ha conseguido obtener una información de suficiente calidad como para operar debidamente.

Palabras clave: Objetos deformables, modelo exponencial de masas y muelles, membranas, hiperelasticidad, fusión, probabilidad, filtros de partículas, inteligencia artificial, robótica.

Reconocimiento

Han sido varios los años durante los cuales he dedicado una atención especial a resolver lo que en principio se intuía como un problema abordable en el corto plazo. Resultado probable cuando lo que se maneja es información incierta, aspecto éste clave en la tesis que nos ocupa. Afortunadamente, el apoyo de muchas personas ha sido cierto y han contribuido a equilibrar la balanza. Es por ello justo que reconozca su contribución, sea ésta de carácter académico o personal.

En primer lugar he de reconocer el esfuerzo familiar que ha supuesto prescindir de mí durante tanto tiempo. Especialmente a Josefina, mi mujer, quien se ha sobrecargado en demasiadas ocasiones con la parte que a mí me correspondía, a nuestras hijas Gala, Marina y Lidia, y nuestro hijo Arcadi, quienes no han recibido las atenciones merecidas y por ello, a la vez de mostrar mi agradecimiento, les pido disculpas por el coste personal que ha supuesto y puede suponer.

A mi director, Luis Basañez, de quien surgió la idea de esta tesis y quien ha sabido dirigirla, aceptando mis dificultades y potenciando mis habilidades, y sobre todo siendo paciente. A Leopold Palomo quien ha sido un apoyo permanente en cuanto a los recursos informáticos necesarios. A mis compañeros de departamento: Ernest Gil, Javier Maixé, Ramón Leyva, Pedro Garcés, Pedro Iñiguez, y Luis Martínez, entre otros, de quienes he recibido apoyo, buenos consejos y alguna que otra ayuda.

Por último quiero mostrar mi agradecimiento y reconocimiento a la tarea altruista de los miembros de la comunidad Linux, quienes han aportado herramientas software que han hecho posible materializar mis ideas, pudiendo así validarlas o rechazarlas, permitiéndome avanzar.

Esteban del Castillo Pérez
Tarragona, Spain. 28 de junio de 2013.

Notación y Acrónimos

Notación

\mathbf{x}	Vector
\bar{x}	Valor nominal del vector \mathbf{x}
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	Producto escalar de los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y}
$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	Producto vectorial de los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y}
\mathbf{v}	Vector velocidad
\mathbf{F}, \mathbf{T}	Vector de fuerza, vector de par
\mathbf{P}	Punto
$\dot{\mathbf{P}}$	Velocidad del punto \mathbf{P}
$\ddot{\mathbf{P}}$	Aceleración del punto \mathbf{P}
$\mathbf{a}()$	Función de aceleración
\mathbf{F}_i^{ext}	Fuerza externa sobre el nodo i
\mathbf{F}_i^{int}	Fuerza interna sobre el nodo i
\mathbf{F}_i^{vn}	Fuerza de fricción viscosa sobre el nodo i
\mathbf{F}_i^c	Fuerza de fricción de Coulomb sobre el nodo i
$\mathbf{F}_i^{s_s}$	Fuerza elástica sobre el muelle s del nodo i
$\mathbf{F}_i^{vs_s}$	Fuerza de fricción viscosa sobre el muelle s del nodo i
m_i	Masa del nodo i
l_{ji}^0	Longitud en reposo del muelle entre los nodos j e i
a_i	Coefficiente de fricción viscosa del nodo i
b_{ji}	Coefficiente de elasticidad del muelle entre nodos j e i
c_{ji}	Coefficiente de fricción viscosa del muelle entre nodos j e i
S_a, S_b, S_c	Coefficientes de elasticidad del modelo exponencial
$\ \cdot\ , \cdot $	Norma Euclídea, valor absoluto

Notación

α	Ángulo
Δ	Incremento de
S_p, S_r	Sensibilidad paralela, sensibilidad radial
$N(a, Q)$	pdf normal centrada en a con varianza Q
$\sim N(a, Q)$	Derivar un valor de pdf normal centrada en a con varianza Q
$p(x y)$	Probabilidad de x dado que y es conocida
$p(x, y)$	Probabilidad conjunta de x e y
$P(X \leq a)$	Probabilidad de que x sea menor o igual que a
σ, σ^2	Desviación tipo, varianza
\propto	Proporcional a
E	Operador esperanza
$\text{card}(A)$	Número de elementos del conjunto A
y_t	Medida en el instante t
\mathbf{Y}_t	Medidas acumuladas desde $t = 1$ hasta t
i, j	Índices generales
k	Índice de secuencia temporal
h	Paso de integración ($h = t_k - t_{k-1}$)
w_t^i	Peso correspondiente a la partícula i en el instante t
N, M	Número de partículas, número de sensores
$=, \neq$	Asignación e igualación, distinto
$x \triangleq y$	x es idéntico a y
\emptyset	Conjunto vacío
θ, Θ	θ es un elemento del conjunto total Θ
A, \bar{A}	Conjunto, su complementario
\cap, \cup	Intersección, unión de conjuntos
\subset, \subseteq	Contenido en, contenido en o igual a
\sum	Sumatorio
$\forall i \in N$	Para todo elemento i perteneciente al conjunto N
m, m'	probabilidad básica (masa), probabilidad básica reducida
Bel, Pl	Medida de creencia, medida de plausibilidad
Dbt, Unc	Duda, incertidumbre
N, Π	Medida de necesidad, medida de posibilidad

Acrónimos

PDF	Función de distribución de la probabilidad
pdf	Función de densidad de la probabilidad
SIR	Filtro <i>Samplind Importance Resampling</i>
ASIR	Filtro <i>Auxiliary SIR</i>
AdSIR	Filtro SIR adaptado
AdASIR	Filtro ASIR adaptado
Fig., Eq.	Figura, ecuación
Sec., Cap.	Sección o apartado, capítulo

Índice general

	I
Resumen	III
Reconocimiento	V
Notación y Acrónimos	VII
Lista de figuras	XVII
Lista de cuadros	XXV
1. Introducción	1
1.1. Marco	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Motivación	4
1.4. Partes constituyentes	5
1.5. Enfoque del problema	7
1.6. Contribuciones	8
1.7. Trabajos relacionados	8
1.8. Organización de los diferentes capítulos	11
2. Modelado de objetos deformables	13

2.1. Introducción	13
2.2. Modelo de masas y muelles	17
2.2.1. El modelo clásico	17
2.2.2. El integrador	19
3. Integración multisensorial	25
3.1. Introducción	25
3.2. Modelos y arquitecturas	26
3.3. Información imperfecta	31
3.3.1. Imprecisión	32
3.3.2. Inconsistencia	33
3.3.3. Incertidumbre	33
3.4. Técnicas de fusión	35
3.4.1. Métodos de procesado de señales	35
3.4.2. Métodos de teoría de la estimación	37
3.4.3. Métodos de inferencia estadística	38
3.4.4. Métodos de teoría de la información	38
3.4.5. Métodos de inteligencia artificial	39
3.5. El marco probabilístico	43
3.5.1. Introducción	43
3.5.2. Medida de la probabilidad	44
3.5.3. Gestión de la información imperfecta	44
3.5.4. Algunos conceptos básicos	45
3.5.5. Estimación Bayesiana	48
3.5.6. El filtro de partículas	51
3.5.7. Limitaciones de los métodos probabilísticos	63
3.6. El marco evidencial	64
3.6.1. Introducción	64

3.6.2. Medidas de credibilidad y de plausibilidad	65
3.6.3. Funciones de credibilidad y de plausibilidad	66
3.6.4. Interpretación gráfica del grado de evidencia	67
3.6.5. Regla de combinación	69
3.6.6. Reducción de la evidencia	71
3.6.7. Conclusiones	74
3.7. El marco posibilístico	74
3.7.1. Introducción	74
3.7.2. Medidas de posibilidad y de necesidad	75
3.7.3. Funciones de posibilidad y de necesidad	76
3.7.4. Distribución de la posibilidad	77
3.7.5. Técnicas de fusión	78
4. El modelo exponencial de masas y muelles	85
4.1. Diferencias del modelo exponencial respecto al modelo clásico	85
4.2. Errores del modelo	86
4.2.1. Tratamiento de las colisiones	88
4.2.2. Información sensorial	91
4.2.3. Modelado del sistema	95
4.2.4. El integrador	99
4.2.5. Histéresis	99
4.2.6. Fuerzas	101
4.2.7. Forma de la membrana	102
4.3. Ajuste de los parámetros de los muelles	105
4.4. Conclusiones	106
5. Determinación de la forma de la membrana	109
5.1. Incertidumbre en la excitación	109

5.2. Comportamiento de la membrana	110
5.2.1. Tipos de test	111
5.2.2. Simulación de la información sensorial	111
5.2.3. Influencia de la resolución de la malla	114
5.2.4. Las medidas de fuerza y su relación con la posición de la esfera	117
5.2.5. Sensibilidad en las medidas de fuerza	117
5.3. Fusión de la información de fuerza y par	121
5.3.1. Procedimiento	122
5.3.2. Consideraciones estadísticas sobre las medidas de fuerza y par	123
5.3.3. Consideraciones sobre el número de trayectorias a generar	124
5.3.4. Consideraciones sobre la capacidad de discriminar trayectorias	126
5.3.5. Conclusiones	131
5.4. Fusión de la información visual	131
5.4.1. La información visual	132
5.4.2. Procedimiento de fusión	133
5.4.3. Consideraciones estadísticas sobre las medidas de distancia	133
5.4.4. Consideraciones sobre la capacidad de discriminar trayectorias	134
5.4.5. Conclusiones	137
5.5. Fusión de la información visual y de fuerza	138
5.5.1. Procedimiento de fusión para el camino <i>C1</i>	138
5.5.2. Resultados y conclusiones a la integración sensorial para el camino <i>C1</i>	142
6. Conclusiones y trabajos futuros	149
6.1. Modelo exponencial de masas y muelles	149
6.2. Comportamiento de las fuerzas de reacción	150
6.3. Comportamiento de la información visual	151
6.4. Integración sensorial mediante los filtros AdSIR y AdASIR	151

6.5. Trabajos futuros	152
6.5.1. El modelo	152
6.5.2. Los filtros	152
6.5.3. La fusión	153
A. Figuras del test paralelo en fuerzas y pares	155
B. Figuras del test radial en fuerzas y pares	169
C. Figuras de la fusión de fuerzas y pares	175
D. Figuras del test paralelo en píxeles	179
E. Figuras del test radial en píxeles	183
F. Algoritmos	187
G. Técnicas de fusión en el marco posibilístico	205
G.1. Fusión conjuntiva	205
G.1.1. Fusión conjuntiva renormalizada	207
G.2. Fusión disyuntiva	209
G.3. Fusión adaptativa	211
G.3.1. Fusión adaptativa cuantificada	214
G.4. Fusión por prioridad	219
G.4.1. Conclusiones a la fusión por prioridad	222
G.5. Conclusiones sobre la fusión	222
Referencias	225

Índice de figuras

1.1. Plataforma experimental.	6
2.1. Mallas cuadradas y trianguladas.	18
3.1. Fusión multisensorial.	26
3.2. Modelo general de integración multisensorial.	27
3.3. Funciones básicas de un sistema de integración sensorial.	28
3.4. Ejemplo de fusión multisensorial para el reconocimiento de objetos.	28
3.5. Modelo revisado de fusión de datos de JDL.	30
3.6. Información imperfecta.	31
3.7. Métodos de fusión.	36
3.8. Baja y alta aproximación (cuadro 3.2).	41
3.9. Muestreo según $p(x)$	52
3.10. Muestreo por importancia.	54
3.11. Procedimiento para aplicar la técnica del remuestreo.	58
3.12. Un ciclo del filtro SIR (Ristic et al., 2004).	61
3.13. Un ciclo del filtro ASIR.	64
3.14. Sinergia.	66
3.15. Ejemplo 1.	67
3.16. Interpretación gráfica del grado de evidencia.	68
3.17. Relación entre credibilidad y plausibilidad.	68

3.18. Ignorancia.	70
3.19. Idea intuitiva de las medidas de posibilidad y necesidad.	76
3.20. Distribución de la posibilidad construida a partir de una asignación de masas.	77
3.21. Medidas inducidas por distribuciones de posibilidad.	78
3.21.1. Medida de posibilidad.	78
3.21.2. Medida de necesidad.	78
3.22. Fusión conjuntiva con conflicto bajo entre las fuentes.	79
3.22.1. Fusión conjuntiva.	79
3.22.2. Fusión conjuntiva renormalizada.	79
3.23. Fusión disyuntiva con conflicto bajo entre las fuentes (área de color verde).	80
3.24. Fusión adaptativa con conflicto bajo entre las fuentes (área de color verde).	82
4.1. Evolución no lineal de la fuerza en un muelle.	86
4.2. Robot TX90.	87
4.3. Sensor de fuerza-par 67M25A.	87
4.4. Cámara Bumblebee XB3.	87
4.5. Detalle de la distribución de los muelles alrededor de un nodo.	88
4.6. Perfiles de la membrana.	88
4.7. Simulación.	89
4.7.1. Fin del camino C_1 e inicio del camino C_2	89
4.7.2. Fin del camino C_2 e inicio del camino C_3	89
4.8. Plataforma experimental y sus medidas.	89
4.9. Tratamiento de la fricción de Coulomb.	90
4.10. Geometría en una cámara estéreo.	94
4.11. Modelo de excitación de la membrana.	97
4.12. Tiempos de ejecución relativos para varios integradores.	99
4.13. Error de forma en cada camino según el paso de integración.	100

4.14. Histéresis debida a la fricción de Coulomb.	101
4.15. Histéresis y relajación debidas a la fricción viscosa.	102
4.15.1. Efecto de la velocidad.	102
4.15.2. Relajación.	102
4.16. Vistas de un plano secante, normal al eje Z	103
4.16.1. Perspectiva.	103
4.16.2. Planta.	103
4.17. Errores en el perfil de la membrana (1).	104
4.17.1. Desviación tipo de los radios.	104
4.17.2. Valores medios de los radios.	104
4.18. Diferentes perfiles para una misma fuerza final.	105
4.19. Dependencias del parámetro S_c	106
4.19.1. $S_c = f(N_muelles)$	106
4.19.2. $S_c = f(l^0)$	106
4.20. Componentes de fuerza.	108
4.20.1. F_z con 4 muelles por nodo.	108
4.20.2. F_z con 8 muelles por nodo.	108
4.20.3. F_x con 4 muelles por nodo.	108
4.20.4. F_x con 8 muelles por nodo.	108
4.20.5. F_y con 4 muelles por nodo.	108
4.20.6. F_y con 8 muelles por nodo.	108
5.1. Trayectorias probabilísticas.	110
5.2. Generación de trayectorias (1).	111
5.2.1. Trayectorias Paralelas.	111
5.2.2. Trayectorias Radiales.	111
5.3. Generación de trayectorias (2).	112
5.3.1. Plano XY.	112

5.3.2. Plano XZ.	112
5.4. Medida simulada de pares.	113
5.5. Medida simulada de ángulos entre fuerzas.	114
5.6. Medida simulada del momento de inercia.	115
5.7. Distancia Píxel-malla.	115
5.8. Influencia de la resolución de la malla sobre la medida de fuerza.	116
5.9. Influencia de la resolución de la malla sobre la medida de distancias.	117
5.10. Las medidas de fuerza y su relación con la posición de la esfera.	118
5.10.1. $\Delta_{F_z} = f(\Delta x, \Delta z)$	118
5.10.2. $\Delta_{F_x} = f(\Delta x, \Delta z)$	118
5.11. Trayectorias radiales sobre el plano XY.	119
5.12. Diferencia de fuerzas entre trayectorias para una penetración dada.	121
5.13. pdf de la medida angular cuando se perturba el vector fuerza.	124
5.14. Trayectorias que generan fuerzas muy similares.	130
5.15. El fenómeno de cancelación de fuerzas.	130
5.16. Comparativa entre pdf gaussiana y exponencial.	134
5.17. Mejores trayectorias radiales.	137
5.18. Comparativa entre pdf gaussiana y de Laplace.	141
5.19. Desviación tipo del error de fin de trayectorias para el filtro AdSIR.	146
5.20. Desviación tipo del error de fin de trayectorias para los filtros AdSIR y AdASIR.	146
5.21. Desviación tipo de los errores de distancia y superficie para el filtro AdSIR con desviación tipo del robot de 1 mm (SF = sin filtro).	146
5.21.1 Error de distancia.	146
5.21.2 Error de superficie.	146
5.22. Desviación tipo de los errores de distancia y superficie para el filtro AdASIR con desviación tipo del robot de 2 mm (SF = sin filtro).	147
5.22.1 Error de distancia.	147
5.22.2 Error de superficie.	147

5.23.Desviación tipo del error de fin de trayectorias para los filtro AdASIR y AdSIR. Comparativa de resultados reales y simulados para condiciones óptimas.	148
A.1. Fz para mallas de 33x33, 47x47, y 61x61 nodos y camino C1.	156
A.2. Fz para mallas de 33x33, 47x47, y 61x61 nodos y camino C2.	156
A.3. Fz para mallas de 33x33, 47x47, y 61x61 nodos y camino C3.	156
A.4. Medidas de fuerzas sobre el eje X para test XY y 4 m/n.	157
A.5. Medidas de fuerzas sobre el eje Y para test XY y 4 m/n.	157
A.6. Medidas de fuerzas sobre el eje Z para test XY y 4 m/n.	157
A.7. Medidas de par sobre el eje X para test XY y 4 m/n.	157
A.8. Medidas de par sobre el eje Y para test XY y 4 m/n.	158
A.9. Medidas de par sobre el eje Z para test XY y 4 m/n.	158
A.10.Medidas de momento angular para test XY y 4 m/n.	158
A.11.Medidas de ángulos entre fuerzas para test XY y 4 m/n.	158
A.12.Medidas de fuerzas sobre el eje X para test XY y 8 m/n.	159
A.13.Medidas de fuerzas sobre el eje Y para test XY y 8 m/n.	159
A.14.Medidas de fuerzas sobre el eje Z para test XY y 8 m/n.	159
A.15.Medidas de par sobre el eje X para test XY y 8 m/n.	159
A.16.Medidas de par sobre el eje Y para test XY y 8 m/n.	160
A.17.Medidas de par sobre el eje Z para test XY y 8 m/n.	160
A.18.Medidas de momento angular sobre el eje X para test XY y 8 m/n.	160
A.19.Medidas de ángulos entre fuerzas para test XY y 8 m/n.	160
A.20.Medidas de fuerzas sobre el eje X para test XZ y 4 m/n.	161
A.21.Medidas de fuerzas sobre el eje Y para test XZ y 4 m/n.	161
A.22.Medidas de fuerzas sobre el eje Z para test XZ y 4 m/n.	161
A.23.Medidas de par sobre el eje X para test XZ y 4 m/n.	161
A.24.Medidas de par sobre el eje Y para test XZ y 4 m/n.	162
A.25.Medidas de par sobre el eje Z para test XZ y 4 m/n.	162

A.26. Medidas de momento angular para test XZ y 4 m/n.	162
A.27. Medidas de ángulos entre fuerzas para test XZ y 4 m/n.	162
A.28. Medidas de fuerzas sobre el eje X para test XZ y 8 m/n.	163
A.29. Medidas de fuerzas sobre el eje Y para test XZ y 8 m/n.	163
A.30. Medidas de fuerzas sobre el eje Z para test XZ y 8 m/n.	163
A.31. Medidas de par sobre el eje X para test XZ y 8 m/n.	163
A.32. Medidas de par sobre el eje Y para test XZ y 8 m/n.	164
A.33. Medidas de par sobre el eje Z para test XZ y 8 m/n.	164
A.34. Medidas de momento angular para test XZ y 8 m/n.	164
A.35. Medidas de ángulos entre fuerza para test XZ y 8 m/n.	164
A.36. Medidas de fuerza para camino C_1 , con test XY y explorando 3 cm^2	165
A.37. Medidas de par para camino C_1 , con test XY y explorando 3 cm^2	165
A.38. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para camino C_1 , con test XY y explorando 3 cm^2	165
A.39. Medidas de fuerza para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XY.	166
A.40. Medidas de par para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XY.	166
A.41. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XY.	166
A.42. Medidas de fuerza para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XZ.	167
A.43. Medidas de par para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XZ.	167
A.44. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XZ.	167
B.1. Trayectorias radiales 1, 5 y 13.	169
B.2. Trayectorias radiales 21 y 25.	169
B.3. Medidas de fuerza para trayectorias radiales 1.	170

B.4. Medidas de par para trayectorias radiales 1.	170
B.5. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 1.	170
B.6. Medidas de fuerza para trayectorias radiales 5.	171
B.7. Medidas de par para trayectorias radiales 5.	171
B.8. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 5.	171
B.9. Medidas de fuerza para trayectorias radiales 13.	172
B.10. Medidas de par para trayectorias radiales 13.	172
B.11. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 13.	172
B.12. Medidas de fuerza para trayectorias radiales 21.	173
B.13. Medidas de par para trayectorias radiales 21.	173
B.14. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 21.	173
B.15. Medidas de fuerza para trayectorias radiales 25.	174
B.16. Medidas de par para trayectorias radiales 25.	174
B.17. Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 25.	174
C.1. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_x	176
C.2. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_y	176
C.3. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_x y F_y	176
C.4. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_x , F_y , T_x , y T_y	177
C.5. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_x , F_y y F_z	177
C.6. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_x , F_y , F_z , y A_f	177
C.7. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_x , F_y y F_z	178
C.8. Pesos y mejores trayectorias usando la información F_x , F_y , F_z , y A_f (2).	178
D.1. Pesos y mejores trayectorias para el test XY paralelo con visión completa.	180

D.2. Pesos y mejores trayectorias para el test XY paralelo con visión media. . .	180
D.3. Pesos y mejores trayectorias para el test XY paralelo con visión reducida. . .	180
D.4. Pesos y mejores trayectorias para el test XZ paralelo con visión completa. . .	181
D.5. Pesos y mejores trayectorias para el test XZ paralelo con visión media. . .	181
D.6. Pesos y mejores trayectorias para el test XZ paralelo con visión reducida. . .	181
E.1. Pesos y mejores trayectorias para el test XY radial con visión completa. . .	184
E.2. Pesos y mejores trayectorias para el test XY radial con visión media. . . .	184
E.3. Pesos y mejores trayectorias para el test XY radial con visión reducida. . .	184
E.4. Pesos y mejores trayectorias para el test XZ radial con visión completa. . .	185
E.5. Pesos y mejores trayectorias para el test XZ radial con visión media. . . .	185
E.6. Pesos y mejores trayectorias para el test XZ radial con visión reducida. . .	185
G.1. Fusión conjuntiva.	207
G.2. Fusión conjuntiva renormalizada.	208
G.3. Fusión disyuntiva.	210
G.4. Conflicto total en la fusión adaptativa.	212
G.5. Conflicto alto en la fusión adaptativa.	213
G.6. Conflicto bajo en la fusión adaptativa.	213
G.7. Sin conflicto en la fusión adaptativa.	214
G.8. Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto total. . . .	216
G.9. Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto alto.	217
G.10. Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto bajo. . . .	218
G.11. Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto alto.	218
G.12. Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes sin conflicto.	219
G.13. Fusión por prioridad de cuatro fuentes informativas.	220
G.14. Fusión por prioridad.	221

Índice de cuadros

2.1. Método del punto medio.	23
3.1. Teoría de conjuntos bastos, un sencillo ejemplo.	40
3.2. Baja y alta aproximación para el ejemplo del cuadro 3.1.	41
3.3. Algunos resultados derivados del ejemplo 1.	68
3.4. Medidas para el ejemplo 3.	73
4.1. Parámetros de la malla en el experimento.	88
4.2. Parámetros de los muelles en el experimento.	89
4.3. Principales características del robot.	92
4.4. Características del sensor de fuerza-par según el fabricante.	92
4.5. Características del sensor de fuerza-par según medidas realizadas.	93
4.6. Error medio y desviación tipo de las componentes de fuerza.	101
4.7. Error medio y desviación tipo de la forma.	105
5.1. Resultados para el test paralelo.	119
5.2. Sensibilidad ante el test paralelo.	120
5.3. Sensibilidad ante el test radial.	120
5.4. Algoritmo para el filtro SIR2.	123
5.5. Discriminación según la incertidumbre del sensor de fuerza/par.	125
5.6. Sobre la importancia del número de trayectorias.	127

5.7. Error en la mejor trayectoria para AdSIR sin perturbación angular.	145
5.8. Error en la mejor trayectoria para AdSIR con perturbación angular.	145
5.9. Error en la mejor trayectoria para AdASIR sin perturbación angular.	145
5.10. Errores en la forma para las mejores trayectorias detectadas (50 test). . .	147
5.11. Error en la mejor trayectoria para 50 tests y filtro AdASIR. Resultados experimentales.	147
F.1. Método del punto medio.	187
F.2. Método de Runge-Kutta de orden 4.	188
F.3. Método implícito de Kang.	189
F.4. Algoritmo para el filtro SIR (<i>Sampling Importance Resampling</i>).	190
F.5. Algoritmo para el filtro ASIR (<i>Auxiliary SIR</i>).	191
F.6. Algoritmo de Remuestreo.	192
F.7. Procedimiento general.	193
F.8. Inicialización del estado de la malla y de la acción de control.	194
F.9. Establece nuevas trayectorias aleatorias para el siguiente camino. . .	195
F.10. Algoritmo para el filtro SIR2.	196
F.11. Algoritmo para el filtro AdSIR (<i>SIR adaptado</i>).	197
F.12. Algoritmo para el filtro AdASIR (<i>ASIR adaptado</i>).	198
F.13. Algoritmo para derivar partículas.	199
F.14. Propaga el estado de la malla y toma lectura de los sensores simulados.	200
F.15. Establece una trayectoria siguiendo una dirección dada.	201
F.16. Establece una trayectoria con perturbación direccional.	202
F.17. Normalización.	203
F.18. Normalización total.	203
F.19. Fusión probabilística.	203
F.20. Índice y valor de la trayectoria con menor medida angular.	204

1

Introducción

A partir de los avances científico-técnicos podemos sentirnos capaces de acometer nuevos retos. En este sentido, la vieja aspiración de disponer de robots autónomos se intuye más próxima, especialmente si se considera una autonomía limitada a la consecución de objetivos simples, tales como la manipulación de objetos, por ejemplo.

El problema al que hay que hacer frente es el de la adaptación al medio en donde debe desarrollarse la operación, es decir, ser capaz de conseguir *información suficiente*, saber *cómo utilizarla* y disponer de la capacidad de *actuar adecuadamente*. En entornos totalmente controlados esta tarea se viene desarrollando con cierto éxito desde hace algún tiempo. El problema surge cuando el entorno no es suficientemente conocido y, además, hay que desarrollar la actividad partiendo de información incierta o incompleta.

En la actividad cotidiana los seres humanos tratan de manera natural con ambos problemas. Reconocen el entorno, adquieren la información pertinente y actúan. Incluso pueden actuar, normalmente con éxito, sin disponer de una información exacta y completa. Para conseguir una buena información se hace generalmente uso de estrategias de fusión sensorial, posteriormente se interpreta esa información y se infiere la actuación más adecuada. Además, es posible mejorar la actuación en base a la reacción observada. No es en absoluto fácil conseguir que un robot pueda hacer lo mismo.

Esta tesis se focaliza sobre el problema de conseguir una buena información, es decir, información suficientemente exacta, precisa y completa como para poder actuar debidamente y conseguir los objetivos propuestos en entornos parcialmente conocidos. Para ello el trabajo aquí desarrollado se centra en el estudio de la problemática relacionada con la manipulación robotizada de objetos deformables.

1.1 Marco

Actualmente, los robots están siendo muy utilizados en la industria manufacturera. Su utilización permite reducir los costes de fabricación y mejorar el producto final. No obstante, su uso no es tan extenso como sería deseable ya que existen problemas de difícil solución. En muchos casos las operaciones realizadas por los robots han sido meticulosamente estudiadas y concretadas en un programa, el cual determina su comportamiento hasta en el detalle más pequeño, tratando de no descuidar nada, lo cual dificulta considerablemente su elaboración, tanto más cuanto más compleja sea la actuación del robot. Existe un elemento que es el principal responsable de esta dificultad: la incertidumbre; en otras palabras, la falta de un conocimiento perfecto sobre todos los aspectos relacionados con la actuación del robot: existe incertidumbre sobre la forma del objeto sobre el que se actúa, incertidumbre sobre la posición de ese objeto en el entorno de operación e incertidumbre sobre la propia actuación del robot.

Reducir esta incertidumbre pasa, necesariamente, por mejorar la información y una forma de conseguirlo es mediante la introducción de sensores. Esto conlleva el problema de determinar los sensores adecuados, el procesamiento de la información aportada por cada uno de ellos, la fusión de información y la planificación de estrategias.

Nutriendo al controlador del robot con una información adecuada es posible mejorar su actuación y, además, resultará más sencilla la programación de las tareas. Supone dotar al robot de cierta autonomía al poder adecuar su actuación a entornos variables o parcialmente conocidos, lo cual conlleva un aumento en la eficiencia y posibilita su uso en otros ámbitos distintos al de la fabricación.

Las áreas de investigación que tratan estos problemas son la *Planificación del ensamblado* (Assembly planning) y la *Planificación de las tareas* (Task planning). Una detallada clasificación de estos campos ha sido desarrollada por el “IEEE Technical Committee on Assembly and Task Planning”, en (Gottschlich et al., 1994). La *Planificación del ensamblado* es el proceso de determinar un conjunto de instrucciones para el ensamblado mecánico de un producto a partir de un conjunto de componentes. Cada instrucción especifica qué componente será añadido al conjunto parcialmente ensamblado.

La *Planificación del ensamblado* no está ligada al uso posterior de un robot para llevarla a cabo; de esto podría encargarse, por ejemplo, una persona. Si la ha de realizar un robot, entonces, normalmente se requiere una operación posterior consistente en trasladar estas instrucciones a operaciones de robot; a esta traslación se la conoce como *Planificación de las tareas* y trata asuntos como:

1. *Análisis de la incertidumbre*: Análisis de la incertidumbre que afecta a la tarea de ensamblado, cómo modelarla, cómo propagarla y cómo tomarla en consideración cuando se planifica un movimiento. Así, se podrá hacer una estimación sobre la

viabilidad del ensamblado.

2. *Planificación de las operaciones sensitivas*: Determinación de la información necesaria, su procesamiento y fusión, y la planificación de estrategias sensoriales.
3. *Planificación de movimientos gruesos*: Determinación de trayectorias libres de colisión para aproximar la herramienta del robot al objeto a manipular. No se acostumbra a considerar la incertidumbre, lo que puede llevar a realizar un recorrido conservador.
4. *Planificación de movimientos finos*: Determinación de las trayectorias a seguir por el robot cuando su herramienta está en contacto, o muy próxima, al objeto a manipular y la incertidumbre obliga a desarrollar movimientos finos. Generalmente estos movimientos están asistidos por información sensorial. Un problema particular es cómo conseguir un buen modelo de la incertidumbre.
5. *Planificación de operaciones de manipulación*: Se encarga de planificar las manipulaciones individuales requeridas y el instante de aplicación.

Dentro del marco descrito, esta tesis se centra en las dos primeras áreas de la *planificación del ensamblado: análisis de la incertidumbre y planificación de las operaciones sensitivas*, con una particularidad: los objetos de interés no son cuerpos rígidos sino deformables. Además, por el hecho de tratar exclusivamente con información, los resultados obtenidos podrán ser de aplicación en entornos distintos al del ensamblado.

1.2 Objetivos

Para manipular un objeto se requiere información sobre su forma, pero los objetos deformables la cambian cuando se los manipula. Así, se hace imprescindible disponer de un sistema que aporte buena información y de manera permanente. La forma del objeto sometido a manipulación dependerá de sus características propias, de las zonas sobre las que se actúe y de las fuerzas de actuación. De este modo, es necesario recabar información de tres tipos:

1. *Comportamiento del objeto ante la actuación del robot*. Esto conlleva a la necesidad de obtener un modelo del objeto deformable.
2. *Zonas del objetos sobre las que se actúa*. Es posible derivar esa información a partir de la cinemática del robot.
3. *Fuerza aplicada sobre cada zona de actuación*. Requiere el uso de algún tipo de sensor de fuerza.

Si se consigue que toda la información anterior sea perfecta y esté disponible cuando se la requiera, el problema quedará resuelto, es decir, será posible actuar debidamente. No obstante, en el mundo real no existe la perfección: el modelo del objeto deformable no reproducirá exactamente la forma real del objeto, las zonas de actuación del robot se conocerán con limitada exactitud y los sensores de fuerza aportarán una información incierta.

Ante esta realidad, la cuestión que se plantea es la siguiente: ¿es posible conseguir la información sobre la forma del objeto con la suficiente calidad como para actuar debidamente? La respuesta a esta pregunta pasa necesariamente por definir lo que se entiende por *actuar debidamente*. Luego se deberá concretar la *calidad* de cada una de las fuentes de información, si son suficientes o no y sobre las estrategias de integración. En este sentido cabe recordar una cuestión importante: si se hace un uso adecuado de la fusión de información se puede conseguir una información de más calidad que aquella derivada de la suma de las partes (sinergia).

Partiendo del hecho de que se tendrá un conocimiento inexacto sobre la forma del objeto deformable, parece razonable pensar en incorporar algún otro tipo de elemento que aporte información complementaria sobre la verdadera forma del objeto, y este elemento puede ser, por ejemplo, un equipo de visión estéreo con capacidad de generar información tridimensional. Por supuesto, la información aportada por este sistema de visión también estará sometida a incertidumbre. Además, su información podrá ser incompleta por motivos de oclusión.

En este sentido, *el propósito de esta tesis es determinar la forma real de un objeto deformable cuando está siendo sometido a manipulación por parte de un robot.*

1.3 Motivación

Un campo de aplicación especialmente interesante para la robótica es el de la ingeniería biomédica, en donde el trato con materiales biológicos y tejidos sintéticos blandos es habitual (Taber, 2004). Existen multitud de tareas en las que la asistencia robotizada es muy deseable en este campo. Un caso singular es el de la asistencia en cirugía, donde la exactitud es un atributo muy importante. Uno de los problemas fundamentales a superar es precisamente el de la manipulación eficiente de los materiales biológicos, los cuales presentan una serie de propiedades que hacen muy difícil su tratamiento: a priori se desconoce el lugar exacto que ocupan en el organismo, carecen de una forma preconcebida precisa, su forma cambia al manipularlos, por lo general presentan un comportamiento viscoelástico no lineal, pueden ser incompresibles, etc. La superación de estos problemas posibilitará el uso, por ejemplo, de la teleoperación o, incluso en los casos más simples, de la operación automática, sin intervención humana.

La mayoría de materiales deformables de interés son volumétricos. No obstante, dada la dificultad en modelar adecuadamente estos cuerpos, y tratándose de un problema incipiente para la investigación, se ha optado por acometer el problema desde su base. De esta forma, se comienza por modelar cuerpos unidimensionales, para luego pasar a cuerpos bidimensionales y, por último, ser capaces de acometer los cuerpos tridimensionales.

Los objetos elastómeros presentan propiedades viscoelásticas no lineales semejantes, en muchos casos, a la de los tejidos biológicos blandos y ello ofrece una vía indirecta de estudio y experimentación cuyas conclusiones pueden ser extrapolables; además, permiten una cómoda experimentación en cada una de las tres dimensiones. Uno de estos objetos elastómeros es la membrana de caucho natural, con la que se puede experimentar en una y dos dimensiones.

Para comenzar con el estudio del efecto de la manipulación sobre la forma del objeto, resulta útil provocar deformaciones que mantengan la simetría en las formas. Es por ello que la membrana quedará fijada a un aro circular y las deformaciones las provocará la inserción de una esfera guiada por un robot. Dado que toda la información utilizada está sometida a incertidumbre, una parte importante del estudio consiste en generar procedimientos que permitan obtener la información sobre la forma del objeto con la máxima calidad posible. Para ello se promueven técnicas de integración sensorial cuya aplicación puede hacerse extensiva a otras áreas del conocimiento.

1.4 Partes constituyentes

Resumiendo, se requiere un modelo del objeto deformable, información de la fuerza y de los puntos donde se aplica e información sobre la forma real del objeto. El siguiente paso será concretar cada uno de estos elementos y, para ello, antes hay que elegir el objeto deformable y el tipo de manipulación a la que estará sometido. En atención a los objetivos de esta tesis, dada la complejidad a la que hay que hacer frente y tratándose de un campo abierto a la investigación, parece prudente elegir un objeto sencillo sobre el que se desarrolle una acción sencilla.

En atención a las consideraciones anteriores, se opta por un objeto elástico bidimensional, concretamente, por una membrana de caucho natural. Ésta se dispondrá sobre una plataforma circular a la que quedará perfectamente fijada. La acción del robot consistirá en someterla a una considerable deformación provocada por la penetración, y posteriores desplazamientos axiales, de una esfera unida a través de un vástago a la muñeca de un brazo robotizado. En la propia muñeca también se ubicará un sensor para la medida de fuerza y par. Como complemento, un sistema de visión estéreo se situará en un lugar estratégico desde donde podrá observar debidamente la escena (Fig.1.1).

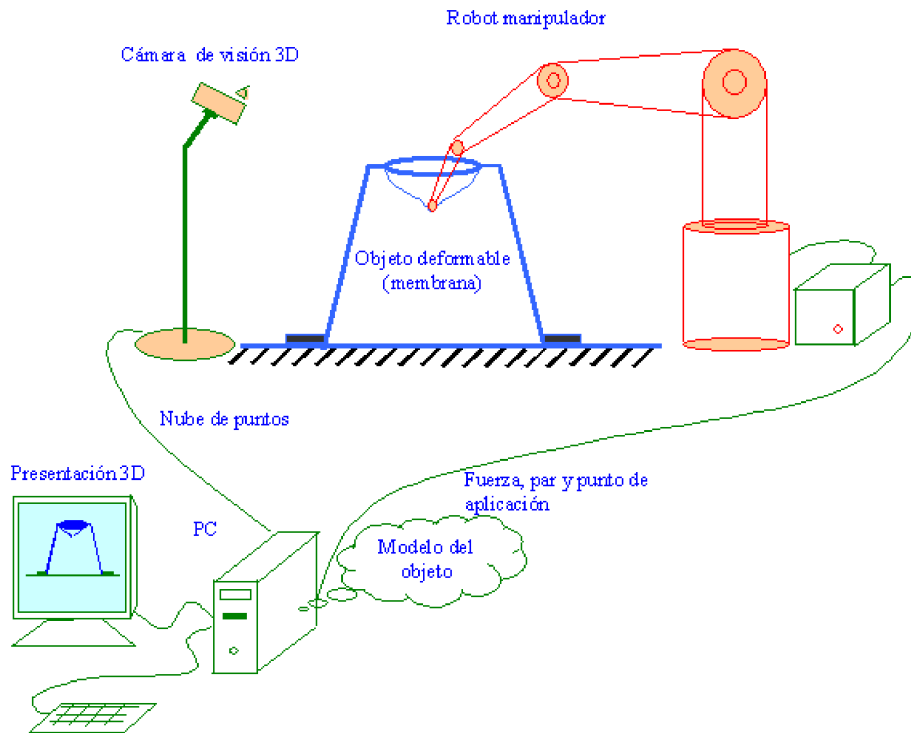


Figura 1.1: Plataforma experimental.

Para conseguir el objetivo marcado se hará uso de los siguientes recursos:

1. *Un robot y su modelo de incertidumbre:* Robot Stäubli modelo TX90.
2. *Un equipo de visión estéreo y su modelo de incertidumbre:* Cámara estéreo Point Grey Inc. modelo Bumblebee XB3.
3. *Un sensor de fuerza/par y su modelo de incertidumbre:* Sensor JR3 modelo 67M25A-I40.
4. *Un modelo de la membrana:* Modelo exponencial de masas y muelles.
5. *Un sistema de exploración del espacio de probabilidades:* Filtro de partículas.
6. *Un sistema de fusión sensorial:* Marcos probabilístico, evidencial y posibilístico.
7. *Una plataforma software con la que experimentar cómodamente:* C++ sobre Linux.

1.5 Enfoque del problema

La información incierta aportada por las fuentes de visión y tacto queda modelada por una función de densidad de la probabilidad (pdf) conocida. Igualmente, una pdf modela la posición del actuador del robot. Así, cuando el robot deforme la membrana al introducir la esfera, existirá todo un espacio de probabilidades de en donde podrá ubicarse realmente la esfera. Como consecuencia, existirá todo un espacio de probabilidades de en donde podrá estar la membrana. Es decir, la membrana podrá presentar múltiples formas: según sean sus características propias y según sea la excitación incierta provocada por el robot.

El interés de este trabajo está en identificar la forma real de la membrana y, para ello, se ha de explorar el espacio de probabilidades. Dado el comportamiento no lineal de la membrana y la gran deformación a la que se somete, se hace inviable cualquier linealización del modelo de deformación. Este hecho restringe considerablemente las opciones en la elección del sistema de exploración. Es por ello que se hace uso del método Bayesiano conocido como *filtro de partículas*.

La secuencia de operaciones será como sigue:

1. El robot, partiendo de una posición incierta anterior, posiciona su muñeca, y en consecuencia la esfera, en una nueva posición también incierta.
2. Por simulación, se generan aleatoriamente una serie de trayectorias probables seguidas por la esfera.
3. Se simula la forma de la membrana para cada trayectoria.
4. Se usa la información 3D aportada por el sistema de visión junto con la información de fuerza y par aportada por los sensores, para asignar pesos a cada una de las trayectorias:
 - a) Se pondera la calidad del ajuste entre las medidas simuladas derivadas de cada trayectoria y las observaciones.
 - b) Se fusiona toda esta información de pesos haciendo uso de los marcos probabilístico, evidencial o posibilístico.
5. A partir de las mejores trayectorias derivadas de la fusión se determina la nueva información incierta sobre la forma de la membrana, información que debería ser *mejor* que la de partida.
6. Se vuelve al inicio (1).

1.6 Contribuciones

El procedimiento seguido para conseguir una buena información sobre la forma de la membrana deformada a partir de fuentes inciertas, hace uso de un modelo matemático que reproduce la forma de la membrana a partir de una excitación conocida y de un conjunto de parámetros que determinan su comportamiento. Dado que la excitación real es incierta pero probabilísticamente conocida, por simulación se genera todo un conjunto de excitaciones probables, para luego contrastar las medidas derivadas de las diferentes formas inducidas con las medidas de los sensores. Aquellas formas cuyas medidas simuladas sean las más parecidas a las medidas aportadas por los sensores serán las elegidas.

Para implementar esta idea se requiere desarrollar todo un conjunto de herramientas y adquirir los conocimientos pertinentes sobre el comportamiento real de la membrana cuando se la manipula. El siguiente listado es un resumen de las aportaciones de esta tesis al problema planteado:

1. Diseño, implementación y validación del modelo exponencial de masas y muelles con el que se simula el comportamiento de la membrana.
2. Estudio del comportamiento de las fuerzas de reacción de la membrana ante diferentes tipos de excitación: identificación del efecto de cancelación de fuerzas.
3. Estudio del comportamiento de la información visual en relación con la forma de la membrana.
4. Diseño, implementación y validación de los filtros AdSIR y AdASIR para su uso como plataformas de integración sensorial.

Resultados simulados y experimentales muestran los beneficios derivados del uso de estos filtros en conjunción con el modelo exponencial de masas y muelles.

1.7 Trabajos relacionados

En esta sección se presenta el estado del arte en cuanto a la utilización de modelos deformables y técnicas de fusión sensorial, encaminadas a obtener un conocimiento más exacto y preciso del entorno, o bien a conseguir una operación más eficiente, especialmente en lo referente al uso de robots en tareas relacionadas con objetos deformables. Posteriormente, en su capítulo correspondiente, se desarrollará el estado del arte en ambas áreas desde un punto de vista más general.

Desde hace unos años se viene considerando la idea de dotar de mayor autonomía a los robots para que puedan asistir en tareas de mayor complejidad, especialmente relacionadas con el desarrollo de su actividad en entornos no completamente conocidos (Seitz, 1999), (Saadat and Nan, 2002). En este sentido, uno de los aspectos a considerar es el de la manipulación de objetos deformables (Khalil and Payeur, 2010). No obstante, es escasa la literatura en este ámbito y la mayoría de los trabajos existentes están relacionados con objetos rígidos (Bicchi and Kumar, 2002), (Yu and Gu, 2008). Khalil and Payeur (2007) además de revisar las principales cuestiones y tendencias relacionadas con la manipulación de objetos rígidos, también consideran diferentes soluciones introducidas en la manipulación de objetos deformables.

La idea de usar los modelos deformables para mejorar algún aspecto de la información no es nueva. Desde los primeros trabajos de Kass et al. (1988) y Terzopoulos et al. (1988), estos modelos han recibido una gran atención, llegando a utilizarse en áreas tan diversas como gráficos por ordenador, visión por ordenador, geometría computacional y robótica (Moore and Molloy, 2007), entre otros.

Los modelos habituales para describir los materiales deformables en robótica, están esencialmente contruidos a partir de diferentes configuraciones de masas y muelles amortiguados, siendo los de Kelvin (o Voigt) y Maxwell (Byars and Snyder, 1969) los modelos básicos. Dos ejemplos son los trabajos de Tokumoto et al. (1999), que presentan una combinación en serie de los modelos de Kelvin y Maxwell para modelar deformaciones viscoelásticas e introducen un amortiguador no lineal para solucionar discrepancias entre el objeto real y su modelo lineal, y de Diolaiti et al. (2005), que usan el modelo no lineal de Hunt-Crossley (Hunt, 1975) para estimar la impedancia de contacto.

También han sido usados los modelos de elementos finitos (FEM) aunque menos extensamente. Luo and Nelson (2001) describen un marco que fusiona visión y fuerza de reacción para el control de objetos altamente deformables y hacen uso de contornos activos, o *snakes*, para observar los cambios en el objeto en el tiempo y un modelo de FEM para predecir las deformaciones. Li et al. (2002) modelan la deformación de una hoja de metal y Garg (2006) desarrolla un modelo FEM para controlar el agarre y manipulación de objetos deformables.

La fusión de información puede acontecer de forma separada o integrada en los propios procesos de control (Hosoda et al., 1996), (Nelson and Khosla, 1996), (Morel et al., 1998), (Baeten et al., 2003). Allen et al. (1999) integran visión estereo y tacto para ayudar en las tareas de manipulación de cuerpos rígidos. No modelan el objeto y muestran un experimento con el que consiguen desenroscar la tapa de un bote sujeto por su base. Ishikawa et al. (1996) fusionan información complementaria de visión y fuerza para mejorar el contacto entre dos cuerpos rígidos solucionando el problema de la posible oclusión. Xiao et al. (2000) controlan un manipulador para que siga un camino sobre una superficie desconocida con la ayuda de una cámara no calibrada, junto con la in-

formación de fuerza-par y de posición del propio robot. Jian Huang and Yabuta (2005) implementan un método de control de posición/fuerza que incorpora información visual y permite a un robot con una herramienta flexible en forma de manguera seguir una curva especificada sobre un plano con el que contacta, sin hacer uso de ningún modelo de deformación. Smits et al. (2006) muestran cómo la fusión multisensorial de visión, fuerza y posición puede ayudar a mejorar el control del robot haciendo uso de un filtrado Bayesiano, y Thomas et al. (2007) fusionan información de visión, fuerza y par, proveniente de mapas previamente elaborados, junto con la información real del momento, en el marco del filtro de partículas y para tareas de ensamblaje.

La mayor parte de los trabajos sobre objetos deformables están relacionados con el modelado y control de objetos deformables lineales de una dimensión tales como barras, cables, cuerdas, etc. y de dos dimensiones tales como láminas, ropa, etc. los cuales han sido estudiado extensivamente para aplicaciones específicas (Henrich and Wörn, 2000), (Saadat and Nan, 2002). En un reciente trabajo, Elbrechter et al. (2012) consiguen plegar adecuadamente y en tiempo real una hoja de papel hasta conformar un avión, usando integración de visión y tacto sobre un modelo del papel actuado por un robot con dos manos.

El modelado de objetos deformables tridimensionales ha recibido una menor atención en la literatura, sin duda debido a su mayor complejidad. A. Howard (2000) lleva a cabo uno de los primeros trabajos desarrollando una solución generalizada para modelar y manejar este tipo de objetos. Hacen uso del modelo dinámico introducido por Reznik and Laugier (1996), donde se usa el modelo de Kelvin para reproducir su comportamiento viscoelástico, y de una red neuronal para controlar el agarre y la manipulación de tal forma que no se requiere el conocimiento previo de los atributos del objeto deformable, pudiendo así aplicarse a muchos tipos de ellos. Zhang et al. (2006) generan un programa automático para el seguimiento de una línea en 3D controlando la posición y orientación del robot, para lo que hacen uso de fusión de información de visión, fuerza y posición. Pomares et al. (2007) fusionan información de visión y fuerza para generar trayectorias en 3D. Cretu et al. (2008) usan una red neuronal con la que, junto con información visual y táctil, pueden caracterizar la relación entre la deformación de la superficie y las fuerzas intervinientes en un cuerpo no rígido, consiguiendo representar la deformación de objetos 3D en términos de su comportamiento elástico y de forma. En un reciente trabajo, Hebert et al. (2011) hacen uso del filtro extendido de Kalman para fusionar información 3D visual junto con fuerza y par para determinar la posición de un objeto rígido agarrado por un robot. Cretu et al. (2012) usan redes neuronales para el modelado y predicción del comportamiento de objetos deformables manipulados por una mano robótica, además de la monitorización y segmentación de secuencias de imágenes.

Un campo especialmente activo dentro de la visión por ordenador es el del tratamiento de imágenes médicas en lo concerniente a la reconstrucción de objetos tridimension-

ales de alta calidad. Por ejemplo, Esteban and Schmitt (2004) presentan un método de reconstrucción 3D basado en un modelo deformable el cual define un marco donde la información de textura y silueta puede fusionarse. Haibin et al. (2010) usan una estrategia de fusión local usando modelos deformables para conseguir un reconocimiento robusto de caras. Wasserman et al. (1995) hacen uso de modelos deformables, lógica borrosa y fusión de información para localizar con mayor precisión los tumores que, posteriormente, son expuestos a terapias de radiación en pacientes de cáncer reduciendo así los riesgos sobre los tejidos sanos.

En el área de la nanomanipulación existen trabajos relacionados con la medida de fuerzas usando diferentes técnicas relacionadas con el uso de visión y sencillos modelos deformables con los que se consiguen precisiones del orden de μN (Liu et al., 2007), (Greminger and Nelson, 2004), (Chawda and OrMalley, 2011).

1.8 Organización de los diferentes capítulos

- El Cap. 2 es una revisión del estado del arte en cuanto al modelado de objetos deformables. Se expone el modelo clásico de masas y muelles y se hace un repaso a diferentes tipos de integradores.
- El Cap. 3 es una revisión del estado del arte en cuanto al tratamiento de la información imperfecta. Se clasifican y definen ciertos vocablos habituales, se hace un repaso a diferentes técnicas de fusión y se exponen las partes más significativas de los principales marcos para el tratamiento de la información imperfecta: el probabilístico, el evidencial y el posibilístico.
- En el Cap. 4 se presenta el modelo exponencial de masas y muelles. Se exponen sus fundamentos, se analizan sus errores y se proponen ideas para su sintonía.
- En el Cap. 5 se aborda el problema objeto de esta tesis: la determinación de la forma de un objeto deformable sometido a manipulación robotizada. Se modela la incertidumbre en el robot, se presenta un estudio sobre el comportamiento del objeto desde el punto de vista de la información visual y de fuerza, se proponen diferentes procedimientos de integración y se presentan los resultados.
- En el Cap. 6 se presentan las conclusiones de esta tesis basadas en los resultados mostrados en el Cap. 5 y se proponen líneas de investigación para el futuro.

2

Modelado de objetos deformables

2.1 Introducción

UN buen modelo del objeto a manipular es imprescindible. El modelo integra todo el conocimiento sobre el comportamiento del objeto ante estímulos, lo que permite operar de manera simulada y, por ejemplo, derivar estrategias de control adecuadas para el éxito posterior cuando haya que tratar con la realidad física. Pero también posibilita operar en línea, anticipándose a unos acontecimientos esperados y consiguiendo desarrollar una actividad más rápida, precisa y autónoma.

Los trabajos en robótica relacionados con la manipulación tienden a imitar el comportamiento humano. Los humanos hacen un uso permanente de los modelos deformables. Por ejemplo, anudarse los cordones de los zapatos o ponerse la camisa son tareas que pueden simularse mentalmente (*simulación*) porque son conocidos los detalles de su forma y comportamiento. Y cuando se realiza la acción, es posible adecuar ese conocimiento a la realidad concreta del momento (*autonomía*) haciendo uso de información sensorial (*visión y tacto* fundamentalmente). Luego, con esta nueva experiencia, se puede mejorar el modelo anterior (*aprendizaje*). No es en absoluto una tarea fácil, ya que se requieren varios años antes que los niños puedan atarse los cordones de sus zapatos o vestirse.

Hasta los años 80, las técnicas de modelado por ordenador estaban restringidas a modelos de cuerpos rígidos. Avanzada esa década aparecen los primeros trabajos sobre modelado por ordenador de cuerpos deformables. De entre ellos hay que citar a Kass et al. (1988) que introdujeron los *Contornos Activos* para 2D, los cuales fueron pronto generalizados para 3D por Terzopoulos et al. (1988), que acuñaron el término de *Modelos Deformables*.

Las técnicas actuales relativas al modelado de objetos deformables combinan elementos de geometría, física, cálculos avanzados, teoría de la aproximación, estadística, y métodos numéricos. La complejidad de tales problemas es el principal factor que ha

limitado su desarrollo, particularmente en aplicaciones de tiempo real. Hoy los modelos deformables se usan en entornos muy variados: entretenimiento interactivo, simulación de choques entre vehículos, entornos de escultura virtual intuitiva, seguimiento, aplicaciones médicas tales como análisis de imágenes o simulaciones quirúrgicas en tiempo real, etc. (Moore and Molloy, 2007).

Una primera clasificación de los modelos deformables puede hacerse entre aquellos cuya deformación está guiada por técnicas puramente geométricas (técnicas no físicas) (Piegl and Tiller, 1997), (Milliron et al., 2002), (Sela et al., 2006), y aquellos que incorporan los principios de la mecánica continua o la dinámica newtoniana con la estructura geométrica, ofreciendo una deformación más convincente y realista (técnicas físicas) (Nealen et al., 2006a). Los primeros, aunque rápidos, no son adecuados para modelar el comportamiento dinámico de un objeto deformable. Es por esto que no serán tomados en consideración en este trabajo.

La membrana que se pretende modelar en esta tesis, al igual que la mayoría de materiales elastómeros, presenta un comportamiento hiperelástico. El estudio del comportamiento de los materiales hiperelásticos ha recibido una gran atención desde los primeros trabajos de Mooney (1940) y Rivlin (1940). Rivlin formó la base para el estudio científico y aplicaciones tecnológicas de la teoría de materiales hiperelásticos (Barenblatt and Joseph, 1997). Posteriormente han sido muchos los trabajos relacionados, entre los cuales el estudio del comportamiento de las membranas constituye una parte significativa, dado que exhiben muchas de sus características y resultan muy adecuadas para una cómoda experimentación (Spencer, 1970), (Ogden, 1984), (Beatty, 1987), (Libai and Simmonds, 1998), (Selvadurai, 2006) y (Selvadurai and Shi, 2012).

Entre los modelos que exhiben un comportamiento realista (modelos físicos) existen dos categorías: aquellos basados en la mecánica continua y los modelos discretos. Entre los primeros predomina el modelo de elementos finitos (FEM) (Bro-nielsen, 1998). Los métodos de elementos finitos son técnicas matemáticas muy extendidas para encontrar soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales parciales derivadas de la teoría de la elasticidad (mecánica continua).

La mayoría de fenómenos físicos pueden modelarse usando ecuaciones diferenciales. Sin embargo, son pocas las ecuaciones diferenciales a las que se puede dar solución de forma analítica. Este hecho obliga a abandonar la pretensión de encontrar soluciones exactas para la mayoría de problemas complejos. Para avanzar en este campo, se han introducido técnicas numéricas con las que se puede obtener una solución aproximada para valores discretos de las variables independientes. La técnica utilizada en los modelos de elementos finitos funciona subdividiendo el dominio del problema, dando lugar a una malla discreta conformada por pequeñas partes, conocidas como elementos finitos, que reducen una complicada ecuación diferencial a un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden resolverse numéricamente.

Como consecuencia de que las ecuaciones que definen el modelo se resuelven integrándolas en el tiempo, deben reevaluarse a cada paso de integración conforme el objeto se deforma. Esto supone una severa carga computacional que, salvo en los casos más simples, hace a los modelos de elementos finitos inadecuados para entornos interactivos (Taylor et al., 2007). No obstante, para pequeñas deformaciones y topología constante puede asumirse un comportamiento elástico lineal. De esta forma, ciertas partes de las ecuaciones pueden considerarse constantes, lo que agiliza considerablemente su resolución y posibilita su uso incluso para aplicaciones de tiempo real. El reto no es pequeño, pero dada la exactitud y realismo físico de esta técnica, se trabaja intensamente para superar sus restricciones (Picinbono et al., 2003), (Teran et al., 2003), (James and Pai, 1999), (Bro-Nielsen and Cotin, 1996), (Cotin et al., 1996), (Li and Lee, 2007).

En el campo de la mecánica continua se han desarrollado una serie de modelos que tienden a reproducir el comportamiento de los materiales hiperelásticos, de entre ellos, el sencillo modelo de Mooney-Rivlin es el más empleado con las membranas (Martins et al., 2006), (Pearce et al., 2011). Yang and Hsu (1971) y, más recientemente, Selvadurai (2006), han acometido el problema de la carga de una membrana circular a través de una esfera, sometiéndola a grandes deformaciones y usando el modelo de Mooney-Rivlin.

Entre los modelos discretos predominan los de masas y muelles. Son intuitivos, ofrecen una estructura simple y un relativo bajo coste computacional. Esto les faculta para acometer problemas de grandes deformaciones e incluso modificaciones topológicas de forma sencilla, permitiendo la interactividad. Además, su estructura local permite la aplicación de computación paralela, posibilitando afrontar sistemas complejos. Su uso está muy extendido, comprendiendo campos tan diversos como la animación por ordenador (Nealen et al., 2006b), (Baraff and Witkin, 1998), (Desbrun et al., 1999) y las simulaciones quirúrgicas (Meier et al., 2005), entre otros.

Es abundante la literatura en el uso de tales modelos en cuanto a objetos deformables en general. Por ejemplo, en (Okamura et al., 2004), (Chen et al., 2007), (Basafa and Farahmand, 2011) se hace uso de una evolución no lineal de la fuerza en los muelles para modelar tejidos blandos. No obstante, es escasa la literatura en cuanto al modelado de membranas. En el campo de la simulación quirúrgica, Grimm et al. (2004) usan un sistema de masas y muelles para la simulación interactiva de un procedimiento oftalmológico en el que se modela una membrana ocular (capa limitante interna). En el ámbito espacial está adquiriendo importancia el uso de membranas en aplicaciones tales como antenas, velas solares, captación de energía solar, etc. dado el poco volumen que emplean cuando están recogidas y la gran superficie que pueden cubrir al desplegarse (Okuizumi and Yamamoto, 2009).

El principal problema de los modelos de masas y muelles es el derivado de su naturaleza discreta, que impone una aproximación significativa sobre la realidad física que acontece en un cuerpo continuo. Como consecuencias de esta aproximación a la teoría

de la elasticidad, aparecen los siguientes problemas:

1. Dificultad para definir los parámetros adecuados para una simulación convincente.
2. Tendencia a la inestabilidad cuando la rigidez es elevada.
3. Mal comportamiento volumétrico.
4. Predisposición a oscilar.

Normalmente, el ajuste de los parámetros de los modelos de masas y muelles (masa, rigidez y amortiguamiento) se realiza manualmente, hasta que la apariencia visual es convincente. No obstante, existen varios trabajos al respecto que permiten derivar los parámetros óptimos a partir de las propiedades del material (módulo de Young y coeficiente de Poisson). En ellos se hace uso de un modelo de elementos finitos como modelo de referencia y en su estudio se limitan a materiales lineales e isótropos ((Lloyd et al., 2007b), (Morris and Salisbury, 2008), (Bianchi et al., 2004), (Mosegaard, 2004)). Gelder (1998) muestra que asignar la misma rigidez a todos los muelles falla para simular una membrana uniforme si se usa una malla triangular. Además deriva una fórmula que permite obtener la rigidez que ofrece la simulación más precisa. También muestra que, en general, la simulación exacta con mallas triangulares no es posible.

Si la rigidez de los muelles es alta, el modelo de masas y muelles tiende a desestabilizarse. Para corregirlo, se dispone de dos alternativas: reducir el paso de integración, si se trata de un integrador explícito, o usar un integrador implícito. La primera opción conlleva un incremento en el tiempo de integración de la malla, que puede llegar a ser excesivo. Los integradores implícitos, por otra parte, requieren más tiempo de cómputo para cada paso de integración pero permiten elegir pasos de integración mayores, mejorando significativamente el balance (Baraff and Witkin, 1998).

Desbrun et al. (1999) han desarrollado un método para agilizar el algoritmo implícito haciendo uso de una etapa de predicción-corrección en donde pueden considerarse las no linealidades de los muelles. Esta etapa hace uso de un procedimiento de dinámica inversa desarrollado por Provot (1995). Müller et al. (2002) ofrecen otra idea que contempla la elasticidad no lineal, el integrador implícito y el tiempo real, considerando los problemas derivados de las rotaciones que tienden a modificar sustancialmente el volumen del cuerpo.

La estructura local de los modelos de masas y muelles impiden una rápida propagación global de las deformaciones. Esto puede derivar en un comportamiento volumétrico visiblemente pobre. Además, cuando se estabiliza el objeto deformado, podría observarse una alteración significativa en su volumen que quizás no se corresponda con la realidad

que pretenden simular. Existen dos métodos fundamentales para considerar el comportamiento volumétrico del objeto durante la deformación: discretizar todo el volumen (Jansson and Vergeest, 2002), (Gibson, 1997), (Picinbono et al., 2000) o sólo la superficie (Arnab and Raja, 2008), (Hong et al., 2006). Hong et al. (2006) usan la malla propuesta por Choi and Ko (2002). Con estos métodos pueden conseguirse resultados aceptables pero siempre a costa de una mayor carga computacional.

Son muchas las alternativas existentes para modelar el comportamiento de una membrana. Y no existe la solución global ideal. Se dispone de un amplio abanico de posibilidades entre aquellos modelos que mejor reproducen el comportamiento real, y que requieren más recursos (modelos continuos), y aquellos que ofrecen un comportamiento modesto, pero que son ágiles e intuitivos (modelos discretos). En este trabajo, de una parte se pretende explorar las posibilidades ofrecidas por la fusión de información y demostrar que es posible conseguir una buena información partiendo de fuentes inciertas; por otra parte, siendo que la finalidad del trabajo es facilitar la manipulación robotizada de objetos deformables, se hace imprescindible un sistema ágil. En este sentido, los modelos de masas y muelles constituyen la mejor elección.

2.2 Modelo de masas y muelles

El modelo de masas y muelles tiene la particularidad de discretizar la materia continua de forma que la masa queda concentrada en puntos (nodos) y la interrelación entre nodos queda representada por muelles. Cada nodo tiene la masa equivalente al volumen que discretiza y los muelles definen las fuerzas internas entre los nodos que enlazan. La forma más sencilla de interconectar los muelles consiste en la interconexión sólo local. Es decir, cada nodo está directamente conectado sólo con sus vecinos, conformando con ellos una superficie. Según la disposición relativa de los nodos y sus conexiones con los vecinos pueden formarse varios tipos de mallas, las más comunes son la cuadrada y la triangular (Fig. 2.1). La forma cuadrada puede hacer uso de los muelles diagonales o no, según la importancia de las fuerzas de cizallamiento, y cada triángulo de una triangulación comparte al menos uno de sus lados con un triángulo vecino. El realismo físico de esta discretización se consigue al relacionar las masas con las fuerzas haciendo uso de la segunda ley de Newton. Se trata de una simple aproximación a la realidad pero con resultados nada desdeñables.

2.2.1. El modelo clásico

El modelo de masas y muelles puede presentar un comportamiento viscoelástico si se actúa sobre los muelles mediante un amortiguador en paralelo, y sobre los nodos, con

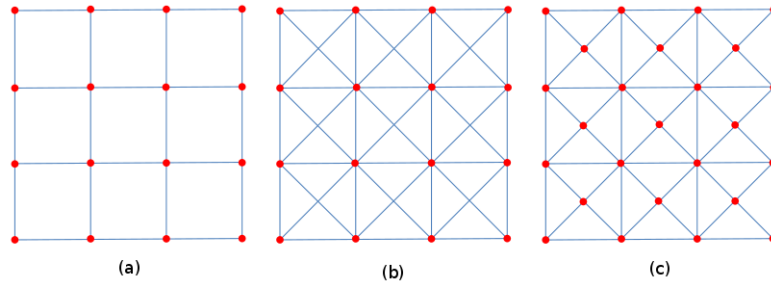


Figura 2.1: Tipos de mallas: (a) cuadrada con 4 muelles/nodo; (b) cuadrada con 8 muelles/nodo; (c) triangular.

una fuerza contraria al movimiento y dependiente de su velocidad (como si los nodos estuvieran introducidos en un fluido viscoso). Otra fuerza a considerar es la derivada del posible rozamiento entre objetos; a tal efecto se acostumbra a considerar la fricción de Coulomb. Con todo, el modelo masas y muelles puede quedar definido por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$m_i \ddot{\mathbf{P}}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int} \quad (2.1)$$

donde m_i y $\ddot{\mathbf{P}}_i$ son la masa y la aceleración asociada al nodo i , respectivamente, y $\mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int}$ es la fuerza total (externa e interna) actuante sobre el mismo nodo.

La fuerza interna, a su vez, se puede descomponer en

$$\mathbf{F}_i^{int} = \mathbf{F}_i^{vn} + \mathbf{F}_i^c + \sum_{\forall s \in S_i} (\mathbf{F}_i^{m_s} + \mathbf{F}_i^{vm_s}) \quad (2.2)$$

donde \mathbf{F}_i^{vn} es la fuerza de fricción viscosa actuante sobre el nodo i , \mathbf{F}_i^c es la fuerza de fricción de Coulomb y S_i es el conjunto de muelles asociados al nodo i , mientras que $\mathbf{F}_i^{m_s}$ y $\mathbf{F}_i^{vm_s}$ son las fuerzas elástica y de fricción viscosa, respectivamente, asociadas a cada muelle s . Siguiendo con este desarrollo

$$\mathbf{F}_i^{vn} = a_i \dot{\mathbf{P}}_i \quad (2.3)$$

donde a_i y $\dot{\mathbf{P}}_i$ son el coeficiente de fricción viscosa y la velocidad, respectivamente, asociados al nodo i ,

$$\mathbf{F}_i^{m_s} = b_{ji} (\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\| - l_{ji}^0) \frac{\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\|} \quad (2.4)$$

donde el muelle s se sitúa entre los puntos \mathbf{P}_j y \mathbf{P}_i . b_{ji} es el coeficiente de elasticidad asociado al muelle ubicado entre los nodos j e i , y j hace referencia a cada uno de los

nodos vecinos a i con los que existe unión a través de un muelle,

$$\mathbf{F}_i^{vms} = c_{ji}((\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i) \cdot (\dot{\mathbf{P}}_j - \dot{\mathbf{P}}_i)) \frac{\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\|^2} \quad (2.5)$$

donde el operador (\cdot) se refiere al producto escalar, c_{ji} es el coeficiente de fricción viscosa asociado al muelle ubicado entre los nodos j e i que multiplica a la proyección de la velocidad relativa entre los nodos j e i sobre la línea imaginaria que contiene al muelle que los une. Los tipos de fricción viscosa \mathbf{F}_i^{vn} y \mathbf{F}_i^{vms} pueden operar de forma simultánea o alternativa.

2.2.2. El integrador

La ecuación diferencial 2.1 expresa el valor de la segunda derivada de la posición (la aceleración) en función de las fuerzas actuantes sobre un nodo y su masa. Pero no interesa conocer la aceleración sino la velocidad y posición (estado del nodo) y, para ello, se debe integrar dos veces la ecuación. El nodo evoluciona de forma continua por el espacio y la Eq. 2.1 puede aportar su posición en cualquier instante de tiempo. No obstante, para ello se requiere obtener una solución analítica de la ecuación y esto no siempre es posible o práctico, especialmente con ecuaciones no lineales. La única opción viable es resolver la ecuación de una forma aproximada, utilizando métodos numéricos que, además, sólo permiten conocer la posición del nodo en instantes de tiempo discretos. Para ello, se discretiza el tiempo a intervalos regulares, llamados pasos de integración (h), y para cada instante del tiempo discreto (k) se obtiene una posición aproximada del nodo ($f_k, f_{k+h}, f_{k+2h}, etc.$).

Existe un número considerable de algoritmos que se ajustan a esta idea, cada cual con diferentes propiedades. Las propiedades más importantes a considerar son la exactitud, la estabilidad numérica y las prestaciones computacionales asociadas con los diferentes pasos de integración. Los hay que son rápidos de computar pero inestables. Otros son de difícil implementación y requieren considerable tiempo de cómputo, pero son numéricamente estables. Otros ocupan posiciones intermedias. Seguidamente se describen algunos de los más utilizados.

Integradores de Euler

Se puede descomponer la aceleración en un conjunto de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_t}{dt} &= \mathbf{a}_{(\mathbf{P}_t, \mathbf{v}_t)} \\ \frac{d\mathbf{P}_t}{dt} &= \mathbf{v}_t\end{aligned}$$

donde $\mathbf{a}_{(\mathbf{P}_t, \mathbf{v}_t)}$ denota la evaluación de la función de aceleración para la posición y velocidad en el instante t sobre cada uno de los nodos que componen el sistema. Para resolver numéricamente este sistema de ecuaciones se aproximan las derivadas como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}_{k+h} - \mathbf{v}_k}{h} &\simeq \mathbf{a}_{(\mathbf{P}_{k+\alpha h}, \mathbf{v}_{k+\alpha h})} \\ \frac{\mathbf{P}_{k+h} - \mathbf{P}_k}{h} &\simeq \mathbf{v}_{k+\beta h}\end{aligned}$$

donde α y β son constantes comprendidas entre cero y uno, que darán lugar a diferentes implementaciones. Por ejemplo, considerando $\alpha = \beta = 0$ se puede interpretar esta aproximación a la derivada como sigue:

El estado del sistema es conocido al comienzo del intervalo $(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k)$. En este punto se evalúa la aceleración de los nodos. De ahí se deriva el incremento en velocidad que habrá que aplicar al nodo justo al final del intervalo (instante $k + h$). Durante el tiempo h la velocidad se mantiene constante e igual a \mathbf{v}_k . Esa velocidad será la que determine el incremento en la posición del nodo, y que se aplicará en el instante $k + h$, estableciendo así las condiciones iniciales para una nueva iteración. La aproximación a la derivada es tanto peor cuanto mayor sea el paso de integración, coincidiendo sólo cuando $h \rightarrow 0$.

Según la elección de los parámetros α y β se obtendrán diferentes algoritmos con diferentes propiedades. Se consideran tres casos de integradores especiales: explícito, implícito y semi-implícito.

Euler Explícito: $\alpha = \beta = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}_{k+h} - \mathbf{v}_k}{h} &\simeq \mathbf{a}_{(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k)} \\ \frac{\mathbf{P}_{k+h} - \mathbf{P}_k}{h} &\simeq \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

Reordenando las ecuaciones queda:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{k+h} &\simeq \mathbf{v}_k + h\mathbf{a}_{(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k)} \\ \mathbf{P}_{k+h} &\simeq \mathbf{P}_k + h\mathbf{v}_k\end{aligned}\quad (2.6)$$

También conocido como Euler directo, este algoritmo hace uso del estado del sistema, obtenido en el último paso de integración, para computar directamente los nuevos valores. Su ventaja radica en la velocidad de cómputo, su desventaja es la inestabilidad numérica: los errores se van acumulando y crecen indefinidamente con el tiempo. Esto es especialmente acusado en sistema rígidos. Para evitar este problema hay que reducir el paso de integración en tal medida que este método pierde su único atractivo.

Para determinar el error de este método se procede primero a descomponer en serie de Taylor la expresión de la velocidad \mathbf{v}_{k+h} ,

$$\mathbf{v}_{k+h} = \mathbf{v}_k + h\dot{\mathbf{v}}_k + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{v}}_k + \dots \quad (2.7)$$

para luego comparar la expresión resultante (Eq. 2.7) con la Eq. 2.6. Considerando que $\mathbf{a}_{(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k)} \equiv \dot{\mathbf{v}}_k$ puede apreciarse que existe coincidencia hasta el segundo término. Así, se puede concluir que el error de este método se sitúa en $O(h^2)$.

Euler implícito: $\alpha = \beta = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}_{k+h} - \mathbf{v}_k}{h} &\simeq \mathbf{a}_{(\mathbf{P}_{k+h}, \mathbf{v}_{k+h})} \\ \frac{\mathbf{P}_{k+h} - \mathbf{P}_k}{h} &\simeq \mathbf{v}_{k+h}\end{aligned}$$

Como antes, reordenando las ecuaciones queda:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{k+h} &\simeq \mathbf{v}_k + h\mathbf{a}_{(\mathbf{P}_{k+h}, \mathbf{v}_{k+h})} \\ \mathbf{P}_{k+h} &\simeq \mathbf{P}_k + h\mathbf{v}_{k+h}\end{aligned}$$

También conocido como Euler inverso, este algoritmo hace uso del estado futuro del sistema para computar los nuevos valores. El problema está en que la aceleración del sistema para el siguiente paso de integración depende de su estado en ese mismo instante y este estado es desconocido. Este hecho complica extraordinariamente la resolución del sistema de ecuaciones que, ahora, ha de hacerse extensivo al sistema completo de masas y muelles dadas las interdependencias existentes. Es decir, hay que resolver un sistema, posiblemente grande, de ecuaciones no lineales y, en consecuencia, costoso desde un punto de vista computacional.

No obstante, existen alternativas que aplican una aproximación por linealización que simplifica considerablemente la tarea a costa de una, posiblemente aceptable, pérdida de exactitud. Éste es el método que se ha implementado en esta tesis y que será comentado más adelante (Sec. 2.2.2). La ventaja de este algoritmo radica en su estabilidad numérica. Los algoritmos linealizados también son estables en el sentido de que la solución está acotada y no crece indefinidamente. Un problema añadido es consecuencia de la disipación numérica de energía que hace que el sistema esté amortiguado aún cuando el coeficiente de amortiguamiento sea nulo. En este trabajo, esto no supone ningún problema dado que el sistema físico ya está suficientemente amortiguado.

Euler Semi-implícito: $\alpha = 0, \beta = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{v}_{k+h} - \mathbf{v}_k}{h} &\simeq \mathbf{a}_{(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k)} \\ \frac{\mathbf{P}_{k+h} - \mathbf{P}_k}{h} &\simeq \mathbf{v}_{k+h}\end{aligned}$$

Reordenando las ecuaciones queda:

$$\mathbf{v}_{k+h} \simeq \mathbf{v}_k + h\mathbf{a}_{(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k)} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P}_{k+h} \simeq \mathbf{P}_k + h\mathbf{v}_{k+h} \quad (2.9)$$

Primero se evalúa \mathbf{v}_{k+h} con la Eq. 2.8 a partir de la fuerza actual y luego se aplica en la Eq. 2.9 para derivar la posición futura. Este algoritmo es un híbrido entre los integradores explícito e implícito de Euler. Es tan rápido de computar como el método directo y resulta estable con pasos de integración muy superiores.

Método del Punto Medio: Este método se basa en la extrapolación aplicada a partir del conocimiento de la pendiente existente justo en el punto medio del paso de integración:

$$\mathbf{P}_{k+h} = \mathbf{P}_k + h \left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_{k+h/2} \quad (2.10)$$

Expandiendo $d\mathbf{P}/dt$ en serie de Taylor,

$$\left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_{k+h/2} = \left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_k + \frac{h}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} \right|_k + \frac{h^2}{4} \left. \frac{d^3\mathbf{P}}{dt^3} \right|_k + \dots \quad (2.11)$$

y sustituyendo la expresión 2.11 en la Eq. 2.10,

$$\mathbf{P}_{k+h} = \mathbf{P}_k + h \left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_k + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} \right|_k + \frac{h^3}{4} \left. \frac{d^3\mathbf{P}}{dt^3} \right|_k + \dots$$

Puede verse cómo los tres primeros términos del miembro derecho de la ecuación coinciden exactamente con la serie de Taylor. El error no se introduce hasta el término de orden h^3 . Antes se ha visto cómo en el algoritmo de Euler directo aparecía el error en el término de orden h^2 . Así, se trata de una mejora considerable en exactitud.

La dificultad radica en el hecho de que la pendiente en el punto medio es desconocida. Sólo se conoce al inicio del intervalo. Se puede remediar esto con una aproximación consistente en usar el método de Euler directo para estimar el valor de la función en el punto medio. Luego se podrá evaluar la derivada en ese punto y usarla para completar el paso desde el punto inicial del intervalo. Así, se requiere evaluar dos veces la función:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+h/2} &= \mathbf{P}_k + \frac{h}{2} \left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_k \\ \mathbf{P}_{k+h} &= \mathbf{P}_k + h \left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right|_{k+h/2} \end{aligned}$$

El cuadro 2.1 concreta esta idea.

Estimación del estado en el centro del paso de integración

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+h/2} &\simeq \mathbf{v}_k + \frac{h}{2} \mathbf{a}(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k) \\ \mathbf{P}_{k+h/2} &\simeq \mathbf{P}_k + \frac{h}{2} \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

Estimación del estado al final del paso de integración

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+h} &\simeq \mathbf{v}_k + h \mathbf{a}(\mathbf{P}_{k+h/2}, \mathbf{v}_{k+h/2}) \\ \mathbf{P}_{k+h} &\simeq \mathbf{P}_k + h \mathbf{v}_{k+h/2} \end{aligned}$$

Cuadro 2.1: Método del punto medio.

Método de Runge-Kutta de orden 4: La misma idea implementada en la técnica del medio punto puede extenderse evaluando la función más veces, consiguiendo con ello reducir el error al ganar más términos en la descomposición de Taylor. El método más popular que implementa esta idea es el conocido como Runge-Kutta de orden 4 que presenta un error de $O(h^5)$. En este sentido, el método de medio punto puede considerarse como un método de Runge-Kutta de orden 2.

Su implementación se muestra en el cuadro F.2 (anexo F) donde los subíndices a , b , c , d corresponden con cada uno de los cuatro pasos necesarios. En Press et al. (1992) se encuentran detalles para su implementación en lenguaje C.

Método implícito de Kang: De entre todas las técnicas, los métodos de integración implícitos son los más adecuados para entornos de tiempo real, ya que permiten grandes pasos de integración asegurando la estabilidad del sistema. No obstante, el mayor problema de los métodos implícitos es que, en general, han de resolver un gran sistema de ecuaciones lineales. El método implícito que se detalla en el cuadro F.3 es una excepción (Kang et al., 2000). En él, E es el conjunto de todos los muelles unidos al nodo i , a_i es el coeficiente de fricción viscosa asociado al nodo i y b_{ji} es el coeficiente de elasticidad del muelle situado entre los nodos j e i . Es importante para la estabilidad del modelo que la fuerza interna F_i^{int} contemple la fuerza viscosa F_i^{vn} ; no obstante, la magnitud del término a_i no resulta crítica. Este algoritmo difiere respecto al presentado en (Kang et al., 2000) en que se ha considerado la no uniformidad de los coeficientes de elasticidad, además de corregir una errata en la determinación de la fuerza viscosa.

Conclusiones Los métodos explícitos requieren escasa computación pero presentan un problema de estabilidad ante sistemas tan rígidos como el que se pretende modelar en este trabajo. Para casos como éste, se requiere adoptar un paso de integración demasiado pequeño para asegurar la estabilidad del sistema. Además, este escenario empeora cuando se han de considerar las posibles colisiones entre objetos. Con todo, y a pesar del bajo coste computacional de estos algoritmos, en la práctica se hace muy difícil conseguir prestaciones de tiempo real. Por contra, los métodos implícitos son más complejos y requieren de una considerable carga computacional, pero son muy estables, permitiendo con ello el uso de grandes pasos de integración y consiguiendo un balance positivo (Hauth et al., 2003). No obstante, cuando se requiere exactitud en el resultado, se debe limitar el paso de integración. Por otra parte, si lo que se desea es exactitud y flexibilidad, los métodos explícitos de medio punto y, especialmente, Runge-Kutta de orden 4 son la solución. El algoritmo semi-implícito ofrece un buen compromiso entre exactitud, estabilidad y rapidez.

3

Integración multisensorial

3.1 Introducción

EL procesado e interpretación de la información sensorial es una característica básica de los seres vivos que facilita su adaptación e interacción con el entorno y, en consecuencia, favorece su continuidad como especie. Los animales, en general, parecen tener una habilidad innata para fundir múltiples fuentes de información e integrarlas en sus procesos de toma de decisiones. Forma parte de su actividad cotidiana fusionar la información proveniente de sus sentidos sin ningún esfuerzo aparente. Por ejemplo, para determinar el sabor de los alimentos ingeridos se requiere de la contribución de multitud de papilas gustativas, además del sentido del olfato y la textura, fundamentalmente (Smith and Margolskee, 2006).

Parece claro que si se pretender construir una *máquina inteligente* capaz de interactuar con su entorno y tomar decisiones autónomas o simiautónomas, se hace imprescindible dotarle de una unidad capaz de fusionar e interpretar información multisensorial. No obstante, y contrariamente a lo que a priori cabría esperar, resulta una tarea particularmente difícil que ha cautivado a los investigadores desde hace unas pocas décadas y sobre lo que aún queda mucho por hacer (Joshi and Sanderson, 1999).

En este sentido, no sorprende que la integración multisensorial haya emergido como un problema central en el desarrollo de sistemas robotizados, donde la interacción con el entorno es crítica para realizar con éxito las tareas encomendadas. Dos ejemplos típicos son la manipulación de objetos y la navegación en entornos inciertos.

La integración de la información proveniente de múltiples sensores se refiere al uso sinérgico de toda esa información disponible para asistir en el cumplimiento de la tarea asignada al sistema al que da soporte. La fusión de información se refiere a un ámbito mucho más restringido y tiene que ver con cualquier etapa en el proceso de integración donde exista una combinación (o fusión) de información sensorial de diferentes fuentes dentro de un formato de representación común (Luo and Kay, 1989). El objetivo de

la combinación es *estimar o predecir estados de una entidad* (Hall and Llinas, 2001) mejorando los resultados que se podrían obtener con una única fuente de información (Fig. 3.1). En *Joint Directors of Laboratories Data Fusion Subpanel* (JDL) perteneciente al Departamento de Defensa de EEUU, se propone una declaración más formal:

La fusión de datos es un proceso multifaceta y multinivel que aborda la detección, asociación, correlación, estimación y combinación automática de datos e información desde una única hasta múltiples fuentes para conseguir una estimación de la identidad y posición, junto con una completa y a tiempo evaluación de situaciones y amenazas y su significado (Klein, 2004).

Aunque bajo un enfoque militar, especialmente en cuanto a los objetivos, la primera parte de la definición es bastante genérica. Otra propuesta de definición es la presentada por Khaleghi et al. (2011):

La fusión de información es el estudio de métodos eficientes para transformar información de forma automática o semiautomática, desde diferentes fuentes y diferentes puntos, y a tiempo, dentro de una representación que proporciona soporte efectivo para la toma de decisiones por humanos o de forma automática.

La fusión de información es un área de investigación multidisciplinar que se nutre de diversos campos tales como el procesado de señales, teoría de la información, estimación e inferencia estadística, e inteligencia artificial. Esto se refleja en una variedad de técnicas que se exponen en la Sec. 3.4.

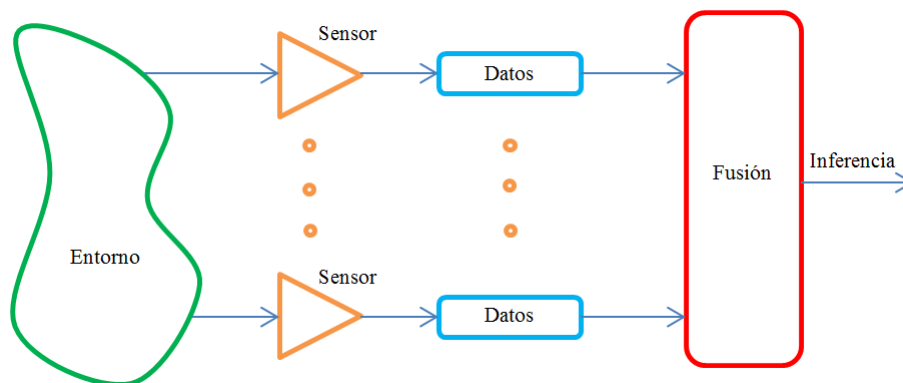


Figura 3.1: Fusión multisensorial.

3.2 Modelos y arquitecturas

Para conseguir los objetivos de la integración se requiere de la existencia de una arquitectura adecuada que permita recolectar la información requerida y procesarla sub-

siguientemente. En este sentido, existen varias conceptualizaciones que tienden a conformar un marco generalista. La Fig. 3.2 muestra un modelo general de integración de múltiples sensores en un sistema. Mientras la fusión de la información tiene lugar en los nodos de la figura, la estructura completa de la red junto con las funciones de integración, mostradas como partes del sistema, son partes de un proceso de integración multisensorial.

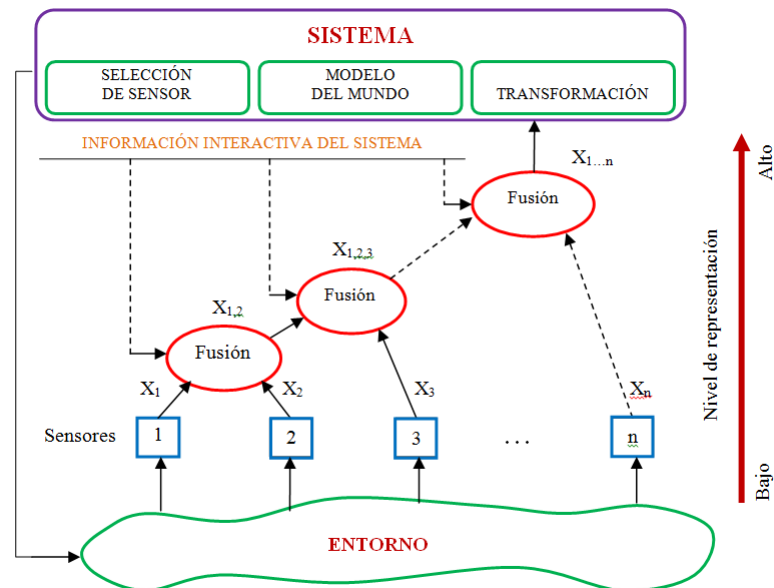


Figura 3.2: Modelo general de integración multisensorial (Luo and Kay, 1989).

La Fig. 3.3 representa un conjunto interrelacionado de funciones básicas de un sistema de integración sensorial (Luo and Kay, 1990). En ella, un grupo de n sensores proporcionan la entrada al proceso de integración. Para que la información de cada sensor pueda ser útil para la integración, ésta debe primero modelarse adecuadamente. Un modelo del sensor representa la incertidumbre y el error en la información de cada sensor y proporciona una medida de su calidad que puede ser usada por las subsiguientes funciones de integración.

El registro del sensor se refiere a cualquiera de los medios usados para hacer que la información de cada sensor sea conmensurable en su dimensión espacial y temporal. Cada sensor proporciona datos en su marco local de referencia. Así, los datos desde diferentes sensores deben convertirse en un marco de referencia común antes de poder combinarlos. Un ejemplo puede ser el proceso de alineamiento (calibración) de las imágenes de dos cámaras que observan la misma escena.

Después de que la información de cada sensor ha sido modelada, y posiblemente registrada, ésta puede integrarse dentro de la operación del sistema de acuerdo con tres diferentes tipos de procesamiento sensorial: fusión, operación separada, y guiado. Se

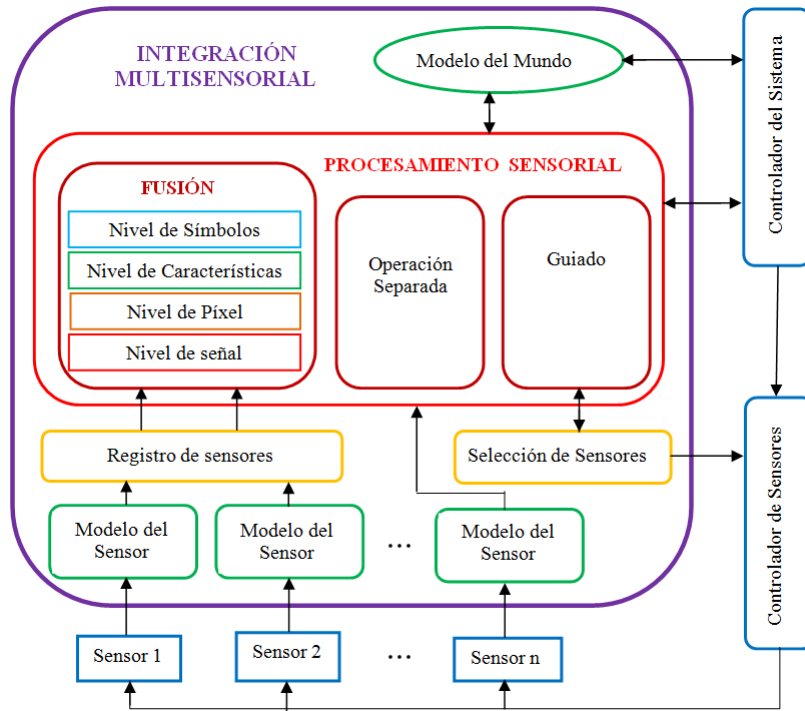


Figura 3.3: Funciones básicas de un sistema de integración sensorial (Luo and Kay, 1990).

propone categorizar la fusión en cuatro niveles de representación: señal, píxel, característica y símbolo. La Fig. 3.4 presenta un ejemplo, extraído parcialmente de (Luo and Chang, 2012).

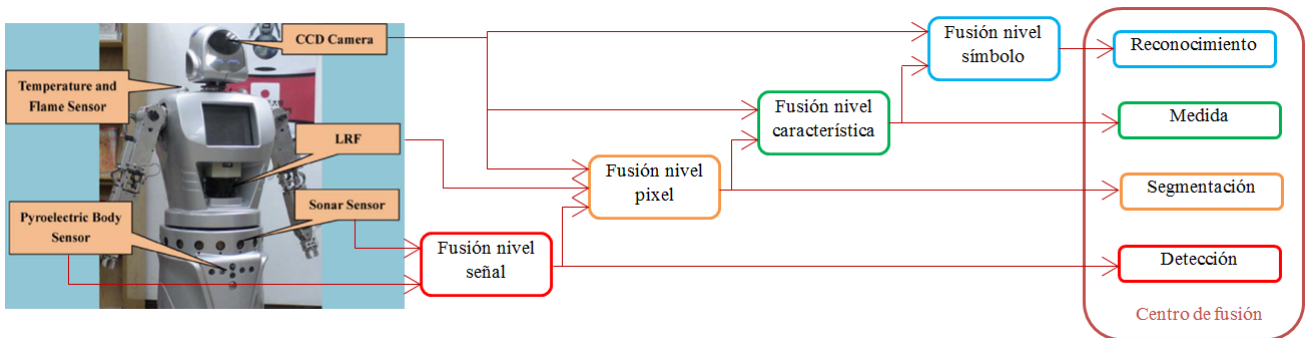


Figura 3.4: Ejemplo de fusión multisensorial para el reconocimiento de objetos (Luo and Chang, 2012).

Si la naturaleza de los datos proporcionados por un sensor es significativamente diferente de la de los proporcionados por cualquier otro sensor en el sistema, su influencia en la operación de aquellos puede ser indirecta. La operación separada de tal sensor influirá en los otros sensores indirectamente a través de los efectos que tenga sobre el controlador del sistema y sobre el modelo del mundo.

El guiado en el procesamiento sensorial se refiere a la situación donde los datos de un sensor se usan para guiar la operación de otros. Un ejemplo típico de este tipo de operación se encuentra en muchas aplicaciones con robots donde la información visual se usa para guiar la operación de un conjunto táctil montado en el extremo de un manipulador.

El resultado de las funciones de procesamiento sensorial sirve como entradas al modelo del mundo. Un modelo del mundo se usa para almacenar información relacionada con cualquier posible estado del entorno sobre el que el sistema debe operar. Un modelo del mundo puede incluir tanto información *a priori* como información sensorial recientemente adquirida. Procesos de razonamiento de alto nivel pueden usar el modelo del mundo para hacer inferencia, que podrá usarse para dirigir el subsiguiente procesamiento de la información sensorial y la operación del controlador del sistema.

La selección de sensor se refiere a cualquier medio usado para seleccionar la configuración más apropiada de sensores de entre los disponibles en el sistema. Por ejemplo, si se dispone de varias cámaras podemos seleccionar aquellas que mejor observen la escena.

Otro tipo de clasificación de los procesos de fusión sensorial está basada en tres categorías dependientes del tipo de información: complementaria, competitiva y cooperativa (Durrant-Whyte, 1988). Los sensores *complementarios* observan diferentes aspectos del entorno y proporcionan una información incompleta que puede superponerse parcialmente a la de otro sensor. La información parcial de cada sensor puede usarse para sintetizar inferencias que son imposibles de hacer a partir de un único sensor. Los sensores *competitivos* proporcionan datos redundantes sobre el mismo aspecto del entorno, de forma que se superponen completamente con los de otro sensor. Este hecho puede usarse para reducir la incertidumbre una vez fusionada la información. Los datos espurios pueden generar severos problemas y, por ello, deben detectarse y eliminarse antes de completar la fusión. Los sensores *cooperativos* guían unos a otros. Pueden formar una cadena en la que la salida de un sensor está influenciada por la salida de otro, creando así una dependencia. Estos tres escenarios no son mutuamente excluyentes y, a menudo, no son separables.

A grandes rasgos, se pueden clasificar las arquitecturas de fusión en tres grupos: basadas en la información (o de entradas y salidas), basadas en la funcionalidad, y las híbridas. Las centradas en la información se basan en una división del proceso de fusión de acuerdo con la abstracción de la información a ser fusionada. Por tanto, en este tipo de arquitecturas, no hay necesidad de establecer una secuencia de funciones de manera explícita, cosa que sí ocurre en las arquitecturas funcionales.

Sin duda, la más común y popular conceptualización de los sistemas de fusión es el JDL (Hall and Llinas, 2001). Basado en entradas y salidas, el modelo original ofrece una diferenciación en cuatro niveles de abstracción creciente: objetos, situaciones, impacto

y refinado del proceso (Fig. 3.5). A pesar de su popularidad, el modelo adolece de múltiples deficiencias como modelo general, fundamentalmente debidas a su carácter militar. Es por ello que ha sido sometido a varias revisiones; la última conocida puede encontrarse en (Llinas et al., 2004).

Entre los modelos funcionales mas referenciados se encuentran el del bucle de control de Boyd (1987) y el Omnibus (Bedworth and O'Brien, 2000). Un marco alternativo es el presentado por Dasarathy (1994), en el que se ve al sistema de fusión desde una perspectiva de ingeniería del software, como un flujo de datos caracterizado por entradas y salidas además de considerar la funcionalidad. En el campo de la robótica han surgido multitud de arquitecturas a partir de ideas extraídas tanto de los modelos de fusión basados en entradas y salidas como de los modelos funcionales, conformando los modelos híbridos. En la referencia (Murphy, 2000) se encuentra un detallado estudio de este tipo de arquitecturas.

Una contextualización general de fusión puede verse en (Goodman et al., 1997), basada en la noción de *conjuntos aleatorios*. En (Kokar, 2004) se presenta uno de los más recientes y abstractos marcos de fusión. Está basado en la *teoría de la categoría* y es suficientemente general como para capturar todo tipo de fusión, incluyendo la fusión de datos, fusión de características, fusión de decisión y fusión de información relacional. Puede considerarse como el primer paso hacia el desarrollo de una teoría de fusión formal.

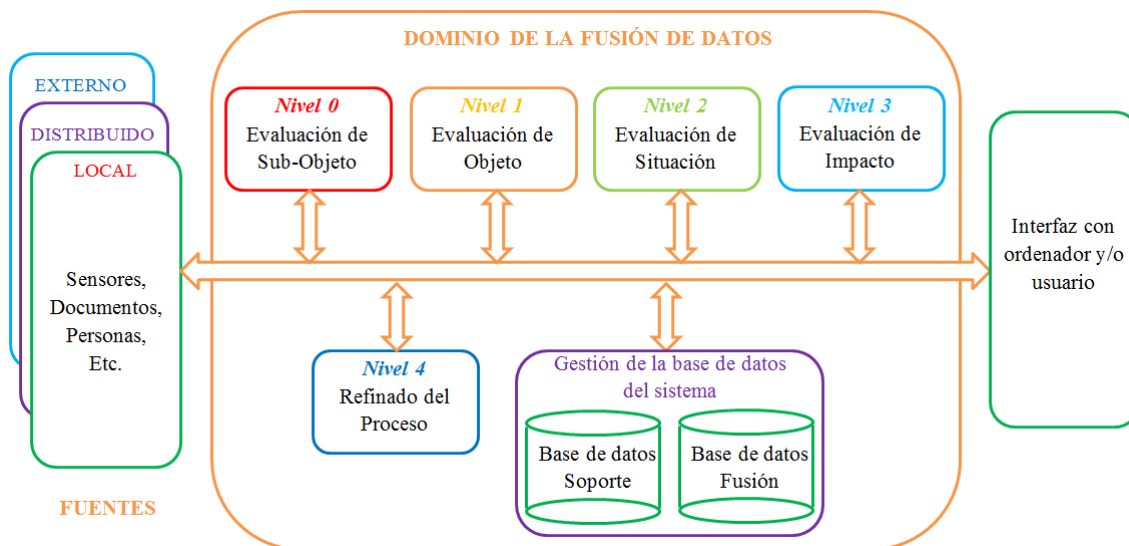


Figura 3.5: Modelo revisado de fusión de datos de JDL (Hall and Llinas, 2001).

3.3 Información imperfecta

El problema fundamental al que ha de hacer frente la fusión es precisamente el derivado de la propia naturaleza de la información, concretamente, de la imperfección asociada a toda información. Seguidamente se clasifican (Fig. 3.6) y definen algunas expresiones habituales relacionadas (Smets, 1996).

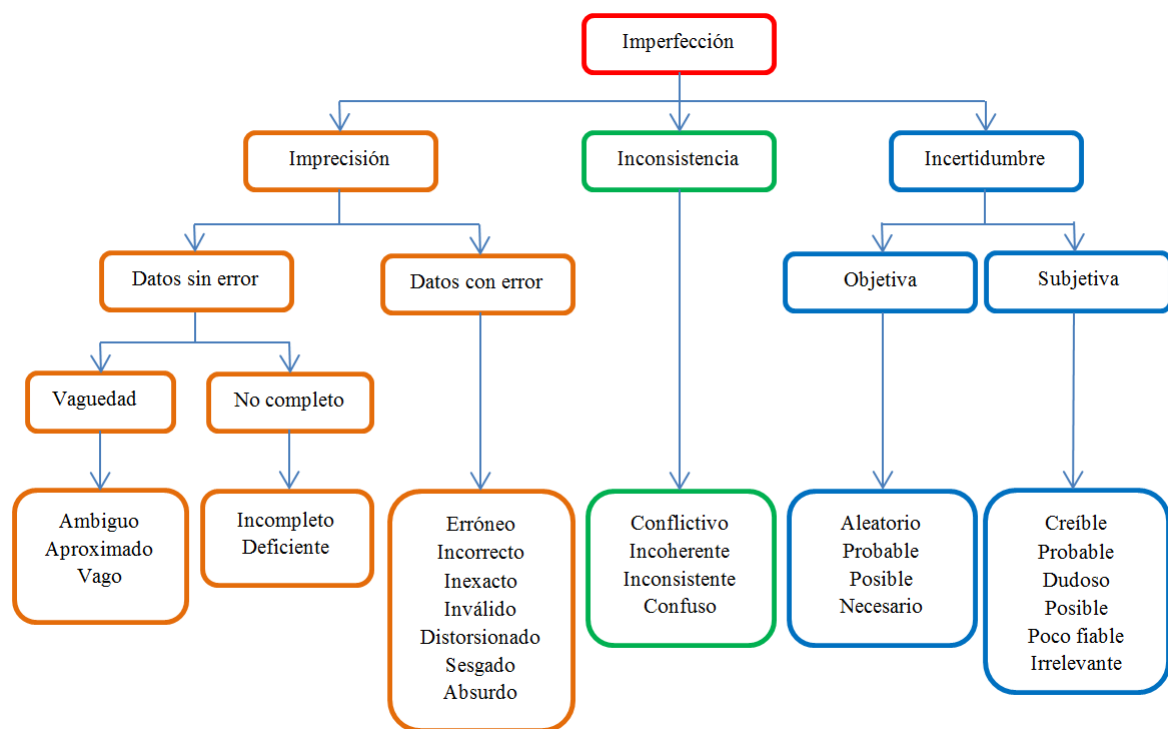


Figura 3.6: Información imperfecta.

Para Smets (1996) la información es perfecta cuando es precisa y cierta. Para otros autores, además, la información debe ser exhaustiva. La imperfección puede deberse fundamentalmente a la imprecisión, a la inconsistencia, a la incertidumbre o combinaciones de ellas. No es extraño encontrar autores que usen el término incertidumbre refiriéndose a la imperfección. Por ejemplo, ante un escenario en donde se debe identificar un objeto entre varios posible, una información perfecta deberá tener las siguientes propiedades: el objeto referenciado debe ser único (**información precisa**), el grado de confianza asociado con una proposición o conjunto de proposiciones debe ser igual a 1 (total confianza, **información cierta**), y el objeto propuesto es parte de un conjunto conocido de objetos (mundo cerrado **información exhaustiva**)

La imprecisión y la inconsistencia son propiedades relativas al contenido de la declaración (expresión que puede ser verdadera o falsa): más de una hipótesis (estados) o ninguna, son compatibles con la información disponible. La incertidumbre es una propiedad

que se deriva de la falta de información sobre la hipótesis para decidir si la declaración es cierta o falsa. La imprecisión y la inconsistencia son esencialmente propiedades de la información mientras que la incertidumbre es una propiedad de la relación entre la información y el conocimiento sobre la hipótesis. Para ilustrar la diferencia entre imprecisión e incertidumbre se consideran las siguientes expresiones:

1. El conjunto A tiene al menos dos elementos. Estoy seguro de ello.
2. El conjunto A tiene tres elementos pero no puedo asegurarlo.

En el primer caso, el número de elementos es impreciso pero cierto. En el segundo caso, el número de elementos es preciso pero incierto. Ambos aspectos pueden coincidir pero son distintos. A menudo, cuanto más impreciso más cierto, y cuanto más preciso menos cierto. Parece existir algún *Principio de Maximalidad de la Información* que requiere que el *producto* de precisión e incertidumbre no pueda estar más allá de un cierto nivel crítico. Cualquier incremento en uno está balanceado por un decremento en el otro.

3.3.1. Imprecisión

La información imprecisa es aquella que puede referirse a varias hipótesis. Para un caso de identificación sería imprecisa la expresión “*el objeto observado es uno de los tres primeros de la base de datos*“. La imprecisión puede estar caracterizada por la presencia o ausencia de una componente de error.

Imprecisión sin error

La información “*la longitud es de una milla*” es **ambigua** ya que puede hacer referencia a la milla marina o a la milla terrestre. “*La longitud está entre 30 y 40 cm*“ es **aproximada** si la longitud es de 36 cm. “*La longitud está próxima a los 30 cm*“ es poco clara (**vaga, fuzzy**). En el primer caso se puede decidir si la información es correcta o no: será correcta si la longitud real es de 36 cm e incorrecta si es de 28 cm. Con la información **vaga** no se puede decidir: la información es más o menos correcta para ambas medidas pero más correcta para la medida de 28 cm. En este último caso, la corrección admite algún tipo de grado.

Información incompleta es aquella que tiene un desconocido grado de confianza pero sobre la que se sabe su límite superior. Para el ejemplo de la identificación sería incompleto decir “*es posible que el objeto observado sea el tercero de la base de datos*”, o bien “*es posible llegar a detectar el tipo de objeto*“. La información incompleta puede llegar a ser **deficiente**.

Imprecisión con error

Cuando la información no es errónea, el verdadero valor es compatible con la información disponible. Cuando pueden existir errores, pueden describirse muchos aspectos de imprecisión. El dato será **erróneo** o **incorrecto** cuando esté equivocado, como en "la longitud es de 37 cm" cuando es de 25 cm. El dato **inexacto** es de alguna forma equívoco pero el error es pequeño: por ejemplo, "la longitud es de 37 cm" cuando en realidad es de 36 cm, es erróneo pero no demasiado.

El dato **inválido** no es solamente erróneo sino que podría potencialmente inducir conclusiones inaceptables. La expresión "la temperatura es de 18 grados centígrados" cuando es de -18 grados centígrados es errónea e inválida ya que podría acarrear graves consecuencias para la salud.

Distorsión en los datos es análogo a inexactitud combinado con invalidez. El dato está **sesgado** si está sujeto a un error sistemático. Éste sería el caso si el sistema empleado para la medida de distancias comenzara en 1 cm y no en cero; todas las medidas tendrían un error de +1 cm.

Los datos **absurdos** son aspectos extremos de datos erróneos. No obstante, el valor es tan extremo que el usuario puede descubrir el error inmediatamente: "la longitud del coche es de 30 m", "la temperatura ambiente es de 200 grados centígrados", etc.

3.3.2. Inconsistencia

Al combinar varias declaraciones pueden aparecer nuevos aspectos de imperfección. En estos casos, siempre está involucrado algún tipo de error. La información puede ser **conflictiva**: "hace calor", "la temperatura es de -18 grados centígrados". El conflicto en los datos conduce a **incoherencia** en las conclusiones.

3.3.3. Incertidumbre

El tercer aspecto de la imperfección, **la incertidumbre**, está relacionada con el estado del conocimiento de un agente sobre la relación entre la hipótesis y la declaración sobre la hipótesis. La declaración puede ser verdadera o falsa, pero el conocimiento del agente sobre la hipótesis no le permite decidir si la declaración es cierta o falsa. Certidumbre es el total conocimiento del verdadero valor del dato. La incertidumbre resulta en **ignorancia** (no conocimiento). La principal causa de incertidumbre es la imprecisión en los datos.

La información incierta es información a la que se ha asociado un grado de confianza menor de 1. Esta imperfección es debida principalmente a la falta de confianza del

agente sobre la información proporcionada por la fuente. Siguiendo con el ejemplo de identificación, información incierta sería la siguiente: “*creo que el objeto observado es el tercero en la base de datos*“, o bien “*es probable que el objeto observado sea el tercero de la base de datos con un grado de confianza de 0.7*”.

Incertidumbre objetiva

Una información es objetiva cuando es independiente de la opinión humana. Generalmente se considera que la incertidumbre relacionada con la **aleatoriedad** es una propiedad objetiva, y el término **verosímil** cualifica un evento que ocurrirá probablemente. En este caso, el hecho de que un evento sea verosímil es independiente de la opinión del agente sobre la ocurrencia del evento, y la verosimilitud (además de la aleatoriedad) es una propiedad objetiva del experimento que genera el evento.

Sólo los eventos posibles son probables. La posibilidad está interesada en la capacidad de ocurrencia del evento, mientras que la probabilidad se interesa por su tendencia a ocurrir. Idénticamente, se interesa en la capacidad de que una proposición sea cierta. La **necesidad** es el dual de la posibilidad: la necesidad es la imposibilidad de lo contrario.

Incertidumbre subjetiva

Una información es subjetiva cuando es dependiente de la opinión humana. La propiedad subjetiva de la incertidumbre está supuestamente unida a la hipótesis y a la información. Es decir, está relacionada con la opinión del agente sobre el verdadero valor del dato derivado de la información disponible.

Los datos son **creíbles** o **probables** si el agente los acepta, quizás temporalmente. Los datos son dudosos si no son creíbles o peor, si el agente no está dispuesto a aceptarlos, salvo con un fuerte resistencia.

La relación entre probabilidad (equiparable a creencia en el contexto subjetivo) y posibilidad, vistos en incertidumbre objetiva, también pueden describirse en el contexto subjetivo. Posibilidad y necesidad reflejan la opinión del agente sobre la veracidad de la declaración. En particular, sólo las declaraciones posibles pueden ser creíbles.

El agente puede expresar su opinión de **poco fiable** sobre la fuente de los datos. Opinión que se transmitirá a los datos. Su opinión será de **irrelevante** cuando los datos no influyan en el resultado.

Información incierta e imprecisa

Previamente se han definido y presentado algunos ejemplos de información imprecisa e incierta. Se trata de situaciones extremas al considerar sólo un tipo de imperfección. La realidad suele ser más compleja al hacer coincidir ambos tipos. Por ejemplo: “*se asocia un grado de confianza de 0.7 a la observación de que el objeto sea uno de los tres primeros de la base de datos*”, o bien “*se asocia un grado de confianza de 0.9 a la observación de que el objeto tenga una longitud entre 28 y 34 metros*”.

3.4 Técnicas de fusión

Como se expuso en la sección anterior, la imperfección en la información supone el problema fundamental al que ha de hacer frente la fusión. Por ello, el grueso de los trabajos de investigación se centran en tratar este problema. Existe una considerable cantidad de procedimientos para acometer la fusión de información (Abidi and Gonzalez, 1992), (Hall and Llinas, 1997), (Joshi and Sanderson, 1999), (Klein, 2004) (Florea et al., 2007). Este hecho ya manifiesta la inexistencia de un procedimiento universal. Todos ellos tienen sus virtudes y sus deficiencias, siendo algunos adecuados en unos contextos y inadecuados en otros. Se los puede clasificar atendiendo a múltiples criterios; no obstante, aquí se hará una clasificación basada en el área de conocimiento a la que pertenecen (Fig. 3.7).

3.4.1. Métodos de procesado de señales

Los métodos de procesado de señales son característicos de los niveles más bajos de la jerarquía de fusión.

Promediado ponderado

La técnica de promediar de forma ponderada la información de varios sensores es, probablemente, una de las más sencillas. El único problema puede estar en determinar el peso asociado a cada sensor. Es aplicable a información redundante.

Filtro de Kalman-Bucy

El filtro de Kalman-Bucy es un método muy popular. Ha demostrado su validez en el ámbito de los sistemas lineales. Es capaz de reconstruir el estado del sistema cuando la

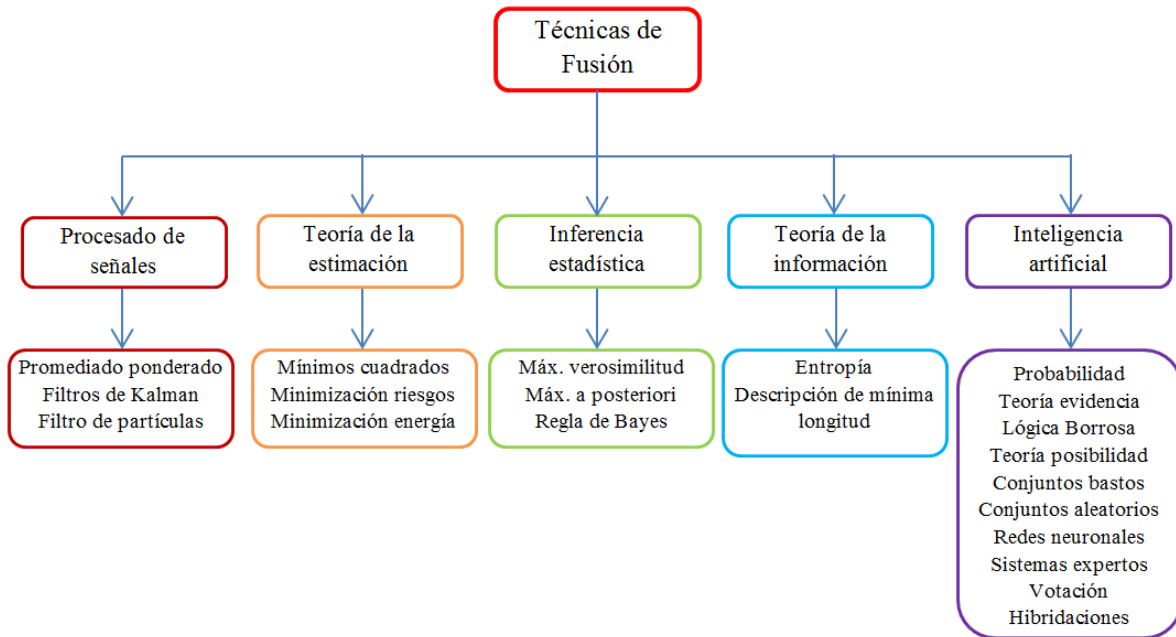


Figura 3.7: Métodos de fusión.

información está corrompida por un ruido blanco gaussiano aditivo con matriz de covarianza conocida. Para ello hace uso de un modelo probabilístico explícito del sistema así como de un modelo lineal de medida que aporta información incierta (probabilística) del estado del sistema.

Se trata de un procedimiento que actualiza su estimación sobre el estado del sistema de forma recursiva al disponer de nueva información, y por ello es rápido, tanto que es capaz de resolver en tiempo real para la mayoría de las aplicaciones. El filtrado se implementa en dos etapas: una primera de estimación del estado, a partir del estado anterior y de la matriz de transferencia del sistema, seguida por otra de corrección de la estimación, a partir de la información sensorial.

Se han creado otros filtros para extender la idea del filtro de Kalman a los sistemas no lineales. El filtro de Kalman Extendido generaliza la técnica para sistemas no lineales. Para ello linealiza localmente el modelo del sistema y las medidas. No resulta muy adecuado para sistemas fuertemente no lineales dado que linealiza en base al truncamiento de primer orden de la serie de Taylor. El filtro de Kalman *Unscented* trunca la serie de Taylor al segundo orden y, en consecuencia, reduce los errores derivados de la linealización (Simon, 2006).

Filtro de partículas

El filtro de partículas consiste en una implementación recursiva del método Secuencial de Montecarlo. Se trata de un método muy flexible ya que no hace ninguna asunción relacionada con el tipo de función de densidad de probabilidad que aproxima. Supone una alternativa a los filtros de Kalman cuando el sistema es no lineal y la incertidumbre no puede modelarse por ruido blanco gaussiano. La idea es hacer uso de un conjunto de muestras aleatoriamente escogidas (partículas) como una aproximación a la función de densidad de interés. En el procesamiento posterior de las muestras se acostumbra a usar el método Bayesiano (Crisan and Doucet, 2002).

3.4.2. Métodos de teoría de la estimación

Mínimos cuadrados

Los métodos de estimación de mínimos cuadrados realizan la fusión de datos buscando soluciones que minimizan el cuadrado del error entre el dato observado y el dato predicho (Sorenson, 1980), (Simon, 2006).

Minimización de riesgos

La idea es similar a la anterior sólo que aquí se minimiza una función de coste (o riesgo) definida en función del valor real y el valor estimado.

Minimización de energía

En este caso se define una función de energía/coste que debe ser optimizada. La función de energía se puede elegir heurísticamente o se puede definir para optimizar algún criterio. Los métodos para fusionar información basados en la energía minimizan alguna función de energía derivada de los datos obtenidos por diferentes sensores, y un modelo previo del fenómeno bajo observación. El modelo previo está representado usualmente como restricciones sobre los datos observados.

3.4.3. Métodos de inferencia estadística

Máxima verosimilitud

Los métodos de estimación basados en la técnica de máxima verosimilitud fusionan datos buscando soluciones que maximicen la probabilidad de observar los datos recogidos por los sensores (Sorenson, 1980).

Máximo a posteriori

Los métodos de estimación basados en la técnica del máximo a posteriori fusionan datos buscando soluciones que maximicen la probabilidad de observar los datos recogidos por los sensores dada una distribución previa sobre las posibles soluciones (Sorenson, 1980).

Regla de Bayes

Los métodos Bayesianos constituyen la base sobre la que se han desarrollado multitud de métodos de inferencia. Por ejemplo, el método de máxima verosimilitud puede considerarse un caso particular del método del máximo a posteriori (cuando la distribución de la probabilidad a priori es plana), y éste a su vez constituye una aplicación concreta de la regla de Bayes. Otros métodos derivados son los filtros de Kalman-Bucy y el filtro de partículas.

3.4.4. Métodos de teoría de la información

Los métodos de la teoría de la información fusionan datos buscando soluciones que optimizan varias medidas de información en un sistema multisensorial.

Métodos basados en la entropía

Los métodos basados en la entropía fusionan datos buscando soluciones que minimizan la incertidumbre en un sistema multisensorial.

Métodos basados en la mínima longitud de la descripción

Los métodos basados en una mínima longitud de la descripción, o mínimo tamaño de la representación, fusionan datos buscando soluciones que minimizan la longitud de la de-

scripción, o el tamaño de la representación de los datos multisensoriales observados. La longitud de la descripción, o el tamaño de la representación, se define como la longitud del programa más corto que puede reproducir los datos observados (Rissanen, 2004).

3.4.5. Métodos de inteligencia artificial

No son pocos los métodos de inteligencia artificial que se han desarrollado en conjunción con problemas relacionados con la interpretación de datos. Seguidamente se presentan algunos de los más reconocidos.

Teoría de la probabilidad

La teoría de la probabilidad constituye la teoría mejor fundamentada matemáticamente y es la más antigua de las teorías que tratan con información imperfecta. Concretamente, es capaz de tratar con información incierta, que modela a través de las funciones de distribución/densidad de la probabilidad. Tras los métodos probabilísticos subyace el estimador Bayesiano que permite la fusión de información.

Teoría de la evidencia

La teoría de la evidencia, también conocida por la teoría de Dempster-Shafer (Dempster, 1967), (Shafer, 1976), aborda algunas limitaciones de la teoría de la probabilidad, siendo capaz de tratar tanto con información incierta como imprecisa. Puede considerarse como una generalización de la teoría de la probabilidad.

Lógica borrosa

En la lógica borrosa, que forma parte de la teoría de conjuntos borrosos (Zadeh, 1965), se introduce la noción de pertenencia parcial a un conjunto, lo que permite razonar con imprecisión. Esta teoría es adecuada para modelar información vaga. Por ejemplo, mientras las teorías de la probabilidad y de la evidencia modelan la incertidumbre relacionada con la pertenencia de un objeto a una clase de objetos bien definida, en la teoría de conjuntos borrosos se modela la pertenencia borrosa de un objeto a una clase mal definida.

Teoría de la posibilidad

La teoría de la posibilidad propone otra alternativa en la representación de la imprecisión, siendo capaz de modelar la información incompleta (Zadeh, 1978), (Dubois and Prade, 1988b), (Dubois and Prade, 2000). Aunque está basada en la teoría de conjuntos borrosos, la teoría de la posibilidad no modela la información vaga. De hecho, la teoría de conjuntos borrosos modela información borrosa (pertenencia de un objeto a una clase mal definida) sin consideraciones sobre la aleatoriedad. La teoría de la posibilidad modela la incertidumbre de una clase bien definida, en línea con las teorías de la probabilidad y de la evidencia, aunque la incertidumbre se cuantifica de forma diferente (Florea et al., 2007).

Teoría de conjuntos bastos (*rough set theory*)

La teoría de conjuntos bastos trata con información imperfecta y modela la información imprecisa, ignorando la incertidumbre a diferentes niveles de granularidad (Pawlak, 1991). Esta teoría realiza una aproximación formal a los conjuntos clásicos (*crisp*) en términos de un par de conjuntos, que dan una baja y una alta aproximación al conjunto original. En la versión original, estas aproximaciones también son *crisp*, pero existen variaciones cuyas aproximaciones pueden ser conjuntos borrosos.

Un ejemplo: Sea el cuadro 3.1 una clasificación basada en algunos atributos relacionados con la enfermedad de la gripe (Skowron and Zhong, 2000). En él, las clases discernibles definidas por $R = \{\text{Dolor de cabeza}, \text{Temperatura corporal}\}$ son $\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_3\}, \{u_4\}, \{u_5\}, \{u_6\}, \{u_7\}, \{u_8\}$. Si se practica una partición basada en la existencia de gripe o no, se obtienen los conjuntos conocidos como de baja y alta aproximación (cuadro 3.2 y Fig. 3.8), definidos como $\underline{R}_X = \cup\{Y \in U/R : Y \subseteq X\}$ y $\overline{R}_X = \cup\{Y \in U/R : Y \cap X \neq \emptyset\}$.

U	<i>Dolor de cabeza</i>	<i>Temperatura corporal</i>	<i>gripe</i>
u_1	Si	Normal	No
u_2	Si	Alta	Si
u_3	Si	Muy alta	Si
u_4	No	Normal	No
u_5	No	Alta	No
u_6	No	Muy alta	Si
u_7	No	Alta	Si
u_8	No	Muy alta	No

Cuadro 3.1: Teoría de conjuntos bastos, un sencillo ejemplo.

Criterio	$X_1 = \{u \mid gripe(u) = Si\}$	$X_2 = \{u \mid gripe(u) = No\}$
Partición	$X_1 = \{u_2, u_3, u_6, u_7\}$	$X_2 = \{u_1, u_4, u_5, u_8\}$
Baja aproximación	$\underline{R}_{X_1} = \{u_2, u_3\}$	$\underline{R}_{X_2} = \{u_1, u_4\}$
Alta aproximación	$\overline{R}_{X_1} = \{u_2, u_3, u_6, u_7, u_8, u_5\}$	$\overline{R}_{X_2} = \{u_1, u_4, u_5, u_8, u_7, u_6\}$

Cuadro 3.2: Baja y alta aproximación para el ejemplo del cuadro 3.1.

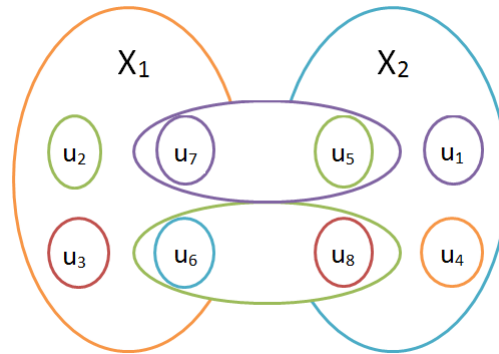


Figura 3.8: Baja y alta aproximación (cuadro 3.2).

Teoría de conjuntos aleatorios

La base de la teoría de conjuntos aleatorios fue desarrollada a mediados de los años 70 por Matheron (1975) y Kendall (1974) para estudiar la geometría integral. El concepto de conjuntos aleatorios puede verse como una generalización del concepto de variable aleatoria y vector aleatorio. La mayoría de las teorías clásicas para el razonamiento bajo incertidumbre pueden considerarse como casos particulares de la teoría de conjuntos aleatorios, la cual es capaz de modelar todos los tipos de información imperfecta (Florea et al., 2007).

Redes neuronales

Los sistemas biológicos realizan el reconocimiento de formas usando redes interconectadas de gran número de celdas, llamadas neuronas. La gran cantidad de conexiones neuronales paralelas hace al sistema de procesamiento de información humano adaptable, sensible al contexto, tolerante a fallos, grande en capacidad de memoria y con operación en tiempo real. Estas características del cerebro humano proporcionan un modelo alternativo a la más común arquitectura de procesamiento serie, con un único procesador. Aunque cada neurona humana es relativamente lenta en el procesado de información (del orden de milisegundos), el procesamiento general de información en el cerebro humano se completa en unos pocos centenares de milisegundos. La velocidad de procesamiento del cerebro humano sugiere que la computación biológica se basa en un pequeño número de pasos serie, siendo cada uno de ellos masivamente paralelos. Las

redes neuronales intentan imitar la potencia cognitiva o de percepción humana usando el paradigma de procesamiento paralelo (Klein, 2004).

Sistemas expertos

Los sistemas expertos constituyen tecnologías que pretenden dar soporte al razonamiento y la toma de decisiones humanas, formalizando los conocimientos de expertos de manera que sea susceptible de mecanizar sus métodos de razonamiento (Henrion et al., 1991).

Lógica de votación

El principio que subyace en la fusión por lógica de votación es la combinación de valores lógicos representando niveles de confianza de los sensores, los cuales, a su vez, están basados en probabilidades. En este sentido, la diferencia fundamental con otras teorías reside en la forma de combinar la información que aquí es puramente lógica (Klein, 2004).

Hibridaciones

En general, cada una de las teorías presentadas anteriormente en el área de inteligencia artificial tratan con un tipo particular de imperfección. Así, se puede considerar a estas teorías no como competitivas sino más bien como complementarias. La integración de algunas de estas teorías ha generado teorías híbridas. De manera singular, la teoría de la lógica borrosa acostumbra a ser una de las partes constituyentes: redes neuronales borrosas (Tsoukalas and Uhrig, 1996), teoría de la evidencia borrosa (Yen, 1990), teoría borrosa de los conjuntos bastos (Dubois and Prade, 1990), etc.

Enlaces entre diferentes teorías

Dado que muchos tipos diferentes de imperfecciones pueden coexistir en los procesos de fusión de datos, diferentes formalismos pueden usarse en diferentes niveles de esos procesos. Surge un problema si se pretende fusionar esas piezas de información diferentes, modeladas por formalismos matemáticos diferentes, para alcanzar una decisión global. Es posible dar solución a este problema de dos formas (Florea et al., 2007):

1. Elegir una teoría para representar todas las piezas de información, y transformar a esta teoría las piezas de información modeladas en otros formalismos. Existen bastantes trabajos relacionados, por ejemplo, Smets (1989) y Voorbraak (1989)

desarrollan una transformación entre las teorías de la evidencia y la probabilidad, Klir and Parviz (1992) ofrecen diferentes fórmulas para la transformación entre las teorías de la probabilidad y de la posibilidad, y Skowron (1989) desarrolla un enlace entre las teorías de conjuntos bastos y de la evidencia.

2. Usar un formalismo que sea capaz de representar todas las teorías. La teoría de conjuntos aleatorios parece adecuada para ello. Se han desarrollado enlaces con otras teorías, por ejemplo con la teoría de la evidencia (Nguyen, 1978) y con la teoría de conjuntos borrosos (Orlov, 1978).

3.5 El marco probabilístico

3.5.1. Introducción

En la Sec. 3.3 se presenta una clasificación y definición de la información imperfecta. El siguiente paso consiste en conocer el modo de tratarla. Para ello, han sido desarrolladas varias teorías que son capaces de tratar con algún o algunos de los tipos específicos de información imperfecta. Esta tesis trata exclusivamente con información incierta. En este sentido, la teoría de la probabilidad constituye la mejor baza. Se trata de la más antigua de las teorías y, quizás por ello, la mejor conocida. Sus orígenes se remontan al siglo XVII en torno al gran interés existente en adquirir conocimiento relativo al comportamiento de los juegos de azar, fundamentalmente y, desde hace algunos años, las técnicas probabilísticas se han convertido en uno de los paradigmas dominantes en el diseño de algoritmos en robótica (Thrun et al., 2005).

La probabilidad asignada a un evento puede considerarse como un valor objetivo o subjetivo. Aunque existen varios tipos de probabilidad objetiva, la interpretación que aquí se hace es la de *frecuencia relativa*: si un experimento se repite k veces de forma idéntica y de manera independiente, y un mismo resultado se repite n veces, entonces, la probabilidad objetiva es próxima a n/k cuando k es muy grande. La probabilidad subjetiva asume que no existen experimentos aleatorios sino sólo experimentos mal conocidos, que son los causantes de los resultados inciertos. Así, la probabilidad subjetiva de un evento se interpreta como el grado de creencia que una persona asocia al resultado de un experimento.

En lo que sigue se hará uso de la siguiente notación:

El mundo discreto Θ se compone de N elementos θ_i de forma que $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$. El conjunto formado por todos los subconjuntos posibles es el conjunto potencia 2^Θ . Cualquier subconjunto de entre los existente en 2^Θ se indicará por una letra mayúscula. Por ejemplo, $A \subseteq \Theta$ equivale a $A \in 2^\Theta$. Un

evento, hipótesis o proposición hace referencia a cualquier subconjunto A . Al subconjunto formado por un único elemento se conoce como *singleton*.

3.5.2. Medida de la probabilidad

Una medida de la probabilidad es una función $p : 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ que verifica las siguientes propiedades ($\forall A, B \subseteq \Theta$):

1. $p(\emptyset) = 0$ La probabilidad del conjunto vacío es nula (0).
2. $p(\Theta) = 1$ La probabilidad del mundo es total (1).
3. $0 \leq p(A) \leq 1$
4. Si $A \subseteq B \rightarrow p(A) \leq p(B)$ Monotonía no estricta.
5. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ Aditividad
Si $A \cap B = \emptyset \rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ Los eventos son independientes

De estos axiomas se derivan las siguientes consecuencias:

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ La probabilidad no asignada a A , queda asignada a su complemento (\bar{A}).
- $p(A) = \sum_{\theta \in A} p(\theta)$ Puede derivarse la medida de un conjunto a partir de la de sus componentes básicos.

3.5.3. Gestión de la información imperfecta

El hecho de que el mundo esté formado por un conjunto de elementos *singletons* con probabilidad no nula evidencia la incertidumbre relativa ante el resultado de un experimento. La teoría de la probabilidad es adecuada para gestionar este tipo de información. Surge un problema cuando no existe certidumbre sobre la medida de la probabilidad asignada a un evento, o incluso cuando se dispone de una medida de la probabilidad precisa pero no sobre los *singletons* sino sobre conjuntos de ellos. Se trata entonces de información imprecisa, no contemplada en esta teoría. No obstante, el segundo caso de imprecisión puede superarse si se asume que todos los *singletons* que constituyen el conjunto con una medida de probabilidad cierta reciben la misma probabilidad, es decir:

$$p(\theta_i) = \frac{p(A)}{\text{card}(A)} \quad \forall \theta_i \in A$$

donde $\text{card}(A)$ se refiere a la cantidad de elementos en el conjunto A . Este es un caso de ignorancia parcial, al carecer de información sobre elementos concretos. Puede darse un escenario de total ignorancia cuando se carece de información sobre el conjunto del mundo. Entonces, el reparto de la probabilidad será

$$p(\theta_i) = \frac{1}{N} = \frac{1}{\text{card}(\Theta)} \quad \forall \theta_i \in \Theta$$

3.5.4. Algunos conceptos básicos

- La **probabilidad condicional** expresa la probabilidad de que acontezca un evento sabiendo que otro evento ya se ha dado. Se define como

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Esto es, la probabilidad de que se dé el evento A sabiendo que ya se dio el evento B es igual al cociente entre la probabilidad de que se den simultáneamente A y B , y la probabilidad de que se dé B . Suele expresarse así

$$p(A|B) = \frac{p(A, B)}{p(B)} \quad (3.1)$$

Entonces,

$$p(A, B) = p(A|B) p(B)$$

por lo que

$$p(A, B) = p(B|A) p(A)$$

e igualando ambas expresiones

$$p(A|B) p(B) = p(B|A) p(A)$$

O sea,

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) p(A)}{p(B)} \quad (3.2)$$

- La Eq. 3.2 se conoce como **regla de Bayes** y constituye la base de la estimación Bayesiana. Aquí, $p(A|B)$ es la *probabilidad a posteriori*, $p(A)$ es la *probabilidad a priori* y $p(B|A)$ es la *verosimilitud*.

- El **teorema de probabilidad total** establece que

$$p(A) = \sum_n p(A \cap B_n)$$

o sea,

$$p(A) = \sum_n p(A, B_n) = \sum_n p(A|B_n) p(B_n) \quad (3.3)$$

donde $B_n : n = 1, 2, 3, \dots, N$ es una partición de Θ , es decir, un conjunto de eventos disjuntos cuya unión es Θ .

Así, se puede reescribir la regla de Bayes como

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) p(A)}{\sum_n p(B|A_n) p(A_n)}$$

El denominador de esta expresión constituye un factor normalizador que hará que

$$\sum_i p(A_i|B) = 1$$

Con esto, la regla de Bayes puede expresarse como

$$p(A|B) \propto p(B|A) p(A)$$

donde el símbolo \propto indica proporcionalidad.

- La **regla de multiplicación** establece que

$$p(A_1, A_2, \dots, A_n) = p(A_1) p(A_2|A_1) p(A_3|A_1, A_2) \dots p(A_n|A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$$

La demostración es sencilla haciendo uso de la Eq. 3.1:

$$p(A_1, A_2, \dots, A_n) = p(A_1) \frac{p(A_1, A_2)}{p(A_1)} \frac{p(A_1, A_2, A_3)}{p(A_1, A_2)} \dots \frac{p(A_1, A_2, \dots, A_n)}{p(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})}$$

- Por otra parte, usando la regla de la multiplicación y el teorema de probabilidad total se llega a

$$p(A_1, A_2, \dots, A_n|B) = p(A_1|B) p(A_2|A_1, B) p(A_3|A_1, A_2, B) p(A_n|A_1, A_2, \dots, A_n, B) \quad (3.4)$$

Por ejemplo, para el caso de tres eventos la Eq. 3.4 queda

$$p(A_1, A_2|B) = p(A_1|B)p(A_2|A_1, B) \quad (3.5)$$

usando la Eq. 3.1

$$p(A_1, A_2|B) = \frac{p(A_1, A_2, B)}{p(B)} \quad (3.6)$$

e igualando las expresiones 3.5 y 3.6 y reordenando

$$p(A_1|B) = \frac{p(A_1, A_2, B)}{p(A_2|A_1, B)p(B)} \quad (3.7)$$

La Eq. 3.7 muestra un procedimiento para incluir una nueva variable aleatoria en la expresión.

- Se dice que dos eventos son **independientes** cuando

$$p(A, B) = p(A)p(B)$$

o bien

$$p(A|B) = p(A)$$

Es decir, el conocimiento de que el evento B se ha producido no condiciona en absoluto la ocurrencia o no del evento A .

- Cuando la ocurrencia de los eventos A y B está relacionada con la ocurrencia del evento C , no se puede decir que A y B sean independientes ya que C los condiciona.

$$p(A, B) \neq p(A)p(B)$$

No obstante, puede llegar a establecerse una **independencia condicional**:

$$\begin{aligned} p(A, B|C) &= \frac{p(A, B, C)}{p(C)} \\ &= \frac{p(A|B, C)}{p(C)} p(B, C) \\ &= \frac{p(A|B, C)}{p(C)} p(B|C) p(C) \\ &= p(A|B, C) p(B|C) \end{aligned}$$

Si se asume que el conocimiento de B , es irrelevante para el valor que adquiera A se puede escribir

$$p(A, B|C) = p(A|C)p(B|C) \quad (3.8)$$

La independencia condicional está detrás de muchos algoritmos de fusión de datos. Un ejemplo puede ser el caso en el que los eventos A y B corresponden a observaciones indirectas sobre el estado C de un sistema.

- Si se supone que los eventos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ forman una partición de Θ se puede asociar cada evento A_i con el valor de una variable discreta X , estableciendo $X = i$ si ocurre A_i . De esta forma se puede construir una variable que mapee el espacio Θ en números enteros $\{1, 2, \dots, n\}$. La ocurrencia de un evento $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es heredada por la variable X pudiendo escribir $p(X = i) = p(A_i)$. Dado que la variable X toma un valor con alguna probabilidad, recibe el nombre de **variable aleatoria** y, si la partición de Θ es discreta, recibirá el nombre de **variable aleatoria discreta**. El conjunto de pares $x_i, p(X = x_i)$ define la **función de densidad de la probabilidad** (pdf) de X .
- Se puede generalizar la definición de variable aleatoria a **vectores aleatorios**. Un vector en \mathfrak{R}^c es un conjunto de c variables aleatorias sencillas y será denotado por $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_c)$. Un vector \mathbf{X} toma valores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_c)$. Las componentes de un vector aleatorio tienen un índice identificando la posición. Un valor particular como $\mathbf{X} = \mathbf{x}_i$ es equivalente a $\mathbf{X} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_c})$.

3.5.5. Estimación Bayesiana

La estimación estadística trata el problema de inferir conocimiento sobre magnitudes indirectamente observables a partir del resultado de un experimento relacionado. La magnitud que interesa es el *estado* del sistema sobre el que se experimenta, y este estado afecta a la observación de una forma conocida. En el siguiente desarrollo se considera un sistema descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones ^a (Simon, 2006):

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, w_{k-1}) \quad (3.9)$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (3.10)$$

donde x_k es el estado, w_k es el ruido del proceso, y_k es la medida (observación) y v_k es el ruido en la medida, todos para el instante k . Las funciones $f_{k-1}(\cdot)$ y $h_k(\cdot)$ son las ecuaciones del sistema y de la medida, respectivamente. No están sometidas a ninguna

^aLa Eq. 3.9 es un caso particular de la expresión general $x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})$ en donde se ha omitido la acción de control por motivos de simplicidad. No obstante, su inclusión en el desarrollo es directa.

restricción, de forma que, en general, se pueden considerar como no lineales y variables en el tiempo. Las secuencias de ruido $\{w_k\}$ y $\{v_k\}$ se asume que son independientes y blancas con función de densidad de la probabilidad conocida.

El objetivo del estimador Bayesiano es aproximar la pdf condicional de x_k basada en las medidas $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} = \mathbf{Y}_k$:

$$p(x_k | \mathbf{Y}_k) = \text{pdf de } x_k \text{ condicionado a las medidas } \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$$

La primera medida se obtiene al instante $k = 1$, así que la condición inicial del estimador es la pdf de x_0 :

$$p(x_0) = p(x_0 | \mathbf{Y}_0) = p(x_0 | y_0)$$

Dado que y_0 está definida en el conjunto de no medidas. La pdf $p(x_0)$ debe ser inicializada. Si no se dispone de conocimiento a priori sobre esta distribución habrá que asignarle una distribución plana (total ignorancia). Una vez computada $p(x_k | \mathbf{Y}_k)$ será posible estimar x_k de la forma más adecuada al problema planteado. La pdf condicional $p(x_k | \mathbf{Y}_k)$ puede ser multimodal, en cuyo caso la media de x_k puede no ser el estimador más adecuado.

Para implementar un algoritmo y determinar la pdf condicional se requiere encontrar una forma recursiva para $p(x_k | \mathbf{Y}_k)$:

$$\begin{aligned} p(x_k | \mathbf{Y}_k) &= p(x_k | y_k, \mathbf{Y}_{k-1}) \\ &= \frac{p(x_k, y_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k, \mathbf{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(y_k | x_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k, \mathbf{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(y_k | x_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Resolver la expresión 3.11 significa dar respuesta a tres pdf condicionales: $p(y_k | x_k, \mathbf{Y}_{k-1})$, $p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1})$, y $p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})$:

- $p(y_k | x_k, \mathbf{Y}_{k-1})$:

A partir de la Eq. 3.10 se deriva que la medida y_k no está condicionada por las medidas anteriores, \mathbf{Y}_{k-1} , de forma que puede reescribirse como

$$p(y_k | x_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(y_k | x_k) \quad (3.12)$$

- $p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1})$:
Aplicando la Eq. 3.3

$$\begin{aligned}
 p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1}) &= \sum_{\forall x_{k-1}} p(x_k, x_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) \\
 &= \sum_{\forall x_{k-1}} \frac{p(x_k, x_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_{k-1})} \\
 &= \sum_{\forall x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

A partir de la Eq. 3.9 puede verse que x_k no está condicionado por las medidas anteriores, \mathbf{Y}_{k-1} , de forma que la Eq. 3.13 puede reescribirse como

$$p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1}) = \sum_{\forall x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1})$$

- $p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})$:
Aplicando de nuevo la Eq. 3.3 y operando como antes

$$\begin{aligned}
 p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1}) &= \sum_{\forall x_k} p(y_k, x_k | \mathbf{Y}_{k-1}) \\
 &= \sum_{\forall x_k} \frac{p(y_k, x_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_{k-1})} \\
 &= \sum_{\forall x_k} p(y_k | x_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1}) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Usando la misma argumentación que en la Eq. 3.12, la Eq. 3.14 queda

$$p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1}) = \sum_{\forall x_k} p(y_k | x_k) p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1})$$

Resumiendo:

$$p(x_k | \mathbf{Y}_k) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \quad (3.15)$$

$$p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1}) = \sum_{\forall x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) \quad (3.16)$$

$$p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1}) = \sum_{\forall x_k} p(y_k | x_k) p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1})$$

Ahora ya se dispone de todos los ingredientes para poder aplicar la estimación Bayesiana de manera recursiva, procedimiento también conocido como filtro de Bayes.

Teniendo en cuenta que el denominador de la Eq. 3.15 es sólo un factor multiplicativo, el principal interés recae sobre dos pdf:

$$p(x_k|\mathbf{Y}_k) \propto p(y_k|x_k)p(x_k|\mathbf{Y}_{k-1})$$

donde $p(x_k|\mathbf{Y}_k)$ es la pdf a posteriori, $p(y_k|x_k)$ es la verosimilitud de la medida, y $p(x_k|\mathbf{Y}_{k-1})$ es la pdf a priori. La Eq. 3.16 hace, en el instante $k - 1$, una *predicción* del estado para el instante k y la Eq. 3.15 hace, en el instante k , una *corrección* de la predicción usando la observación. La recursividad se consigue haciendo que en la iteración k la pdf a priori haga uso de la pdf a posteriori de la iteración $k - 1$.

Desafortunadamente, la solución analítica de la Eq. 3.15 sólo es posible en unos pocos casos especiales. En particular si las funciones $f(\cdot)$ y $h(\cdot)$ son lineales, y x_0 , $\{w_k\}$, y $\{v_k\}$ son aditivos, independientes y gaussianos, entonces la solución es el filtro de Kalman-Bucy (Kalman and Bucy, 1961).

3.5.6. El filtro de partículas

El filtro de partículas es un procedimiento numérico, basado en la técnica de Montecarlo, que implementa el estimador Bayesiano. Los primeros trabajos se remontan a finales de los años 60 del siglo pasado (Mayne and Handschin, 1969), (Handschin, 1970). Puede decirse que hace uso de la fuerza bruta, en el sentido de explorar aleatoriamente *todo* el espacio de probabilidades. Es por ello que su implementación requiere de una considerable capacidad de cálculo, y de ahí su reciente desarrollo de la mano del incremento de las prestaciones de los computadores. Su gran ventaja radica en que está capacitado para aplicar el estimador Bayesiano incluso en los casos en los que no son viables los filtros de Kalman.

Los métodos de Montecarlo se usan habitualmente para dar solución aproximada a integrales intratables por otros procedimientos, especialmente en alta dimensionalidad (Fearnhead, 1998). El contenido de esta sección está basado en (Ristic et al., 2004).

Puede usarse una muestra $\{x^1, x^2, \dots, x^N\}$ a partir de la distribución de la variable aleatoria X con pdf $\pi(x)$ para estimar el valor esperado de cualquier función $f(\cdot)$ de X . Esto se consigue aproximando la integral

$$E_f = \int f(x)\pi(x)d(x)$$

con la suma

$$E_f \approx \sum_{i=1}^N f(x^i)/N \quad (3.17)$$

Se trata de un estimador sin sesgo y, si la varianza de $f(\cdot)$ es finita, ofrece una varianza proporcional a $1/N$. En particular, la muestra puede usarse para estimar la función de distribución de la variable aleatoria. Para cualquier subconjunto A , $p(x \in A) = E_f(\delta(x))$, donde $\delta(x)$ es la función indicadora que toma el valor 1 si $x \in A$ y 0 de cualquier otra forma. Así, $p(x \in A)$ puede estimarse por la Eq. 3.17 con $f(x) = \delta(x)$ (Fig. 3.9).

$$p(x \in A) \approx \sum_{i=1}^N \delta(x^i \in A)/N \quad (3.18)$$

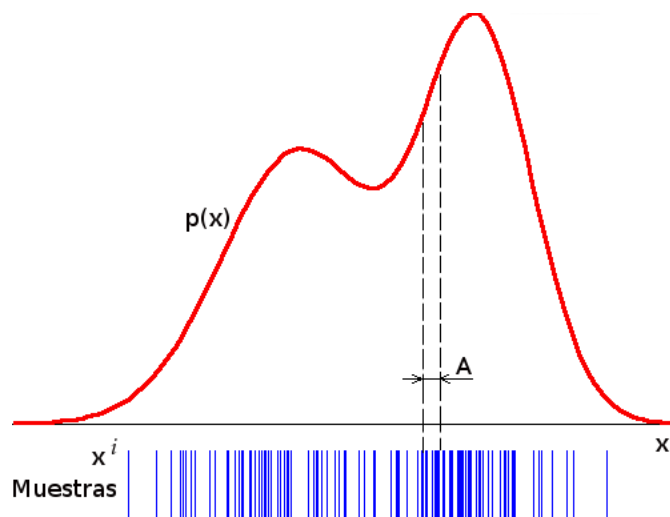


Figura 3.9: Muestreo según $p(x)$.

Esta idea requiere tomar muestras de $\pi(x)$ para poder estimar la integral usando la Eq. 3.17. El problema es que no siempre es esto posible. Una idea para conseguirlo se conoce como *muestreo por importancia*.

Muestreo por importancia

En el supuesto de que no sea posible tomar muestras directamente de la distribución $\pi(x)$ pero sí pueda hacerse desde otra distribución $q(x)$ (distribución propuesta) parecida a la anterior, se podrá escribir

$$E_f = \int f(x) \frac{\pi(x)}{q(x)} q(x) d(x)$$

La pdf $q(x)$ debe satisfacer la condición que su soporte contiene el de $\pi(x)$; es decir que $\pi(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0$. Entonces, para estimar E_f se generan N muestras independientes $\{x^1, x^2, \dots, x^N\}$ distribuidas según $q(x)$ que conformarán la suma ponderada

$$E_f \approx \sum_{i=1}^N f(x^i) \tilde{w}(x^i) / N$$

donde

$$\tilde{w}(x^i) = \frac{\pi(x^i)}{q(x^i)}$$

son los *pesos de importancia*. Normalizando estos pesos

$$w(x^i) = \frac{\tilde{w}(x^i)}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}(x^j)}$$

queda

$$E_f \approx \sum_{i=1}^N f(x^i) w(x^i)$$

La Fig. 3.10 muestra gráficamente esta idea. En ella, para aproximar la distribución a posteriori, se toman muestras de forma independiente e igualmente distribuidas desde una distribución propuesta para luego, a partir de la relación conocida entre ambas distribuciones, obtener los pesos que modulan la amplitud (probabilidad) de cada muestra.

Muestreo secuencial por importancia (SIS)

El método de muestreo por importancia (Tanner and Wong, 1987) es un método de integración general de Montecarlo. En esta sección se aplicará para realizar un filtrado no lineal en el marco de la estimación Bayesiana (Sec. 3.5.5) donde $\pi(\cdot)$ será la pdf a posteriori. El procedimiento resultante se conoce como muestreo secuencial por importancia (SIS) (*sequential importance sampling*) y conforma la base de la mayoría de los filtros secuenciales de Montecarlo.

El filtro de partículas aproxima la pdf a posteriori distribuyendo primero partículas

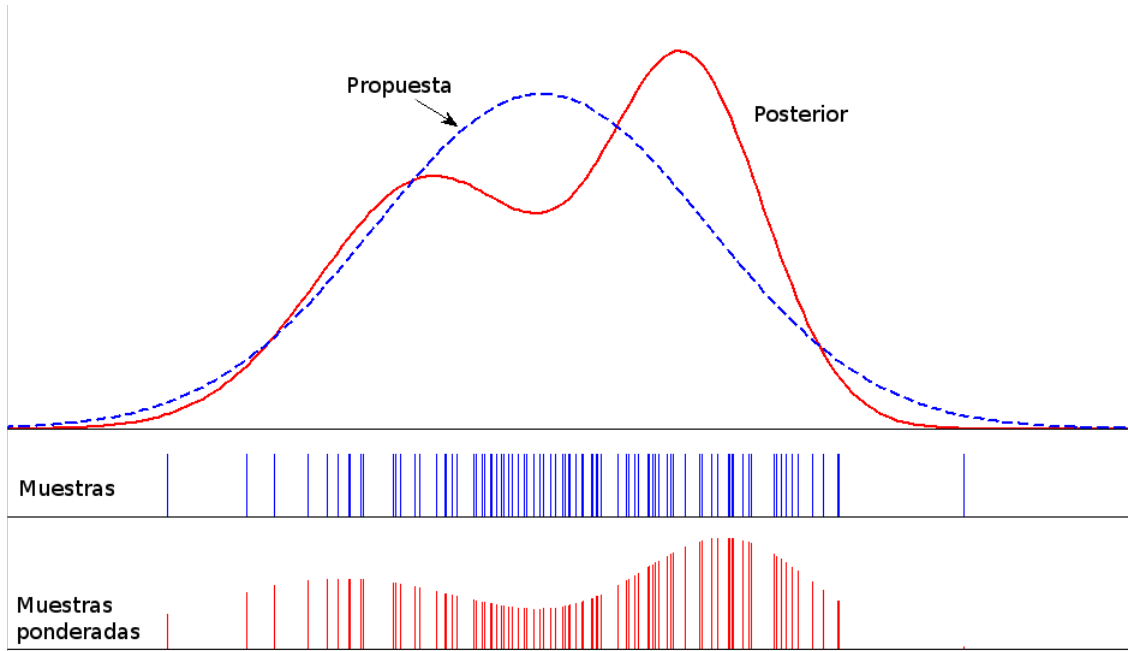


Figura 3.10: Muestreo por importancia.

aleatoriamente en el espacio de muestreo, para luego asignar a cada partícula un peso que es representativo de su probabilidad. La distribución a posteriori puede ser aproximada por una distribución discreta con el soporte de las partículas y los pesos asociados, y si el número de muestras es elevado, esta técnica supone una representación equivalente a la pdf a posteriori y el filtro SIS se aproxima al estimador Bayesiano óptimo.

Se parte de un conjunto de pares de muestras y pesos $\{\mathbf{X}_k^i, w_k^i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N\}$ que caracterizan la pdf conjunta a posteriori $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$, donde i hace referencia a cada una de las partículas (discretizaciones de $\mathbf{X}_k = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$), $\mathbf{X}_k^i = \{x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i\}$ es el conjunto de todos los estados discretos desde $k = 0$ hasta el instante k actual con pesos asociados w_k^i . Los pesos están normalizados de forma que $\sum_i w_k^i = 1$. Entonces, haciendo uso de la Eq. 3.18, la pdf conjunta a posteriori en el instante k puede aproximarse como sigue:

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^i)$$

Los pesos w_k^i se eligen usando el principio de muestreo por importancia. Si en el instante $k - 1$ se tienen muestras que suponen una aproximación a $p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1})$, con la recepción de la medida y_k al instante k se quiere aproximar $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$ con un nuevo conjunto de muestras, y para ello se hará uso de una densidad de importancia $q(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$, similar a $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$. Si se factoriza

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) &= \frac{q(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)}{q(\mathbf{Y}_k)} \\
&= \frac{q(x_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_k)}{q(\mathbf{Y}_k)} \\
&= q(x_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_k) q(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_k) \\
&= q(x_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_k) q(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1})
\end{aligned} \tag{3.19}$$

se pueden obtener muestras \mathbf{X}_k^i a partir de $q(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$ evolucionando cada muestra existente \mathbf{X}_{k-1}^i , derivada de $q(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1})$, en el nuevo estado x_k^i haciendo uso de $q(x_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_k)$. En la Eq. 3.19 se hace uso de la expresión $\mathbf{X}_k = \{x_k, \mathbf{X}_{k-1}\}$ de forma que $q(x_k | \mathbf{Y}_k)$ es la pdf marginal de $q(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$. Para derivar la ecuación de actualización de pesos, primero hay que expresar $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$ debidamente:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) &= \frac{p(y_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \\
&= \frac{p(y_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \\
&= \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | x_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})} p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1})
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\propto p(y_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) \tag{3.21}$$

En la Eq. 3.20 se ha hecho uso de la asunción de Markov:

$$p(y_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(y_k | x_k)$$

dado que la lectura actual no está condicionada por los estados o lecturas anteriores, y

$$p(x_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(x_k | x_{k-1})$$

dado que el estado actual sólo está condicionado por el estado anterior.

Usando las Eqs. 3.19 y 3.21 se puede componer la ecuación de los pesos

$$\begin{aligned}
w_k^i &\propto \frac{p(\mathbf{X}_k^i | \mathbf{Y}_k)}{q(\mathbf{X}_k^i | \mathbf{Y}_k)} \\
&\propto \frac{p(y_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i) p(\mathbf{X}_{k-1}^i | \mathbf{Y}_{k-1})}{q(x_k^i | \mathbf{X}_{k-1}^i, \mathbf{Y}_k) q(\mathbf{X}_{k-1}^i | \mathbf{Y}_{k-1})} \\
&= w_{k-1}^i \frac{p(y_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | \mathbf{X}_{k-1}^i, \mathbf{Y}_k)} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

El interés está en estimar la pdf a posteriori $p(x_k | \mathbf{Y}_k)$, sin que importe la historia de x (a excepción de la historia inmediata, x_{k-1}). Así, se puede reformular la Eq. 3.22 haciendo $q(x_k^i | \mathbf{X}_{k-1}^i, \mathbf{Y}_k) = q(x_k^i | x_{k-1}^i, y_k)$, con lo que

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(y_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{k-1}^i, y_k)} \tag{3.23}$$

De esta forma, la única dependencia de los pesos se limita a x_{k-1}^i e y_k . Con todo, la pdf a posteriori filtrada puede ser aproximada como

$$p(x_k | \mathbf{Y}_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(x_k - x_k^i) \tag{3.24}$$

donde el error de la aproximación se reduce al aumentar N , y se anula para $N \rightarrow \infty$.

Este tipo de filtrado consiste en la propagación recursiva de los pesos de importancia w_k^i junto con los puntos de soporte x_k^i , cuando se recibe la nueva medida y_k de forma secuencial. Este algoritmo es simple y generalista y conforma la base de la mayoría de los filtros de partículas. La elección de la función de densidad de importancia juega un papel fundamental en el resultado.

Degeneración: Ha quedado demostrado (Doucet et al., 2000) que para una función de importancia de la forma mostrada en la Eq. 3.19, la varianza de los pesos de importancia sólo puede crecer con el tiempo. La consecuencia es un problema conocido como el *fenómeno de la degeneración* y que consiste en que, después de un cierto número de pasos de recursión, todas las partículas, salvo una, adquieren pesos prácticamente nulos. Esto supuso el mayor tropiezo en el desarrollo de los métodos secuenciales de Montecarlo. Efectivamente, se destina un considerable esfuerzo computacional para actualizar partículas que no van a contribuir prácticamente en nada a la aproximación de $p(x_k | \mathbf{Y}_k)$. Una adecuada medida de la degeneración de un algoritmo es el tamaño efectivo de la muestra \hat{N}_{ef} cuya estimación puede ser la siguiente (Kong et al., 1994):

$$\hat{N}_{ef} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^i)^2}$$

donde w_k^i son los pesos normalizados obtenidos usando la Eq. 3.22. Puede verificarse que $1 \leq \hat{N}_{ef} \leq N$ con dos casos extremos: (1) total uniformidad en los pesos, con $\hat{N}_{ef} = N$; y (2), una partícula con peso 1 y el resto cero, con $\hat{N}_{ef} = 1$. Por tanto, un pequeño valor de \hat{N}_{ef} indica una degeneración severa y viceversa.

Remuestreo: Es una técnica que resuelve el problema de la degeneración, propio del algoritmo SIS, y que hay que aplicar cada vez que se detecta un valor bajo de \hat{N}_{ef} . Opera eliminando muestras con peso reducido y replicando las muestras más representativas. Como resultado del remuestreo, a partir de $\{x_k^i, w_k^i\}$ se obtiene una población $\{x_k^{i*}, 1/N\}$ con pesos uniformes. El nuevo conjunto de muestras aleatorias $\{x_k^{i*}\}_{i=1}^N$ se obtienen remuestreando con reemplazo N veces a partir de la aproximación discreta de $p(x_k | \mathbf{Y}_k)$ dada por la Eq. 3.24, de forma que la probabilidad de elegir una partícula está directamente relacionada con el valor de su peso: $P\{x_k^{i*} = x_k^j\} = w_k^j$.

Una posible implementación de la técnica del remuestreo es el remuestreo sistemático (Kitagawa, 1996). Consiste en generar N muestras en el intervalo $[0, 1]$ a partir de una distribución uniforme, colocarlas sobre el eje de ordenadas y compararlas con los valores acumulados de los pesos normalizados. Como puede apreciarse en la Fig. 3.11, el peso correspondiente a la partícula seis (w^6) en el intervalo $[e, d]$ es el mayor de todos, lo que significa que esta partícula tiene la máxima probabilidad de replicarse, en detrimento de aquellas con menor peso, que podrían desaparecer. El cuadro F.6 (anexo F) presenta este algoritmo.

Aunque el remuestreo reduce los efectos de la degeneración, introduce otros problemas:

1. Limita la oportunidad de implementar una ejecución paralela del algoritmo, dado que todas las partículas deben combinarse.
2. Estadísticamente, las partículas con elevado peso se seleccionan muchas veces. Esto conduce a una pérdida de diversidad entre las partículas, y puede ser severo en los casos donde el ruido del proceso sea pequeño. El resultado es que las partículas colapsan en un único punto luego de unas pocas iteraciones. Este problema se conoce como *empobrecimiento de la muestra*.

Se han propuesto diversas técnicas para reducir el problema del empobrecimiento de la muestra, tales como el movimiento de las partículas en el remuestreo (*resample-move*) (Gilks and Berzuini, 2001), o la inserción de un paso de regularización (Musso et al., 2001). Cappe et al. (2007) presentan una visión general sobre diferentes métodos. A

pesar del uso de estas técnicas, el filtro de partículas falla si el ruido del proceso es muy pequeño, en cuyo caso se trataría más de un sistema determinista que estocástico.

Como regla general, la exactitud de cualquier estimación de una pdf puede decrecer al aplicar el remuestreo. Así, si son de interés magnitudes como la media y la covarianza de las muestras, éstas deben calcularse antes de aplicar el remuestreo.

Según Doucet and Johansen (2011), los tres algoritmos de remuestreo más populares son: remuestreo sistemático (Kitagawa, 1996), remuestreo residual (Liu and Chen, 1998), y remuestreo multinomial (Smith and Gelfand, 1992). Chen (2003) ofrece un resumen sobre la forma de operar de éstos y otros algoritmos de remuestreo y Douc and Cappe (2005) presentan una comparativa.

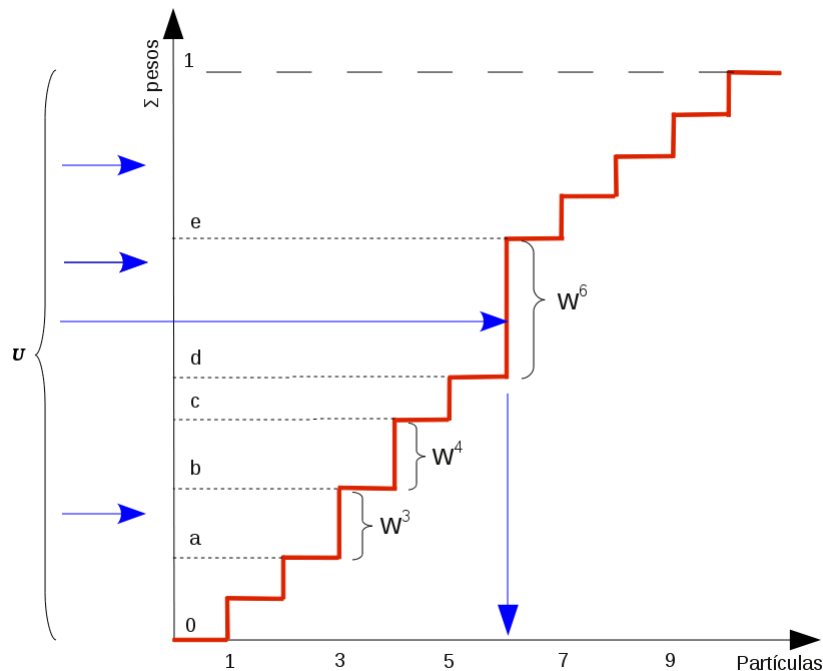


Figura 3.11: Procedimiento para aplicar la técnica del remuestreo.

Selección de la densidad de importancia

La elección adecuada de la densidad de importancia $q(x_k | x_{k-1}^i, y_k)$ es uno de los aspectos más críticos en el diseño del filtro de partículas. La función que minimiza la varianza de los pesos de importancia es (Doucet et al., 2000):

$$\begin{aligned}
q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)_{opt} &= q(x_k|x_{k-1}^i, y_k) \\
&= \frac{p(y_k|x_k, x_{k-1}^i) p(x_k|x_{k-1}^i)}{p(y_k|x_{k-1}^i)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Sustituyendo la Eq. 3.25 en la Eq. 3.23

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(y_k|x_{k-1}^i) \tag{3.26}$$

Para hacer uso de la función de importancia óptima, se requiere:

1. Poder tomar muestras de $q(x_k|x_{k-1}^i, y_k)$
2. Evaluar

$$p(y_k|x_{k-1}^i) = \int p(y_k|x_k) p(x_k|x_{k-1}^i) dx_k$$

En general, ninguno de los dos casos resulta sencillo de realizar. Por ello se hace uso de funciones de importancia subóptimas. La más popular es la pdf transicional:

$$q(x_k|x_{k-1}^i, y_k) = p(x_k|x_{k-1}^i) \tag{3.27}$$

Si se usa un modelo de ruido del proceso que sea aditivo, gaussiano y de media nula, la pdf transicional es simplemente:

$$p(x_k|x_{k-1}^i) = N(x_k; f_{k-1}(x_{k-1}^i), \mathbf{Q}_{k-1})$$

Sustituyendo la Eq. 3.5.6 en la Eq. 3.23

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(y_k|x_{k-1}^i) \tag{3.28}$$

Cabe observar que cuando se usa la función de importancia óptima, los pesos de importancia, de acuerdo con Eq. 3.26, pueden computarse antes de que las partículas sean propagadas desde $k - 1$ hasta k . La Eq. 3.28 establece que esto no es posible con el uso de la pdf transicional como función de importancia subóptima.

Si se usa la función transicional $p(x_k|x_{k-1}^i)$ como densidad de importancia, y su distribución es mucho más ancha que la función de verosimilitud, $p(y_k|x_k)$, entonces, sólo unas pocas partículas recibirán un peso elevado. Consecuentemente, las partículas degenerarán rápidamente y el filtro dejará de funcionar. Existen métodos que tratan este

problema haciendo que las partículas se sitúen en la zona de interés (región con alta verosimilitud), incorporando la observación. Uno de los métodos es el filtro de partículas auxiliar (*auxiliary particle filter*) (Pitt and Shephard, 1999). Otra posibilidad es usar densidades puente (*bridging densities*) (Godsill and Clapp, 2000), o corrección progresiva (Oudjane and Musso, 2000). Ambos introducen distribuciones intermedias entre las funciones transaccional y de verosimilitud. Luego, las partículas son reponderadas de acuerdo con estas distribuciones intermedias y remuestreadas. La técnica de muestreo particionado (MacCormick and Blake, 2000) es útil si la distribución de verosimilitud es muy aguda pero puede factorizarse en un número de distribuciones más anchas. El filtro de partículas con rechazo (*rejection particle filter*) implementa una sencilla idea para aproximar la pdf a posteriori y que consiste en eliminar una partícula si no cumple con algún criterio relacionado con la medida. La partícula rechazada se sustituye por otra de forma iterativa hasta que cumpla con el criterio dado (Mayne and Handschin, 1969). Otra idea, válida cuando la función de verosimilitud puede modelarse por una función cuadrática, es el filtro de partículas verosímil ("*likelihood*" *particle filter*) (Arulampalam et al., 2002).

También se pueden construir aproximaciones subóptimas de la densidad de importancia óptima usando alguna técnica de linealización local (Doucet et al., 2000). Tales linealizaciones usan una densidad de importancia que es una aproximación gaussiana a $p(x_k|x_{k-1}, y_k)$ y están basadas en alguna variante del filtro de Kalman como, por ejemplo, el filtro extendido de Kalman.

Muestreo-remuestreo por importancia (SIR)

Para hacer uso del filtro de muestreo-remuestreo por importancia (Gordon et al., 1993) se requiere:

1. Conocer las funciones de transición de estados, $f_{k-1}(x_{k-1}, w_{k-1})$ (Eq. 3.9), y de medida, $h_k(x_k, v_k)$ (Eq. 3.10).
2. Muestrear realizaciones de estado a partir del ruido del proceso w_{k-1} y desde la distribución a priori.
3. Disponer de la función de verosimilitud $p(y_k|x_k)$ para la evaluación (al menos hasta la proporcionalidad).

El algoritmo SIR se diferencia del SIS en que la función de densidad de importancia elegida es la transicional a priori, y por realizar el remuestreo a cada iteración. Para conseguir muestras x_k^i desde $p(x_k|x_{k-1})$ primero se generan muestras desde el ruido del proceso $w_{k-1}^i \sim p(w_{k-1})$ obteniendo $x_k^i = f_{k-1}(x_{k-1}^i, w_{k-1}^i)$. Los pesos se obtienen usando la Eq. 3.28. Dado que el remuestreo se aplica a cada iteración del algoritmo,

la distribución de los pesos será plana $w_{k-1}^i = 1/N \quad \forall i = 1, \dots, N$. Esto significa dos cosas:

1. No hay necesidad de considerar los pesos de importancia desde una iteración del algoritmo hasta la siguiente, ya que son conocidos.
2. La Eq. 3.28 se simplifica en

$$w_k^i \propto p(y_k | x_k^i)$$

pesos que deberán normalizarse antes de la etapa de remuestreo.

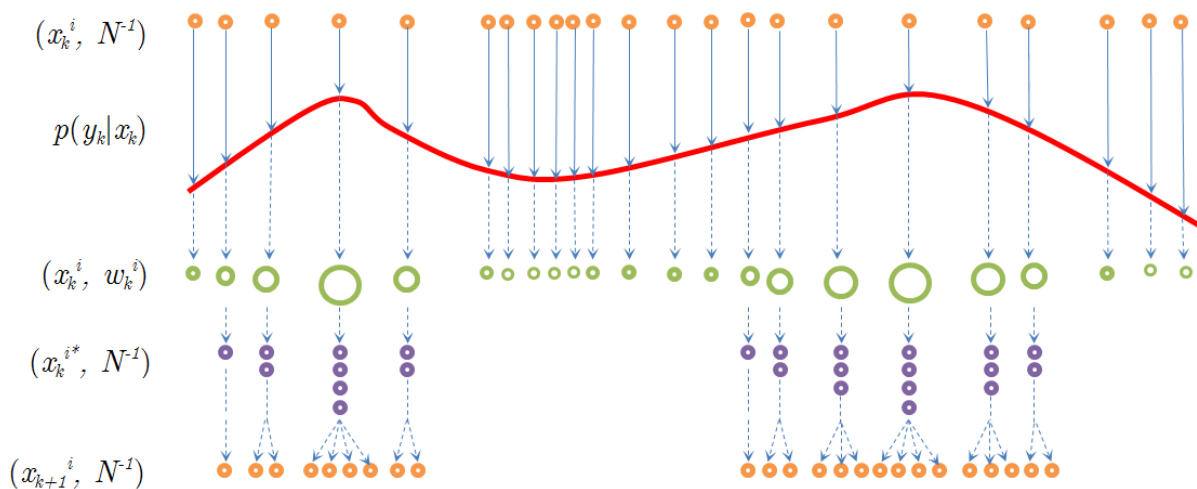


Figura 3.12: Un ciclo del filtro SIR (Ristic et al., 2004).

La Fig. 3.12 presenta un ciclo del filtro SIR para 23 partículas ($N = 23$). Parte de la medida aleatoria $\{x_k^i, N^{-1}\}$, uniformemente ponderada, que aproxima la pdf de la predicción $p(x_k | \mathbf{Y}_{k-1})$. A partir de ahí, y haciendo uso de la medida recibida y_k y de la función de verosimilitud $p(y_k | x_k)$, se determinan los pesos de importancia de cada partícula. El resultado es la medida aleatoria $\{x_k^i, w_k^i\}$, que supone una aproximación a la función $p(x_k, \mathbf{Y}_k)$ e implementa el paso de corrección de la predicción. Luego se aplica una etapa de remuestreo donde se seleccionan y replican las partículas de importancia para obtener la medida $\{x_k^{i*}, N^{-1}\}$, uniformemente ponderada, la cual todavía aproxima a la función $p(x_k, \mathbf{Y}_k)$. El último paso es la predicción, que introduce una variedad en las partículas como consecuencia del ruido del proceso, resultando en la medida $\{x_{k+1}^i, N^{-1}\}$ que aproxima a la función $p(x_{k+1}, \mathbf{Y}_k)$.

Al igual que el algoritmo SIS, el SIR muestrea a partir de una pdf independiente de la medida y_k , con lo que el espacio de estados se explora sin conocimiento de la observación. Es por esto que el filtro puede ser ineficiente y sensible a espurios. Además, como se aplica el remuestreo a cada iteración, puede derivar en una rápida pérdida de diversidad en las partículas. La ventaja de este método radica en que tanto la evaluación

de los pesos de importancia como el muestreo de la densidad de importancia se puede realizar muy fácilmente. El cuadro F.4 (anexo F) presenta este algoritmo.

Muestreo-remuestreo auxiliar por importancia (ASIR)

El filtro de muestreo-remuestreo auxiliar por importancia fue propuesto por Pitt and Shephard (1999) como una variante del estándar SIR. La idea básica consiste en realizar un paso de remuestreo en el instante $k - 1$ (usando la medida disponible en k), antes de que las partículas sean propagadas al instante k . De esta forma, el filtro ASIR intenta imitar la secuencia de pasos acontecidos cuando se dispone de la densidad de importancia óptima. Como los filtros anteriores, éste también deriva del marco SIS e introduce una densidad de importancia $q(x_k, i | \mathbf{Y}_k)$, la cual muestrea los pares $\{x_k^j, i^j\}_{j=1}^N$, donde i^j se refiere al índice de la partícula en $k - 1$.

Aplicando la regla de Bayes, se puede derivar una proporcionalidad de $p(x_k, i | \mathbf{Y}_k)$ como:

$$\begin{aligned}
 p(x_k, i | \mathbf{Y}_k) &= \frac{p(x_k, i, \mathbf{Y}_k)}{p(\mathbf{Y}_k)} \\
 &= \frac{p(x_k, i, y_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_k)} \\
 &= \frac{p(y_k | x_k, i, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_k, i | \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_k)} \\
 &= \frac{p(y_k | x_k, i, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_k, i | \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{Y}_{k-1})} \\
 &= \frac{p(y_k | x_k, i, \mathbf{Y}_{k-1}) p(x_k, i | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(y_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \\
 &\propto p(y_k | x_k) p(x_k | i, \mathbf{Y}_{k-1}) p(i | \mathbf{Y}_{k-1}) \\
 p(x_k, i | \mathbf{Y}_k) &\propto p(y_k | x_k) p(x_k | x_{k-1}^i) w_{k-1}^i \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la asunción de Markov. Cabe comentar la discretización aplicada en Eq. 3.29. El filtro ASIR opera obteniendo una muestra desde la densidad conjunta $p(x_k, i | \mathbf{Y}_k)$ y luego omitiendo el índice i en el par (x_k, i) para producir una muestra $\{x_k^j\}_{j=1}^N$ desde la densidad marginal $p(x_k | \mathbf{Y}_k)$. La densidad de importancia usada para derivar la muestra $\{x_k^j, i^j\}_{j=1}^N$ se define para satisfacer la proporcionalidad

$$q(x_k, i | \mathbf{Y}_k) \propto p(y_k | \mu_k^i) p(x_k | x_{k-1}^i) w_{k-1}^i \tag{3.30}$$

donde μ_k^i es alguna caracterización de x_k dado x_{k-1} . Esta puede ser la media, en cuyo

caso $\mu_k^i = E\{p(x_k|x_{k-1}^i)\}$ o una muestra $\mu_k^i \propto p(x_k|x_{k-1}^i)$. Desarrollando $q(x_k, i|\mathbf{Y}_k)$

$$q(x_k, i|\mathbf{Y}_k) = q(i|\mathbf{Y}_k) q(x_k|i, \mathbf{Y}_k)$$

definiendo

$$q(x_k, i|\mathbf{Y}_k) \triangleq p(x_k|x_{k-1}^i)$$

y haciendo uso de Eq. 3.30, queda

$$\begin{aligned} q(i|\mathbf{Y}_k) q(x_k|i, \mathbf{Y}_k) &\propto p(y_k|\mu_k^i) p(x_k|x_{k-1}^i) w_{k-1}^i \\ q(i|\mathbf{Y}_k) p(x_k|x_{k-1}^i) &\propto p(y_k|\mu_k^i) p(x_k|x_{k-1}^i) w_{k-1}^i \\ q(i|\mathbf{Y}_k) &\propto p(y_k|\mu_k^i) w_{k-1}^i \end{aligned}$$

Así, según la Eq. 3.23, y usando las Eqs. 3.29 y 3.30 la muestra $\{x_k^j, i^j\}_{j=1}^N$ recibe el peso

$$w_k^j \propto w_{k-1}^{i^j} \frac{p(y_k|x_k^j) p(x_k^j|x_{k-1}^{i^j})}{q(x_k^j, i^j|\mathbf{Y}_k)} = \frac{p(y_k|x_k^j)}{p(y_k|\mu_k^{i^j})}$$

Comparado con el filtro SIR, la ventaja del ASIR es que éste genera puntos desde la muestra de $k - 1$ de forma natural, los cuales, al estar condicionados por la medida, tienen una mayor probabilidad de situarse en la región de alta verosimilitud. Su desventaja, respecto al filtro SIR, es que requiere de más recursos computacionales al elevar la dimensionalidad del problema (concretamente, la función de densidad de importancia propuesta debe evaluarse dos veces). El cuadro F.5 (anexo F) y la Fig. 3.13 presentan este algoritmo.

3.5.7. Limitaciones de los métodos probabilísticos

La aplicabilidad práctica de la teoría de la probabilidad clásica a algunos problemas de interés, especialmente los relacionados con juicios humanos, ha sido cuestionada desde mediados del siglo XX. Cada vez más se ha reconocido que el axioma de la aditividad de esta teoría supone el primer tropiezo hacia su aplicación generalizada. Debido a este axioma, se requiere que los eventos elementales sean disjuntos y que la probabilidad de cada uno de ellos sea expresada con precisión por un número real en el intervalo unitario $[0, 1]$. Esto es matemáticamente sensato, pero es una fuente de dificultades cuando se trata de modelar problemas de la vida real donde a menudo no es posible establecer con precisión la probabilidad. La teoría de la probabilidad no está interesada en modelar la imprecisión sino más bien la incertidumbre. En un marco gobernado por

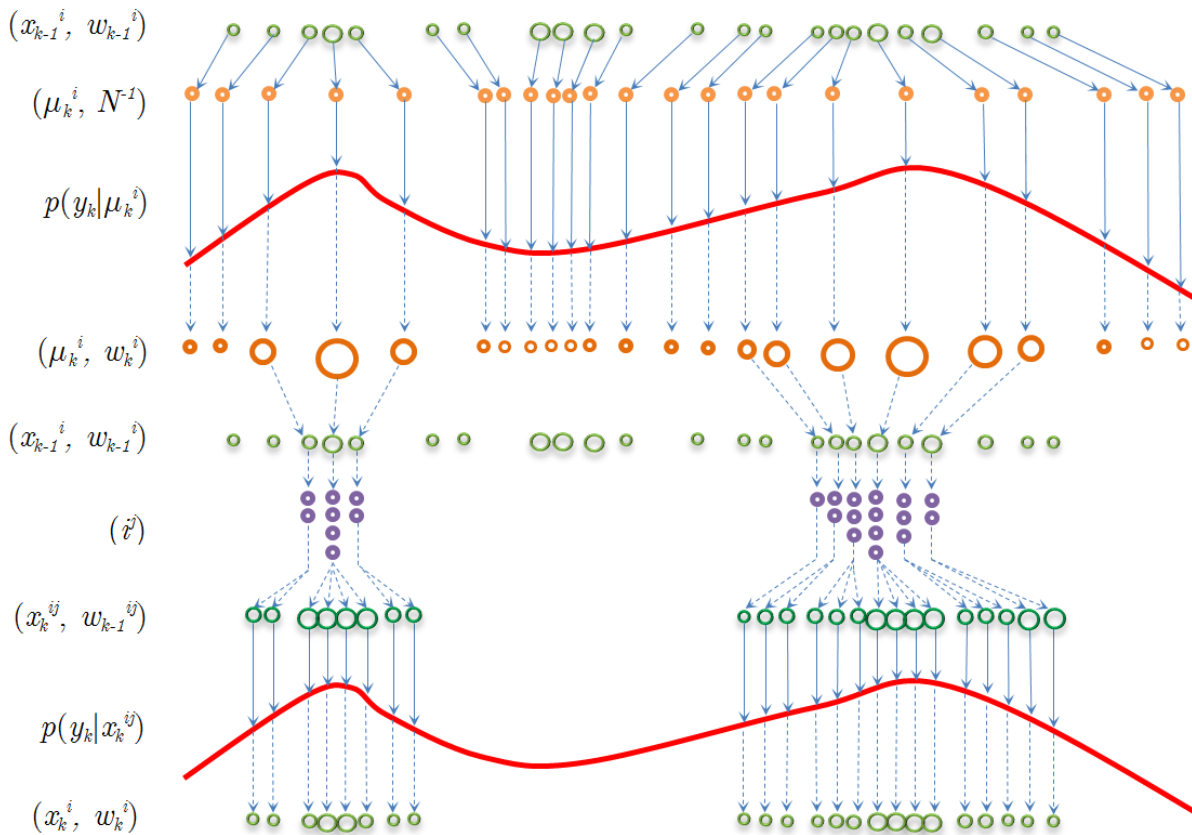


Figura 3.13: Un ciclo del filtro ASIR.

la aleatoriedad y modelando la información por medio de una función de probabilidad, la ignorancia no puede distinguirse de la certidumbre. Para evitar estas limitaciones prácticas, se requiere expandir la teoría para que acepte probabilidades imprecisas. Esto significa matemáticamente que el axioma de aditividad de la teoría clásica necesita ser reemplazado por un axioma más débil. En la literatura se han sugerido varios de estos axiomas. Cada uno de ellos define una teoría particular de probabilidades imprecisas (Klir, 2001), (Dubois and Prade, 2000), (Dubois and Prade, 1994). Las más extendidas son la teoría de la evidencia, y la teoría de la posibilidad.

3.6 El marco evidencial

3.6.1. Introducción

El grado de creencia personal no puede expresarse por un único valor numérico sino más bien por un intervalo estimado que lo limite, el cual puede describirse mediante

límites llamados probabilidad alta y baja. Esta idea surge cuando la creencia personal no queda bien descrita por una única medida de probabilidad, como es el caso de los métodos Bayesianos, sino por una familia de medidas de probabilidad (Smets, 1994). Un caso especial de probabilidad alta y baja fue descrito por Dempster (1967) y, posteriormente, Shafer (1976) extendió la teoría que ahora se conoce como teoría de la evidencia o teoría de Dempster-Shafer. El propósito de esta teoría es dar una representación formal a la imprecisión y a la incertidumbre, aspectos ambos muy ligados a la información imperfecta.

Para muchos problemas se debe tratar con la dificultad de usar fuentes de información variadas, tales como opiniones humanas, resultados estadísticos, etc. La teoría de la evidencia permite combinar esa variada información y producir una inferencia que puede ayudar a tomar una decisión con algún grado de certidumbre. Así, esta teoría está interesada en el modelado y cuantificación de la credibilidad atribuida a eventos de los cuales podemos ignorar la probabilidad de su ocurrencia. Esa credibilidad es personal, subjetiva, e inducida por la evidencia.

3.6.2. Medidas de credibilidad y de plausibilidad

Cualquier forma de tratar con la información imperfecta pasa por medirla. La teoría de la evidencia define dos medidas complementarias con las que poder modelar la imperfección: la medida de *credibilidad* $Bel()$ y la medida de *plausibilidad* $Pl()$. Los cinco axiomas en los que están basadas estas medidas son los siguientes:

1. $Bel(\emptyset) = 0$ La probabilidad del conjunto vacío es nula (0)
2. $Bel(\Theta) = 1$ La probabilidad del mundo es total (1)
3. si $A \subseteq B \rightarrow Bel(A) \leq Bel(B)$ Monotonía no estricta
4. $Bel(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_i Bel(A_i) - \sum_i Bel(A_i \cap A_j) + \sum_i Bel(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots$
 $\dots \pm \sum_i Bel(A_i \cap \dots \cap A_n)$
 - Para $n = 2 \rightarrow Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B)$ Super-aditividad
5. $Pl(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_i Pl(A_i) - \sum_i Pl(A_i \cap A_j) + \sum_i Pl(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots \pm$
 $\sum_i Pl(A_i \cap \dots \cap A_n)$
 - Para $n = 2 \rightarrow Pl(A \cup B) \leq Pl(A) + Pl(B) - Pl(A \cap B)$ Sub-aditividad

Los tres primeros axiomas coinciden con la teoría de la probabilidad, el cuarto sólo se diferencia en la desigualdad. Así, cuando las medidas de credibilidad Bel y de plausibilidad Pl coincidan, será el caso de una medida de probabilidad. De ahí que la teoría

de la probabilidad pueda verse como un caso particular de la teoría de la evidencia. Puede observarse cómo la medida Bel describe matemáticamente lo que, en el lenguaje natural, se conoce como sinergia: el conjunto puede ser mayor que la suma de las partes (Fig. 3.14).

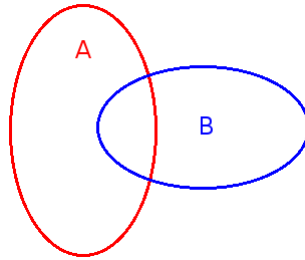


Figura 3.14: Sinergia - $Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B)$.

3.6.3. Funciones de credibilidad y de plausibilidad

La característica más importante de las funciones de credibilidad y plausibilidad es su representación en base a la asignación de la probabilidad básica m , y expresa la certidumbre de la declaración o hipótesis, es decir, la cantidad de soporte o credibilidad atribuida directamente a la declaración. Así, $m(A)$ puede entenderse como la credibilidad subjetiva de que el conjunto A específicamente contiene al verdadero valor de X , al que se hará referencia como x (x =realización del experimento, o valor específico adquirido por la variable aleatoria X). Eso concreta el conocimiento sobre el verdadero valor y puede ser visto como una distribución de probabilidad. A esta asignación de probabilidad básica también se la conoce como masa de credibilidad o simplemente *masa*. Su valor se obtiene distribuyendo una masa de credibilidad global igual a 1 entre todas las posibles proposiciones, o conjuntos de proposiciones, donde cada conjunto A recibe la masa $m(A)$, así

$$m : 2^\Theta \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad \sum_{A \subseteq 2^\Theta} m(A) = 1 \quad \text{y} \quad m(\emptyset) = 0$$

donde Θ es el dominio de referencia formado por un conjunto de elementos exhaustivo (están todos los posibles, así que contiene al verdadero valor) y mutuamente exclusivo (la solución no puede recaer en más de un elemento), donde $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$. La distribución de masas $m(A)$ coincidirá con una distribución de probabilidad cuando el conjunto A esté formado por un solo elemento (*singleton*).

A los subconjuntos A tal que $m(A) > 0$ se les conoce como *elementos focales*. Así, el *cuero de evidencia*, también conocido como *marco de discernimiento*, se compone de los elementos focales y sus masas (F, m) . A partir de esta distribución de masas o marco

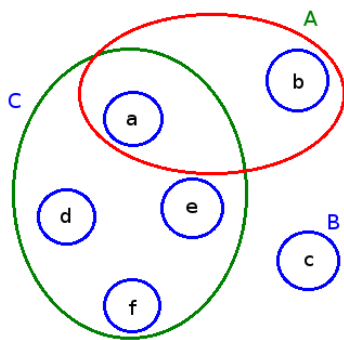
de discernimiento se construyen las funciones de credibilidad $Bel()$ y plausibilidad $Pl()$ definidas como sigue:

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (\text{Soporte total al hecho de que } A \text{ sea cierto})$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (\text{Soporte total al hecho de que } A \text{ no sea falso})$$

Ejemplo 1: Se celebra una competición tal que $\Theta = \{a, b, c, d, e, f\}$ y la credibilidad sobre el ganador es la siguiente (Fig. 3.15 extraída de DeCETI (2005):

$$\begin{aligned} m(a, b) &= 0,5 && \text{Credibilidad que } \{a\} \text{ ó } \{b\} \text{ será el ganador con grado } 0,5 \\ m(c) &= 0,3 && \text{Credibilidad que } \{c\} \text{ será el ganador con grado } 0,3 \\ m(a, d, e, f) &= 0,2 && \text{Credibilidad que } \{a\} \text{ ó } \{d\} \text{ ó } \{e\} \text{ ó } \{f\} \text{ será el ganador con grado } 0,2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= \{a, b\} && m(A) = 0,5 \\ B &= \{c\} && m(B) = 0,3 \\ C &= \{a, d, e, f\} && m(C) = 0,2 \\ D &= \{a, b, d, e, f\} \\ E &= \{a, b, c\} \\ F &= \{a, d\} \\ G &= \{c, e\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Figura 3.15: Ejemplo 1.

En el cuadro 3.3 se presentan los resultados de las funciones de credibilidad y de plausibilidad para varios subconjuntos de este ejemplo.

3.6.4. Interpretación gráfica del grado de evidencia

En la Fig. 3.16 se muestra una posible interpretación gráfica de las funciones de credibilidad y plausibilidad, en ella puede verse cómo la plausibilidad se extiende hasta el extremo en donde se puede negar la evidencia (a favor o en contra). Queda perfectamente delimitada la zona de incertidumbre situada entre el extremo superior de credibilidad en A y el extremo inferior de la credibilidad en \bar{A} (no se dispone de evidencias

$m(A) + m(B) + m(C) = 1$	
$Bel(A) = m(A) = 0,5$	$Pl(A) = m(A) + m(C) = 0,7$
$Bel(B) = m(B) = 0,3$	$Pl(B) = m(B) = 0,3$
$Bel(C) = m(C) = 0,2$	$Pl(C) = m(A) + m(C) = 0,7$
$Bel(D) = m(A) + m(C) = 0,8$	$Pl(D) = m(A) + m(C) = 0,7$
$Bel(E) = m(A) + m(B) = 0,9$	$Pl(E) = m(A) + m(B) = 0,8$
$Bel(F) = 0$	$Pl(F) = m(A) + m(C) = 0,7$
$Bel(G) = 0$	$Pl(G) = m(B) + m(C) = 0,5$
$Bel(a) = 0$	$Pl(a) = m(A) + m(C) = 0,7$

Cuadro 3.3: Algunos resultados derivados del ejemplo 1.

ni a favor ni en contra de A). Cuando la zona de incertidumbre se anula, la imagen refleja una medida de probabilidad: $Bel(A) = Pl(A) = P(A)$, y $Bel(\bar{A}) = Pl(\bar{A}) = P(\bar{A})$. Esta circunstancia se da cuando los elementos focales son *singletons* y coincide justo con el caso de máxima información. Dicho de otra manera, la medida de probabilidad no está concebida para manejar imprecisión, dado que requiere de medidas exactas sobre todos los elementos del conjunto Θ . La teoría de la evidencia carece de esta limitación, pudiendo ser útil para el tratamiento tanto de información incierta como imprecisa. Observar que para cuando no hay coincidencias entre las medidas de credibilidad y de probabilidad, la plausibilidad siempre es mayor que la credibilidad (Fig. 3.17 y ejemplo 1)

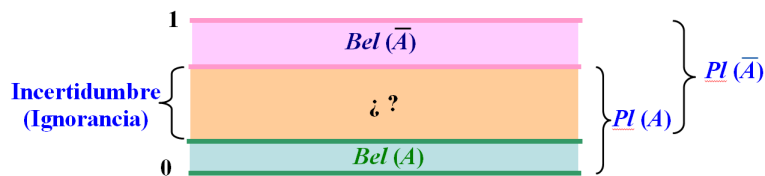


Figura 3.16: Interpretación gráfica del grado de evidencia.

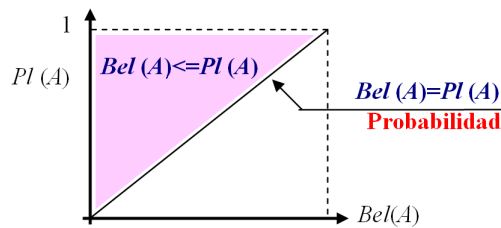


Figura 3.17: Relación entre credibilidad y plausibilidad.

Las siguientes expresiones pueden derivarse directamente de las Figs. 3.16 y 3.17

$$\begin{aligned}
 0 &\leq Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A) \leq 1 \\
 Bel(A) &= 1 \rightarrow Pl(A) = 1 \rightarrow A \text{ es cierto} \\
 Pl(A) &= 0 \rightarrow Bel(A) = 0 \rightarrow A \text{ es falso} \\
 Bel(A) + Bel(\bar{A}) &\leq 1 \\
 Pl(A) + Pl(\bar{A}) &\geq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Bel(A) = \alpha &\geq 0 \rightarrow Pl(A) = \beta \geq \alpha \\
 \text{Evidencia a favor de } A: &\quad \alpha \\
 \text{Evidencia en contra de } A: &\quad 1 - \beta \\
 \text{Ignorancia total:} &\quad \alpha = 0, \beta = 1
 \end{aligned}$$

Cabe remarcar las siguientes expresiones:

1. La relación existente ente la credibilidad y la plausibilidad (dualidad):

$$Bel(A) = 1 - Pl(A)$$

2. La clara expresión de ignorancia total:

$$Bel(A) = 0 \quad \text{y} \quad Pl(A) = 1$$

En la Fig. 3.18 puede verse gráficamente el punto de máxima ignorancia y su evolución particular para el caso de que la credibilidad en el evento A y en su negación coincidan.

3. Se puede definir la duda sobre el conjunto A , $Dbt(A)$, como la credibilidad en el complementario:

$$Dbt(A) = Bel(\bar{A}) \quad \rightarrow \quad Pl(A) = 1 - Dbt(\bar{A})$$

4. La función de incertidumbre sobre el conjunto A , $Unc(A)$, puede definirse como:

$$Unc(A) = Pl(A) - Bel(A)$$

3.6.5. Regla de combinación

La regla de combinación de Dempster permite la agregación de dos cuerpos de evidencia diferentes (F_1, m_1) y (F_2, m_2) en el mismo dominio de referencia. Por ejemplo,

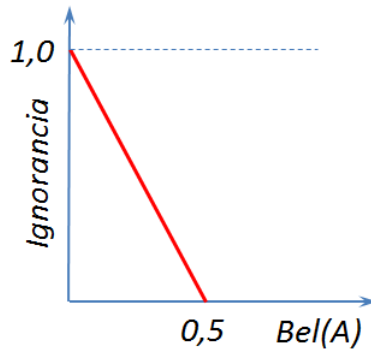


Figura 3.18: Ignorancia cuando la credibilidad en un evento $Bel(A)$ y su negación $Bel(\bar{A})$ coinciden.

puede suponerse que varios expertos indican su opinión a través de la asignación de masas de credibilidad m_1 y m_2 sobre Θ , o que dos experimentos sucesivos permiten tal atribución. Esta regla reduce el conjunto de proposiciones distribuyendo la masa total entre subconjuntos más y más pequeños, y también puede usarse para encontrar credibilidad positiva para proposiciones *singletons* que puede estar integrada en la información complementaria (es decir, elementos focales compuestos de proposiciones *singletons* disjuntas) proporcionada por un grupo de sensores.

La regla de combinación de Dempster combina masas de credibilidad como sigue:

$$m_{1,2}(A) = \frac{\sum_{B \subseteq \Theta, C \subseteq \Theta, B \cap C = A} m_1(B)m_2(C)}{1 - \sum_{B \subseteq \Theta, C \subseteq \Theta, B \cap C = \emptyset} m_1(B)m_2(C)}$$

Esta ecuación viene a decir que la masa de credibilidad en el conjunto A es la suma de los productos de las masas de todos aquellos conjuntos cuya intersección es precisamente el conjunto A . El denominador es un coeficiente de normalización para que la suma de las masas combinadas siga siendo la unidad, y es motivo de problemas. Este denominador puede verse de otra forma:

$$1 - \sum_{B \subseteq \Theta, C \subseteq \Theta, B \cap C = \emptyset} m_1(B)m_2(C) = \sum_{B \subseteq \Theta, C \subseteq \Theta, B \cap C \neq \emptyset} m_1(B)m_2(C) = 1 - K$$

lo que equivale a la suma de los productos de las masas de todos aquellos conjuntos cuya intersección es distinta de cero. Indica el grado de conflicto entre las fuentes y cuando exista un grado de conflicto elevado el denominador tiende a anularse haciendo que el comportamiento de la regla de combinación sea inestable. Es por esto que esta regla es solamente válida cuando las fuentes estén *suficientemente de acuerdo*.

Ejemplo 2: Se supone que el marco de discernimiento Θ consiste de tres hipótesis mutuamente exclusivas y exhaustivas a, b, c , es decir $\Theta = \{a, b, c\}$. Las dos masas de credibilidad proporcionadas por fuentes dispares son: $m_1(a) = 0,99$, $m_1(b) = 0,01$, $m_2(b) = 0,01$, $m_2(c) = 0,99$. Al aplicar la regla de Dempster resulta que $m_{1,2}(a) = 0$, $m_{1,2}(b) = 1$, $m_{1,2}(c) = 0$ (Zadeh, 1984).

Aunque las masas de ambas fuentes indican que la hipótesis b es altamente improbable, con grado $0,01$, la combinación declara que b es absolutamente cierta, con grado 1 . La razón de este resultado sorprendente es doble. Primero, las masas m_1 y m_2 se refieren a elementos *singletons*; es decir, se trata de probabilidad, lo que implica que el conocimiento de las fuentes, de donde se derivan las masas de credibilidad, es absolutamente fiable. En otras palabras, las fuentes indican precisamente la probabilidad de la ocurrencia de cada hipótesis. Segundo, la idea que subyace tras el proceso de normalización de la regla de combinación de Dempster es la de buscar el consenso entre las fuentes. De esta forma, cuando se combinan m_1 y m_2 las hipótesis que concurren se refuerzan y las que entran en conflicto se eliminan. Por esto, la masa m_1 elimina la hipótesis c y m_2 elimina la hipótesis a . La única hipótesis que permanece creíble es b , y el proceso de normalización hace que la credibilidad conjunta en b sea absoluta (Hau and Kashyap, 1989).

Una posible interpretación es que la verdadera respuesta no se encuentra dentro del marco de discernimiento actual, es decir, Θ puede no ser exhaustivo. En otras palabras, disponemos de un conocimiento incompleto del problema a resolver. Se habla entonces de la existencia de un mundo abierto (Smets and Kennes, 1994), en oposición a un mundo cerrado que es el que considera la regla de Dempster. Combinando las masas en un mundo abierto (sin normalizar) el resultado $m_{1,2}(a) = 0$, $m_{1,2}(b) = 0,0001$, $m_{1,2}(c) = 0$. La cuestión ahora es, ¿dónde está la evidencia restante hasta 1 ? La respuesta está en el conjunto vacío: $m(\emptyset) = 0,9999$. La teoría de la evidencia según Shafer (1976) no contempla esta posibilidad, forzando $m(\emptyset) = 0$.

3.6.6. Reducción de la evidencia

En las aplicaciones del mundo real, raramente se encuentran fuentes de información absolutamente fiables. Es decir, es razonable asociar algún grado de desconfianza a la evidencia dada por las fuentes. Generalmente hablando, la combinación de evidencias reducidas produce resultados coherentes en la mayoría de los casos, no obstante, es difícil estimar los valores de los factores de reducción. Por otra parte, la introducción de este factor de reducción no mitiga la falta de robustez de la regla de combinación ante evidencias altamente conflictivas.

Si c es el factor de reducción de la evidencia, al aplicarlo a la masa m se obtiene la nueva masa reducida m' como sigue:

$$m'(A) = (1 - c)m(A) \quad \forall A \neq \Theta$$

$$m'(\Theta) = m(\Theta) + c \sum_{A \neq \Theta} m(A)$$

Ejemplo 3: Si al ejemplo 2 le aplicamos una reducción de la evidencia de 0,3 para la fuente 1 y de 0,2 para la fuente 2:

$$m'_1(\{a\}) = (1 - 0,3)0,99 = 0,693$$

$$m'_1(\{b\}) = (1 - 0,3)0,01 = 0,007$$

$$m'_1(\{\Theta\}) = 0 + 0,3(0,99 + 0,01) = 0,3$$

$$m'_2(\{b\}) = (1 - 0,2)0,01 = 0,008$$

$$m'_2(\{c\}) = (1 - 0,2)0,99 = 0,792$$

$$m'_2(\{\Theta\}) = 0 + 0,2(0,99 + 0,01) = 0,2$$

El denominador de la regla de combinación se puede determinar de dos formas. La más breve aquí es la de considerar todas las combinaciones de evidencia cuya intersección sea cero y sumarlas. Tratándose de elementos *singletons* resulta más fácil la tarea al no existir intersecciones entre $\{a\}$, $\{b\}$, y $\{c\}$.

$$K = m'_1(\{a\})m'_2(\{b\}) + m'_1(\{a\})m'_2(\{c\}) + m'_1(\{b\})m'_2(\{c\})$$

$$K = (0,693 \times 0,008) + (0,693 \times 0,792) + (0,007 \times 0,792) = 0,56$$

$$1 - K = 0,44$$

Para que el ejemplo sea exhaustivo también se determina el denominador por el procedimiento de sumar todas las intersecciones no nulas y ahora, al contrario que antes de aplicar la reducción de evidencia, existen intersecciones no nulas con Θ ya que $m(\Theta) \neq 0$.

$$1 - K = m'_1(\{a\})m'_2(\{\Theta\}) + m'_1(\{b\})m'_2(\{b\}) + m'_1(\{b\})m'_2(\{\Theta\}) + m'_1(\{\Theta\})m'_2(\{\Theta\}) +$$

$$+ m'_2(\{b\})m'_1(\{\Theta\}) + m'_2(\{c\})m'_1(\{\Theta\})$$

$$1 - K = (0,693 \times 0,2) + (0,007 \times 0,008) + (0,007 \times 0,2) + (0,3 \times 0,2) +$$

$$+(0,008 \times 0,3) + (0,792 \times 0,3) = 0,44$$

Aplicando la regla de Dempster queda:

$$\begin{aligned}
 m'_{1,2}(\{a\}) &= \frac{m'_1(\{a\})m'_2(\{\Theta\})}{1 - K} = \frac{0,693 \times 0,2}{0,44} = 0,315 \\
 m'_{1,2}(\{b\}) &= \frac{m'_1(\{b\})m'_2(\{b\}) + m'_1(\{b\})m'_2(\{\Theta\}) + m'_2(\{b\})m'_1(\{\Theta\})}{1 - K} = \\
 &= \frac{0,007 \times 0,008 + 0,007 \times 0,2 + 0,008 \times 0,3}{0,44} = 0,0087 \\
 m'_{1,2}(\{c\}) &= \frac{m'_2(\{c\})m'_1(\{\Theta\})}{1 - K} = \frac{0,792 \times 0,3}{0,44} = 0,540 \\
 m'_{1,2}(\{\Theta\}) &= \frac{m'_1(\{\Theta\})m'_2(\{\Theta\})}{1 - K} = \frac{0,3 \times 0,2}{0,44} = 0,136
 \end{aligned}$$

Al tratarse de elementos *singletons*, la función $Bel()$ coincide con las masas en los casos $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$ no siendo así para Θ . En un mundo cerrado, $Bel(\Theta)$ siempre vale 1 (seguro que la solución se encuentra en su interior ya que Θ alberga todas las soluciones).

$$Bel_1(\Theta) = \sum_{B \subseteq \Theta} m'_1(\{B\}) = m'_1(\{a\}) + m'_1(\{b\}) + m'_1(\{c\}) + m'_1(\{\Theta\}) = 1$$

La plausibilidad acumula todos los pesos de las evidencias que intersectan. Así, por ejemplo

$$Pl_1(\{a\}) = \sum_{B \cap \{a\} \neq \emptyset} m'_1(B) = m'_1(\{a\}) + m'_1(\{\Theta\}) = 0,693 + 0,3 = 0,993$$

Por otra parte, la plausibilidad nunca es inferior a la credibilidad, de forma que si ésta vale 1, también lo valdrá aquella. Puede observarse como ahora, luego de aplicar la reducción a la evidencia, las evidencias resultantes de la aplicación la regla de combinación no presentan la anomalía anterior, siendo mucho más coherentes. En el cuadro 3.4 aparecen ordenados todos los resultados obtenidos.

set	m'_1	m'_2	$m'_{1,2}$	Bel_1	Pl_1	Bel_2	Pl_2	$Bel_{1,2}$	$Pl_{1,2}$
$\{a\}$	0,693	0,0	0,315	0,693	0,993	0,0	0,2	0,315	0,451
$\{b\}$	0,007	0,008	0,0087	0,007	0,307	0,008	0,208	0,0087	0,1447
$\{c\}$	0,0	0,792	0,54	0,0	0,3	0,792	0,992	0,54	0,676
$\{a, b, c\}$	0,3	0,2	0,136	1	1	1	1	1	1

Cuadro 3.4: Medidas para el ejemplo 3.

3.6.7. Conclusiones

Varios aspectos de la teoría de la evidencia son intuitivamente elegantes. Por ejemplo, la noción de que la evidencia puede referirse a subconjuntos, más que a *singletons*, posibilita el trato con información imprecisa. Así, puede aplicarse cuando las probabilidades a priori y las funciones de verosimilitud no se conocen. La información de probabilidad disponible se interpreta como fenómeno que impone valores de verdad a varias proposiciones por un cierto periodo de tiempo, más que como funciones de verosimilitud. La teoría de Dempster-Shafer estima cuán de próxima es la evidencia para forzar la verdad de una hipótesis, más que estimar lo próxima que está la hipótesis de ser cierta (Pearl, 1988). Además, si se asumen ciertas restricciones puede bastar con poca información para llegar a alguna conclusión razonable y, en consecuencia, requerir poco tiempo de cómputo; por el contrario, considerar toda la información supone una complejidad exponencial que puede ser una importante fuente de dificultades (Henkind and Harrison, 1988). La teoría asume que las piezas de evidencia son independientes, y esto no siempre es razonable; además, aparte de la posible inestabilidad cuando existe gran conflicto en las evidencias, no existe justificación teórica para la regla de combinación.

Han sido propuestos varios métodos alternativos para hacer que los resultados de los procesos de fusión sean más atractivos, al reasignar masa originalmente asignada a proposiciones altamente conflictivas (Klein, 2004).

3.7 El marco posibilístico

3.7.1. Introducción

La teoría de la evidencia es del tipo probabilístico. Deriva de la consideración no de una medida de probabilidad sino de dos, la baja y la alta probabilidad (Dempster, 1967). La teoría de la posibilidad, aun cuando puede verse como un caso particular de la teoría de la evidencia (Klir and Folger, 1988) (caso de que todos sus elementos focales son consonantes), no es del tipo probabilístico, como se desprende de sus axiomas. La teoría de la posibilidad fue introducida por Zadeh (1978) y desarrollada por Dubois and Prade (1980). Está muy ligada al desarrollo de la teoría de los conjuntos borrosos (fuzzy sets) (Zadeh, 1965). Ambas teorías comparten la misma función aunque con diferente interpretación: para la teoría de los conjuntos borrosos se trata del grado de pertenencia de un elemento preciso a un conjunto mal definido (borroso) y para la teoría de la posibilidad se trata de describir cuáles son los individuos que pertenecen a conjuntos mal definidos. Esta expresión elimina la confusión entre los dos conceptos y muestra que ambos comparten la misma escala sin implicar que grado de posibilidad y grado de pertenencia sean conceptos idénticos. Por ejemplo, la teoría de conjuntos

borrosos cuantifica el grado de pertenencia de una persona con altura h al conjunto de las personas altas, y la teoría de la posibilidad cuantifica la posibilidad de que la altura de la persona sea h dado que pertenece al conjunto de las personas altas (Smets, 1994). La teoría de la posibilidad se aprovecha de esta coincidencia y con ello del desarrollo matemático de la teoría de los conjuntos borrosos y, más concretamente, de su gran juego de operadores.

3.7.2. Medidas de posibilidad y de necesidad

Esta teoría, al igual que la teoría de la evidencia, define dos medidas complementarias con las que poder modelar la imperfección: la medida de *posibilidad* $-\Pi(\theta)-$ y la medida de *necesidad* $-N(\theta)-$ (Fig. 3.19). Los cuatro axiomas en los que están basadas estas medidas son los siguientes:

Medidas de posibilidad:

1. $\Pi(\emptyset) = 0$ La posibilidad del conjunto vacío es nula (0)
2. $\Pi(\Theta) = 1$ La posibilidad del mundo es total (1)
3. si $A \subseteq B \rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$ Monotonía no estricta
4. $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$

Medidas de necesidad:

1. $N(\emptyset) = 0$ La necesidad del conjunto vacío es nula (0)
2. $N(\Theta) = 1$ La necesidad del mundo es total (1)
3. si $A \subseteq B \rightarrow N(A) \leq N(B)$ Monotonía no estricta
4. $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$

Los tres primeros axiomas coinciden para ambas medidas, como también coinciden con las medidas de probabilidad, de credibilidad y de plausibilidad. Es en el cuarto axioma donde todas las teorías difieren. Aquí se asocia la medida de una unión a la función máximo y la medida de la intersección a la función mínimo. Las medidas de posibilidad y de necesidad son duales ya que $N(A) = 1 - \Pi(\bar{A})$

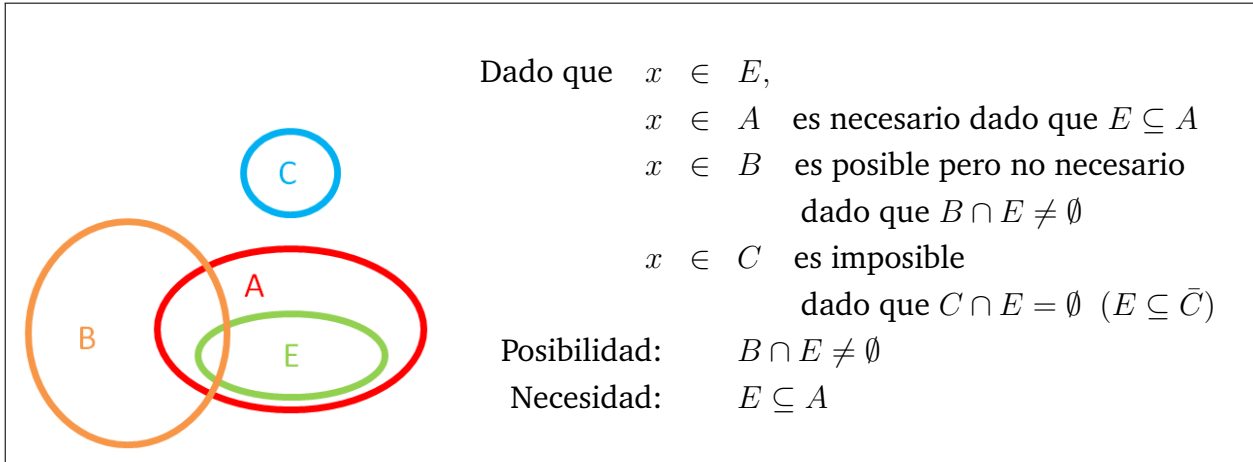


Figura 3.19: Idea intuitiva de las medidas de posibilidad y necesidad.

Las siguientes son algunas relaciones interesantes:

$$\begin{aligned} \min(N(A), N(\bar{A})) = 0 &\rightarrow \text{ni } A \text{ ni } \bar{A} \text{ están soportados} \\ \text{si } N(A) = N(\bar{A}) = 0 &\rightarrow \text{total ignorancia} \\ \max(\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1 &\rightarrow A \text{ ó } (\bar{A}) \text{ es posible} \\ \text{si } \Pi(A) = \Pi(\bar{A}) = 1 &\rightarrow \text{total ignorancia} \end{aligned}$$

Resulta claro que si a una proposición le corresponde una medida de necesidad no nula (estamos seguros de que es cierta, al menos en parte), eso significa que la proposición es totalmente posible. De la misma forma, si la posibilidad no es total ($\Pi(A) \neq 1$) entonces la necesidad debe ser cero ($N(A) = 0$). Esto se puede interpretar como que no se tiene certidumbre sobre una proposición, la cual es sólo relativamente posible.

3.7.3. Funciones de posibilidad y de necesidad

Las medidas de posibilidad y de necesidad, como el resto de las medidas de las otras teorías, permiten calcular la medida de un conjunto cualquiera a partir de la medida de sus elementos. Si Π es una medida de posibilidad sobre un conjunto finito Θ , y se define $\pi(\{\theta\})$ para todos los elementos $\{\theta\}$ de Θ , entonces

$$\Pi(A) = \max_{\theta \in A} (\pi(\theta))$$

y para la medida dual de necesidad

$$N(A) = \min_{\theta \in A} (1 - \pi(\theta))$$

A la función $\pi : \Theta \rightarrow [0, 1]$ se la conoce como distribución de la posibilidad y cumple que

$$1 = \Pi(\Theta) = \max_{\theta \in \Theta} (\pi(\theta))$$

3.7.4. Distribución de la posibilidad

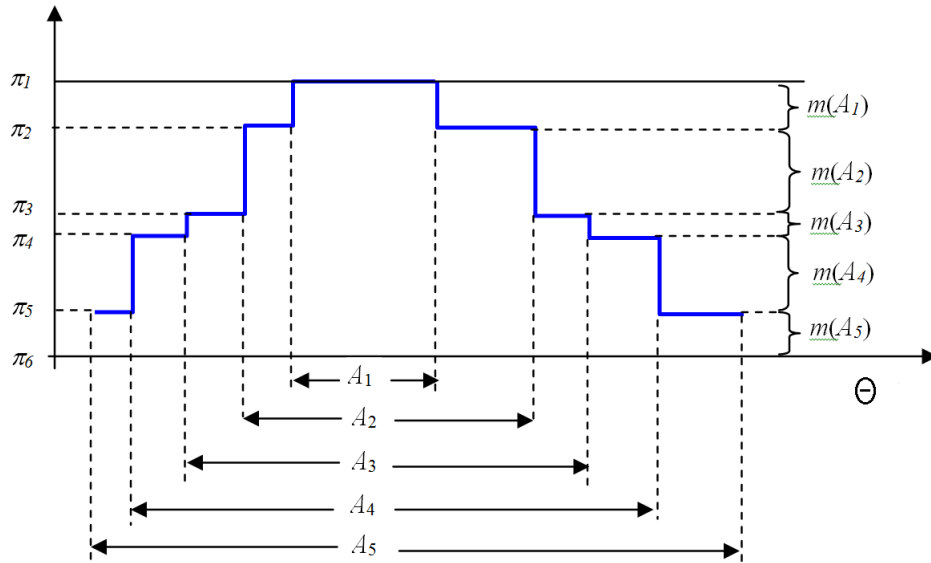


Figura 3.20: Distribución de la posibilidad construida a partir de una asignación de masas.

El conocimiento se expresa en forma de distribución de la posibilidad, y existen diferentes formas de construirla a partir de la información disponible para las teorías de la probabilidad (distribución de la probabilidad) (Dubois and Prade, 1983) y de la evidencia (asignación de masas). Además, pueden construirse directamente a partir de la información aportada por expertos. La Fig. 3.20 muestra un ejemplo de construcción de una distribución de la posibilidad a partir de la asignación de masas a una serie de subconjuntos anidados (Dubois and Prade, 1988a). Para esta construcción se han de cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1 > \pi_2 > \pi_3 > \dots > \pi_n \\ \pi_{n+1} &= 0 \\ m(A_i) &= \pi_i - \pi_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n) \\ m(A_i) &= 0 \quad \text{de cualquier otra forma} \end{aligned}$$

Para determinar una distribución de posibilidad a partir de una distribución de probabilidad puede usarse el siguiente procedimiento (Dubois and Prade, 1988c):

$$\Pi(A) = \sum_{p(A') \leq p(A)} p(A')$$

Las expresiones siguientes sirven para interpretar la información contenida en una distribución de posibilidad como las mostradas en la Fig. 3.21.

$$\begin{aligned} \pi_X : \Theta &\rightarrow [0, 1] \\ \pi_X(\theta) = 0 &\rightarrow X = \theta \text{ es imposible} \\ \pi_X(\theta) = 1 &\rightarrow X = \theta \text{ es completamente posible} \\ \pi_X(\theta) > \pi_X(\theta') &\rightarrow X = \theta \text{ es preferido a } X = \theta' \end{aligned}$$

donde X es la variable desconocida que toma valores en Θ , así, por ejemplo, la expresión $\pi_X(A) = 0$ hay que entenderla como que la posibilidad de que el verdadero valor de X se encuentre en A es nula. La expresión $\pi_X(\theta) = 1$ significa que es totalmente posible que X adquiera el valor θ . El hecho de que se asigne la máxima posibilidad al valor 1 es por conveniencia, cualquier valor es aceptable. Lo que realmente importa no es tanto el valor absoluto de posibilidad para una proposición dada sino más bien el valor relativo respecto a otra, tal como se muestra en la última expresión anterior.

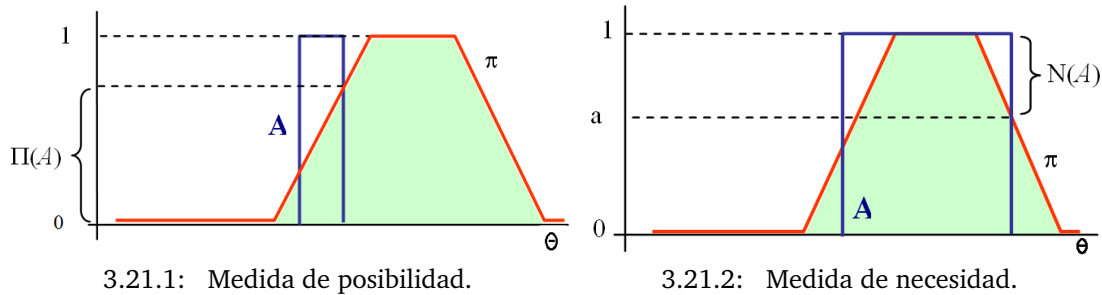


Figura 3.21: Medidas inducidas por distribuciones de posibilidad. En la Fig. 3.21.1: $\Pi_X(A) = \max_{\theta \in A} (\pi_X(\theta))$. En la Fig. 3.21.2: $N_X(A) = 1 - \Pi_X(\bar{A}) = 1 - \max_{\theta \in \bar{A}} (\pi_X(\theta)) = \min_{\theta \in A} (1 - \pi_X(\theta))$.

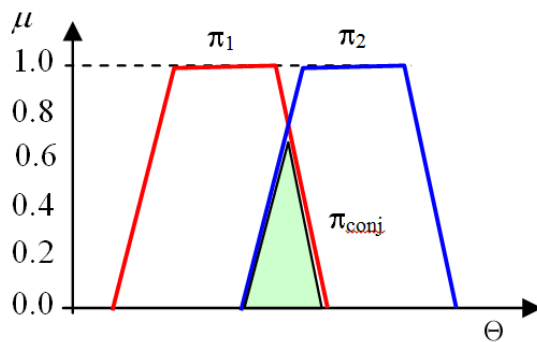
3.7.5. Técnicas de fusión

La teoría de la posibilidad y el cuerpo de operaciones de agregación aportados por la teoría de conjuntos borrosos, proporcionan herramientas para dirigir el problema de combinar información proveniente de varias fuentes. Seguidamente se comentan brevemente los procedimientos de fusión más representativos (en el anexo G se ofrecen más detalles).

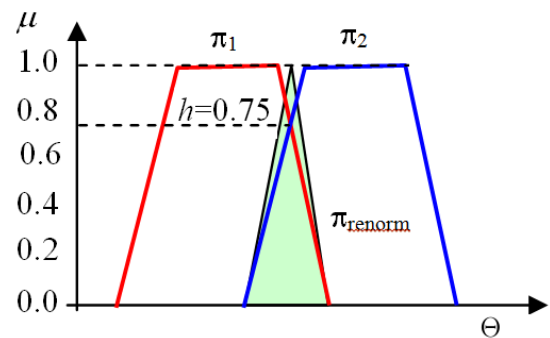
Existen dos modos primarios para implementar la fusión: conjuntivo y disyuntivo, y la elección entre ellos depende del supuesto de si todas las fuentes son fiables o no, respectivamente (DeCETI, 2005).

Fusión conjuntiva

La fusión conjuntiva consiste en realizar la intersección de conjuntos borrosos. Este tipo de fusión asume que las fuentes de información están de acuerdo: los conjuntos que albergan al verdadero valor de X deben solaparse ampliamente. Los diferentes procedimientos aportados por la teoría de conjuntos borrosos para realizar la conjunción de dos conjuntos se conocen como *T-Normas* y el operador de fusión habitual es la intersección estándar ($\min()$). La Fig. 3.22.1 ofrece un ejemplo de uso del operador $\min()$ donde se fusionan dos distribuciones de posibilidad asociadas a dos fuentes de información con bajo conflicto. La zona de color verde corresponde a la fusión.



3.22.1: Fusión conjuntiva.



3.22.2: Fusión conjuntiva renormalizada.

Figura 3.22: Fusión conjuntiva con conflicto bajo entre las fuentes.

Se asume que dos fuentes están de acuerdo incluso si existe un cierto conflicto entre ellas. Cuando existe algún grado de conflicto, la fusión conjuntiva produce una distribución sub-normalizada. Para normalizarla, se puede usar la altura h de la intersección entre las dos distribuciones originales π_1 y π_2 como sigue:

$$\pi_{renorm}(\theta) = \frac{\pi_{conj}(\theta)}{h(\pi_1, \pi_2)}$$

donde

$$\begin{aligned} \pi_{conj}(\theta) &= \min(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta)) \\ h(\pi_1, \pi_2) &= \max_{\theta \in \Theta} (\min(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))) \end{aligned}$$

La fusión conjuntiva renormalizada, así obtenida, sólo se debe usar entre fuentes que

compartan un acuerdo suficiente (conflicto bajo). En caso de conflicto total, $h(\pi_1, \pi_2) = 0$, la fusión conjuntiva renormalizada no está definida y, por defecto, el resultado será nulo. El uso de la renormalización elimina el conflicto entre las fuentes y crea dos efectos indeseables: inestabilidad alrededor del cero, y desaparición de la información de conflicto (Fig. 3.22.2).

Fusión disyuntiva

La fusión disyuntiva es el método usado para fusionar fuentes en conflicto, y consiste en la unión de conjuntos borrosos. Se usa cuando una de las dos fuentes a combinar, y solamente una, es considerada como fiable, y la otra errónea. Este método es apropiado para la fusión de fuentes que proporcionan bajo o ningún solapamiento entre conjuntos. Los diferentes procedimientos aportados por la teoría de conjuntos borrosos para realizar la disyunción de dos conjuntos se conocen como *T-Conormas* y el operador de fusión habitual es la unión estándar ($max()$):

$$\forall \theta \in \Theta \quad \pi_{disj}(\theta) = \max(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))$$

La Fig. 3.23 ofrece un ejemplo de uso del operador $max()$. El uso de la fusión disyuntiva cuando las fuentes están en total conflicto, siempre hace posible obtener un resultado, cosa que no ocurre con la fusión conjuntiva. Desafortunadamente, la fusión disyuntiva genera un resultado poco informativo como consecuencia de que se preserva toda la información disponible.

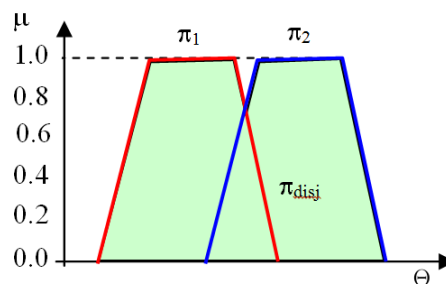


Figura 3.23: Fusión disyuntiva con conflicto bajo entre las fuentes (área de color verde).

Fusión adaptativa

Para recabar los beneficios derivados de la fusión conjuntiva y disyuntiva y para eliminar sus problemas, Dubois and Prade (1994) han propuesto métodos adaptativos que modifican su comportamiento de acuerdo con el tipo de información a fusionar:

1. Si las fuentes a fusionar están de acuerdo, se usa la fusión conjuntiva, con renormalización si es necesario.
2. Cuando ocurre un conflicto, se usa la fusión disyuntiva para suplementar la información resultante de la fusión conjuntiva.
3. Finalmente, si no puede encontrarse acuerdo entre las fuentes, se abandona la fusión conjuntiva, y se realiza la fusión disyuntiva.

Dos métodos que se ajustan a estas ideas son la fusión adaptativa, y la fusión adaptativa cuantificada. El criterio para determinar si las fuentes están en acuerdo o no, y así elegir el tipo de fusión adecuado, es usar la altura de la intersección de las distribuciones de posibilidad. Esto indica el grado de consenso entre las fuentes, es decir, el grado de certidumbre sobre la fiabilidad de las fuentes. Se dan dos escenarios posibles:

1. Si $h(\pi_1, \pi_2) = 1$, las fuentes son fiables y sus posibilidades de distribución se solapan ampliamente, no hay conflicto. Se trata de un contexto favorable para usar la fusión conjuntiva.
2. Cuando $h(\pi_1, \pi_2) < 1$, existe algún conflicto. Cuanto más bajo es el grado de consenso h , más fuerte es el conflicto.

Para tomar en cuenta el conflicto, los dos modos de fusión, conjuntivo y disyuntivo, se aplican en paralelo. La importancia dada a cada uno depende de h . Finalmente, cuando h es nulo, el conflicto entre las fuentes es total. Entonces, solamente se aplica la fusión disyuntiva. La regla para la fusión adaptativa es la siguiente:

$$\forall \theta \in \Theta$$

$$\pi_{ad}(\theta) = \max \left(\frac{\pi_{conj}(\theta)}{h(\pi_1, \pi_2)}, \min(1 - h(\pi_1, \pi_2), \pi_{disj}(\theta)) \right)$$

En la Fig: 3.24 puede apreciarse el comportamiento de esta regla ante un escenario de conflicto bajo entre las fuentes. La limitación principal de la fusión adaptativa es una incapacidad de manejar correctamente la fusión de un gran número de fuentes. Además, sigue apareciendo inestabilidad alrededor de intersecciones muy pequeñas o nulas de las distribuciones de posibilidad. Por otra parte, la computación del grado de consenso h entre todas las fuentes hace que este operador no sea asociativo.

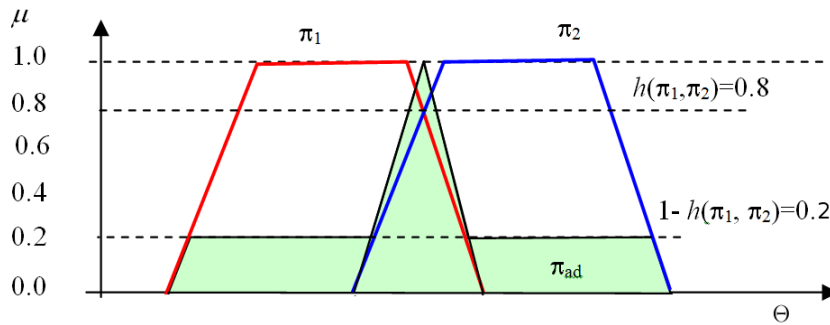


Figura 3.24: Fusión adaptativa con conflicto bajo entre las fuentes (área de color verde).

Fusión adaptativa cuantificada

Para fusionar un gran número de fuentes que comparten un acuerdo general, es importante intentar preservar la idea de la fusión conjunta. Sin embargo, es necesario tomar en consideración la dificultad de alcanzar la unanimidad de las fuentes cuando éstas son numerosas. Por esta razón (Dubois and Prade, 1994) han propuesto otro tipo de fusión adaptativa: la fusión adaptativa cuantificada.

Durante la fusión de un gran número de fuentes a menudo pasa que no todas ellas comparten un intervalo común sino que una mayoría de ellas expresan tal intervalo, y solamente algunas fuentes no están de acuerdo con la mayoría. Así, es lamentable la pérdida de las virtudes de la fusión conjunta por esas pocas fuentes que crean conflicto y, como consecuencia, provocan la fusión disyuntiva. Es claro que el verdadero valor tiene más posibilidades de estar en la intersección de las distribuciones de posibilidad de la mayoría de las fuentes en acuerdo que en la distribución generada por las pocas fuentes que crean el conflicto. Puesto que las fuentes están en general de acuerdo, la idea es determinar esas fuentes que comparten opinión y usar la fusión conjunta. Esto se consigue a partir del grado de consenso h , permitiendo hacer una estimación optimista y pesimista sobre el conjunto de las fuentes seguras.

Este tipo de fusión mantiene la mayoría de los defectos de la fusión adaptativa y, al contrario que aquella, desaparece el comportamiento binario en favor de un comportamiento gradual entre los modos de fusión conjunta y disyuntiva.

Fusión por prioridad

Es posible que de entre todas las fuentes a fusionar algunas se consideren más fiables que otras y es deseable que, en presencia de conflictos, se tome en consideración a las fuentes más fiables en detrimento de las menos fiables, llegando incluso a descartar éstas.

Se puede clasificar un conjunto de fuentes de información K según su fiabilidad. Sea K_1, K_2, \dots, K_n una K -partición tal que las fuentes que pertenecen a K_i se considera que tienen la misma fiabilidad, y que son más fiables que las que pertenecen al conjunto K_j con $j > i$. La fusión de información proporcionada por los conjuntos K_1, K_2, \dots, K_n se realiza como sigue:

1. Se combina primero la información de K_1 usando el método adaptativo cuantificado, por ejemplo.
2. El resultado precedente se refina con información del conjunto K_2 solamente si éste no contradice a K_1 .
3. Se repite el proceso con el resto de los conjuntos.

4

El modelo exponencial de masas y muelles

EN este capítulo se propone un nuevo modelo de masas y muelles, mejor adaptado que el modelo clásico para reproducir el comportamiento no lineal de muchos objetos deformables. Dicho modelo se valida mediante un experimento en el que se deforma un objeto flexible. En el modelo se consideran las fuerzas de fricción además de las elásticas.

4.1 Diferencias del modelo exponencial respecto al modelo clásico

El modelo exponencial de masas y muelles difiere del modelo clásico (Sec. 2.2.1) en que las fuerzas internas asociadas a los muelles siguen una evolución exponencial con su elongación. Este hecho, junto con el adecuado tratamiento de la fricción, permite reproducir fielmente el comportamiento viscoelástico no lineal de objetos deformables tales como los elastómeros y los tejidos biológicos blandos, ambos con muchas similitudes (Fung, 1993). Concretamente, en el modelo exponencial el coeficiente de elasticidad b_{ji} (Eq. 2.4) deja de ser constante, como lo es en el modelo clásico, para adoptar una forma más compleja. La Eq. 4.1 define este cambio:

$$b_{ji} = Sa_{ji} + Sb_{ji} e^{-((\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\| - l_{ji}^0)/Sc_{ji})} \quad (4.1)$$

donde \mathbf{P}_j y \mathbf{P}_i delimitan los extremos del muelle, l_{ji}^0 es la longitud del muelle en reposo, y Sa_{ji} , Sb_{ji} , y Sc_{ji} son los tres coeficientes de elasticidad de los muelles.

El parámetro b_{ji} debe reevaluarse a cada paso de integración, lo que supone un pequeño incremento en la carga computacional. No obstante, es posible agilizar el cómputo de

la exponencial aplicando una descomposición en serie de Taylor. Se ha comprobado que basta con el tercer orden para conseguir resultados satisfactorios. La Eq. 4.1 ofrece una gran resistencia a modificar el estado de reposo del muelle y presenta un comportamiento lineal para grandes elongaciones (Fig. 4.1).

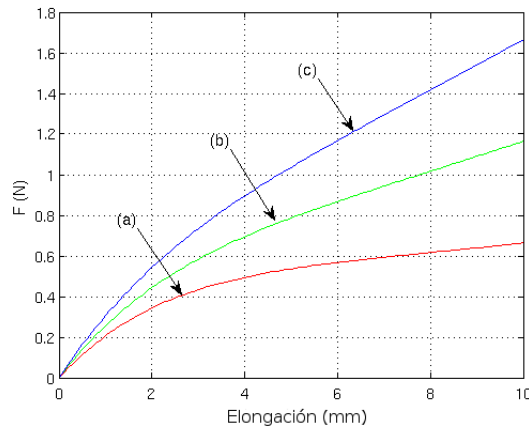


Figura 4.1: Evolución no lineal de la fuerza elástica en un muelle: (a) 50/200/0,004; (b) 100/200/0,004; (c) 150/200/0,004 ($S_a/S_b/S_c$).

4.2 Errores del modelo

En esta sección se analiza la validez del modelo de masas y muelles antes propuesto. Para ello se ha desarrollado un programa de ordenador en el que se ha programado el nuevo modelo y con el que se ha simulado el comportamiento de un objeto deformable cuando se somete a la acción de un robot. Los resultados de la simulación se contrastan con las medidas obtenidas directamente del mismo sistema implementado en el laboratorio.

En el experimento realizado se ha fijado una membrana de caucho natural de 0,5 mm de grosor sobre una plataforma circular de 133 mm de diámetro paralela al plano horizontal (plano XY). Luego, con un robot Stäubli TX90, (Fig. 4.2) se procede a la introducción de un vástago en cuyo extremo se aloja una esfera de acero pulido de 10 mm de radio. Con el sensor de fuerza/par JR3 67M25 (Fig. 4.3), situado en la muñeca del robot, se registra la evolución de las fuerzas de reacción de la membrana sobre la esfera, y con la cámara de visión estéreo Bumblebee XB3 (Point Grey Research Inc.) se observa la forma de la membrana (Fig. 4.4).

En el experimento se han seguido tres caminos: en C_1 se penetra 46,7 mm por el centro de la membrana siguiendo la dirección $-Z$ (Fig. 4.6a y Fig. 4.7.1), en C_2 se desplaza además 20 mm en la dirección del eje X , (Fig. 4.6b y Fig. 4.7.2) y en C_3 se avanza



Figura 4.2: Robot TX90.



Figura 4.3: Sensor de fuerza-par 67M25A.

seguidamente 20 mm más siguiendo el eje Y . Luego se regresa siguiendo las mismas rutas. Con esta intervención se consigue una deformación de la superficie de la membrana sobre el reposo del orden del 30%. La Fig. 4.8 presenta una imagen real del conjunto captada justo al concluir el camino C_1 , junto con sus medidas.



Figura 4.4: Cámara Bumblebee XB3.

En el modelo utilizado se considera la discretización de la superficie atendiendo exclusivamente a las formas cuadradas (Fig. 2.1). En la Fig. 4.5 puede apreciarse el detalle de la distribución de los muelles alrededor de un nodo. La malla con sólo cuatro muelles por nodo (4 m/n) hace uso de los muelles m_{c1} a m_{c4} (en color rojo) y la malla con ocho muelles por nodo (8 m/n) hace uso de la totalidad de los muelles representados (m_{c1} a m_{c4} y m_{d1} a m_{d4}). Los parámetros utilizados en este experimento se muestran en los cuadros 4.1 y 4.2.

delCastillo et al. (2013) amplian el trabajo actual al considerar el comportamiento del modelo exponencial ante dos nuevos escenarios: deformación uniaxial y deformación como consecuencia de la acción de la presión de un fluido.

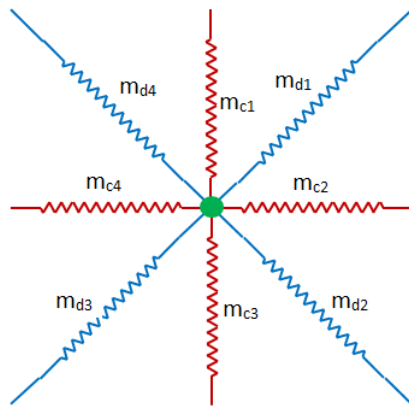


Figura 4.5: Detalle de la distribución de los muelles alrededor de un nodo.

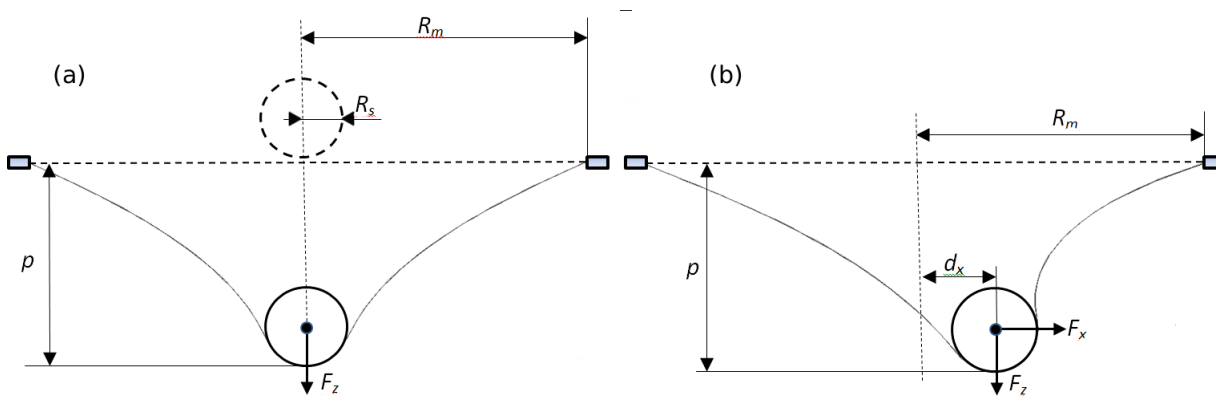


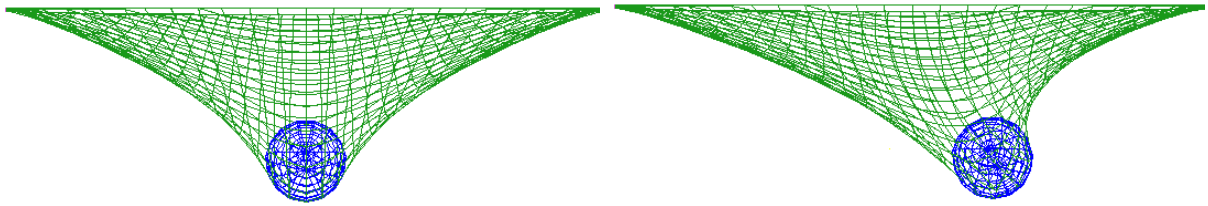
Figura 4.6: Perfiles de la membrana: (a) penetración en Z, (b) avance en X.

Atributo	Valor
Tipo de malla	cuadrada
Número de muelles	1089 (33x33)
Masa de los nodos	0.1 g
Viscosidad en los nodos	0.1 Pa.s
Viscosidad en los muelles	0
Fricción de Coulomb	10

Cuadro 4.1: Parámetros de la malla en el experimento.

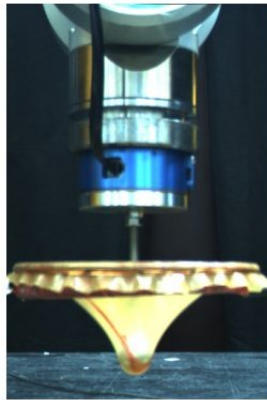
4.2.1. Tratamiento de las colisiones

El tratamiento de las colisiones entre objetos acostumbra a ser un problema difícil. De una parte supone introducir restricciones a las ecuaciones del movimiento, lo cual tiende a hacer inestable al sistema, y de otra obliga a incrementar considerablemente la carga computacional. Además, se trata de una cuestión básica que hay que resolver:



4.7.1: Fin del camino C_1 e inicio del camino C_2 . 4.7.2: Fin del camino C_2 e inicio del camino C_3 .

Figura 4.7: Simulación.



<i>Medidas de la plataforma (mm)</i>			
R_m	R_s	p	d_x
66.5	10	46.7	20

Figura 4.8: Plataforma experimental y sus medidas, según la Fig. 4.6.

<i>Muelles por nodo</i>	S_a	S_b	S_c	<i>tipo</i>
4	230	1100	0.00098	lateral
8	110	500	0.00125	lateral
	55	250	0.00125	diagonal

Cuadro 4.2: Parámetros de los muelles en el experimento.

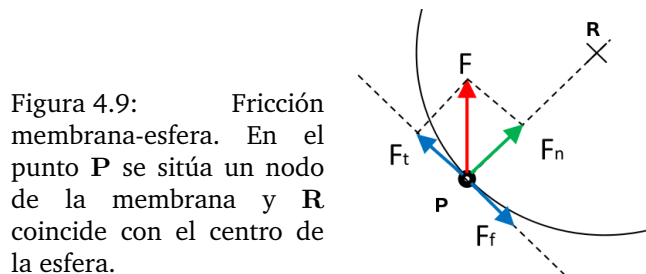
1. Los objetos rígidos no pueden introducirse unos dentro de otros.
2. Se requiere prestar atención a lo que pueda ocurrir luego del contacto, como el posible deslizamiento entre objetos.

Sólo se consideran dos objetos en la simulación: la membrana y la esfera; y la única colisión posible es entre ellos, descartando la colisión membrana-membrana. Esto simplifica el problema y evita el uso de algoritmos sofisticados para la detección de colisiones tales como AABB (van den Bergen, 1998), OBB (Gottschalk et al., 1996), o k-DOP (Mezger et al., 2003) entre otros, que suponen diferentes implementaciones de la idea básica de volúmenes acotados (Moore and Wilhelms, 1988). Sólo se ha de llevar un seguimiento de los nodos de la malla que puedan pretender penetrar en la esfera, y

estos nodos pertenecen a un conjunto reducido y conocido.

Fricción membrana-esfera

La fricción derivada del contacto entre dos superficies es la fuerza de reacción tangencial que se opone al deslizamiento. Considerando un contacto totalmente inelástico y atendiendo a la ley de conservación del momento, el nodo que entra en contacto con la esfera debe adquirir la velocidad de ésta en el momento del contacto. Posteriormente la situación puede cambiar dependiendo de las fuerzas de fricción, que pueden hacer que el nodo se deslice por la superficie de la esfera e incluso que se separe de ella. La formulación empleada está basada en (Carignan et al., 1992) y es la siguiente (Fig. 4.9):



Para la fuerza:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{R} - \mathbf{P}}{\|\mathbf{R} - \mathbf{P}\|} \\
 \mathbf{F}_n &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
 \mathbf{F}_t &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_n \\
 \|\mathbf{F}_f\| &= \mu\|\mathbf{F}_n\| \\
 \text{si } (\|\mathbf{F}_t\| > \|\mathbf{F}_f\|) \\
 \text{entonces } \mathbf{F} &= \mathbf{F}_t \left(1 - \frac{\|\mathbf{F}_f\|}{\|\mathbf{F}_t\|}\right) \\
 \text{sino } \mathbf{F} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde \mathbf{R} es el centro de la esfera, \mathbf{P} es la posición del nodo en la superficie de la esfera, \mathbf{F}_n es la fuerza normal a la superficie, \mathbf{F}_t es la fuerza tangencial a la superficie, \mathbf{F}_f es la fuerza de fricción, $\|\cdot\|$ es el módulo del vector, μ es el coeficiente de fricción de Coulomb, y \mathbf{F} es la fuerza resultante.

En las Eqs. 4.2 anteriores, la fuerza resultante \mathbf{F} es tal que la posible fuerza de acercamiento hacia el centro de la esfera \mathbf{F}_n queda cancelada, y la fuerza tangencial \mathbf{F}_t sólo depende de la fuerza de fricción.

Para la velocidad:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{rel} &= \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_R \\
 \mathbf{v}_n &= (\mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
 \mathbf{v}_t &= \mathbf{v}_{rel} - \mathbf{v}_n
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

si $((\mathbf{v}_{rel} \cdot \mathbf{n}) > 0)$
entonces $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_n$

donde \mathbf{v}_P es la velocidad del nodo en el punto P, \mathbf{v}_R es la velocidad de la esfera, \mathbf{v}_{rel} es la velocidad relativa nodo-esfera, \mathbf{v}_n es la velocidad relativa normal a la superficie, y \mathbf{v}_t es la velocidad relativa tangencial a la superficie.

En las Eqs. 4.3 anteriores, la velocidad resultante \mathbf{v}_P es tal que la posible componente de acercamiento hacia el centro de la esfera \mathbf{v}_n queda anulada. Como puede apreciarse, tanto la fuerza resultante \mathbf{F} como la velocidad resultante \mathbf{v}_P son tales que impiden que el nodo penetre en la esfera pero, en cambio, sí permiten su deslizamiento.

4.2.2. Información sensorial

Para validar el modelo exponencial de masas y muelles se requiere contrastar sus resultados con los experimentales y determinar si las diferencias son aceptables. Para ello es imprescindible usar una buena plataforma sobre la que llevar a cabo el experimento, además de elegir los sensores adecuados. En cualquier caso, es deseable que los errores acumulados por la plataforma y los sensores sean inferiores a los propios errores del modelo.

La calidad de la plataforma que sustenta la membrana es una cuestión esencialmente mecánica: aro perfectamente circular con borde interno redondeado y recubierto de un material elástico para reducir la concentración del estrés en la unión con la membrana, una sólida fijación a la estructura que le da soporte y que, a su vez, asegura una buena visibilidad para que la cámara de visión estéreo pueda observar la deformación de la membrana. Por otra parte, la membrana deberá presentar homogeneidad e isotropía en su comportamiento.

La calidad de los sensores es, en esencia, una cuestión comercial, en el sentido de que viene concretada por el fabricante en su hoja de características, quedando limitada la actuación a la elección del producto. Pero no basta con usar unos sensores adecuados, otros factores externos (calibración, temperatura, luminosidad, vibraciones, etc.) e internos (ajuste de parámetros, etc.) pueden condicionar las medidas. Además de contar con la información propia del fabricante, se ha sometido a los sensores a una serie de ensayos con la finalidad de recoger una información suficiente como para poder establecer, de una forma lo más exacta posible, la magnitud real de los errores globales de cada

uno de los sensores utilizados.

Por último, aunque no por ello menos importante, se ha de considerar el robot. Será un robot quien deforme la membrana, y de él se requieren dos cosas fundamentales: buena exactitud y repetitividad tanto en el posicionamiento de la herramienta como en su velocidad cartesiana de avance y retroceso. En este sentido, la calidad del robot utilizado es tal que sus errores resultan despreciables frente al resto (cuadro 4.3). Por ejemplo, para la repetitividad dada y la sensibilidad de las fuerzas de la malla (cuadro 5.2) cabe esperar un error máximo por esta causa del orden de 15 mN ($480 \text{ N/m} \times 0,03 \times 10^{-3} \text{ m}$), bastante inferior a la resolución del sensor de fuerzas (cuadro 4.4).

<i>Grados de libertad</i>	<i>Carga nominal</i>	<i>Repetitividad</i>	<i>Máxima velocidad cartesiana</i>
6	7 kg	$\pm 0,03 \text{ mm}$	2,5 m/s

Cuadro 4.3: Principales características del robot.

Sensor de fuerza-par

El sensor de fuerza-par aporta información sobre las tres componentes de fuerza y las tres componentes de par. Diseñado para ubicarse en la muñeca del robot, próximo a la herramienta, está constituido por un conjunto de galgas extensiométricas de gran precisión y un sistema digital, implementado en el mismo dispositivo, que le confiere prestaciones adicionales como, por ejemplo, la posibilidad de fijar ciertos parámetros a su filtro digital. A pesar de todo, el conjunto es sensible a los cambios térmicos y a las vibraciones.

Se trata del modelo 67M25A-I40 de 100 Newtons fabricado por JR3. De la hoja de características se extrae la información mostrada en el cuadro 4.4.

<i>Medidas</i>	<i>F_x, F_y (N)</i>	<i>F_z (N)</i>	<i>M_x, M_y, M_z (Nm)</i>
Fondo escala (FE)	± 100	± 200	± 6.3
Precisión	$\pm 1 \% \text{FE}$	$\pm 1 \% \text{FE}$	$\pm 1 \% \text{FE}$
Resolución	0.0445	0.0890	0.0034

Cuadro 4.4: Características del sensor de fuerza-par según el fabricante.

El fabricante informa que la repetitividad es mejor que la precisión, sin dar más detalles. Las medidas obtenidas arrojan los datos mostrados en cuadro 4.5 sobre la precisión (estimada como desviación tipo de dichas medidas).

Las medidas conforman una función de densidad de la probabilidad aproximadamente gaussiana. Cabe observar la similitud con los valores facilitados por el fabricante. El sensor es capaz de proveer medidas con una frecuencia de muestreo de 8 KHz y de aplicar una serie de filtros paso bajo para reducir el ruido. Por otra parte, la disposición

Medidas	F_x, F_y (N)	F_z (N)	M_x, M_y (Nm)	M_z (Nm)
Precisión	0.0317	0.0668	0.0024	0.0014

Cuadro 4.5: Características del sensor de fuerza-par según medidas realizadas.

física del sistema de fijación a la muñeca del robot hace que los ejes del sensor no estén alineados con los ejes del robot. Esto obliga a aplicar una rotación de -21.78 grados sobre el eje Z a todas las medidas.

Cámara de visión estéreo

Los errores asociados a la visión estéreo pueden ser clasificados en dos tipos (aparte de los errores de calibración): de correspondencia y de exactitud. Los errores de correspondencia son debidos a una incorrecta asociación entre los píxeles de las dos imágenes primarias obtenidas de la escena (Oliveira and Tavares, 2012). El éxito en la correspondencia depende en gran medida de aspectos ajenos a las cámaras tales como la textura, la luminosidad, la opacidad, etc. También influyen aspectos internos, como el algoritmo utilizado en la correspondencia y el adecuado ajuste de sus parámetros. Por lo general es el mayor de los errores. El error de exactitud tiene que ver con la calidad de la propia cámara.

Para una cámara del tipo *pinhole* y dada una posición 3D (Fig. 4.10), la ubicación de su píxel imagen en el plano de la cámara es (Faugeras, 1993):

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f x/z \\ f y/z \end{bmatrix}$$

donde f es la longitud focal del sistema y la pareja u, v se refieren a la posición del píxel en la imagen, relativa al centro de la imagen (es decir, $u = col - centroCol, v = fila - centroFila$).

Para el equipo estéreo utilizado, con un sistema de coordenadas alineado a lo largo del eje X de la imagen y con líneas epipolares paralelas, la profundidad z puede calcularse como

$$z = f \frac{B}{d} \quad (4.4)$$

donde B es la longitud de la línea base (distancia entre los centros ópticos de cada lente) y d es disparidad (distancia relativa entre los píxeles de cada cámara correspondientes

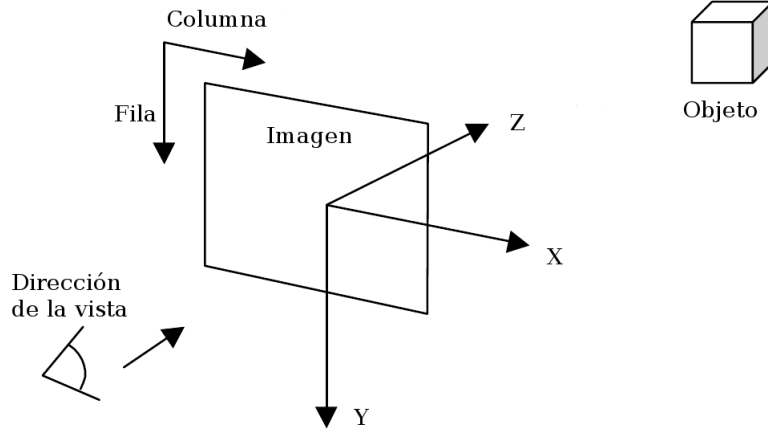


Figura 4.10: Geometría en una cámara estereo (Point Grey Research Inc.).

al mismo punto 3D). En consecuencia, se puede escribir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B u/d \\ B v/d \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Derivando las Eqs. 4.4 y 4.5

$$\begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial d \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial d \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B/d & 0 & -u B/d^2 \\ 0 & B/d & -v B/d^2 \\ 0 & 0 & -f B/d^2 \end{bmatrix}$$

A partir de aquí y considerando sólo los errores dominantes

$$\begin{aligned} \partial x &= (B/d) \partial u \\ \partial y &= (B/d) \partial v \\ \partial z &= (-f B/d^2) \partial d \end{aligned}$$

donde ∂u y ∂v representan los errores de asestado y ∂d representa el error de correspondencia para un texturizado óptimo (Murray, 2004). Estos errores pueden ser medidos. El fabricante de la cámara llama p a los errores de asestado, ambos iguales, y m al error de correspondencia, y propone la siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \Delta x &= p z/f \\ \Delta y &= p z/f \\ \Delta z &= -m z^2/(f B) \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de la expresión $d = fB/z$, derivada de la Eq. 4.4.

Los datos para el experimento realizado son los siguientes:

$$\begin{aligned} p &= 0,2 \text{ píxeles RMS} \\ m &= 0,2 \text{ píxeles RMS} \\ f &= 804,89 \text{ píxeles} \\ B &= 0,120113 \text{ m} \\ z &= 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$

donde $p = 0,4 \times 640/1280$, $f = 1,25764 \times 640$ (la resolución empleada ha sido de 640×480 aún cuando la máxima resolución de la cámara es de 1280×960), $m = 0,2$ para un buen texturizado ($m = 0,1$ para óptimo). Con estos valores se obtienen los siguientes errores

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0,124 \text{ mm} \\ \Delta y &= 0,124 \text{ mm} \\ \Delta z &= 0,517 \text{ mm} \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2.3. Modelado del sistema

El modelo de un sistema genérico en representación de estado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \end{aligned}$$

donde \mathbf{x} simboliza el estado del sistema, \mathbf{u} es la excitación al sistema, que consiste en la actuación del robot sobre la membrana, \mathbf{y} es la salida, \mathbf{w} es el ruido del proceso, y \mathbf{g} es el ruido en la medida. El modelo estará determinado cuando se definan las funciones de evolución del estado $\mathbf{f}(\cdot)$ y de observación $\mathbf{h}(\cdot)$, así como las distribuciones del ruido del proceso \mathbf{w} y de la medida \mathbf{g} . Para ello se aplicarán las siguientes consideraciones:

1. El ruido del proceso \mathbf{w} integra todas las posibles fuentes de error del proceso. Esencialmente la incertidumbre en el modelado del proceso y la incertidumbre en la excitación.
2. Ambos ruidos son blancos, aditivos, de media nula, e independientes entre sí.

Al ser los ruidos aditivos, se puede reformular el sistema como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}\end{aligned}$$

Modelo del proceso

Las ecuaciones que modelan el comportamiento de la membrana se presentaron en las Secs. 2.2 y 4. Cada uno de los nodos que constituyen la membrana sigue una trayectoria determinada por las Eqs. 2.1 a 2.5 y 4.1. En ellas aparece una dependencia no lineal entre la fuerza ejercida por los muelles y su elongación según las Eqs. 2.4 y 4.1, lo que implica que la Eq. 2.1 sea no lineal y con ello las funciones de evolución del estado $\mathbf{f}(\cdot)$ y de observación $\mathbf{y}(\cdot)$.

El estado del sistema queda definido por las variables que determinan la trayectoria de los nodos de la malla, esto es, la posición y velocidad de cada nodo.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{x}_1 = [P_x, P_y, P_z]^T$ y $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}_1 = [dP_x/dt, dP_y/dt, dP_z/dt]^T$, o sea $\mathbf{x}_2 = [v_x, v_y, v_z]^T$

La excitación \mathbf{u} consiste en la introducción de una esfera que deformará la membrana siguiendo tres caminos, como se detalla en la Sec. 4.2:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde $\mathbf{u}_1 = [P_{rx}, P_{ry}, P_{rz}]^T$ y $\mathbf{u}_2 = \dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{v}_r$ o sea, $\mathbf{u}_2 = [v_{rx}, v_{ry}, v_{rz}]^T$

La esfera sigue una evolución lineal y a velocidad constante hasta alcanzar el destino, momento en el que se detiene (Fig. 4.11). Conforme la esfera avanza en dirección a la membrana, se van produciendo colisiones con los nodos que conforman la membrana. En un primer momento, esos nodos adquieren la velocidad de la esfera, siguiendo la ley de conservación del momento según choque inelástico. Luego, su estado dependerá de las fuerzas en juego, muy especialmente de la fricción. Así, la excitación afectará de manera directa a aquellos nodos que estén en contacto con la esfera, con la siguiente formulación:

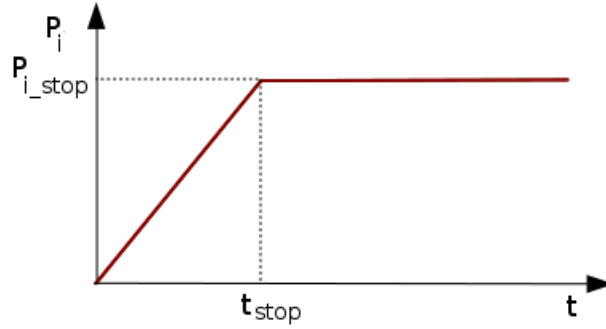


Figura 4.11: Modelo de excitación de la membrana.

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}^0 + \mathbf{v}t \quad \forall t_{start} \leq t \leq t_{stop}; \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i_stop} \quad \forall t \geq t_{stop}$$

$$\mathbf{F}_i^{ss} = b_{ji}(\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\| - l_{ji}^0) \frac{\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i}{\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\|}$$

$$b_{ji} = Sa_{ji} + Sb_{ji} e^{-(\|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\| - l_{ji}^0)/Sc_{ji}}$$

donde la posición \mathbf{P}_i del nodo i en contacto con la esfera y su velocidad \mathbf{v}_i adoptan la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i_k} &= \mathbf{P}_{i_{k-1}} + h \mathbf{v}_{i_{k-1}} \\ \mathbf{v}_{i_k} &= \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

donde \mathbf{v}_k se refiere a la velocidad de avance de la esfera en el instante k , y h es el paso de integración. La velocidad \mathbf{v}_k será lo suficientemente lenta como para que la pequeña componente viscosa de la membrana no tenga efectos apreciables sobre la forma final de la membrana.

En este capítulo se considera despreciable la incertidumbre del robot frente a la incertidumbre del modelo. Esta consideración es asumible dada la calidad del robot utilizado y los resultados obtenidos respecto a los errores del modelo. Esto permite considerar que la velocidad de avance del robot \mathbf{v}_k carece de incertidumbre.

Modelo de la medición

En cuanto al sistema de observación $\mathbf{h}(\cdot)$, hay de considerar que se toman dos medidas para cada nodo i : la fuerza de reacción de la membrana \mathbf{F}_i^{int} y la posición \mathbf{P}_i . La fuerza de reacción de la membrana sigue una evolución no lineal con la posición de los nodos

(Sec. 4.2.3). En cambio, la observación de la posición de los nodos que conforman la malla es lineal y directa a partir del conocimiento del estado.

Medidas de fuerza: Del sensor de fuerza/par se derivan las medidas de fuerza F_x, F_y, F_z y de par T_x, T_y, T_z . Su modelos son:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{h}_F(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_F \\ \mathbf{T} &= \mathbf{h}_T(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_T\end{aligned}$$

Las medidas \mathbf{F} y \mathbf{T} se suponen independientes y la incertidumbre queda modelada por una pdf gaussiana de media cero y covarianza \mathbf{R} , como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_F &\sim N(0, \mathbf{R}_F) \\ \mathbf{g}_T &\sim N(0, \mathbf{R}_T)\end{aligned}$$

Sus valores han sido obtenidos experimentalmente. El cuadro 4.5 refleja la desviación tipo, de donde puede deducirse la covarianza \mathbf{R} .

Medidas de posición: Como se expone en el apartado 4.2.2, y dado que la observación es directa sobre la posición de los nodos que conforman la membrana, la relación entre la medida y el estado resulta lineal, con la siguiente expresión:

$$\mathbf{P} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_p$$

donde $\mathbf{g}_p \sim N(0, \mathbf{R}_p)$ es el ruido de la medida de la posición. La covarianza \mathbf{R}_p puede derivarse a partir de la desviación tipo de la expresión 4.6.

Las funciones $\mathbf{h}(\cdot)$, al igual que la función $\mathbf{f}(\cdot)$ son no lineales y no existe una solución analítica para ellas. La solución pasa, necesariamente, por una aproximación numérica de la integral del modelo exponencial de masas y muelles. Las ecuaciones discretizadas varían en función del tipo de integrador utilizado. Por ejemplo, aplicando una sencilla integración por Euler directo, el modelo del sistema quedaría como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k\end{aligned}$$

4.2.4. El integrador

En este trabajo se ha implementado y experimentado con los integradores explícitos de Euler, medio punto y Runge-Kutta de orden 4, el integrador semi-implícito de Euler, y el implícito de Kang (cuadro F.3). En la Fig. 4.12 puede verse una comparación entre los tiempos relativos de ejecución de estos integradores, respecto al tiempo del integrador de Euler directo (100%), para la misma deformación de la membrana y las mismas condiciones, y con un paso de integración en los integradores explícitos próximo al máximo estable. Puede apreciarse una relación aparentemente exponencial.

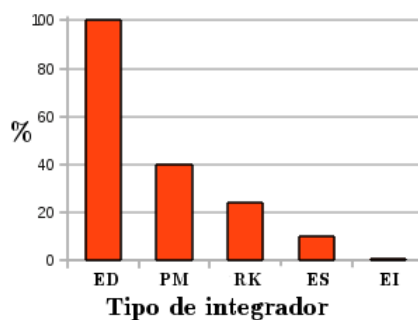


Figura 4.12: Tiempos de ejecución relativos para varios integradores: Euler Directo (ED), Punto Medio (PM), Runge-Kutta 4 (RK), Euler Semi-implícito (ES) e Implícito de Kang (EI).

La Fig. 4.13 presenta los valores medios y las desviaciones tipo de las distancias de los nodos de una malla generada con el integrador implícito de Yang respecto a una superficie patrón obtenida con el integrador de Runge Kutta-4, para cada uno de los tres caminos recorridos y para diferentes pasos de integración. Cabe destacar el comportamiento estable del integrador para cualquier paso de integración así como el moderado valor del error de la superficie generada. Se puede observar cómo el error para el primer camino se sitúa en tan solo $27 \mu\text{m}$ para un paso de integración de 100 ms. El resto de los caminos presenta un mayor error pero, en cualquier caso, se sitúa por debajo de $500 \mu\text{m}$. Para tiempos de integración menores de 20 ms el error en cualquier camino es menor de $20 \mu\text{m}$.

4.2.5. Histéresis

La histéresis es consecuencia de la tendencia de los sistemas físicos a mantener el estado en el que se encuentran, o dicho de otro modo, de su resistencia al cambio. El modelo propuesto considera tres fuentes de histéresis: la fricción derivada del contacto membrana-esfera, el amortiguamiento en los nodos y el amortiguamiento en los muelles. No obstante, la experimentación se ha limitado a la primera.

Fricción membrana-esfera: Haciendo uso de la técnica descrita en la Sec. 4.2.1 y ajustando adecuadamente los diferentes parámetros de la malla se puede reproducir la

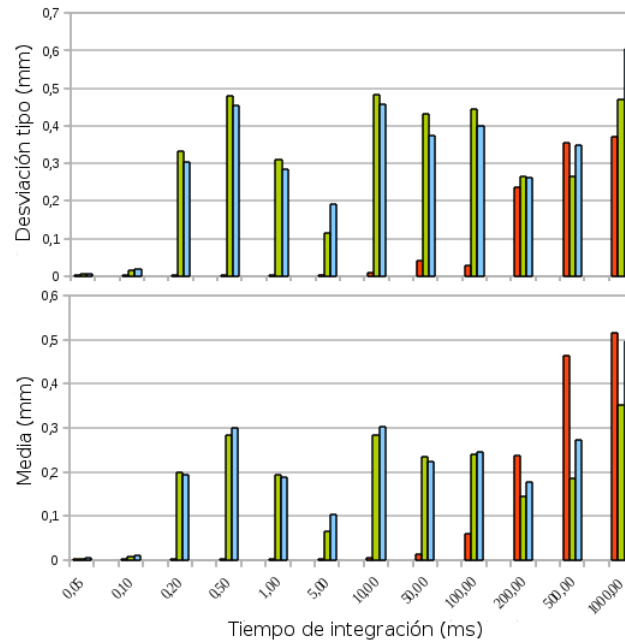


Figura 4.13: Media y desviación tipo del error de forma en cada camino, (rojo= C_1 , verde= C_2 , y azul= C_3) según el paso de integración y para el integrador implícito de Yang.

histéresis debida a la fricción de Coulomb. La Fig. 4.14 muestra la evolución del módulo de las componentes de fuerza para cada uno de los seis caminos seguidos por la esfera: tres de ida y tres de vuelta. La velocidad de avance y retroceso de la esfera es de 5 mm/s de forma que la componente viscosa de la malla es despreciable. La desviación tipo es similar a la ida y a la vuelta y se sitúa por debajo de 0,2 N.

Fricción viscosa: Existen membranas de ciertos polímeros que tienen una considerable componente viscosa (Selvadurai and Yu, 2006). No es el caso de la membrana con la que se ha experimentado y por ello se presentan resultados simulados.

En la Fig. 4.15 se puede apreciar la histéresis característica de los materiales viscosos. En la Fig. 4.15.1 la esfera penetra por el centro de la membrana a velocidad constante hasta llegar a destino. Luego, sin detenerse, retrocede a la misma velocidad hasta llegar al origen. Puede apreciarse la importancia de la velocidad en la evolución de la fuerza. En la Fig. 4.15.2 se presenta el efecto de la relajación, fenómeno que se puede apreciar cuando la esfera llega a destino y se detiene.

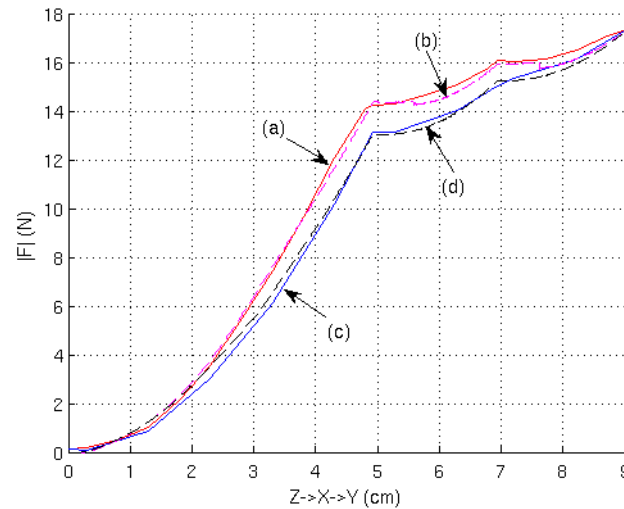


Figura 4.14: Evolución del módulo de la fuerza según los movimientos de la esfera: 0-5 cm eje Z; 5-7 cm eje X; 7-9 cm eje Y. (a) avance real; (b) avance simulado; (c) retroceso real; (d) retroceso simulado.

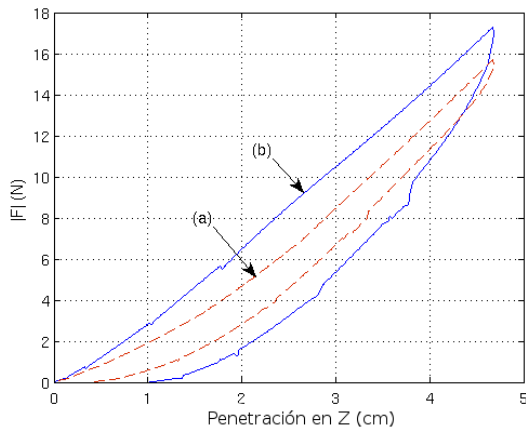
4.2.6. Fuerzas

En el apartado relativo a la fricción del contacto (Sec. 4.2.5) se muestran los errores en los módulos de las fuerzas para diferentes caminos, que se sitúan por debajo de 0,2 N. En este apartado se tratan esos errores desde el punto de vista de sus componentes, considerando los dos tipos de malla utilizadas (Fig. 4.20).

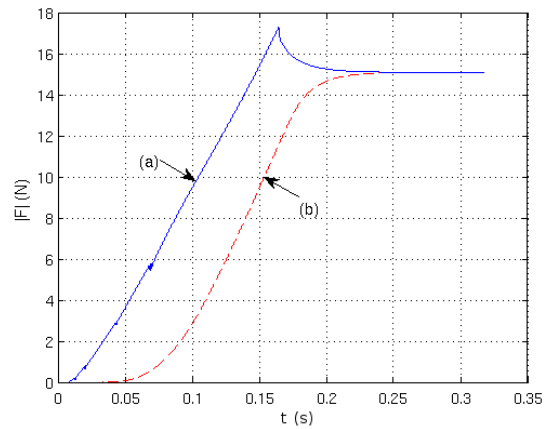
El cuadro 4.6 resume los valores medios y desviaciones tipo de los errores para cada camino y para cada eje por el que transcurre el camino. Se trata de valores absolutos. Puede apreciarse un error pequeño para el camino C_1 , a pesar de soportar la mayor de las magnitudes de fuerza. Esto es así porque los parámetros de los muelles han sido ajustados para minimizar el error en ese camino. También se observa que la malla con 4 muelles por nodo reproduce un perfil de fuerza en los caminos C_2 y C_3 con menor error que la malla con ocho muelles por nodo. Esto es debido a que los muelles diagonales potencian el efecto de cizallamiento y hacen que las fuerzas en estos caminos sean ligeramente superiores a las reales.

Camino	Eje	Muelles/nodo	$ \bar{F} (N)$	$\sigma_F(N)$
C_1	Z	4	0,171	0,192
		8	0,132	0,164
C_2	X	4	0,093	0,114
		8	0,334	0,378
C_3	Y	4	0,312	0,333
		8	0,465	0,519

Cuadro 4.6: Error medio y desviación tipo de las componentes de fuerza para una malla de 33x33 nodos.



4.15.1: Efecto de la velocidad.



4.15.2: Relajación.

Figura 4.15: Evolución del módulo de la fuerza para el camino C_1 según la velocidad de la esfera: (a) 0.1 m/s; (b) 0.3 m/s.

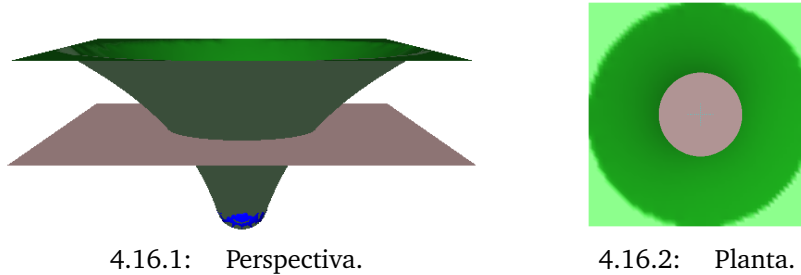
De acuerdo con el desarrollo matemático para el tratamiento de la fricción de Coulomb presentado en la Sec. 4.2.1, los nodos pueden deslizarse o separarse de la esfera si se cumplen ciertas condiciones: un nodo se deslizará si la fuerza tangente a la superficie supera un cierto umbral y se separará si las fuerzas de alejamiento superan a las de acercamiento hacia el centro de la esfera. En cualquier otro caso, el nodo permanecerá estático. Este mecanismo funciona bien en el mundo continuo pero presenta algunos problemas en el mundo discreto. Por ejemplo, el hecho de que un nodo se mueva o no puede depender de un mínimo cambio en la posición de la esfera, y esto puede tener consecuencias significativas tanto en la fuerza resultante como en la forma de la superficie generada. Concretamente, se ha observado que provocando una perturbación en la posición de la esfera coincidente con el error de repetitividad del robot podemos alterar la lectura de la fuerza de reacción de la malla en una magnitud próxima a 0,5 N. Este efecto puede observarse en diferentes figuras, por ejemplo en la Fig. 4.20.4. Se trata de ruido asociado a la medida de fuerza y está relacionado con la resolución de la malla. En la Sec. 5.2.3 se presenta un estudio más detallado de este fenómeno.

4.2.7. Forma de la membrana

En este apartado se presta atención a la calidad de la forma de la membrana simulada. Para ello se consideran dos aspectos: las deficiencias propias del modelo y los errores asociados al sistema de visión con el que se pretende validarlo.

Errores en el modelo exponencial de masas y muelles

Dado que el soporte de la membrana es circular y que la deformación la produce una esfera que se introduce justo por su centro, cabe esperar que las intersecciones de la membrana con planos normales al eje Z sean círculos (Fig. 4.16). Este hecho permite detectar errores en la forma de la membrana deformada midiendo la distancia desde estos círculos a la superficie de la membrana. Para ello se trazan cien segmentos de línea angularmente equiespaciados que, partiendo del centro del círculo y siguiendo el plano normal a Z , intersectan con la membrana. Con los segmentos de línea así generados se obtienen el radio medio y la desviación tipo. Este proceso se realiza 50 veces, yendo desde el punto más alejado de la esfera hasta el plano de reposo de la malla, lo que supone una resolución del orden de 1 mm (Fig. 4.17).



4.16.1: Perspectiva.

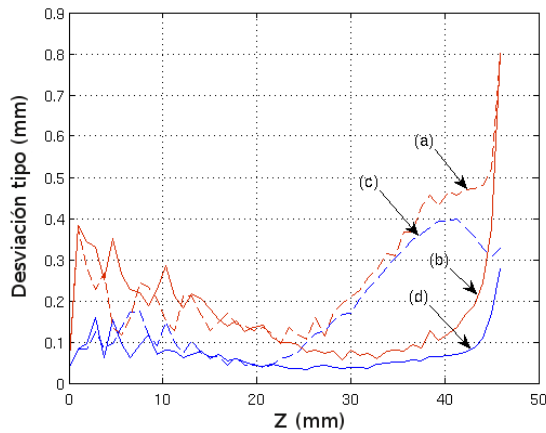
4.16.2: Planta.

Figura 4.16: Vistas de un plano secante, normal al eje Z .

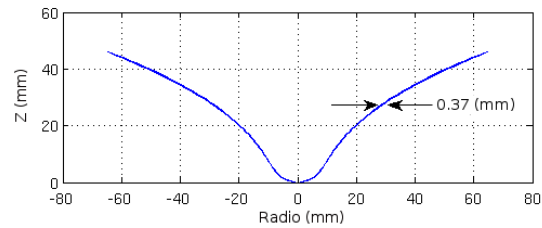
Cabe destacar la mejora en los resultados cuando se incrementa la resolución de la malla y, especialmente, cuando se usan ocho muelles por nodo en lugar de cuatro (Fig. 4.17.1). Se produce un incremento de la desviación tipo en la zona de contacto de la malla con la esfera y, de forma más acusada, en las proximidades del aro. Los muelles situados en la zona de contacto con la esfera son los que sufren la mayor elongación y, por ello, aproximan peor el contorno de la esfera. Para reducir este efecto se ha ensayado la técnica de Provot (1995) con resultados negativos, ya que la forma de la membrana resultante se aleja todavía más de la real.

El error en la superficie de contacto membrana-esfera empeora al disminuir el coeficiente de fricción de Coulomb, hasta el extremo en el que la esfera podría atravesar la malla. La solución más simple a este problema es incrementar el número de nodos de la malla, pero ello conlleva un importante incremento computacional. Otra solución pasa por el uso de alguna técnica multiresolución como, por ejemplo, la presentada por Villard and Borouchaki (2002), aunque crearía alteraciones anómalas en la interfaz.

En la Fig. 4.17.2 se muestran los valores medios de los radios cuya reunión conforma el perfil de la superficie. La máxima desviación relativa de los radios medios considerando mallas de 33x33 y 53x53 nodos con ocho y cuatro muelles por nodo se sitúa en 0,83



4.17.1: Desviación tipo de los radios.



4.17.2: Valores medios de los radios.

Figura 4.17: Errores en el perfil de la membrana según la distancia al extremo de la esfera sobre el eje Z . (a) 33x33, 4; (b) 33x33, 8; (c) 53x53, 4; (d):53x53, 8; (nodos/malla, muelles/nodo).

mm. Esta medida se reduce a 0,37 mm para el caso de considerar únicamente ocho muelles por nodo.

Errores en el sistema de visión estéreo

De acuerdo con el estudio del apartado 4.2.2 sobre los errores propios de la cámara de visión estéreo utilizada en el experimento, para un buen texturizado, el error dominante corresponde a la profundidad y es del orden de 0,5 mm, aproximadamente. No obstante, a partir de las pruebas a las que se ha sometido a la cámara en el contexto del experimento, se ha determinado una desviación tipo próxima a 0,6 mm. Este incremento es atribuible, fundamentalmente, al deficiente texturizado de la superficie observada.

Al contrastar la forma simulada de la membrana con la aportada por la cámara de visión estéreo se obtienen los resultados mostrados en el cuadro 4.7. En él, \bar{d} y σ_d se derivan de las distancias euclídeas entre cada píxel y el triángulo formado por los tres nodos más próximos de la malla (Sec. 5.2.2). Estos errores son relativamente insensibles al tipo y resolución de la malla utilizada, debido al predominio del error de la cámara de visión estéreo, junto con un texturizado no óptimo, que enmascara los errores propios del modelo.

Camino	Eje	Muelles/nodo	\bar{d} (mm)	σ_d (mm)
C_1	Z	4	0,821	0,657
		8	0,805	0,604
C_2	X	4	0,945	0,754
		8	0,825	0,680
C_3	Y	4	0,942	0,887
		8	0,832	0,776

Cuadro 4.7: Error medio y desviación tipo de la forma para mallas de 33x33 nodos.

4.3 Ajuste de los parámetros de los muelles

Una de las dificultades del modelo de masas y muelles es establecer sus parámetros, debido a que no hay una relación obvia entre ellos y las leyes constitutivas de los materiales elásticos. Ha habido varios trabajos que han establecido algún tipo de relación (Lloyd et al., 2007a) pero siempre considerando constante el coeficiente de elasticidad del muelle.

En este trabajo tampoco se resuelve totalmente este problema pero sí se aportan algunas observaciones que pueden ayudar a encontrar una solución. La Fig. 4.18 muestra el efecto sobre el perfil de la membrana de los parámetros S_a y S_b manteniendo constante a S_c para una misma fuerza final. Para determinar los tres parámetros se puede proceder de dos formas: ajustando el perfil de las fuerzas de reacción de la malla o ajustando el perfil de la superficie, hasta que coincidan con los ensayos. Ajustado uno debería de quedar ajustado el otro. Parece más sencillo usar la primera técnica. Como primer paso, puede observarse S_a como el valor remanente de la constante elástica cuando la elongación de los muelles es significativa (Fig. 4.1 y Eq. 4.1).

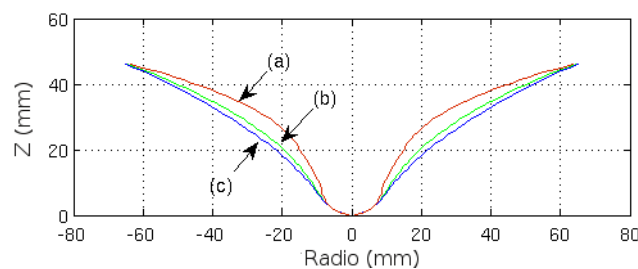
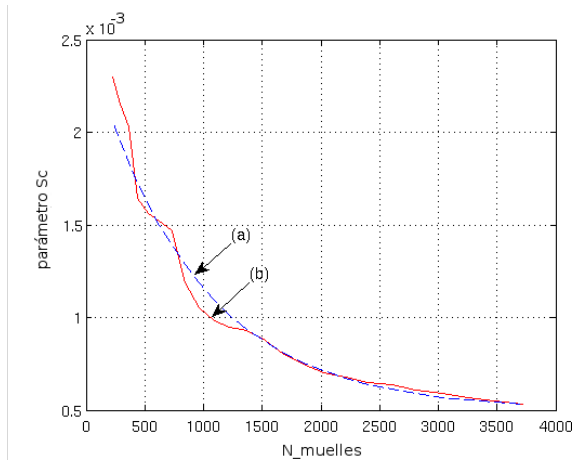


Figura 4.18: Diferentes perfiles para una misma fuerza final: (a) 100/2500/0.00098; (b) 230/1100/0.00098; (c) 590/0/0.00098. Parámetros $S_a/S_b/S_c$ sobre malla de 33x33 nodos con 4 muelles/nodo.

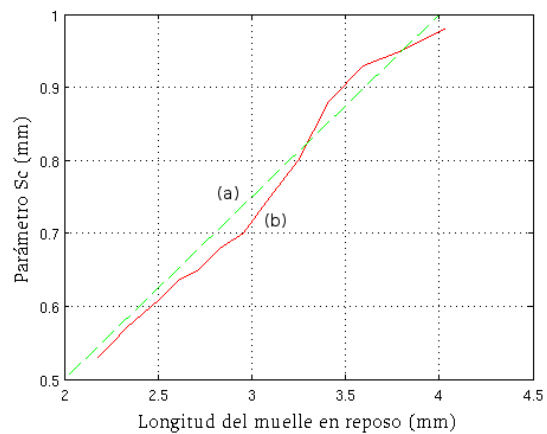
Una vez concluido este primer paso, los parámetros S_a y S_b , permanecerán invariables y sólo se actuará sobre S_c cuando se modifique la resolución de la malla. La dependencia es exponencial, como puede apreciarse en la Fig. 4.19.1, y es similar para los modelos de

cuatro y ocho muelles por nodo. Para las mallas investigadas, (aquellas con el parámetro l^0 igual en todos los muelles) el parámetro S_c guarda una relación aproximadamente lineal con l^0 para un amplio rango de longitudes en reposo de los muelles. La Fig. 4.19.2 muestra los valores del parámetro S_c , determinados por prueba y error, en relación con el parámetro l^0 , donde puede apreciarse cómo la línea de pendiente $\Delta S_c / \Delta l^0 = 1/4$ representa una buena aproximación.

Otro parámetro a considerar es la precarga, es decir, la elongación relativa de los muelles en estado de reposo. Se trata de un parámetro muy influyente y cuyo valor resulta similar al estiramiento real de la membrana en reposo. En la experimentación ese parámetro quedó fijado en el 4%.



4.19.1: $S_c = f(N_muelles)$.



4.19.2: $S_c = f(l^0)$.

Figura 4.19: Dependencia del parámetro S_c con el número de muelles de la malla y con la longitud en reposo de los muelles, para 4 muelles por nodo: (a) aproximación, (b) medidas.

4.4 Conclusiones

El modelo clásico de masas y muelles no es capaz de reproducir fielmente el comportamiento de materiales que presentan una dependencia no lineal de su resistencia ante la elongación. Este es el caso de muchos materiales de gran interés, como pueden ser los elastómeros y los tejidos biológicos blandos. En este trabajo se ha presentado una modificación del modelo clásico que proporciona una fiel reproducción del comportamiento. La modificación consiste en hacer que la constante de elasticidad de los muelles siga una evolución exponencial con su elongación. Concretamente se hace que la dependencia sea marcadamente exponencial para pequeñas elongaciones mientras mantiene un comportamiento lineal para grandes deformaciones.

Se ha realizado un experimento que ha validado este nuevo modelo y que consiste en provocar grandes deformaciones a una membrana de caucho natural, fijada a un aro circular, mientras se observa la evolución de su forma y de sus fuerzas de reacción. Las diferencias entre los valores medidos y los estimados según el modelo, para cada uno de los tres caminos seguidos en la deformación, están resumidos en los cuadros 4.6 y 4.7. En ellos, se puede observar cómo la malla con cuatro muelles por nodo se comporta ligeramente mejor que la malla de ocho muelles por nodo ante las medidas de fuerza, y ligeramente peor ante las medidas de forma. Para determinar el error en la forma se ha obtenido la distancia mínima de cada píxel a la superficie simulada conformada por la malla, lo que puede justificar la magnitud de su valor medio.

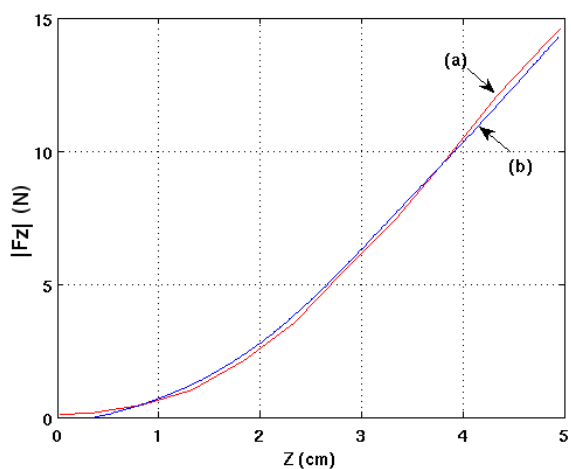
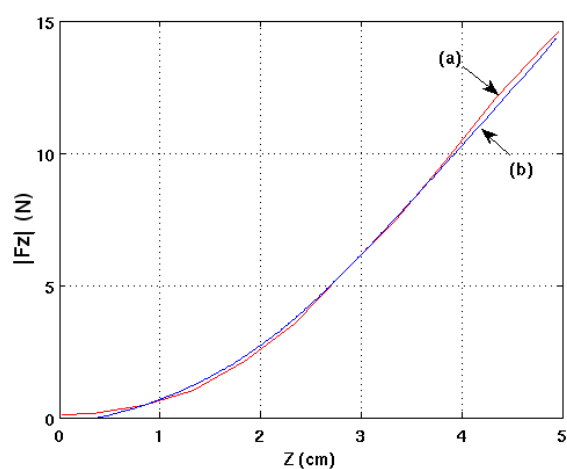
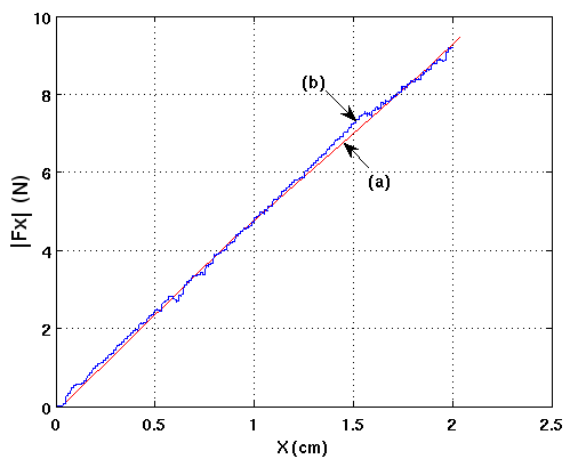
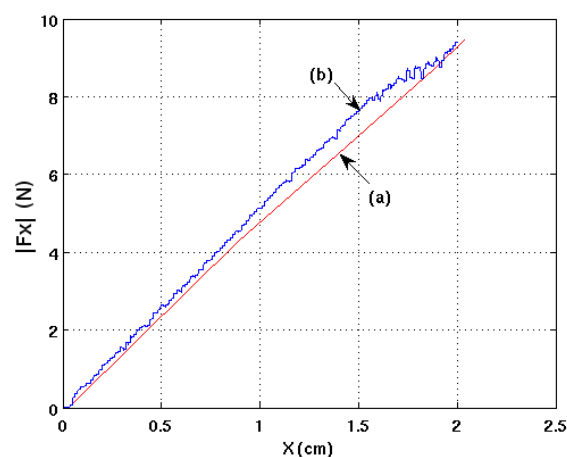
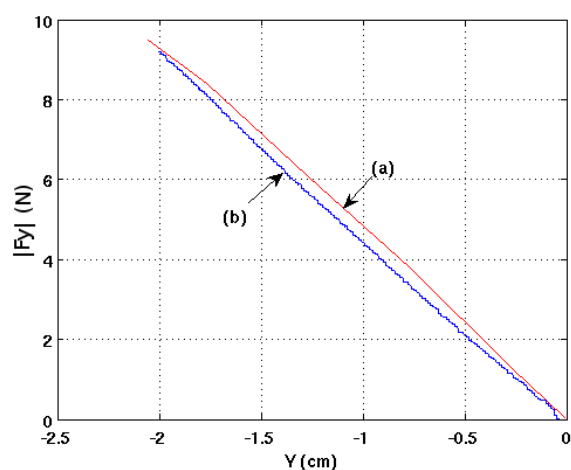
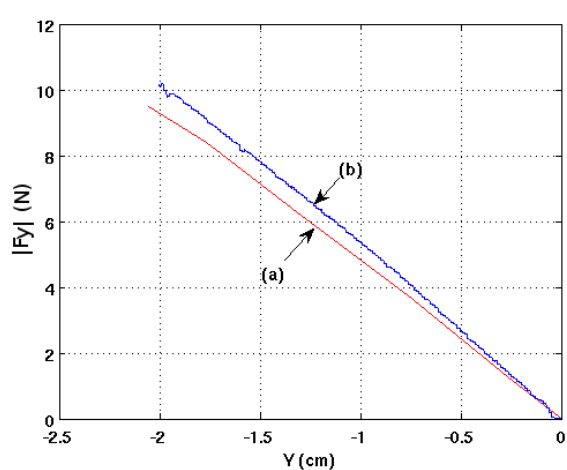
4.20.1: F_z con 4 muelles por nodo.4.20.2: F_z con 8 muelles por nodo.4.20.3: F_x con 4 muelles por nodo.4.20.4: F_x con 8 muelles por nodo.4.20.5: F_y con 4 muelles por nodo.4.20.6: F_y con 8 muelles por nodo.

Figura 4.20: Componentes de fuerza: (a) real, (b) simulada.

5

Determinación de la forma de la membrana

Atendiendo al objetivo de facilitar la actividad autónoma del robot en su trato con objetos deformables en entornos ruidosos, y una vez expuestas las herramientas en los capítulos anteriores, en éste serán utilizadas con el propósito de determinar con exactitud la forma de la membrana cuando está siendo sometida a una manipulación robotizada.

5.1 Incertidumbre en la excitación

En el capítulo 4 se consideró despreciable la incertidumbre del robot frente a la del modelo y eso permitió determinar los errores del modelo y validarlo. Ahora se considera que la velocidad de avance del robot no es totalmente conocida, de forma que la incertidumbre del robot no sea despreciable frente a la incertidumbre del modelo. Esta consideración supone que la esfera que deforma la membrana avanza por posiciones inciertas, con el consiguiente incremento de la incertidumbre sobre la forma real de la membrana.

Se va a considerar que la posición real de la esfera \mathbf{P}_r sigue el modelo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_r &= \bar{\mathbf{P}}_r + \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_r &\sim N(0, \mathbf{Q}_r)\end{aligned}$$

donde $\bar{\mathbf{P}}_r$ es de valor nominal de la posición y \mathbf{w}_r es la incertidumbre en el robot, modelada por una variable aleatoria con distribución gaussiana de media cero y covarianza \mathbf{Q}_r .

Asimismo, se considera que el módulo de la velocidad $\|\mathbf{v}_r\|$ es constante y conocido,

y que el cambio de posición de la esfera en su trayectoria es puramente traslacional. Queda excluida en este estudio la posible incertidumbre rotacional en el robot. Así,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_r\| &= \frac{\|(\bar{\mathbf{P}}_{r_{j+1}} + \mathbf{w}_r) - (\bar{\mathbf{P}}_{r_j} + \mathbf{w}_r)\|}{t_{j+1} - t_j} \\ \mathbf{v}_r &= \frac{(\bar{\mathbf{P}}_{r_{j+1}} + \mathbf{w}_r) - (\bar{\mathbf{P}}_{r_j} + \mathbf{w}_r)}{\|(\bar{\mathbf{P}}_{r_{j+1}} + \mathbf{w}_r) - (\bar{\mathbf{P}}_{r_j} + \mathbf{w}_r)\|} \|\mathbf{v}_r\|\end{aligned}$$

donde $\bar{\mathbf{P}}_r$ denota la posición nominal del robot (o de la esfera), j es un índice que referencia cada una de las posiciones nominales por las que pasa el robot y que conforman las trayectorias nominales $(\bar{\mathbf{P}}_{r_{j+1}} - \bar{\mathbf{P}}_{r_j})$, y $(t_{j+1} - t_j)$ es el tiempo empleado en completar esas trayectorias. La Fig. 5.1 presenta diversas trayectorias para dos dimensiones.

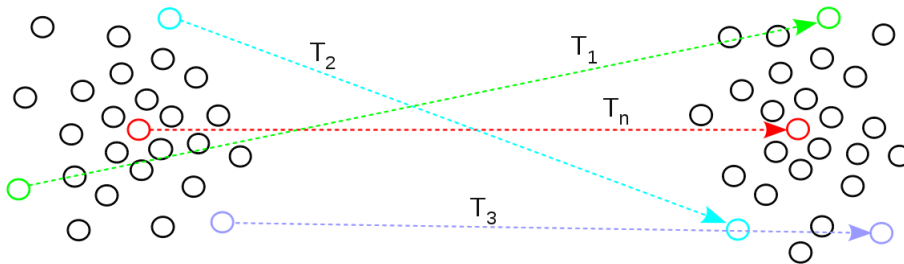


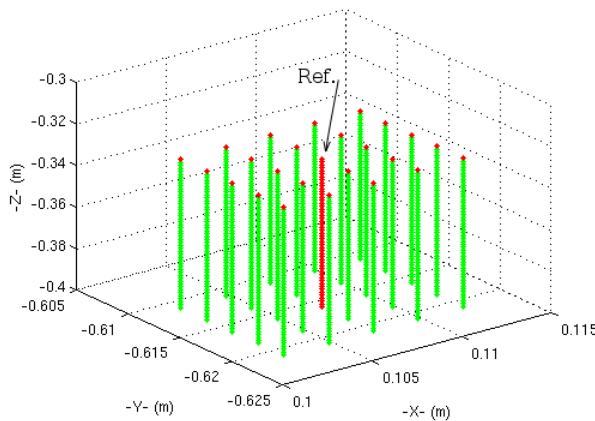
Figura 5.1: Trayectorias probabilísticas. T_n es la trayectoria nominal.

5.2 Comportamiento de la membrana

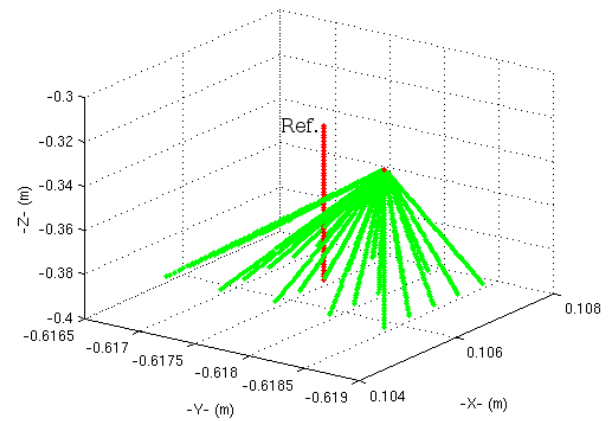
En esta sección se analiza el comportamiento de la membrana cuando se la somete a una excitación incierta como la indicada en la sección anterior. Para ello se ha preparado una batería de test en donde se generan trayectorias deterministas que deforman la membrana, y que permiten recoger información suficiente para analizar la influencia ejercida por esas trayectorias sobre las medidas. Además, estos test aportan información valiosa sobre la dependencia de las medidas con el tipo y resolución de la malla y permiten determinar las diferentes sensibilidades asociadas a las medidas.

5.2.1. Tipos de test

Con el objeto de recoger información del comportamiento de la membrana ante la deformación provocada por la esfera en sus trayectorias aleatorias, se generan dos tipos de trayectorias deterministas: *trayectorias paralelas* (Fig. 5.2.1) y *trayectorias radiales* (Fig. 5.2.2). Con ellas se practica una exploración regular del espacio de interés. Las trayectorias paralelas se caracterizan por ser paralelas entre sí y equiespaciadas en el plano al que son normales. Las trayectorias radiales parten de un punto común y desde ahí se dirigen a puntos de destino equiespaciados sobre un plano. Los puntos de destino de las trayectorias conformarán una superficie paralela al plano XY o al plano XZ (Fig. 5.3). Esto permite realizar cuatro posibles tipos de test: dos tipos de trayectorias cuyos destinos pueden estar en uno de dos planos ortogonales posibles. Las cuatro opciones se consideran en cada uno de los tres caminos (C_1 , C_2 y C_3) que puede seguir la esfera. Con ello se dispone de 12 posibilidades de test, y cada uno de ellos aporta información sensorial simulada de fuerza, par, ángulo entre fuerzas y momento de inercia, además de la posición de los nodos que conforman la malla.



5.2.1: Trayectorias Paralelas.



5.2.2: Trayectorias Radiales.

Figura 5.2: Generación de trayectorias con destino sobre el plano XY. La trayectoria roja es la de referencia.

5.2.2. Simulación de la información sensorial

El interés sobre los datos arrojados por los tests está más en los valores de las medidas para cada trayectoria respecto a las derivadas de la trayectoria de referencia, que en los valores absolutos para una trayectoria dada. En ese sentido, se procede primero a generar la trayectoria de referencia correspondiente a cada camino para tomar lectura de las

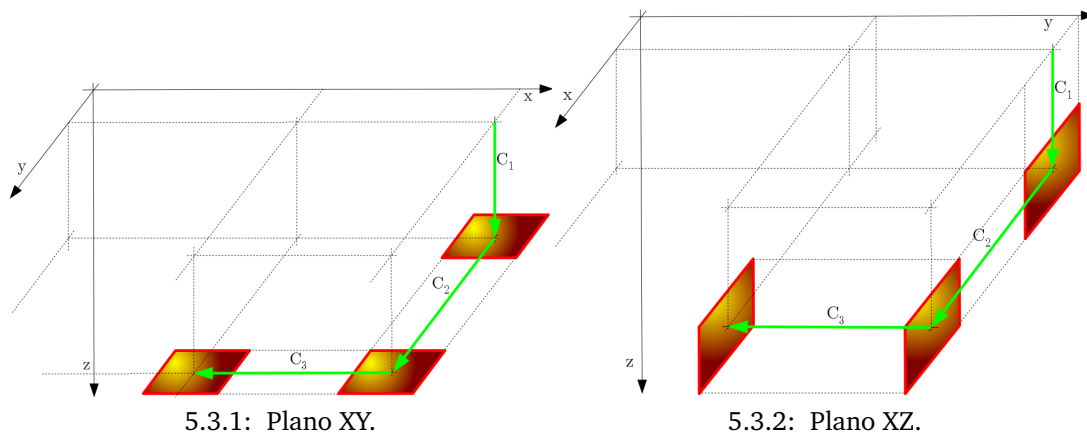


Figura 5.3: Generación de trayectorias con destino sobre los planos XY y XZ.

medidas derivadas. Posteriormente se repite el ensayo usando el resto de trayectorias para, luego de obtener las medidas correspondientes, establecer las comparaciones.

Las medidas sobre la membrana simulada se determinan una vez el avance de la esfera se ha detenido y luego de que la velocidad en todos los nodos de la malla se hace inferior a una dada que es prácticamente nula (fijada en $10,0 \mu m/s$). Bajo esas condiciones se obtienen las medidas de fuerza, par, ángulo entre vectores de fuerza, momento de inercia, y distancias de los píxeles a cada malla:

Medidas de fuerza: Una vez la malla está estabilizada, la fuerza resultante en cada nodo es nula salvo en aquellos que están sometidos a restricciones: los que están en contacto con la esfera o con el aro que da soporte a la malla. La fuerza resultante para cada uno de estos conjuntos de nodos es igual en módulo pero de sentido contrario. Los nodos en contacto con el aro se han supuesto de una masa infinita para que sean inamovibles y son siempre los mismos, de ahí la elección para su uso en la medida de fuerza. La fuerza resultante total F se obtiene al realizar la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre cada uno de estos nodos:

$$\mathbf{F} = \sum_{\forall i \in N_a} \mathbf{F}_i$$

donde N_a hace referencia al conjunto de nodos de masa infinita que dan soporte a la malla.

Medidas de par: Tras conocer la fuerza resultante sobre cada nodo de sustentación, se pueden derivar los pares individuales T_i y el par global T a que dan lugar una vez

quede determinado el punto de referencia, que se tomará igual al punto de referencia del sensor real ubicado en la muñeca del robot (Fig. 5.4). De esta forma es posible una comparación directa entre las medidas del sensor y las medidas simuladas.

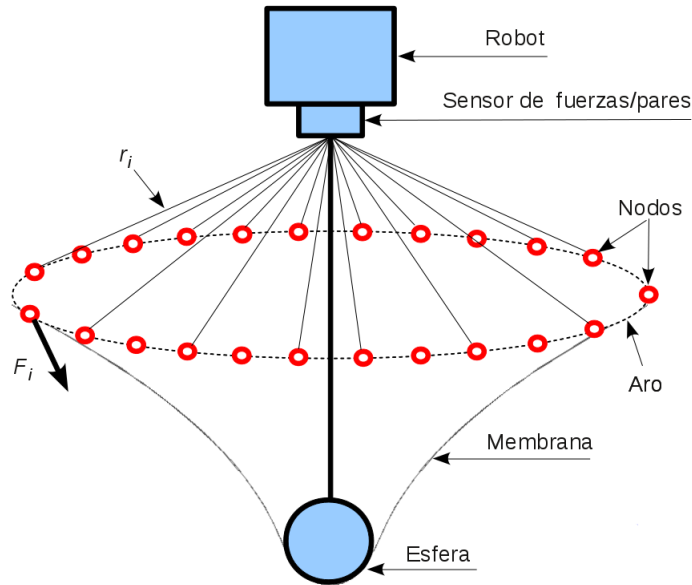


Figura 5.4: Medida simulada de pares.

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{T} = \sum_{\forall i \in N_a} \mathbf{T}_i$$

donde \mathbf{r}_i es el vector distancia entre el nodo y el sensor (punto de referencia), y el operador ' \times ' se refiere al producto vectorial.

Ángulos entre vectores de fuerza: El ángulo entre los vectores de fuerzas resultantes viene dado por la expresión:

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2}{\|\mathbf{F}_1\| \|\mathbf{F}_2\|}$$

donde el operador ' \cdot ' se refiere al producto escalar.

Momento de inercia: Una vez conocidas las medidas de fuerza y par, es posible determinar lo que se conoce como *línea central*. Considerando esa línea como eje de giro se

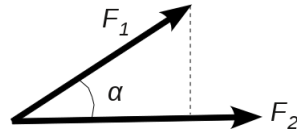


Figura 5.5: Medida simulada de ángulos entre fuerzas.

puede derivar la medida escalar correspondiente al momento de inercia. La línea central constituye el lugar geométrico de aquellos puntos del espacio respecto a los cuales los pares obtenidos son mínimos. Su ecuación, en el formato de punto y dirección, viene dada por

$$\mathbf{P}_{lc} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{T}}{\|\mathbf{F}\|^2} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{d}_{lc} = \mathbf{d}_F = \frac{\mathbf{F}}{\|\mathbf{F}\|} \quad (5.2)$$

donde \mathbf{P}_{lc} es un punto situado sobre la línea central, \mathbf{d}_{lc} es la dirección de la línea central, \mathbf{F} y \mathbf{T} son la fuerza y el par resultantes globales, respectivamente. A partir de aquí, el momento de inercia I puede calcularse con la siguiente expresión

$$I = \sum_{\forall i \in N} m_i \mathbf{d}_i^2$$

donde N es el conjunto de todos los nodos que conforman la malla, m_i es la masa del nodo i , y \mathbf{d}_i es la distancia de dicho nodo a la línea central (Fig. 5.6).

Una limitación importante de esta medida es que sólo resulta útil en simulación, no ante un escenario real, al carecer de la información necesaria sobre la posición de los nodos, o de cualquier otro modo de obtener esta medida.

Distancias píxel-malla: Se define la distancia píxel-malla como la distancia entre el píxel y el punto más próximo de la malla. El procedimiento utilizado para calcularla consiste en identificar los tres nodos de la malla más próximos al píxel y tomar la distancia desde el píxel al triángulo con ellos conformado (Fig. 5.7). Concretamente, se hace uso del algoritmo descrito por Schneider and Eberly (2002).

5.2.3. Influencia de la resolución de la malla

Sobre las fuerzas: Para analizar la influencia que la resolución de la malla ejerce sobre la fuerza resultante, se han elegido tres resoluciones de malla: 33x33, 47x47 y

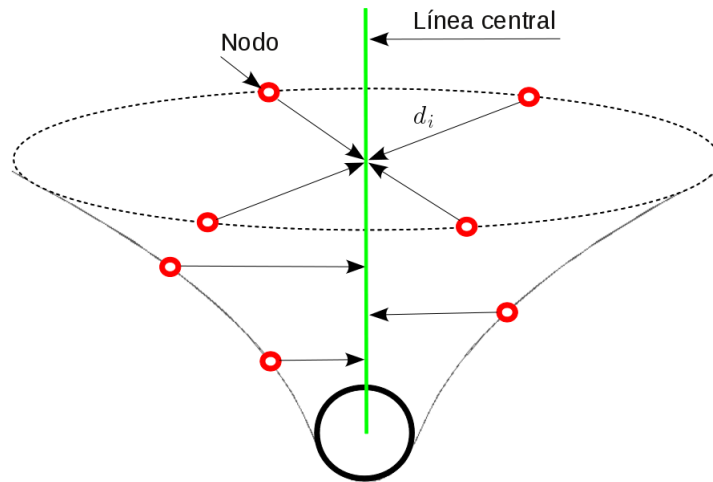


Figura 5.6: Medida simulada del momento de inercia.

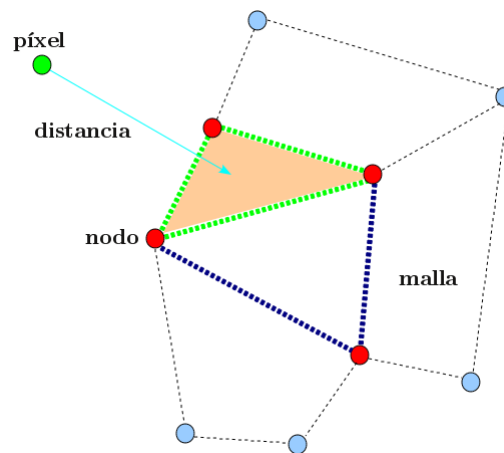


Figura 5.7: Distancia Píxel-malla.

61x61 nodos que corresponden a 17,5, 8,6 y 5,1 mm^2 de superficie cubierta por cada cuadrícula en reposo, respectivamente. Los resultados del test paralelo sobre el plano XY para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , haciendo uso de mallas de 4 muelles por nodo y explorando 1 cm^2 de superficie, son los mostrados en las Figs. A.1, A.2 y A.3 (anexo A). En ellas, el eje Z indica la diferencia entre las medidas de las componentes de fuerza F_z derivadas de la trayectoria de referencia, de una parte, y de cada una de las otras trayectorias paralelas seguidas por la esfera, de otra. Cabía esperar que, para la superficie analizada, esa medida fuera prácticamente nula ya que la coordenada Z del robot no varía y su dependencia con las otras coordenadas es mínima en esa posición. No obstante la simulación muestra que eso no es así, y la diferencia observada hay que atribuirle al ruido derivado de la resolución de la malla.

Considerando la malla de 61x61 nodos como prácticamente libre de ruido, la Fig. 5.8

presenta, a modo de resumen, la influencia de la resolución de la malla en el ruido máximo de las medidas. Puede apreciarse cómo el ruido es mayor en los caminos C_2 y C_3 que en el camino C_1 . Este ruido está relacionado con la posición relativa de los nodos de la malla situados sobre la esfera, distinta para cada trayectoria. Se observa que cuanto mayor es el número de nodos en contacto con la esfera, menor importancia tiene el lugar relativo que ocupen. Al aplicar el test sobre el plano XZ se mantiene constante la posición de la esfera sobre el eje Y , y puede observarse que el ruido en las medidas de fuerza para la componente F_y resulta muy inferior al ruido de la componente F_z anterior, situándose en el peor de los casos por debajo de 0,1 N (Fig. A.21). Los resultados para mallas con ocho muelles por nodo son similares.

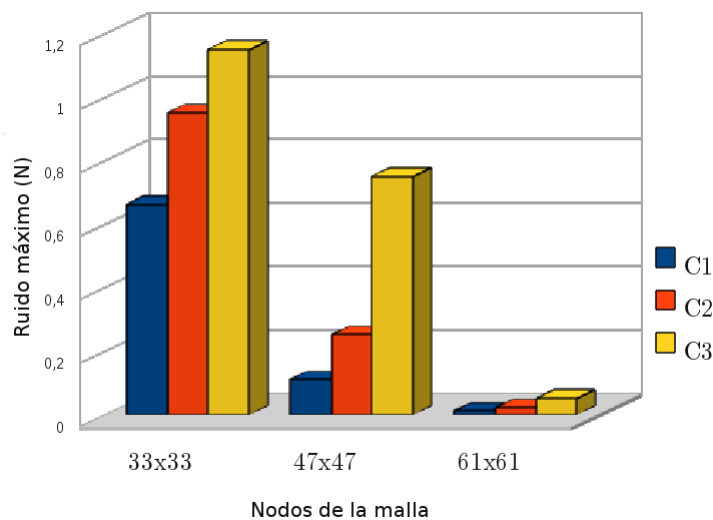


Figura 5.8: Influencia de la resolución de la malla sobre la medida de fuerza: comparativa para la componente F_z en el test paralelo sobre plano XY .

Sobre las distancias píxel-malla: Al discretizar la superficie de la membrana con formas geométricas se genera una superficie aproximada a la real que hace tratable el problema de su análisis y representación. Además, cuanto mayor sea el tamaño de estas formas geométricas peor será la aproximación y más simple el análisis y su representación. Por otra parte, su perímetro está delimitado por muelles cuya elongación es variable, de tal forma que los muelles situados en la periferia de la esfera -elemento deformante- son los más elongados, con gran diferencia respecto a los menos elongados, que son aquellos conectados con el aro soporte. Además, esa diferencia se incrementa con la reducción del número de nodos que conforman la malla. De todo ello se deriva que el error en la medida de la distancia píxel-malla (Fig. 5.9) no será uniforme, empeorando en la periferia de la esfera, y resultará sensible a la resolución de la malla.

Haciendo uso de mallas de 61x61 nodos el error máximo se sitúa en torno a los $60 \mu m$ y carece de relevancia frente a la desviación tipo del píxel que se sitúa en torno a los

$500 \mu m$ (Eq. 4.6). No obstante, para mallas de 33×33 nodos, ese error se eleva a $212 \mu m$ siendo ya significativo.

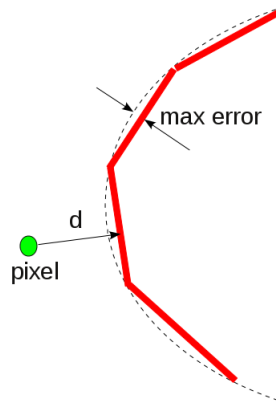


Figura 5.9: Influencia de la resolución de la malla en el error de la distancia píxel-malla.

5.2.4. Las medidas de fuerza y su relación con la posición de la esfera

Se observan dependencias cruzadas entre las medidas de fuerza y la trayectoria seguida por la esfera, por ejemplo, en el camino C_2 la esfera se desplaza sobre el eje X y provoca cambios en las medidas de las componentes de fuerza F_x y F_z . Para trayectorias paralelas al camino C_1 , la Fig. 5.10.1 presenta la dependencia de la componente de fuerza F_z con la posición X ocupada por la esfera, parametrizada para tres penetraciones sobre Z . La Fig. 5.10.2 hace lo propio para la componente de fuerza F_x . En ambas figuras, las medidas presentadas son relativas a las medidas en el centro de la membrana. La componente de fuerza F_y presenta el mismo comportamiento que la componente de fuerza F_x pero ante variaciones del eje Y . Además de las dependencias cruzadas, estas figuras también muestran las no linealidades de las fuerzas, especialmente acusadas más allá de una desviación de 2 cm (30% del radio del aro que soporta la membrana).

5.2.5. Sensibilidad en las medidas de fuerza

Una característica interesante de la malla es el comportamiento de las medidas de fuerza y par ante cambios en la posición de la esfera. En adelante se hace referencia a ello como *sensibilidad* de la malla y en un entorno discreto se define como

$$S \simeq \Delta \text{medida} / \Delta \text{posición}$$

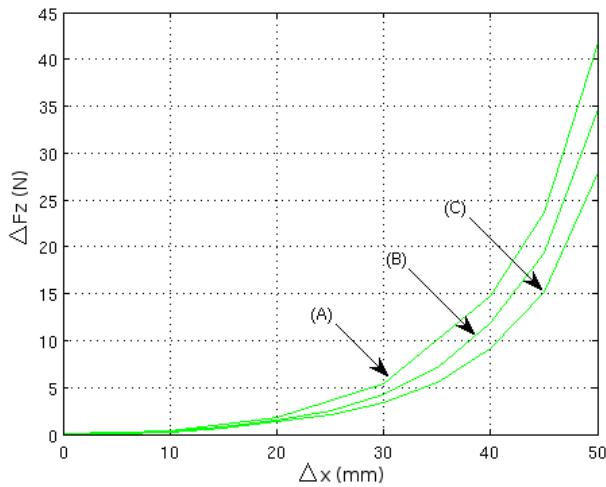
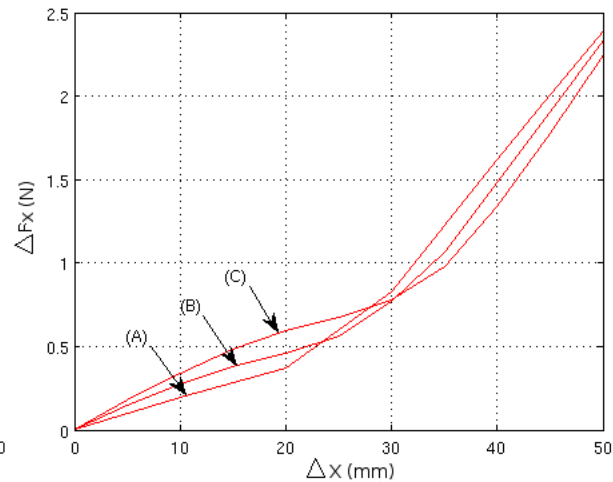
5.10.1: $\Delta F_z = f(\Delta x, \Delta z)$.5.10.2: $\Delta F_x = f(\Delta x, \Delta z)$.

Figura 5.10: Las medidas de fuerza y su relación con la posición de la esfera. $\Delta F_z = F_z - F_{z0}$, $\Delta F_x = F_x - F_{x0}$, $\Delta x = x - x_0$, donde el subíndice 0 se refiere al valor de la medida en el centro de la membrana. Parametrizado para tres penetraciones: (A) = 58,8 mm, (B) = 68,8 mm, (C) = 78,8 mm.

donde S es la sensibilidad, Δ se refiere a los incrementos, *medida* es cada una de las componentes de fuerza y par y *posición* es la posición de la esfera. En esta sección se va a determinar la sensibilidad en cada una de las medidas de fuerza y par simuladas en función del tipo de trayectorias generadas. Los resultados son fruto de la observación directa de los resultados de las simulaciones y concretados en una serie de figuras construidas a partir de la información obtenida con los tests paralelo y radial.

Test Paralelo

Las Figs. A.4 a A.44 del anexo A muestran los resultados obtenidos con una malla de 61x61 nodos para los test paralelos indicados en el cuadro 5.1. En él, el camino C_{1d} se refiere al camino C_1 cuya componente X se ha incrementado -2 cm , alejando la trayectoria del centro de la membrana.

El cuadro 5.2 presenta los resultados de las sensibilidades correspondientes a cada una de las medidas de fuerza y par, para los tres caminos analizados y para los test XY y XZ . Cabe remarcar que los resultados mostrados para los caminos C_2 y C_3 son orientativos ya que en estos casos la sensibilidad no es constante.

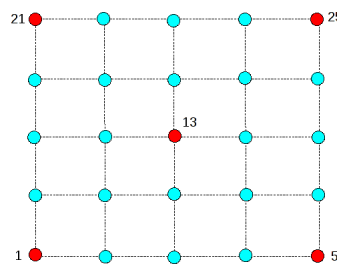
<i>Figuras</i>	<i>Caminos</i>	<i>Plano de destino</i>	<i>Muelles por nodo</i>	<i>Superficie explorada (cm²)</i>	<i>Número de trayectorias</i>
A.4 a A.11	C_1, C_2 y C_3	XY	4	1	25
A.12 a A.19	C_1, C_2 y C_3	XY	8	1	25
A.20 a A.27	C_1, C_2 y C_3	XZ	4	1	25
A.28 a A.35	C_1, C_2 y C_3	XZ	8	1	25
A.36 a A.38	C_1	XY	4	3	121
A.39 a A.41	C_{1d}	XY	4	1	25
A.42 a A.44	C_{1d}	XZ	4	1	25

Cuadro 5.1: Resultados para el test paralelo.

Test radial

En esta batería de test, se presenta el comportamiento de la malla ante cinco conjuntos de trayectorias radiales, cada uno con un origen distinto y con los mismos destinos sobre el plano XY . El área barrida se limita a 2 mm^2 y se hace uso de la malla de 61×61 nodos, con 4 muelles por nodo y 25 trayectorias, que se muestran en la Fig. B.1 y B.2 del anexo B. En la Fig. 5.11 se presenta la proyección sobre el plano XY de los puntos de inicio de todas las trayectorias radiales exploradas. Los puntos en color rojo coinciden con los presentados en las Figs. B.1 y B.2 y desarrollados en las Figs. B.3 a B.17.

El cuadro 5.3 recoge los resultados de las sensibilidades de cada una de las medidas para el camino C_1 y los test XY y XZ . No se muestran los resultados para los caminos C_2 y C_3 ya que su sensibilidad es muy variable y, en consecuencia, son poco significativos.

Figura 5.11: Trayectorias radiales sobre el plano de destino XY explorando 2 mm^2 .

Comentarios sobre la sensibilidad

La observación de las Figs. A.4 a A.44 del test paralelo y las Figs. B.3 a B.17 del test radial, lleva a la conclusión de que las diferentes sensibilidades en el camino C_1 presentan formas regulares, propias de un sistema lineal. En cambio, para los caminos C_2 y C_3 esas formas tienden a hacerse irregulares, manifestando las no linealidades del sistema y, en consecuencia, dificultando su análisis. Por ejemplo, para el camino C_1 se observa

Medida	unidades	Camino C_1		Camino C_2		Camino C_3	
		Test XY	Test XZ	Test XY	Test XZ	Test XY	Test XZ
F_x	N/m	30	30	55	40	50	50
F_y		30	0,0	28	0,0	40	25
F_z		0,0	480	0,0	500	0,0	500
T_x	Nm/m	4	0,0	3,5	0,0	6	0,0
T_y		4	4	6,5	6,5	6	6
T_z		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Cuadro 5.2: Sensibilidad ante el test paralelo.

Medida	unidades	Camino C_1	
		Test XY	Test XZ
F_x	N/rad	28,7	28,7
F_y		28,7	0,0
F_z		0,0	32,9
T_x	Nm/rad	3,15	0,0
T_y		3,15	3,15
T_z		0,0	0,0

Cuadro 5.3: Sensibilidad ante el test radial.

que las sensibilidades tanto en las componentes de fuerzas F_x y F_y como en los pares T_x y T_y , son aproximadamente constantes e independientes, incluso para barridos de espacios relativamente grandes, sea el test centrado o descentrado, pero esto no es así para los caminos C_2 y C_3 (Figs. A.4, A.20 y A.36 para tests centrados y la Fig. A.39 para el test descentrado).

En cuanto a las medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas, al tratarse de magnitudes derivadas de las fuerzas, ofrecen unas sensibilidades dependientes de cada una de las medidas que las conforman. No obstante, para el camino C_1 y en el espacio analizado, las formas de la sensibilidad tanto del momento angular como de los ángulos entre las fuerzas son regulares (Fig. A.38).

Otros comentarios sobre el comportamiento de las medidas ante los test son los siguientes:

1. Para el mismo espacio barrido, la sensibilidad en todas las medidas de fuerza resulta muy superior ante el test radial que ante el test paralelo. Por ejemplo, la Fig. A.4 para el camino C_1 presenta una variación en F_x de unos 0,3 N para una superficie destino de 10 mm^2 ; en cambio, la Fig. B.9, para el mismo camino y medida, presenta una variación de unos 0,8 N sobre una superficie destino de 2 mm^2 . En consecuencia, la sensibilidad de la medida F_x es unas 13 veces superior ante el test radial que ante el test paralelo.

2. Para todas las trayectorias paralelas que comparten la misma componente Z en origen y destino, independientemente de su dirección espacial, se cumple que

$$\Delta_{\mathbf{F}} = \mathbf{S}_p \Delta_{\mathbf{d}}$$

donde $\Delta_{\mathbf{F}}$ es el incremento de fuerzas finales, \mathbf{S}_p es la sensibilidad derivada del test paralelo, y $\Delta_{\mathbf{d}}$ es el incremento de distancia en la posición final de la esfera (Figs. 5.12A y 5.12B).

3. Para todas las trayectorias radiales que comparten las mismas componente Z en origen y destino, independientemente de su dirección espacial, se cumple que

$$\Delta_{\mathbf{F}} = \mathbf{S}_r \Delta_{\mathbf{a}}$$

donde $\Delta_{\mathbf{F}}$ es el incremento de fuerzas finales, \mathbf{S}_r es la sensibilidad derivada del test radial, y $\Delta_{\mathbf{a}}$ es el incremento angular (ángulo entre las trayectorias) (Figs. 5.12C y 5.15).

4. La sensibilidad de la medida F_z es muy superior a la de las medidas F_x y F_y en el test paralelo pero comparables en el test radial.

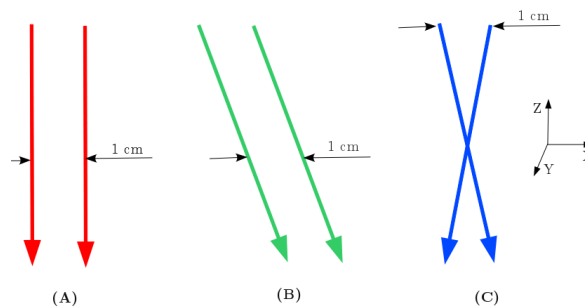


Figura 5.12: Diferencia de fuerzas entre trayectorias para una penetración de $68,8 \text{ mm}$. (A): $(0,30 \ 0,0 \ 0,0) \text{ N}$, (B): $(0,28 \ 0,0 \ 0,0) \text{ N}$, (C): $(5,1 \ 0,0 \ 0,0) \text{ N}$. Sensibilidad en (A) $(S_{p_x})=30 \text{ N/m}$; $\Delta_{F_x} = S_{p_x} \Delta_{d_x} = 30 \text{ N/m} \times 0,01 \text{ m} = 0,3 \text{ N}$. Válido para las figuras (A) y (B).

5.3 Fusión de la información de fuerza y par

En la sección anterior se ha establecido una relación entre las medidas de los sensores y la trayectoria seguida por la esfera que deforma la membrana. En principio, cada trayectoria distinta dará lugar a la aparición de una forma diferente de la membrana y, en base a ello, cabe considerar la existencia de una relación entre las medidas y la forma. Avanzando en esta idea, esta sección tiene el propósito de establecer la capacidad

de determinar la forma de la membrana en base al uso conjunto de la información de fuerza y par aportada por los sensores.

5.3.1. Procedimiento

El proceso de fusión acontece dentro de un marco mayor: el filtro de partículas (Sec. 3.5.6). Concretamente, en esta sección se hará uso del filtro SIR (Sec. 3.5.6) dada su sencillez y adecuación, la fusión de información se ceñirá al marco probabilístico descrito en la sección 3.5 y, de manera específica, a la ecuación de la independencia condicional (Eq. 3.8). No obstante, esta última ecuación no es posible aplicarla a todas las medidas:

- Las medidas de fuerza y par, aportadas por los sensores correspondientes, son medidas primarias e independientes, y están condicionadas por la trayectoria seguida por la esfera, dadas las características propias de la membrana.
- Las medidas de ángulos entre fuerzas y de momentos de inercia, además de la dependencia anterior, también dependen de las propias medidas de fuerza y par con lo que no son independientes y, en consecuencia, no se les puede aplicar la Eq. 3.8, debiendo quedar excluidas de la fusión.

El procedimiento seguido queda sintetizado en los cuadros F.8 y F.10 del anexo F, este último reproducido en el cuadro 5.4. El cuadro F.8 implementa el paso de inicialización del algoritmo. En él se establecen las N trayectorias correspondientes al camino C_1 así como los estados iniciales de cada partícula (inicialmente la malla está en reposo y la esfera no contacta con ningún nodo). Una vez inicializado el sistema, se aplica de forma recursiva el algoritmo mostrado en el cuadro 5.4, que es una adaptación del algoritmo SIR al problema actual, donde cada iteración completa un camino lo que supone conocer el estado probabilístico de la malla en ese instante y, por tanto, la forma de la membrana.

La acción de propagar el estado (ítem 1a en cuadro 5.4, desarrollado en el cuadro F.14) es la que más recursos computacionales consume, con diferencia. En él, la esfera sigue la trayectoria desde \mathbf{P}_{r0}^i hasta \mathbf{P}_{r1}^i y mientras esta acción acontece, debe integrarse una ecuación diferencial para cada nodo de la malla de forma continuada y para cada trayectoria i . Una vez la esfera llega a destino y la velocidad de los nodos se anula, se toman medidas y se determinan los pesos asociados a cada partícula. Para ello se hace uso de la expresión

$$\tilde{w}_{s_k}^i = e^{-(y_{s_k}^i - y_{s_k})^2 / (2\sigma_s^2)}$$

donde y_{s_k} es la lectura del sensor s en el instante k , $y_{s_k}^i$ la medida simulada asociada a la partícula i correspondiente al mismo tipo de información y σ_s la desviación tipo

$$(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{SIR2} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \mathbf{otros})$$

1. For $i = 1 : N$

a) Derivar partículas (cuadro F.13) $\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i)$

▪ $(\mathbf{x}_k^i, \{\mathbf{y}_{s_k}^i\}_{s=1}^M) = \mathbf{PropagarEstado} (\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, \mathbf{otros})$

b) Determinar pesos asociados a cada medida

▪ For $s = 1 : M$

• $\tilde{w}_{s_k}^i = p(\mathbf{y}_{s_k} | \mathbf{x}_k^i)$

▪ End for

2. End for

3. Normalizar pesos (Cuadro F.18)

▪ $(\{\{w_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M) = \mathbf{NormalizarTodo} (\{\{\tilde{w}_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M)$

4. Fusionar información (Cuadro F.19)

▪ $(\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Fusionar} (\{\{w_{s_k}^i\}_{s=1}^M\}_{i=1}^N)$

5. Remuestrear (Cuadro F.6)

▪ $(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, -, -\}_{i=1}^N) = \mathbf{Remuestrear} (\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$

Cuadro 5.4: Algoritmo para el filtro SIR2.

del sensor s . Tras normalizar estos pesos, se procede a la fusión de todas las fuentes de información M y para todas las partículas N . El conjunto de pesos normalizados $w_k^i \forall i = \{1, 2, \dots, N\}$ conforma la distribución discreta buscada (Eq. 3.24) a partir de la cual se puede determinar la forma de la membrana en el instante k . Para la siguiente iteración se requiere realizar un remuestreo.

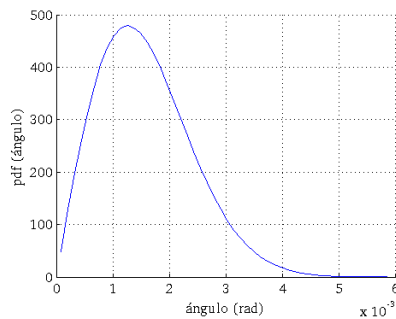
5.3.2. Consideraciones estadísticas sobre las medidas de fuerza y par

Para derivar los pesos asociados a cada medida de fuerza y par hay que utilizar la información estadística de los propios sensores. Se trata de pdfs gaussianas de media nula y covarianzas \mathbf{Q}_F para fuerzas y \mathbf{Q}_T para pares (Sec 4.2.2):

$$\mathbf{Q}_F = \begin{bmatrix} 31,7^2 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 31,7^2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 66,8^2 \end{bmatrix} (mN)^2, \quad \mathbf{Q}_T = \begin{bmatrix} 2,4^2 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 2,4^2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,4^2 \end{bmatrix} (mN.m)^2$$

En cambio, las medidas de ángulos entre fuerzas resultantes y momentos de inercia son medidas derivadas de las anteriores y, a priori, no resulta evidente su comportamiento estadístico. La simulación muestra que si se perturban las coordenadas de un vector en el espacio con pdfs gaussianas de media nula e igual varianza en cada componente de forma que las variables aleatorias sean independientes, se obtiene una pdf del tipo Rayleigh en los ángulos generados.

Las expresiones más significativas de una distribución Rayleigh son las mostradas en la Fig. 5.13, donde σ_F es la desviación tipo del vector fuerza y $\|F\|$ es su módulo. A partir de esta información se puede obtener el resto de parámetros necesarios. La elección de la desviación tipo para derivar los pesos angulares asociados a cada partícula influye en el grado de aceptación y rechazo de trayectorias más o menos paralelas a la de referencia. Aquí se hace uso del valor angular en que acontece el pico de la distribución, lo cual corresponde con σ_a . La misma figura también representa la función de densidad de la probabilidad para las condiciones del camino C_1 .



Distribución de Rayleigh

$$p(x) = \frac{x}{\sigma_a^2} e^{-x^2/2\sigma_a^2}$$

$$\bar{x} = \sigma_a \sqrt{\pi/2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{4-\pi}{2} \sigma_a^2$$

$$\sigma_a = \arctan\left(\frac{\sigma_F}{\|F\|}\right)$$

Figura 5.13: pdf de la medida angular cuando se perturba el vector fuerza $(0,0,0,25,0)$ (N) con $\sigma_F = (0,0317,0,0317,0,0668)$ (N). Puede observarse que se trata de una distribución Rayleigh.

5.3.3. Consideraciones sobre el número de trayectorias a generar

Con el propósito de encontrar alguna trayectoria *similar* a la trayectoria real seguida por la esfera que deforma la membrana, se debe explorar el espacio de probabilidades derivado de la incertidumbre del robot, y para ello, en el marco del filtro de partículas, se generan trayectorias aleatorias (Fig. 5.1). La similaridad de trayectorias se determina en base a la semejanza de los valores medidos por los sensores con las medidas simu-

ladas derivadas de cada trayectoria. Entonces, se han de contrastar dos medidas inciertas, ambas con sus propios *espacios de incertidumbre*, y para que el conjunto resulte eficiente, el espacio de incertidumbre de los sensores debe ser menor que el espacio de incertidumbre de las medidas simuladas. Cuánto mayor sea esta diferencia mayor será la capacidad de identificar trayectorias similares a la real. No obstante, existe un problema: para que el procedimiento funcione, al menos deberá existir una trayectoria que *atraviere* el espacio de incertidumbre de los sensores, y cuanto mayor sea la diferencia entre espacios, menor será la probabilidad de que eso ocurra.

A partir de la incertidumbre en los sensores (Sec. 4.2.2) y de la sensibilidad en sus medidas asociadas a las trayectorias paralelas y radiales (cuadros 5.2 y 5.3, respectivamente), se obtiene el cuadro 5.5. En él, las distancias se han de interpretar como la incertidumbre longitudinal inducida por la incertidumbre del sensor, dada la sensibilidad de cada medida. Estas distancias conforman un volumen de incertidumbre en donde se ubicará realmente la esfera.

<i>Medida</i>	<i>Incetidumbre (N)</i>	<i>Tray. paralelas (mm)</i>	<i>Tray. radiales (mm)</i>
<i>F_x</i>	0,0317	1,06	0,077
<i>F_y</i>	0,0317	1,06	0,077
<i>F_z</i>	0,0668	0,139	0,142
<i>T_x</i>	0,0024	0,60	0,053
<i>T_y</i>	0,0024	0,60	0,053
<i>T_z</i>	*	*	*

Cuadro 5.5: Discriminación según la incertidumbre del sensor de fuerza/par.

La probabilidad de generar trayectorias aleatorias que sean paralelas a la trayectoria real seguida por la esfera se intuye muy pequeña. A modo de ejemplo, a partir de los resultados correspondientes a las trayectorias radiales en el cuadro 5.5, y si la función de densidad de la probabilidad de la incertidumbre en el sensor fuese plana, se podría considerar que la incertidumbre espacial sería un cubo de $0,077 \times 0,077 \times 0,142 = 0,00084 \text{ mm}^3$ de volumen. No obstante, la pdf del sensor tiene forma gaussiana con lo que la incertidumbre espacial queda representada por una elipsoide cuyos ejes principales valen $(0,077 \ 0,077 \ 0,142) \text{ mm}$.

Si se lanzasen infinitas trayectorias desde el elipsoide incierto de inicio del camino del robot hasta el elipsoide incierto de fin del camino del robot (Fig. 5.1), se tendría la certeza de que alguna trayectoria atravesaría el elipsoide incierto derivado del sensor de fuerza/par y, en consecuencia, se las podría discriminar como trayectorias similares a la real. No obstante, no sólo es imposible generar infinitas trayectorias, sino que la limitada potencia de cálculo de los ordenadores y el escaso tiempo de que se dispone normalmente para obtener una solución, impone fuertes limitaciones. Así, cabe plantearse cuántas trayectorias habrá que generar para tener un cierto grado de probabilidad de

que alguna de ellas atraviese el elipsoide de interés.

Dado que se generan de forma independiente las componentes de destino de las trayectorias, la probabilidad conjunta será el producto de cada una de las probabilidades parciales

$$P_t = P(a_x < X \leq b_x)P(a_y < Y \leq b_y)P(a_z < Z \leq b_z)$$

donde X, Y, Z son las variables aleatorias sobre cada eje que determinan el fin de la trayectoria, y $(a_x, b_x), (a_y, b_y), (a_z, b_z)$ son los intervalos que delimitan el volumen donde deberá ubicarse. Tratándose de pdf gaussianas, se puede escribir

$$P(a_x < X \leq b_x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a_x}^{b_x} \exp[-(x - \bar{x})^2/2\sigma^2] dx$$

No se dispone de solución analítica para esta ecuación pero es posible usar la siguiente aproximación para una gaussiana normalizada $N(0, 1)$ (Simon, 2006):

$$A = \left[\frac{1}{(1-a)|x| + a\sqrt{x^2 + b}} \right] \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$P(X \leq x) \simeq \begin{cases} A & : x \leq 0 \\ 1 - A & : x > 0 \end{cases}$$

donde $a = 0,339$ y $b = 5,510$, y sustituyendo x por $((x - \bar{x})/\sigma)$ el resultado es válido para cualquier pdf gaussiana.

El cuadro 5.6 ofrece los resultados para diferentes valores de incertidumbre en el robot y en el sensor de fuerza. A partir de esta información, es posible determinar la cantidad de trayectorias que habrá que generar para alcanzar cierta probabilidad de que el elipsoide de incertidumbre derivado del sensor de fuerza sea atravesado por una trayectoria de la esfera. Como puede apreciarse, las probabilidades se reducen muy rápidamente ante pequeños incrementos de la incertidumbre del robot. Esto puede imponer la necesidad de generar muchas trayectorias.

5.3.4. Consideraciones sobre la capacidad de discriminar trayectorias

Es fácil deducir que una única medida, sea de fuerza o par, no bastará para determinar la forma de la membrana, dado que múltiples trayectorias diferentes pueden dar lugar a una misma medida. Por ejemplo, la medida de fuerza F_x de las Figs. A.4 o B.3 es

Trayectorias	$\sigma_{robot}(mm)$	$P(a_x < X \leq b_x)$	$P(a_y < Y \leq b_y)$	$P(a_z < Z \leq b_z)$	P_t
Paralelas		(-1,06 + 1,06)	(-1,06 + 1,06)	(-0,139 + 0,139)	
	0,05	1,000	1,000	0,995	0,9950
	0,10	1,000	1,000	0,835	0,8350
	0,20	1,000	1,000	0,514	0,5140
	0,30	0,999	0,999	0,359	0,3583
	0,40	0,992	0,992	0,274	0,2696
	0,50	0,966	0,966	0,221	0,2062
	1,00	0,711	0,711	0,111	0,0561
	2,00	0,4054	0,4054	0,0547	0,0090
4,00	0,2107	0,2107	0,0261	0,0001	
Radiales		(-0,077 + 0,077)	(-0,077 + 0,077)	(-0,142 + 0,142)	
	0,05	0,876	0,876	0,995	0,7635
	0,10	0,559	0,559	0,844	0,2637
	0,20	0,302	0,302	0,523	0,0477
	0,30	0,204	0,204	0,366	0,0152
	0,40	0,154	0,154	0,279	0,0066
	0,50	0,123	0,123	0,225	0,0034
	1,00	0,061	0,061	0,114	0,0004
	2,00	0,0292	0,0292	0,0559	0,00005
4,00	0,0133	0,0133	0,0268	0,000005	

Cuadro 5.6: Probabilidad de que una trayectoria pase por un elipsoide de incertidumbre derivada del sensor de fuerza según la incertidumbre del robot y según el tipo de trayectorias (unidades para X, Y, Z en mm).

invariable ante el cambio de la posición de la esfera sobre el eje Y . La misma insensibilidad se observa para la fuerza F_y respecto a las posiciones de la esfera sobre el eje X . Esa circunstancia obliga al uso de más de una medida. En esta sección se intentará dar respuesta a tres cuestiones:

1. ¿Es posible determinar de manera inequívoca la forma de la membrana haciendo uso de las medidas de fuerza y par?
2. ¿Cuáles son las medidas necesarias?
3. ¿Hasta dónde se puede llegar en la discriminación de trayectorias usando estas medidas?

La respuesta a la primera cuestión es *no*. El motivo es que incluso haciendo uso de toda la información disponible de fuerza y par, existen trayectorias diferentes que generan medidas tan similares que no pueden discriminarse (Ítem 1), o incluso todo lo contrario, medidas bien distintas para trayectorias similares que generan formas parecidas (Ítem 2):

1. Por ejemplo, no podrá discriminarse ninguna trayectoria paralela dentro de un área de 1 cm^2 si el criterio es que su diferencia en fuerzas respecto a la trayectoria central sea mayor de $\pm 0,15 \text{ N}$ (Figs. A.4, A.5 y A.6). Esas trayectorias pueden generar formas de la membrana bien distintas.
2. En cambio, manteniendo el mismo criterio anterior, el área que podremos discriminar será menor de 1 mm^2 asumiendo trayectorias radiales (Fig. B.9). Esas trayectorias generan formas de la membrana muy parecidas.

Respecto a la segunda cuestión, hay que plantearse si conviene usar medidas de fuerza, par, o ambas. Dado que se trata de medidas independientes y complementarias conviene hacer uso de ambas para reducir la incertidumbre (Cap. 3). No obstante, la magnitud de la medida de par es prácticamente nula en su componente T_z para todos los caminos, como se desprende de los tests paralelo y radial (anexos A y B) con lo que no influye en el resultado.

La tercera cuestión requiere de un mayor desarrollo. Para ello, en principio se analiza la relación entre las medidas fusionadas y las trayectorias que las generan para un contexto concreto: malla de 61×61 nodos con 4 muelles por nodo, trayectorias limitadas al camino $C1$, y generación de 100 trayectorias atendiendo a lo indicado en la Sec. 5.1, con una incertidumbre en el robot de 1 mm en cada coordenada. Los resultados de la fusión se muestran en las Figs. C.1 a C.8 (anexo C). En ellas se representan solamente seis trayectorias: la de referencia -en color rojo- y las cinco con mejores resultados. La trayectoria de referencia es la trayectoria real seguida por la esfera, que se pretende determinar a través de la exploración aleatoria del espacio de probabilidades. Las cinco mejores trayectorias son aquellas con mayor peso en la fusión y se representan con los colores anaranjado, amarillo, azul, cian, y negro, en orden descendente de pesos.

Las Figs. C.1 y C.2 presentan el resultado de usar las componentes de fuerza F_x y F_y separadamente (no se trata de fusión en este caso), y muestran claramente cómo se seleccionan aquellas trayectorias cuyas proyecciones sobre los planos XZ ó YZ , respectivamente, tienden a ser paralelas a la de referencia. No obstante, cabe observar cómo, en ambos casos, la mejor trayectoria no es precisamente la más próxima a la trayectoria de referencia.

De la observación de las mejores trayectorias puede concluirse que todas tienen su punto de origen desplazado respecto a la trayectoria de referencia, y mantienen un ángulo no nulo. Las simulaciones muestran que la medida de fuerza de esas trayectorias en su punto de destino puede descomponerse en dos sumandos: uno relacionado con la medida de fuerza de una trayectoria paralela y otro relacionado con la medida de fuerza de una trayectoria radial, ambas compartiendo el origen

$$\Delta_{\mathbf{F}} = \Delta_{\mathbf{d}}\mathbf{S}_{\mathbf{p}} + \Delta_{\mathbf{a}}\mathbf{S}_{\mathbf{r}}$$

donde Δ_d es el desplazamiento y Δ_a es el incremento angular, ambos relativos a la proyección sobre el plano considerado, y S_p y S_r son la sensibilidad paralela y radial, respectivamente. La Fig. 5.15 concreta este planteamiento, donde la trayectoria simulada tiene el punto de origen desplazado 20 mm sobre el eje X y su proyección sobre el plano XZ presenta un incremento angular de $1,61$ grados ($0,02816\text{ rad}$). En este caso, $\Delta_d = 0,020\text{ m}$, $S_p = 30\text{ N/m}$, $\Delta_a = 0,02816\text{ rad}$, y $S_r = 28,7\text{ N/rad}$ (cuadros 5.2 y 5.3). Así, la contribución paralela es de $0,02 \times 30 = 0,6\text{ N}$ y la contribución angular es de $0,02816 \times 28,7 = 0,81\text{ N}$, ambos en valores absolutos. Para determinar los signos de cada parte hay que atender a lo que sigue:

1. Los incrementos en las fuerzas de reacción de la membrana debidas a un desplazamiento positivo sobre su eje, son negativos
2. Los incrementos en las fuerzas de reacción de la membrana debidas a un incremento angular son positivos si el incremento angular es positivo (giro antihorario sobre el eje de rotación).

Por tanto, la fuerza resultante será $\Delta_F = -0,6 + 0,81 = 0,21\text{ N}$. Según sean estos signos y sus magnitudes asociadas puede darse la circunstancia de que el incremento de fuerza resulte nulo. Esto significa que la medida de fuerza simulada y la del sensor serán iguales, dando la apariencia de una trayectoria coincidente con la de referencia. Este efecto, que denominaremos **efecto de cancelación de fuerzas**, resulta pernicioso al inducir conclusiones erróneas, y da respuesta a la observación anterior. Un ejemplo de este problema se presenta en la Fig. 5.14. En ella aparecen las cinco trayectorias con fuerzas más similares a las de la trayectoria de referencia. Se han obtenido generando cien trayectorias aleatorias $\sim N(0, 1\text{ mm}^2)$. Puede apreciarse la diferente inclinación de las trayectorias que se sitúan a ambos lados de la de referencia, y cómo sobre el eje X la *mejor* trayectoria es justo la más alejada de la referencia, aquella de la que derivará la *peor* forma de la membrana.

Las Figs. C.3 y C.5 presentan el resultado de la fusión de las componentes de fuerza (F_x, F_y) y (F_x, F_y, F_z) , respectivamente. Cabe observar que la fusión (F_x, F_y) selecciona como mejor trayectoria una visualmente coherente con lo esperado pero, por contra, la fusión (F_x, F_y, F_z) sitúa la mejor trayectoria muy lejos de la de referencia.

La Fig. C.4 muestra el resultado de la fusión de las componentes de fuerza (F_x, F_y) junto con los pares (T_x, T_y) . Cabe resaltar el escaso impacto en el resultado respecto a la fusión sólo de las componentes de fuerza (F_x, F_y) (Fig. C.3).

En la Fig. C.6, además de las medidas de las componentes de fuerza (F_x, F_y, F_z) se considera la medida del ángulo de cada trayectoria respecto a la trayectoria de referencia. Ahora la selección es correcta ya que esta medida penaliza las trayectorias no paralelas.

La medida de momento angular no se considera ya que su sensibilidad es demasiado baja como para tener algún efecto apreciable en el resultado (Fig. A.38). Su sensibilidad

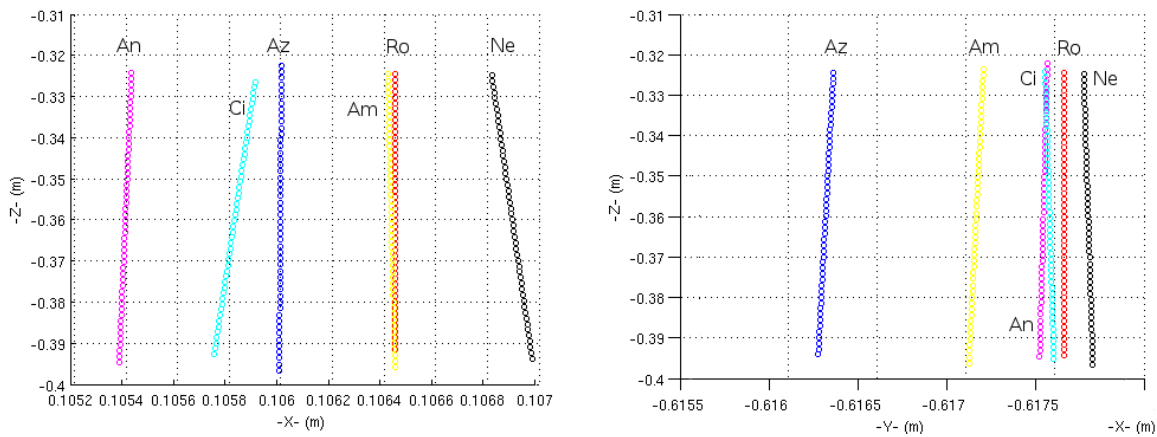


Figura 5.14: Trayectorias que generan fuerzas muy similares en las componentes X e Y .

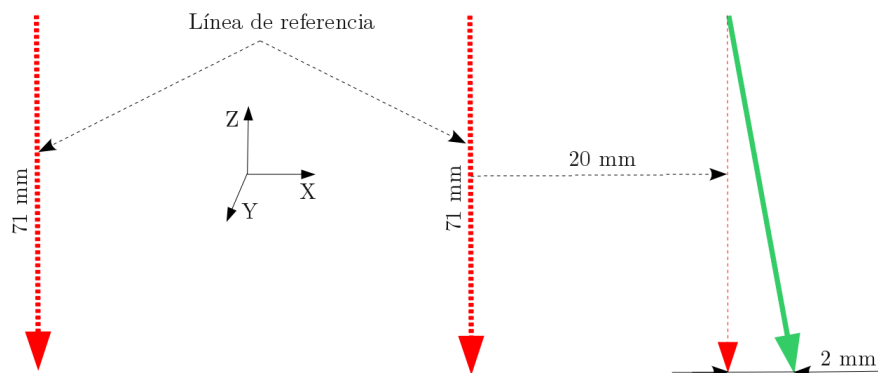


Figura 5.15: Efecto conjunto de una trayectorias radial y un desplazamiento respecto a la trayectoria de referencia.

puede mejorarse si no se consideran las masas situadas en planos XY próximos al plano de reposo. Esencialmente, estas masas son inamovibles en las trayectorias consideradas y, en cambio, tienen una considerable influencia en el resultado.

Dado que las trayectorias se generan de forma aleatoria, cabe la posibilidad de que no se genere la que se sabe es la mejor trayectoria. En las Figs. C.7 y C.8 se ofrecen los resultados para las mismas trayectorias anteriores pero eliminando la que hasta ahora era la mejor, sin considerar la medida angular primero y considerándola después. Obviamente, la que ahora se considera mejor trayectoria, no lo es en absoluto.

5.3.5. Conclusiones

A partir de un conocimiento incierto de la trayectoria real seguida por el robot cuando deforma la membrana y de un conocimiento también incierto de la fuerza de reacción de la membrana, en esta sección se analiza la probabilidad de identificar la trayectoria real, o bien alguna trayectoria similar, haciendo uso de la información de fuerza y par.

El procedimiento utilizado consiste en estudiar, en primer lugar, el comportamiento de las medidas cuando la membrana es deformada por trayectorias deterministas (Sec. 5.2) y, posteriormente, explorar el espacio de probabilidades generando un conjunto de trayectorias aleatorias (Sec. 5.1 y 5.3.4). Finalmente se contrastan las medidas de fuerza y par derivadas de cada una de esas trayectorias aleatorias con las mismas medidas obtenidas de los sensores en la trayectoria real del robot (Sec. 5.3.1). Los resultados, para el camino C_1 analizado, no son los deseados, por los motivos siguientes:

- En función de la incertidumbre del robot y de la incertidumbre de los sensores de fuerza y par puede ser necesario generar una cantidad tal de trayectorias aleatorias que haga impracticable el procedimiento elegido (Sec. 5.3.3).
- Diferentes trayectorias pueden generar la misma fuerza; es decir, la correspondencia entre trayectorias y fuerzas no es biunívoca (Sec. 5.3.4).
- Trayectorias diferentes que generan la misma fuerza pueden estar muy alejadas entre sí dando lugar a formas muy diferentes de la malla.
- La fusión de las medidas no mejora los resultados.
- La sensibilidad ante el test XZ es muy superior que ante el test XY y, en consecuencia, mejora la discriminación de las trayectorias asociadas al test XZ .

En resumen, únicamente es posible identificar las trayectorias *aproximadamente* paralelas a la trayectoria real, incluso si sus puntos de destino están muy próximos en su componente Z .

5.4 Fusión de la información visual

Como se ha visto en la sección precedente, con la información de fuerza y par no basta para poder determinar la forma de la membrana, con lo que se hace necesario el apoyo de otras medidas. En esta sección se analiza la capacidad discriminatoria de las trayectorias haciendo uso de la información visual.

5.4.1. La información visual

Para poder delimitar la forma del objeto se requiere información tridimensional y por ello se hace uso de un sistema de visión estéreo (Azevedo et al., 2009). La información visual está directamente relacionada con la forma de la membrana y ésta, a su vez, es consecuencia de la trayectoria seguida por la esfera, para unos parámetros dados de la membrana. Con objeto de poder estudiar la relación entre las trayectorias y la información visual se requiere que esta última sea de buena calidad. En este sentido, la información procedente de las cámaras de visión estéreo no es la más adecuada, por dos tipos de motivos fundamentales:

1. Errores en la información:

- La calibración de las cámaras es un proceso complejo.
- El ruido, a menudo, es difícil de modelar.
- Con frecuencia existen espurios.

2. Deficiencias en la información:

- Información incompleta por la existencia de zonas ocluidas.
- Dificultad de generar patrones.

Por todo ello, para el análisis, se hará uso de una información simulada carente de los problemas anteriores. Seguidamente se detalla el procedimiento implementado para simular esta información.

Procedimiento de generación de píxeles: La membrana se simula haciendo uso de una malla cuyos errores fueron analizados en la Sec. 4.2.7. Esa malla está conformada por cuadriláteros definidos por la posición de los nodos situados en sus vértices. Estos elementos de superficie sirven de base para determinar la ubicación de los píxeles. El procedimiento es el siguiente:

1. Se establece un patrón visual y, en base a él, se identifican los cuadriláteros que servirán de base para generar los píxeles.
2. De forma determinista se selecciona un triángulo dentro de cada cuadrilátero, y se ubica un píxel en su baricentro.
3. Se perturban las tres coordenadas del píxel de manera independiente siguiendo una pdf gaussiana de media nula y desviación tipo dada.

El patrón de píxeles utilizado en los ensayos es un rectángulo, que se define sobre la malla en reposo identificando sus vértices. La malla deformada sobre la que se definen los píxeles es la malla de referencia y la trayectoria que la genera es la trayectoria de referencia.

5.4.2. Procedimiento de fusión

Se hace uso del mismo procedimiento descrito en la Sec. 5.3.1 adecuándolo a la información visual. La diferencia fundamental está en la forma de determinar los pesos asociados a las medidas (ítem 1b en cuadro 5.4). A diferencia de las medidas de fuerza y par, que son pocas, la información visual es desbordante. De cada píxel se deriva una medida de distancia para cada trayectoria seguida por la esfera y son muchos los píxeles que pueden conformar la información visual. Así, para que esta información sea tratable, conviene limitar su número a un valor aceptable y, para ello, se procede a practicar una selección aleatoria con distribución uniforme.

Las medidas de distancia se obtienen según lo indicado en la Sec. 5.2.2 y sus pesos se derivan de la expresión

$$\tilde{w}_{s_k}^i = e^{-(y_{s_k}^i)^2/(2\sigma_s^2)}$$

donde $y_{s_k}^i$ se refiere a la distancia desde el píxel s hasta la malla derivada de la partícula i en el instante k , y σ_s es la desviación tipo de la información visual.

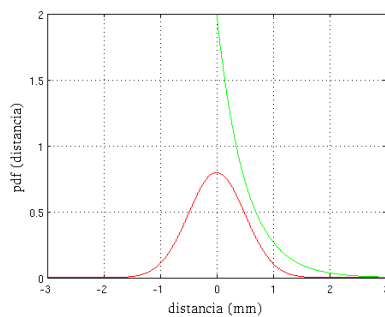
El proceso de fusión es el mismo usado para fuerzas y pares (cuadro F.19). No obstante, puede surgir un problema numérico como consecuencia de la multiplicación de muchos valores menores de la unidad y su posterior normalización. Para reducir este impacto se ha recurrido al uso de logaritmos.

5.4.3. Consideraciones estadísticas sobre las medidas de distancia

Se ha comprobado que la función de densidad de la probabilidad de las distancias píxel-malla, cuando la esfera que perturba la malla sigue trayectorias generadas como se indica en la Sec. 5.1, es aproximadamente del tipo exponencial. Las expresiones más significativas de esta distribución son dadas en la Fig. 5.16, donde el parámetro a caracteriza la distribución que tiene la particularidad de que su valor medio y desviación tipo coinciden. De la forma de esta distribución se interpreta que una gran parte de los píxeles se sitúan muy próximos a la superficie cuando ésta se perturba, o dicho de otro modo, la mayoría de las medidas de distancias son relativamente insensibles a la perturbación. Esto es razonable atendiendo a la forma en la que se generan los píxeles (Sec. 5.4.1) y sabiendo que la parte de la membrana situada en las proximidades del aro

apenas alterará su forma ante pequeñas perturbaciones acontecidas en zonas alejadas. Así, son pocos los píxeles que marcan las diferencias significativas y, en consecuencia, la información de máximo interés se situará en la cola de la distribución.

La distribución exponencial, usada para generar pesos, penaliza extraordinariamente las medidas situadas en la cola, en beneficio de las medidas más próximas al origen. Esto puede suponer un problema de severa exclusión en entornos inciertos, máxime cuando se fusionan muchas fuentes (píxeles). La Fig. 5.16 ofrece una comparativa de las distribuciones exponencial y gaussiana para una misma desviación tipo.



Distribución exponencial

$$p(y_{s_k}^i) = \frac{e^{-y_{s_k}^i/a}}{a}$$

$$\bar{y}_{s_k}^i = a$$

$$\sigma_{y_{s_k}^i} = a$$

Figura 5.16: pdfs gaussiana y exponencial para una desviación tipo de 0,5 mm.

5.4.4. Consideraciones sobre la capacidad de discriminar trayectorias

En esta sección se pretende determinar la precisión con la que es posible identificar aquellas formas de la membrana que más se ajusten a una forma de referencia. A partir de ahí es posible identificar las mejores trayectorias. Al igual que en el estudio del comportamiento de las medidas de fuerza y par, se hace uso de unos test deterministas para observar el comportamiento de la forma de la membrana cuando se la perturba. Como entonces, se hace uso de los tipos de trayectorias paralelas (Sec. 5.2.1) y radiales (Sec. 5.2.2) para perturbar la malla. El procedimiento empleado es el indicado en la Sec. 5.4.2, salvo en cuanto a la forma de derivar las partículas (ítem 1a en cuadro 5.4) en donde la excitación es ahora determinista.

En estos test, se hace uso de tres patrones de píxeles:

1. La *visión completa* simula la información visual perfecta; esto es, visión sin oclusiones y sin errores.
2. La *visión intermedia* simula un caso más real en el que se observa aproximadamente la mitad de la superficie; la otra mitad permanece ocluida.

3. La *visión reducida* simula un caso límite en el que solamente se observa una estrecha franja, permaneciendo oculta el resto de la forma.

El patrón lo conforman cien píxeles que se distribuyen aleatoriamente por la superficie de la malla delimitada por el propio patrón. Estos píxeles no están sometidos a incertidumbre y, en consecuencia, se sitúan sobre la superficie de referencia. Cabe destacar que el patrón completo contiene información visual incluso en la parte inferior de la esfera, circunstancia ésta que no acontece en el resto de patrones.

Resultados del test paralelo: En este test se generan 121 trayectorias paralelas entre sí, cuyos orígenes y destinos se distribuyen de manera equidistante sobre cuadrículas de 2 mm de lado (Fig. 5.2.1) y, según los planos sobre los que se sitúan estas cuadrículas, se trata del test *XY* o del test *XZ*. Se hace uso de mallas conformadas por 61x61 nodos con cuatro muelles por nodo, siendo 0,5 mm la desviación tipo empleada para generar los pesos derivados de las distancias píxel-malla.

Los resultados para el test *XY* se muestran en las Figs. D.1, D.2 y D.3 (anexo D). Puede apreciarse el empeoramiento en la capacidad de discriminar trayectorias conforme se restringe el campo de visión. Los colores de las trayectorias se refieren a los mejores pesos: anaranjado, amarillo, azul, cian y negro, por orden de mayor a menor peso, siendo el color rojo el correspondiente a la trayectoria de referencia.

Los resultados para el test *XZ* se muestran en las Figs. D.4, D.5 y D.6. Cabe destacar el fuerte empeoramiento en la capacidad de discriminar trayectoria incluso para una visión intermedia de la escena.

En el test *XY* puede apreciarse cómo en el caso óptimo de visión total, es posible discriminar claramente la mejor trayectoria. No obstante, si por azar esa trayectoria no se genera, aparecen cuatro trayectorias vecinas que generan los mismos pesos, haciendo imposible cualquier discriminación entre ellas. Para el caso de visión intermedia, puede observarse que, aún cuando se sigue discriminando la trayectoria de referencia, se reducen las diferencias de pesos entre las trayectorias vecinas y aparecen desequilibrios que favorecen a unas trayectorias frente a otras. Por último, cuando el campo de visión es reducido, se hace difícil discriminar entre algunas trayectorias, concretamente entre aquellas que comparten la misma coordenada sobre el eje *X* que la trayectoria de referencia. Cabe remarcar que los píxeles se han distribuido como si la cámara virtual que los genera se situara en el origen del eje *X* mirando hacia el lado positivo.

En el test *XZ* puede apreciarse cómo en el caso de visión total ocurre algo muy parecido al caso anterior, es decir, una excelente discriminación. No obstante, los resultados son claramente peores para las visiones intermedia y reducida. Para la visión intermedia, se aprecia un claro empeoramiento respecto al mismo caso del test *XY*, apareciendo una línea de trayectorias con pesos no despreciables. Los resultados para la visión reducida

son similares al caso de visión intermedia, sólo que aquí los pesos de varias trayectorias son comparables. Estos resultados son coherentes con el hecho de que los píxeles de debajo de la esfera se han eliminado en los casos de visión intermedia y reducida.

Resultados del test radial: En este test se generan 625 trayectorias como sigue: desde cada uno de los 25 puntos que conforman la cuadrícula de orígenes de trayectorias se generan 25 trayectorias con destino en cada uno de los puntos que conforman la cuadrícula de destinos de trayectorias. Según los planos sobre los que se sitúen estas cuadrículas, se tratará del test XY o del test XZ . Como antes, se hace uso de mallas conformadas por 61×61 nodos con cuatro muelles por nodo, siendo 0,5 mm la desviación tipo empleada para generar los pesos derivados de las distancias píxel-malla.

Los resultados del test XY se muestran en las Figs. E.1, E.2 y E.3 (anexo E). Las figuras a la izquierda muestran los pesos en función de cada trayectoria, identificadas por sus puntos de origen y destino, y numeradas según se indica en la Figs. (5.17). Las figuras a la derecha muestran las mejores trayectorias.

Los resultados del test XZ se muestran en las Figs. E.4, E.5 y E.6. Aquí no se muestran las imágenes correspondientes a las mejores trayectorias ya que los resultados no son claramente representables debido a que unas trayectorias se sitúan visualmente sobre otras.

En el test XY puede apreciarse una excelente discriminación para el caso de visión total dado que la trayectoria de referencia tiene un peso claramente diferenciado respecto al resto de las trayectorias. Se observa que las mejores trayectorias subsiguientes son aquellas vecinas en su origen y con el mismo destino que la trayectoria de referencia. La Fig. 5.17 presenta este caso con tres niveles de pesos: en color rojo la trayectoria de referencia, en cian sus vecinos inmediatos y, por último, en verde las trayectorias con el menor de los tres pesos. Cabe destacar que estas últimas no comparten el mismo destino que la trayectoria de referencia.

Para los casos siguientes se aprecia un deterioro en la capacidad discriminatoria. La visión intermedia presenta desequilibrios y una reducción de las diferencias entre los pesos aún cuando la trayectoria de referencia queda claramente identificada. En la visión reducida, desaparecen las diferencias entre pesos de aquellas trayectorias que comparten el mismo destino quedando enmascarada la trayectoria de referencia.

En el test XZ se aprecian peores resultados incluso para la visión completa, donde varias trayectorias que comparten destino presentan los mismos pesos que la trayectoria de referencia. No obstante, aquellas trayectorias con destinos distintos quedan claramente discriminadas. En las figuras correspondientes a las visiones parciales, emergen las trayectorias con destinos distintos al de la referencia empeorando la discriminación. Para la visión reducida este escenario empeora al presentar claros desequilibrios.

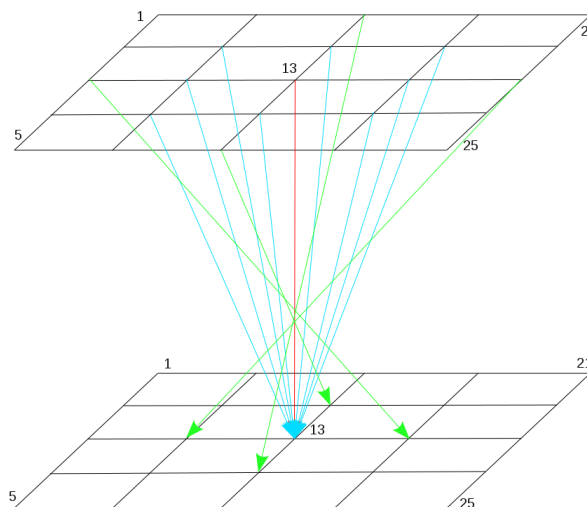


Figura 5.17: Mejores trayectorias radiales.

5.4.5. Conclusiones

Se ha llevado a cabo un estudio sobre la capacidad de la información visual de discriminar formas de la membrana que pueden aparecer cuando se la perturba a través de diferentes trayectorias deterministas seguidas por la esfera en el camino C_1 . Para ello se hace uso de un entorno de simulación en el que se generan diferentes patrones visuales (Sec. 5.4.1), formados por agrupaciones de píxeles derivados de una forma de la malla que constituye la forma de referencia. El procedimiento consiste en generar formas variadas, muy parecidas a la de referencia, y determinar hasta qué punto la información visual es capaz de discriminarlas (Sec. 5.4.4).

La medida utilizada es la distancia desde un píxel hasta cada una de las mallas generadas (Sec. 5.4.3). Como son muchas las fuentes de información visual, se hace necesario integrarlas en una sola siguiendo un procedimiento de fusión sensorial (Sec. 5.4.2). Dado que los píxeles generados no están sometidos a ninguna perturbación en estos ensayos, cuanto mayor sea el parecido entre las diferentes formas generadas y la forma de referencia menor será la distancia, llegando a anularse para la coincidencia.

Se han generados tres patrones visuales, uno ideal (patrón completo) y dos reales (patrones intermedio y reducido), junto con dos tipos de trayectorias deterministas (paralelas y radiales). Los resultados se comentan en la Sec. 5.4.4 y las conclusiones son las siguientes:

1. La información visual supone una herramienta potente, aunque no infalible, en la discriminación de formas, siempre que sea de calidad.
2. Incluso con una excelente información puede ser imposible discriminar ciertas

trayectorias (Fig. E.4).

3. Para una información visual con oclusión existen diferentes formas que pueden confundirse (Figs. D.3 y E.3).
4. Ante patrones visuales realistas, se discriminan mejor las trayectorias paralelas que las radiales, especialmente en el test XY .

5.5 Fusión de la información visual y de fuerza

El análisis individualizado de las informaciones visual y de fuerza en las secciones precedentes, conduce a la conclusión de que por separado son insuficientes para poder discriminar adecuadamente la trayectoria real seguida por la esfera y, por tanto, la forma de la membrana. No obstante, se observa que ambas fuentes de información se complementan en algunos aspectos, de forma que la debilidad de una puede ser fortaleza de la otra:

1. La información visual no es muy adecuada para discriminar trayectorias radiales (Figs. E.4 y E.3), en cambio, las fuerzas sí (Fig. B.9).
2. La información visual no discrimina bien las trayectorias situadas en planos XZ y, en cambio, esas trayectorias son las mejor discriminadas por las fuerzas.
3. La información visual discrimina bien las trayectorias paralelas (Sec. 5.4.4), la información de fuerzas no, dada su baja sensibilidad.
4. La información visual es muy sensible a la oclusión. La información de fuerzas no presenta este problema.
5. La información de fuerzas es incapaz de discriminar trayectorias en el camino C_1 por el efecto de cancelación de fuerzas (Sec. 5.3.4), pero es adecuada para identificar la trayectoria que mantiene la dirección más próxima a la real.

En esta sección se estudia la capacidad de discriminar trayectorias haciendo uso conjunto de ambos tipos de información.

5.5.1. Procedimiento de fusión para el camino C_1

El camino C_1 merece una consideración especial por dos motivos:

1. La membrana parte del reposo (estado conocido).

2. No existe información previa sobre los puntos de inicio o fin de las trayectorias del robot.

El ítem 2 obliga a realizar una exploración completa del espacio de probabilidades (Sec. 5.1). Una consecuencia inmediata de esta exploración es que las trayectorias generadas tendrán una elevada probabilidad de incurrir en el efecto de cancelación de fuerzas, lo que dará por buenas trayectorias que no lo son, destruyendo cualquier capacidad discriminatoria de la información de fuerzas y, en consecuencia, anulando sus posibles beneficios.

A fin de aprovechar la complementariedad de las informaciones visual y de fuerza, un posible enfoque consiste en generar trayectorias en dos fases:

1. **Primera fase:** se generan trayectorias aleatorias y se hace uso de la información de fuerzas para determinar la mejor dirección de entre las trayectorias de prueba utilizadas.
2. **Segunda fase:** se generan trayectorias a partir de puntos iniciales aleatorios con la dirección obtenida en la fase anterior.

En la primera fase se usan las fuerzas en su capacidad para discriminar la trayectoria con mejor dirección, y, en la segunda, se usa la información visual aprovechando su capacidad de discriminar trayectorias paralelas, además de la componente de fuerza F_z para discriminar trayectorias en el plano XZ . Con ello se saca provecho de las fortalezas asociadas a cada fuente de información. Además, existe otro beneficio: la probabilidad de que una trayectoria pase por el elipsoide de incertidumbre derivado del sensor de fuerza es mayor cuando se usan trayectorias paralelas (5.6). El inconveniente de este enfoque es que requiere realizar dos tipos de ensayos.

Otro posible enfoque consiste en hacer uso de las líneas centrales. Usando conjuntamente la información de fuerza y par se puede derivar la línea central asociada a cada malla. La dirección de esta línea es paralela a la fuerza resultante (Eq. 5.2) y, además, se dispone de un punto por el que pasa la línea (Eq. 5.1). Aunque este enfoque no requiere dos fases, presenta algunos problemas:

1. Las trayectorias no tienen por qué ser paralelas a sus líneas centrales asociadas. No obstante, para el camino C_1 son muy próximas.
2. El punto conocido sobre la línea central es relativo a un sistema de coordenadas local, cuyo origen depende de la posición del sensor de fuerza/par, y ese punto es incierto dado que el sensor está ubicado en la muñeca del robot.

En esta tesis se ha desarrollado el primer enfoque, posponiendo el segundo para un estudio posterior. Para su implementación se han desarrollado varios procedimientos derivados de los algoritmos SIR y ASIR, a los que se hará referencia como algoritmos AdSIR y AdASIR, donde el prefijo *Ad* es una abreviación de *Adaptado*. El cuadro F.7 (anexo F) indica el procedimiento general de actuación ejemplificado para el filtro AdSIR y válido para otros filtros.

Filtro AdSIR

El procedimiento seguido para implementar el filtro AdSIR se muestra en el cuadro F.11 y en los cuadros auxiliares F.13, F.18, F.19 y F.6. En ellos, las expresiones $(\mathbf{y}_{F_k}^i)$ e (\mathbf{y}_{F_k}) se refieren al vector correspondiente a la medida de fuerza simulada asociado a la trayectoria i y al vector correspondiente a la medida de fuerza del sensor, respectivamente. La función **DerivarPartículas()** (cuadro F.13) determina la dirección de la mejor de las trayectorias aleatorias utilizadas en la primera fase para luego, en la segunda fase, lanzar un conjunto de nuevas trayectorias siguiendo esa dirección (**EstablecerTrayectoria()**, cuadro F.15) hasta conseguir el nuevo estado (**PropagarEstado()**).

Dado que para el camino C_1 las trayectorias intersectan los planos paralelos al plano XY con ángulos próximos a 90° , para la fusión de la información se deben descartar las componentes X e Y tanto en la medida de fuerza como de par. Así se reduce el riesgo derivado del fenómeno de la cancelación de fuerzas. Por otra parte, cabe hacer dos observaciones sobre la idea de mantener invariable la dirección de la mejor trayectoria obtenida:

1. Es muy probable que exista alguna diferencia angular no nula entre la dirección de la fuerza derivada del sensor y la derivada de la mejor trayectoria.
2. Aún en el caso de que esa diferencia fuese nula, hay que considerar que el sensor está sometido a incertidumbre y, por ello, la dirección de él derivada no tiene porque ser exacta.

En base a estas observaciones, se puede plantear una variante sobre el algoritmo anterior consistente en perturbar la mejor dirección. Para ello, en la función **DerivarPartículas()** se debe sustituir la llamada a la función **EstablecerTrayectoria()** por la llamada a la función **EstablecerTrayectoria2()** (cuadro F.16). Algunos aspectos de esta función merecen ser comentados.

Sabiendo que la pdf de la información angular es del tipo Rayleigh (Sec. 5.3.2), se requiere aplicar un ajuste sobre la desviación tipo inicial de la fuerza, cuya pdf es gaussiana ($p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, con $\bar{x} = \mu$):

$$\alpha_d = \sqrt{(4 - \pi)/2} \arctan (\sigma_F / \|y_{F_k}\|)$$

$$\sigma_d = \sin (\alpha_d)$$

donde σ_F es la desviación tipo del sensor de fuerza e y_{F_k} es la medida del sensor. En el caso de que el menor ángulo entre la medida de fuerza del sensor y las medidas de fuerza simuladas α_{min} , sea inferior al propio ángulo derivado de la incertidumbre del sensor de fuerza α_d , se aplicará éste y no aquel. El siguiente paso consiste en perturbar el vector dirección \mathbf{d} con la desviación tipo σ_d . La técnica empleada consiste en perturbar el vector $\{0, 0, 1\}$ en un sistema de coordenadas esféricas, de manera que la elevación se deriva de una pdf gaussiana de media nula y desviación tipo $\sqrt{2} \sigma_d$, y el azimut se deriva de una distribución uniforme acotada entre 0 y 2π . Posteriormente se reubica este vector perturbado a la zona espacial que le corresponde, para lo cual se generen dos rotaciones en coordenadas cartesianas. La pdf angular obtenida aplicando este procedimiento resulta gaussiana pero sólo definida para valores positivos de la variable aleatoria, por ello su magnitud debe estar multiplicada por el factor 2,0. Por contra, cada una de las componentes de destino de las trayectorias sigue una pdf tipo Laplace. Ello justifica el uso del factor $\sqrt{2}$ aplicado a σ_d para asegurar que la desviación tipo final sea la deseada. La Fig. 5.18 presenta una comparativa entre estas distribuciones junto con las expresiones más significativas de la distribución de Laplace.

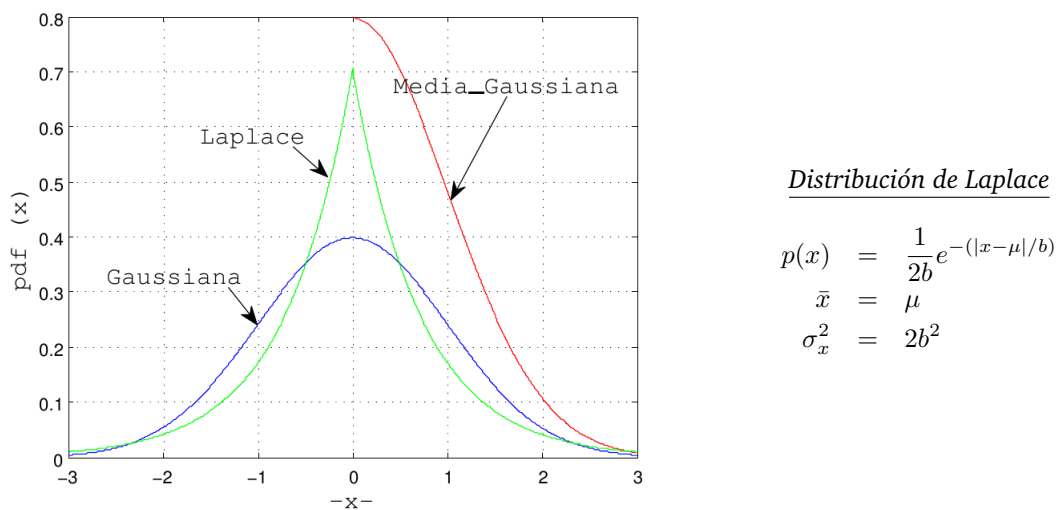


Figura 5.18: Comparativa entre distribuciones para $\sigma = 1, 0$.

Filtro AdASIR

Un problema del filtro AdSIR es que se generan trayectorias *a ciegas*, al no considerar las medidas, y la consecuencia es que esas trayectorias pueden no estar *bien dirigidas*. Por

ejemplo, si la trayectoria real seguida por la esfera ocupa un lugar de baja probabilidad situando sus puntos de origen y/o destino en la periferia del elipsoide de incertidumbre, la probabilidad de generar una trayectoria próxima será muy baja y, en consecuencia, el resultado de la fusión será probablemente malo. Un método para corregir este problema consiste en generar dos intentos, de los cuales el primero servirá para orientar al segundo haciendo uso de las medidas. En esencia esta es la idea del filtro AdASIR cuyo pseudocódigo se muestra el cuadro F.12 y en los cuadros auxiliares F.13, F.18, F.19 y F.6. Como puede apreciarse, cada fase se subdivide en otras dos, respetando la idea primaria de usar trayectorias paralelas, con lo que este procedimiento requiere generar cuatro conjuntos de trayectorias por camino.

El filtro AdASIR propuesto puede fácilmente modificarse de varias maneras:

1. Al igual que con el filtro AdSIR, se puede considerar o no perturbar la mejor dirección.
2. Dado que se hacen dos intentos buscando en cada uno de ellos separadamente la trayectoria mejor dirigida, una mejora consiste en elegir la mejor de entre ambos intentos. Ello es equivalente a dedicar el doble de partículas a tal fin. Esta idea es la utilizada en las pruebas cuyos resultados se muestran en la siguiente sección.
3. Otra idea, contraria a la anterior, consiste en suprimir la segunda búsqueda de la trayectoria mejor dirigida y mantener la anterior.

5.5.2. Resultados y conclusiones a la integración sensorial para el camino C1

Seguidamente se presenta una serie de resultados simulados y experimentales correspondientes a cada una de las diferentes implementaciones expuestas anteriormente, con las siguientes condiciones de operación:

- Malla fijada a un aro de 135 mm de diámetro, conformada por 3721 nodos distribuidos en 61 filas y 61 columnas, con 4 muelles por nodo con los coeficientes $S_r = 230 \text{ N/m}$, $S_b = 1100 \text{ N/m}$ y $S_c = 0,00053 \text{ m}$ y una precarga del 4%.
- Esfera de 1 cm de radio que avanza a una velocidad constante de 50 mm/s hasta llegar a destino.
- Integrador implícito de Young-Min Kang con un paso de integración de 1 ms. La integración concluye cuando la velocidad de todos los nodos se hace inferior a 10 $\mu\text{m/s}$, o bien al alcanzar las 5000 iteraciones luego de llegar la esfera a destino.
- Incertidumbre en el sensor de fuerza = $\{0,03 \quad 0,03 \quad 0,07\} \text{ N}$

- Incertidumbre en el sensor de par = $\{0,0025 \quad 0,0025 \quad 0,0014\} N.m$
- Incertidumbre en los píxeles = $\{0,5 \quad 0,5 \quad 0,5\} mm$ con 100 píxeles.
- Patrón visual medio.
- Incertidumbre posicional del robot especificada en cada caso.
- Incertidumbre angular del robot nula.
- Número de partículas especificada en cada caso.
- Trayectoria nominal de la esfera:

$$\{0,10645 \quad -0,61759 \quad -0,3230\} \rightarrow \{0,11645 \quad -0,61759 \quad -0,39439\} (m)$$

- Fusión probabilística.

El punto de destino nominal del camino C_1 se ha desplazado $+1 \text{ cm}$ sobre el eje X para alejar la trayectoria del centro exacto de la membrana y poder generalizar los resultados. Para esta trayectoria, la desviación tipo del ruido medido en la fuerza es de $\{5,0 \quad 2,5 \quad 25\} mN$ lo que, aplicando la sensibilidad de $\{30 \quad 30 \quad 480\} N/m$ (cuadro 5.2), supone un ruido en la posición de $\{0,17 \quad 0,083 \quad 0,052\} mm$.

Resultados simulados: Las medidas de referencia se obtienen a partir del estado simulado de la malla de referencia, la cual es generada por la trayectoria de referencia, que a su vez es conformada de manera aleatoria.

Los cuadros 5.7, 5.8 y 5.9 muestran las desviaciones tipo de los errores en los puntos de inicio y fin de las mejores trayectorias para diferentes configuraciones, y las Figs. 5.19 y 5.20 muestran estos mismos resultados de forma gráfica. En ellas, no se reflejan los valores medios ya que son despreciables frente a los valores de la desviación tipo y tienden a cero.

El cuadro 5.10 y las Figs. 5.21 y 5.22 muestran resultados estadísticos relativos a los errores en la forma de la malla. Como medidas para evaluar la calidad del ajuste de la forma se usan el error de distancia y el error de superficie. La medida del error de distancia se refiere a la media de las distancias desde cada nodo que conforma las mejores mallas detectadas hasta la malla de referencia. La medida del error de superficie es la diferencia entre la superficie de las mejores mallas detectadas y la superficie de la malla de referencia. De estos resultados pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Se consigue una reducción considerable de la incertidumbre en las trayectorias:

- Por ejemplo, para 100 partículas la incertidumbre en cuanto a la trayectoria real pasa a ser la mitad con el filtro AdSIR y la cuarta parte con el filtro AdASIR, aproximadamente.
- Son mejores los resultados para el filtro AdASIR con 50 partículas que con el filtro AdSIR con 100.
- Se consigue una reducción considerable de la incertidumbre en la forma de la malla:
 - Por ejemplo, para 100 partículas el filtro AdSIR reduce la incertidumbre en un 50 % en la medida de distancia y del orden del 70 % en la medida de superficie. Para las mismas partículas, el filtro AdASIR reduce la incertidumbre en un 70 % en la medida de distancia y del orden del 85 % en la medida de superficie.
 - Son mejores los resultados para el filtro AdASIR con 50 partículas que con el filtro AdSIR con 100.
- El incremento en el número de partículas no mejora de manera lineal los resultados, llegando a alcanzarse la saturación en el límite impuesto por la incertidumbre de los propios sensores.
- La idea de perturbar la mejor dirección mejora ligeramente los resultados obtenidos respecto a generar trayectorias absolutamente paralelas. No obstante, sólo se hace uso de esta idea en el cuadro 5.8.

Puede observarse que la componente Z en el origen de trayectorias presenta un mal comportamiento en todos los test. No obstante, hay que considerar que se trata del camino C_1 donde ese error no tiene consecuencias.

En resumen, los resultados simulados no dejan lugar a dudas sobre la mejora en la calidad de la información que puede obtenerse haciendo uso de las técnicas expuestas.

Resultados experimentales: Las medidas de referencia se obtienen directamente de los sensores, cuyas lecturas dependen del estado de la membrana y ésta, a su vez, está relacionada con la trayectoria real seguida por el robot.

El cuadro 5.11 muestra la media y la desviación tipo de los errores en los puntos de inicio y fin de las mejores trayectorias para un caso concreto. En él puede apreciarse un resultado comparable al del test simulado en cuanto a la desviación tipo (Fig. 5.23), pero no ocurre lo mismo con los valores medios. El motivo de la diferencia observada hay que buscarlo en el empeoramiento de la calidad de la información primaria donde, esencialmente, son dos los problemas encontrados: deficiencias en cuanto a la calibración de los sensores de fuerza/par y visión, y deficiente texturización de la membrana. Además, el

patrón visual utilizado se corresponde al reducido en las simulaciones, lo que justifica el incremento en la desviación tipo de la componente Y . Estos problemas tienen solución y con ello los errores de exactitud pueden ser corregidos. Así, y considerando que los errores de precisión son comparables a los arrojados por la simulación, queda confirmada la bondad del procedimiento seguido al conseguir una reducción muy significativa de la incertidumbre.

σ_{robot}	Partículas	Error en inicio de trayectoria	Error en fin de trayectoria
(X Y Z) mm		(X Y Z) mm	(X Y Z) mm
1,0	100	(0,43 0,41 1,47)	(0,46 0,38 0,58)
1,0	200	(0,49 0,29 1,66)	(0,50 0,24 0,64)
1,0	300	(0,48 0,25 1,87)	(0,37 0,25 0,48)
1,0	400	(0,33 0,28 1,64)	(0,28 0,29 0,43)
2,0	100	(1,02 0,77 2,59)	(1,03 0,72 1,02)
2,0	300	(0,81 0,63 2,62)	(0,69 0,57 0,66)

Cuadro 5.7: Error en la mejor trayectoria para 50 tests y AdSIR sin perturbación angular.

σ_{robot}	Partículas	Error en inicio de trayectoria	Error en fin de trayectoria
(X Y Z) mm		(X Y Z) mm	(X Y Z) mm
2,0	100	(1,08 0,87 2,87)	(0,77 0,85 0,85)

Cuadro 5.8: Error en la mejor trayectoria para 50 tests y AdSIR con perturbación angular.

σ_{robot}	Partículas	Error en inicio de trayectoria	Error en fin de trayectoria
(X Y Z) mm		(X Y Z) mm	(X Y Z) mm
2,0	50	(0,70 0,73 3,73)	(0,67 0,70 0,81)
2,0	100	(0,72 0,49 3,43)	(0,51 0,47 0,68)

Cuadro 5.9: Error en la mejor trayectoria para AdASIR sin perturbación angular (50 tests).

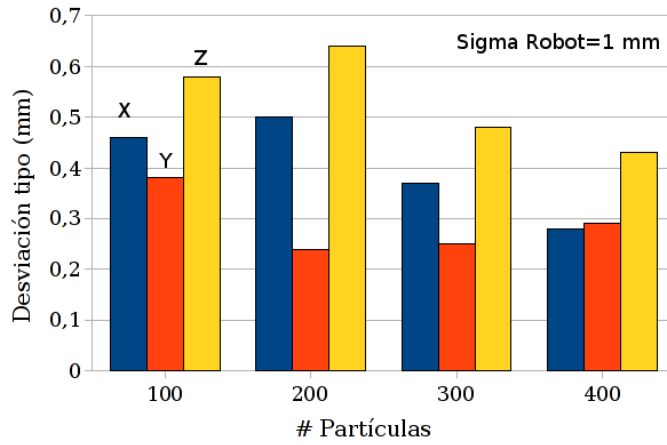


Figura 5.19: Desviación tipo del error de fin de trayectorias para el filtro AdSIR.

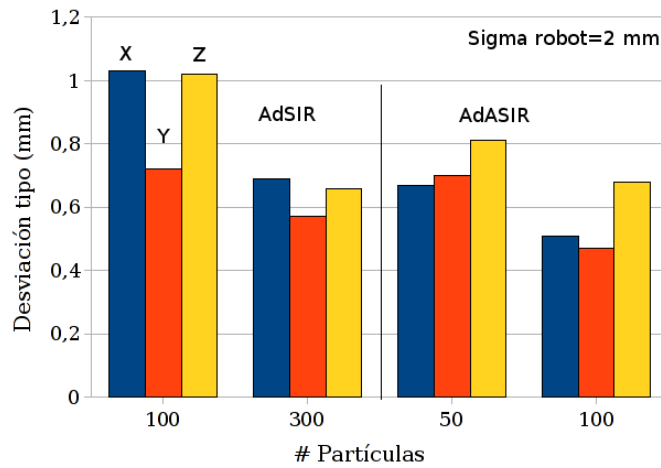
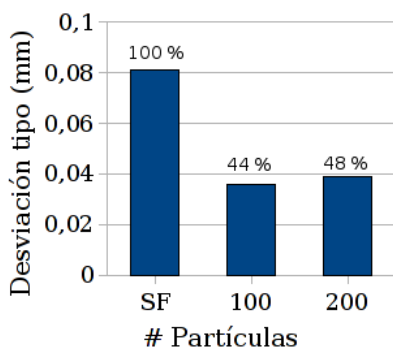
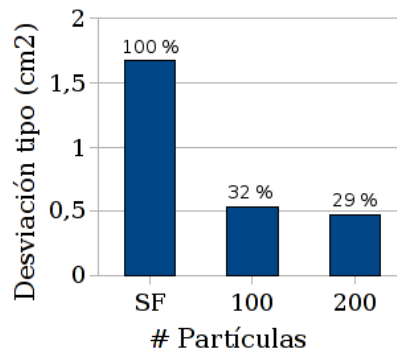


Figura 5.20: Desviación tipo del error de fin de trayectorias para los filtros AdSIR y AdASIR.



5.21.1: Error de distancia.



5.21.2: Error de superficie.

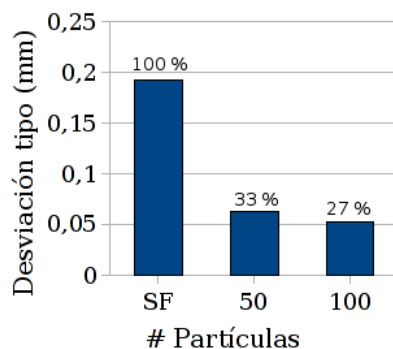
Figura 5.21: Desviación tipo de los errores de distancia y superficie para el filtro AdSIR con desviación tipo del robot de 1 mm (SF = sin filtro).

Filtro	Partículas	σ_{robot}	Medidas	Error Dist. (mm)	Error Superf. (cm ²)
Ninguno	200	1	Media	0,350 (100%)	-
			Desv. tipo	0,081 (100%)	1,67 (100%)
AdSIR	100	1	Media	0,107 (31%)	-
			Desv. tipo	0,036 (44%)	0,536 (32%)
AdSIR	200	1	Media	0,089 (25%)	-
			Desv. tipo	0,039 (48%)	0,477 (29%)
AdSIR	300	1	Media	0,073 (20%)	-
			Desv. tipo	0,027 (33%)	0,320 (19%)
Ninguno	200	2	Media	0,809 (100%)	-
			Desv. tipo	0,193 (100%)	3,45 (100%)
AdASIR	50	2	Media	0,174 (22%)	-
			Desv. tipo	0,063 (33%)	0,70 (20%)
AdASIR	100	2	Media	0,120 (15%)	-
			Desv. tipo	0,053 (27%)	0,51 (15%)

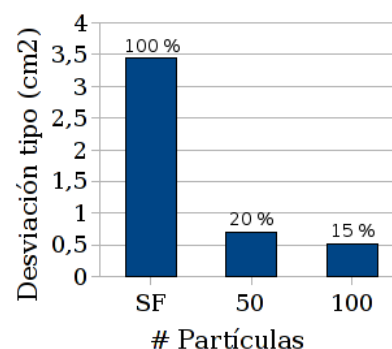
Cuadro 5.10: Errores en la forma para las mejores trayectorias detectadas (50 test).

σ_{robot}	Partículas	Medidas	Error en inicio de trayectoria	Error en fin de trayectoria
(X Y Z) mm			(X Y Z) mm	(X Y Z) mm
2,0	100	Media	(0,474 0,192 - 0,519)	(0,533 0,025 - 0,815)
		Desv. tipo	(0,499 0,688 3,664)	(0,490 0,709 0,453)

Cuadro 5.11: Error en la mejor trayectoria para 50 tests y filtro AdASIR. Resultados experimentales.



5.22.1: Error de distancia.



5.22.2: Error de superficie.

Figura 5.22: Desviación tipo de los errores de distancia y superficie para el filtro AdASIR con desviación tipo del robot de 2 mm (SF = sin filtro).

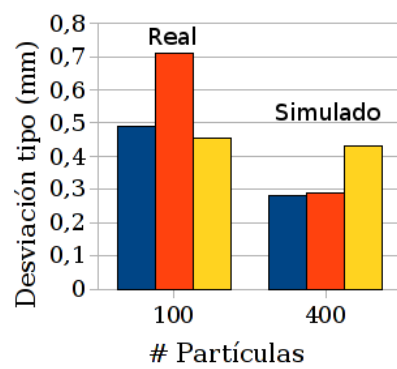


Figura 5.23: Desviación tipo del error de fin de trayectorias para los filtro AdASIR y AdSIR. Comparativa de resultados reales y simulados para condiciones óptimas.

6

Conclusiones y trabajos futuros

Esta tesis pretende contribuir a la resolución de un vasto problema: conseguir información de suficiente calidad a partir de fuentes inciertas. Para ello focaliza su estudio sobre el problema de la manipulación robotizada de un objeto deformable; en concreto se hace uso de una membrana de caucho natural. El reto no ha sido pequeño, ya que se ha tenido que crear todo un conjunto de herramientas, además de adquirir los conocimientos necesarios, para poder abordar el problema y conseguir resultados satisfactorios. En este sentido, merece una mención especial el esfuerzo requerido para implementar todo el software necesario (unas 36.000 líneas de código C++). Seguidamente, y a modo de conclusión, se hace un breve repaso a cada una de las siguientes contribuciones:

1. Diseño, implementación y validación del modelo exponencial de masas y muelles con el que se simula el comportamiento de la membrana.
2. Estudio del comportamiento de las fuerzas de reacción de la membrana ante diferentes tipos de excitación: identificación del efecto de cancelación de fuerzas.
3. Estudio del comportamiento de la información visual en relación con la forma de la membrana.
4. Diseño, implementación y validación de los filtros AdSIR y AdASIR para su uso como plataforma de integración sensorial.

6.1 Modelo exponencial de masas y muelles

Para que el robot pueda actuar debidamente cuando manipula objetos deformables se hace imprescindible disponer de información permanente y de calidad sobre la forma real del objeto. Para conseguirlo, además del uso de sensores, se requiere un modelo que aporte información de la forma a partir de la actuación del robot. Existen diferentes

estrategias para el modelado de objetos deformables, todas con sus respectivos pros y contras, de manera que no existe la ideal. Buscando un equilibrio, se ha optado por el modelo de masas y muelles al que se ha tenido que introducir cambios estructurales significativos para que resultara adecuado en el modelado de sistemas no lineales. El resultado es el modelo exponencial de masas y muelles presentado en el capítulo 4. La diferencia fundamental respecto al modelo clásico es la sustitución del coeficiente de elasticidad, constante para los muelles, por una dependencia exponencial con respecto a la elongación. Una pieza clave en la implementación del modelo es el integrador, ya que sobre él recae una gran parte de la eficiencia del sistema. En la Sec. 2.2.2 se muestran los principales algoritmos de integración, sus fundamentos, sus ventajas e inconvenientes y una comparativa entre ellos. El problema de la sintonía de los coeficientes de los muelles sigue latente, no obstante en la Sec. 4.3 se ofrece una serie de observaciones que facilitan el ajuste.

Desde una perspectiva experimental, se han hecho ensayos sobre mallas cuadrangulares con cuatro y ocho muelles por nodo con resultados positivos, apreciándose un buen comportamiento tanto en la reproducción de las fuerzas (cuadro 4.6) como de la forma (cuadro 4.7). No obstante, hay que matizar que la malla con cuatro muelles por nodo se comporta ligeramente mejor que la malla de ocho muelles por nodo ante las medidas de fuerza, y ligeramente peor ante las medidas de forma.

6.2 Comportamiento de las fuerzas de reacción

Para implementar cualquier estrategia que pueda conducir a la mejora de la información disponible, se requiere del conocimiento previo del comportamiento de la membrana ante la acción del robot. Dado que este comportamiento se concreta en la información de los sensores de fuerza, par y visión, se hace imprescindible dedicarles una atención especial.

La sección 5.2 dedica un amplio estudio al comportamiento de la fuerza de reacción de la membrana. Para ello se observa el comportamiento de la medida de fuerza ante todo un conjunto de excitaciones posibles por parte del robot y, de ahí, se deriva la relación existente entre la fuerza de reacción y la excitación de la malla, es decir, la sensibilidad. Este indicador permite modelar el comportamiento buscado y la consecuencia de su uso supone la manifestación de un problema oculto: el efecto de cancelación de fuerzas (Sec. 5.3.4). Este efecto explica el motivo por el cual diferentes excitaciones de la malla pueden provocar la misma lectura del sensor de fuerza y es parte fundamental en el desarrollo subsiguiente de esta tesis.

6.3 Comportamiento de la información visual

El efecto de cancelación de fuerzas hace imprescindible el uso de información complementaria a la de fuerza. En este sentido, la información visual aportada por una cámara estéreo es adecuada, a pesar de los problemas de calibración y de la sobrecarga computacional requerida para su tratamiento.

La Sec. 5.4.4 se encarga de analizar el comportamiento de esta información ante un conjunto de excitaciones posibles por parte del robot. De entre las conclusiones de este estudio (Sec. 5.4.5) cabe destacar que, para una información con oclusión, diferentes excitaciones pueden conducir a medidas muy parecidas, llegando a confundirse. Por otra parte, se ha constatado que la información visual y de fuerza se complementan bien, de forma que las debilidades de una son fortaleza de la otra, lo que lleva a pensar en su uso conjunto.

6.4 Integración sensorial mediante los filtros AdSIR y AdASIR

Para obtener una buena información sobre la forma de una membrana deformada se dispone de un modelo que reproduce razonablemente bien su comportamiento real, de un conocimiento probabilístico de la excitación del robot, y de información independiente (e incierta), cuyo comportamiento es suficientemente conocido, y que puede servir para compensar las deficiencias en el modelo y en la excitación. Con estos ingredientes, el objetivo ha sido conseguir una información de suficiente calidad.

De entre diferentes marcos posibles para la integración sensorial (Cap. 3), en esta tesis se opta por el marco probabilístico, y dentro de él se hace uso del filtro de partículas como plataforma de integración y de la ecuación de independencia condicional (Eq. 3.8) como procedimiento de fusión.

La Secs. 5.3, 5.4 y 5.5 analizan separadamente la fusión de fuerza, visual y conjunta, respectivamente. Se proponen diferentes procedimientos de integración que, en esencia, son adaptaciones de los algoritmos SIR (3.5.6) y ASIR (3.5.6), básicos de los filtros de partículas. El problema fundamental reside en adaptar estos filtros de forma que el proceso de integración esté exento del efecto de cancelación de fuerzas, de una parte, y que sea capaz de explotar los atributos favorables asociados a la información visual y de fuerza, de otra. La solución adoptada se concreta en los filtros AdSIR y AdASIR. La idea básica consiste en editar un conjunto de excitaciones probabilísticas simuladas (trayectorias probables seguidas por el robot), usar la información de fuerza para determinar la dirección de la mejor de ellas y, posteriormente, repetir el ensayo haciendo

que todas las trayectorias mantengan esa dirección (o alguna muy parecida) para dejar que la información visual discrimine a la mejor.

Los resultados alcanzados son muy aceptables (Sec. 5.5.2): se ha conseguido reducir la incertidumbre sobre la forma de la malla del orden de cuatro veces haciendo uso del filtro AdASIR con tan sólo 50 partículas.

6.5 Trabajos futuros

Seguidamente se exponen algunos aspectos que pueden ser considerados en futuros trabajos.

6.5.1. El modelo

- Determinar cuál es la precisión alcanzable con el modelo exponencial de masas y muelles. Para ello se requiere el uso de mejores medios: mejor plataforma experimental y mejores sensores, tanto de fuerza como de visión.
- Implementar y validar la malla triangular.
- Explorar el comportamiento del modelo ante otros tipos de objetos deformables, especialmente volumétricos.
- Mejorar el procedimiento de sintonía de los parámetros de elasticidad de los muelles.

6.5.2. Los filtros

- Realizar más ensayos para poder completar el comportamiento probabilístico en ambos filtros:
 - Concluir si la perturbación angular en el segundo intento aporta mejores resultados que el lanzamiento de trayectorias paralelas.
 - Establecer la función de densidad de la probabilidad que modele los resultados que cabe esperar en base a la trayectoria seguida por el robot.
- Estudiar el comportamiento de los filtros para los caminos C_2 y C_3 .
- Estudiar el comportamiento de las medidas y de los filtros ante perturbaciones rotacionales en el robot.

- Considerar la opción del uso de las líneas centrales como procedimiento para discriminar trayectorias (Sec. 5.5.1).
- Diseñar, implementar y validar nuevos filtros.

6.5.3. La fusión

- Analizar las prestaciones derivadas del uso de otros marcos para el tratamiento de la información imperfecta, entre ellos el evidencial y el posibilístico, como primeros candidatos.

A

Figuras del test paralelo en fuerzas y pares

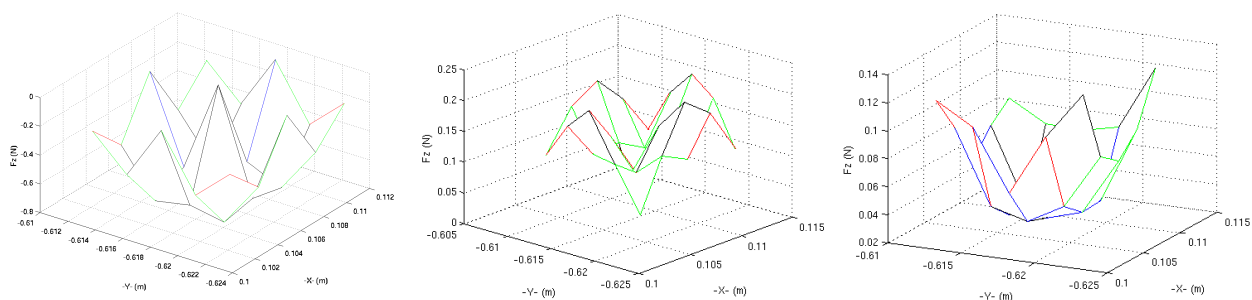


Figura A.1: F_z para mallas de 33x33, 47x47, y 61x61 nodos, 4 muelles por nodo, y camino C1.

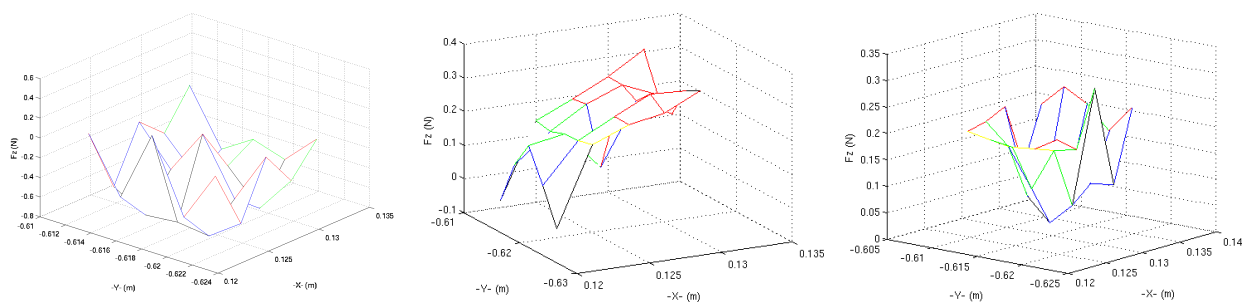


Figura A.2: F_z para mallas de 33x33, 47x47, y 61x61 nodos, 4 muelles por nodo, y camino C2.

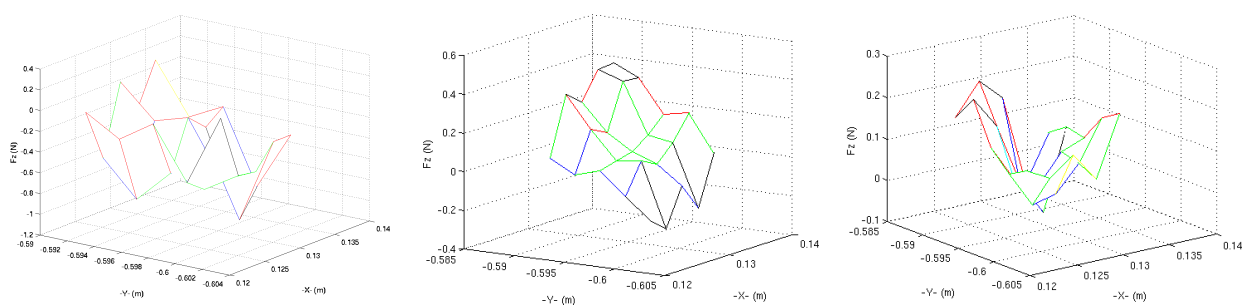


Figura A.3: F_z para mallas de 33x33, 47x47, y 61x61 nodos, 4 muelles por nodo, y camino C3.

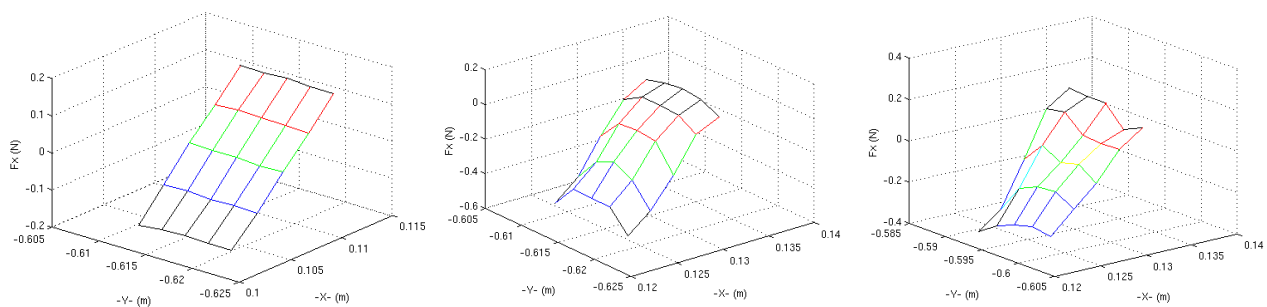


Figura A.4: Medidas de fuerzas sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

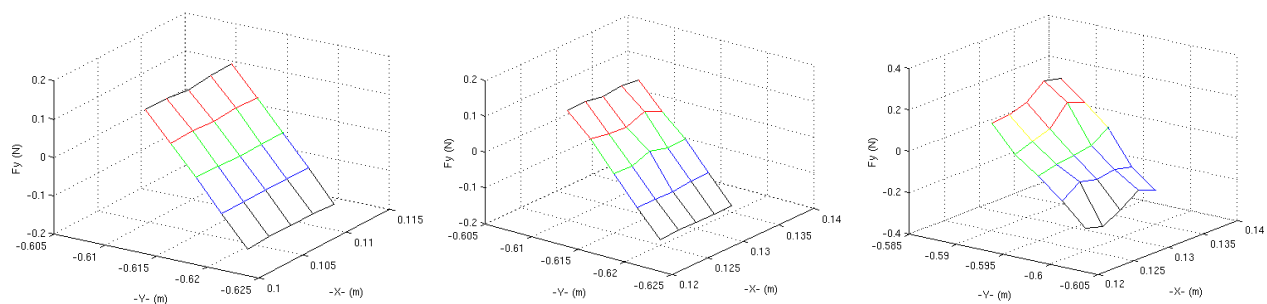


Figura A.5: Medidas de fuerzas sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

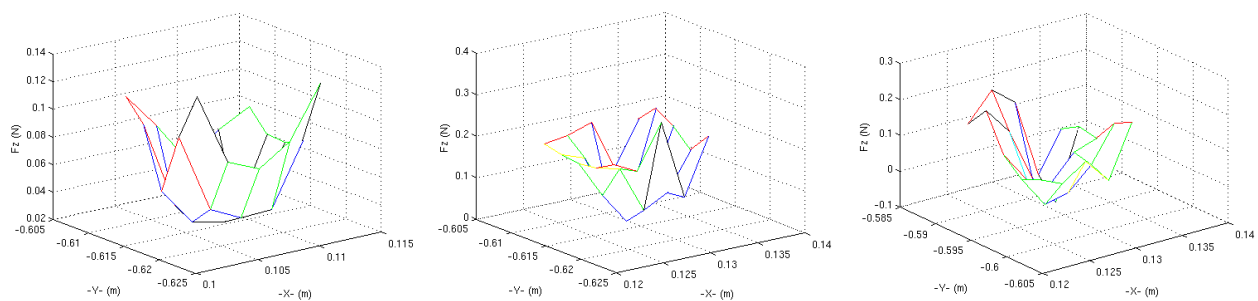


Figura A.6: Medidas de fuerzas sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

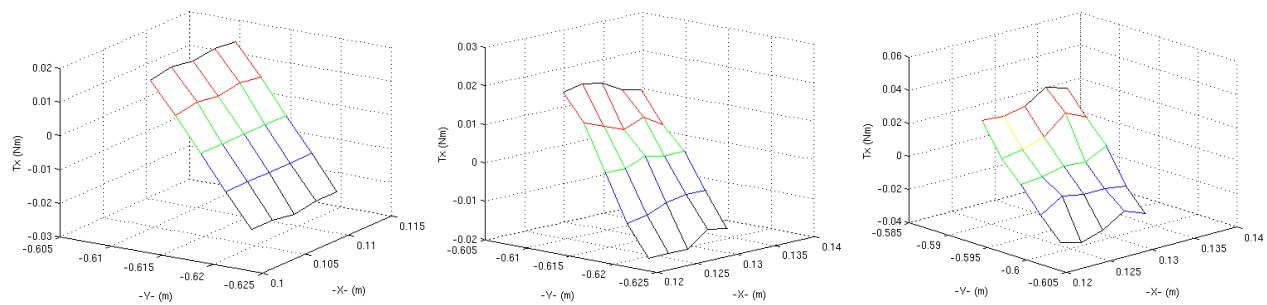


Figura A.7: Medidas de par sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

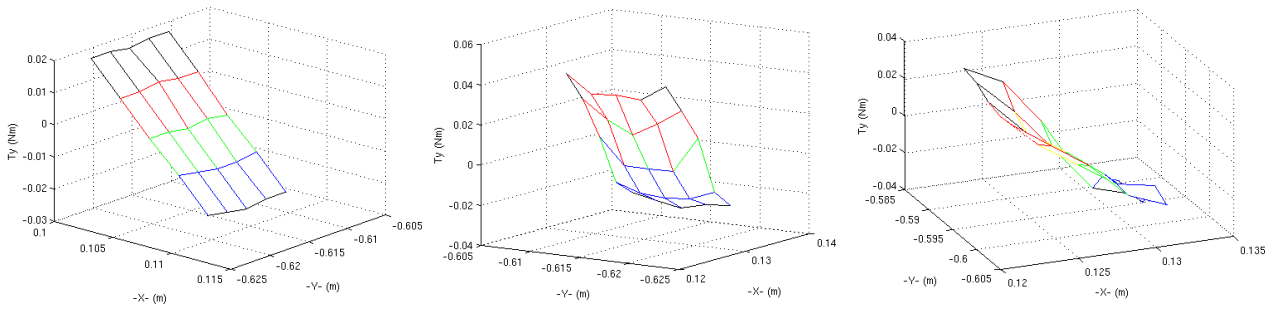


Figura A.8: Medidas de par sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

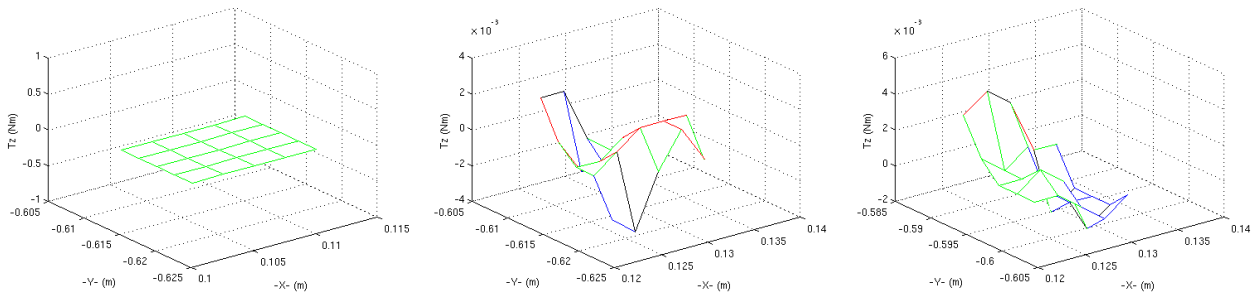


Figura A.9: Medidas de par sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

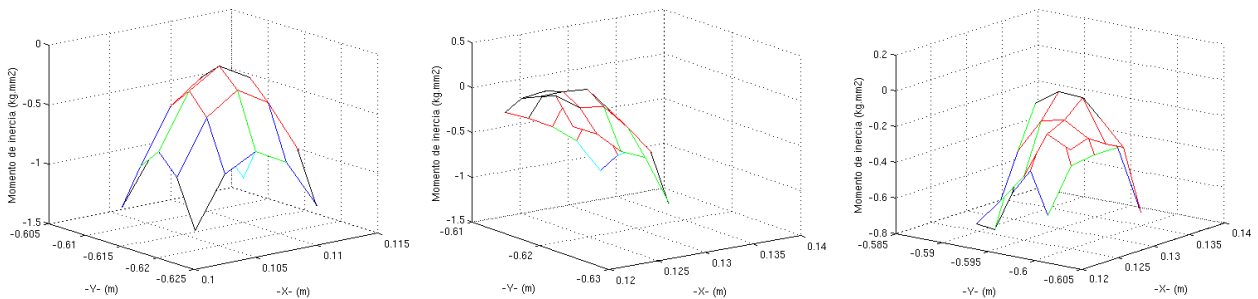


Figura A.10: Medidas de momento angular para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

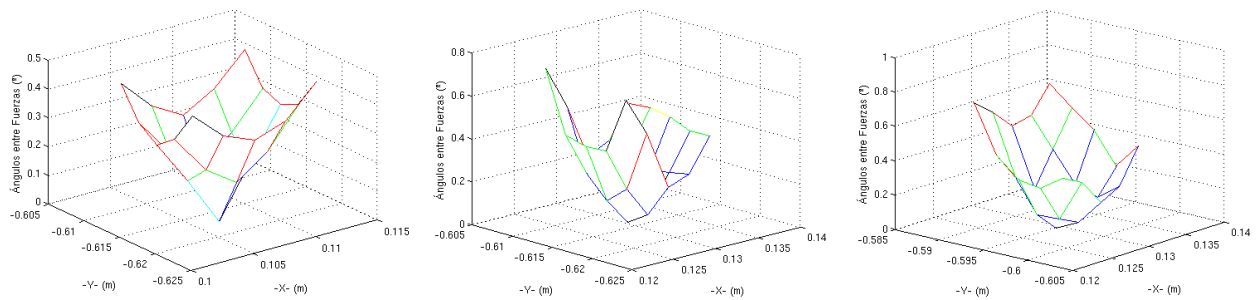


Figura A.11: Medidas de ángulos entre fuerzas para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY.

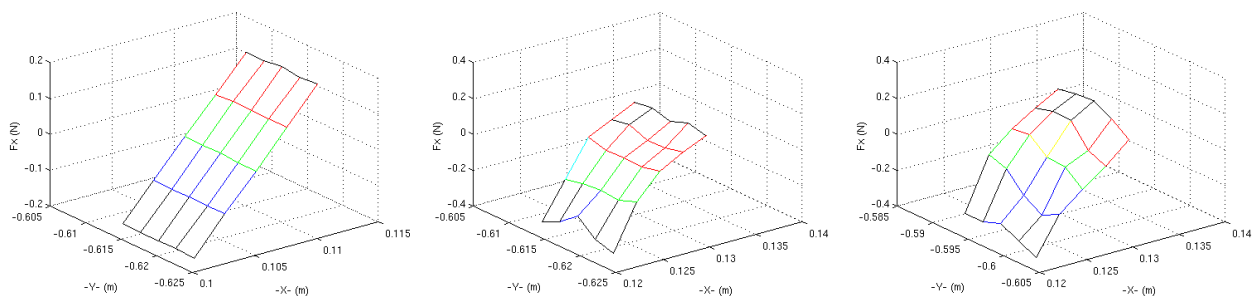


Figura A.12: Medidas de fuerzas sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

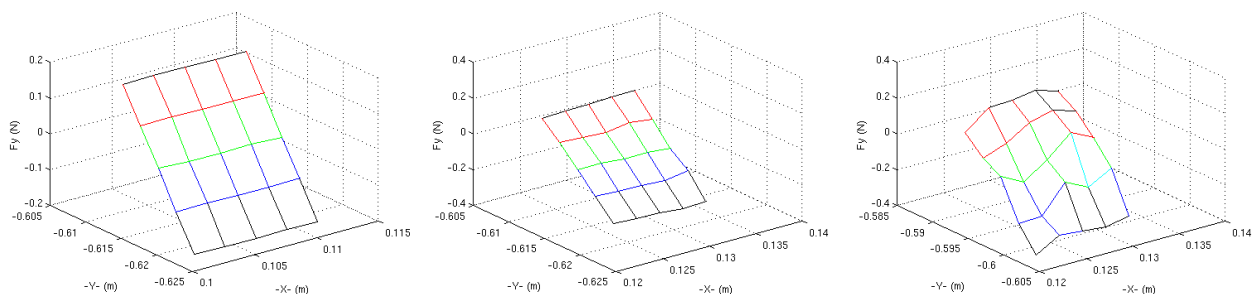


Figura A.13: Medidas de fuerzas sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

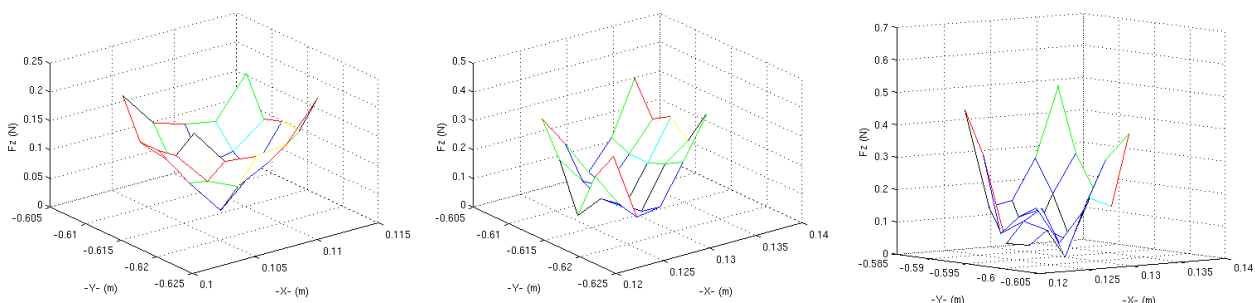


Figura A.14: Medidas de fuerzas sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

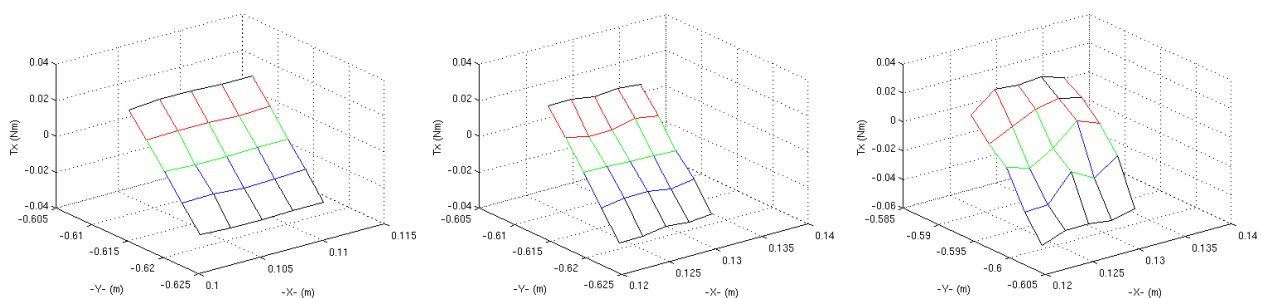


Figura A.15: Medidas de par sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

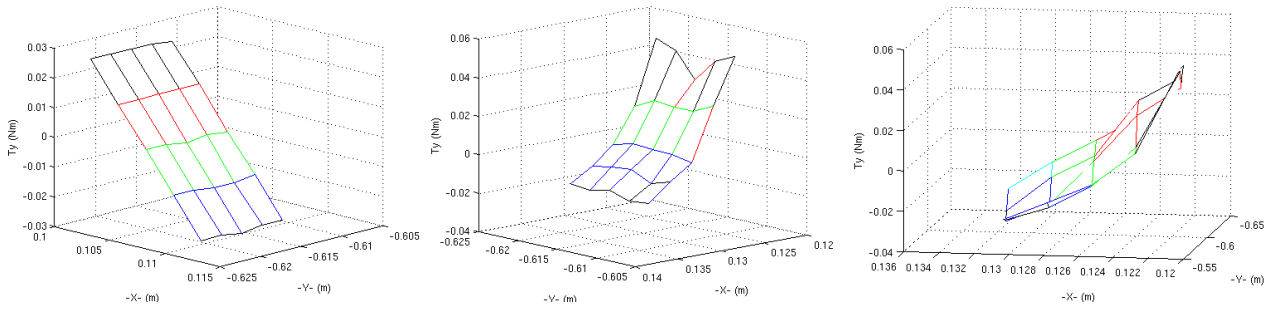


Figura A.16: Medidas de par sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

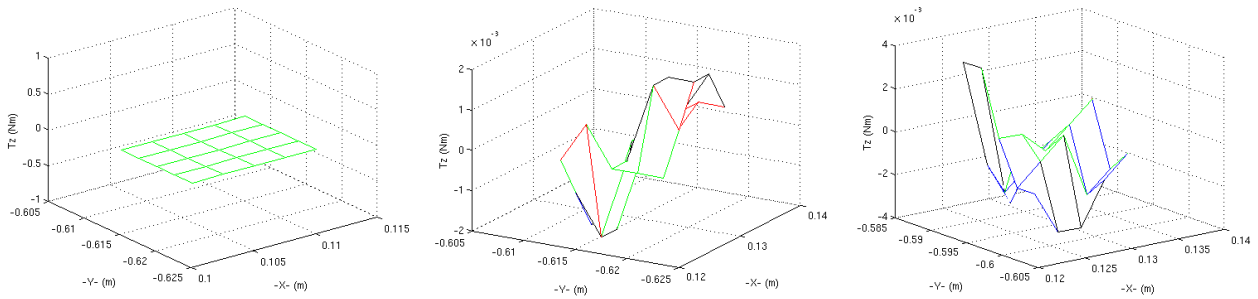


Figura A.17: Medidas de par sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

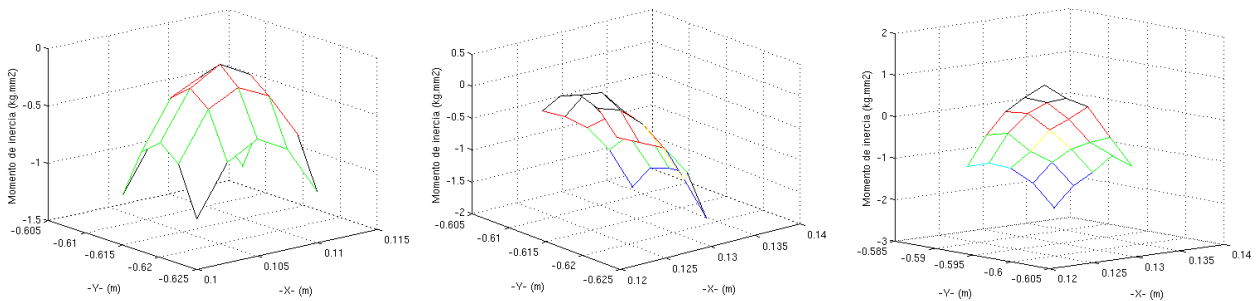


Figura A.18: Medidas de momento angular para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

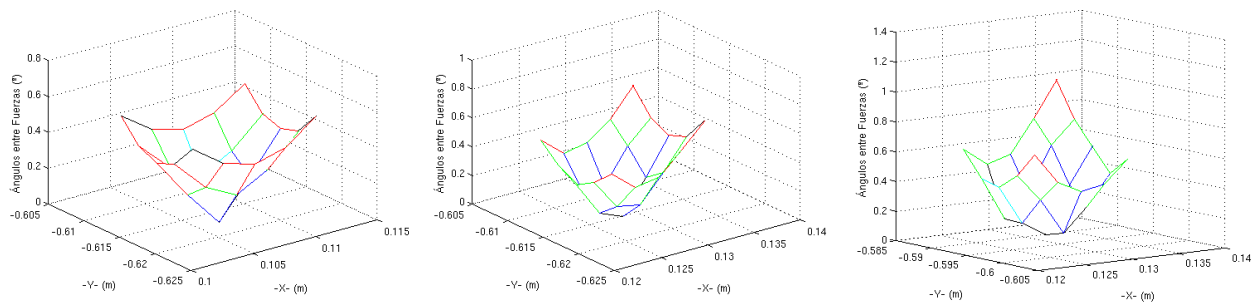


Figura A.19: Medidas de ángulos entre fuerzas para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XY y 8 m/n.

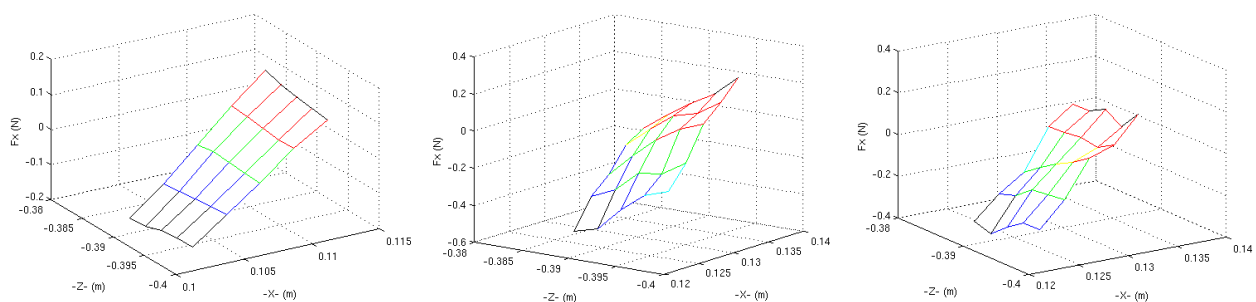


Figura A.20: Medidas de fuerzas sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

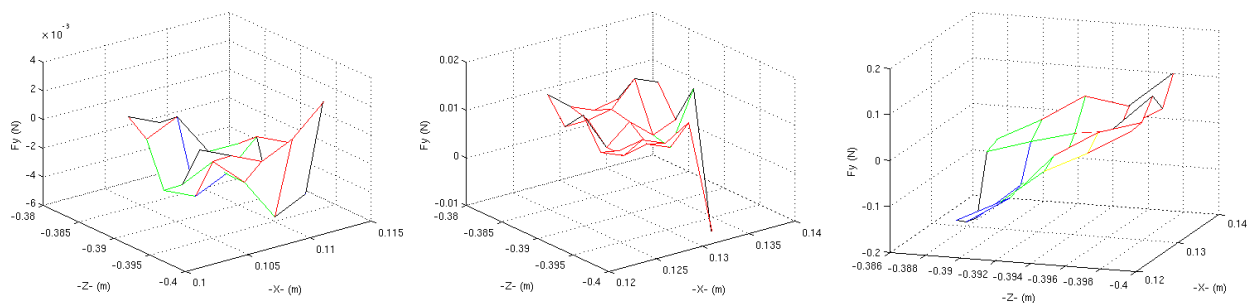


Figura A.21: Medidas de fuerzas sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

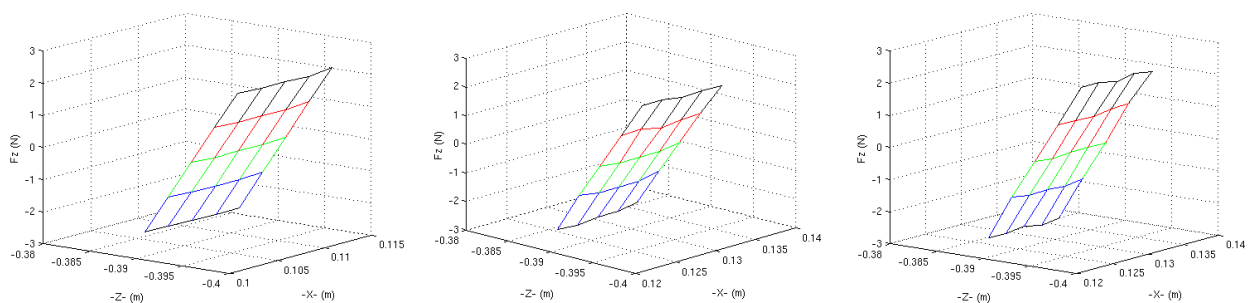


Figura A.22: Medidas de fuerzas sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

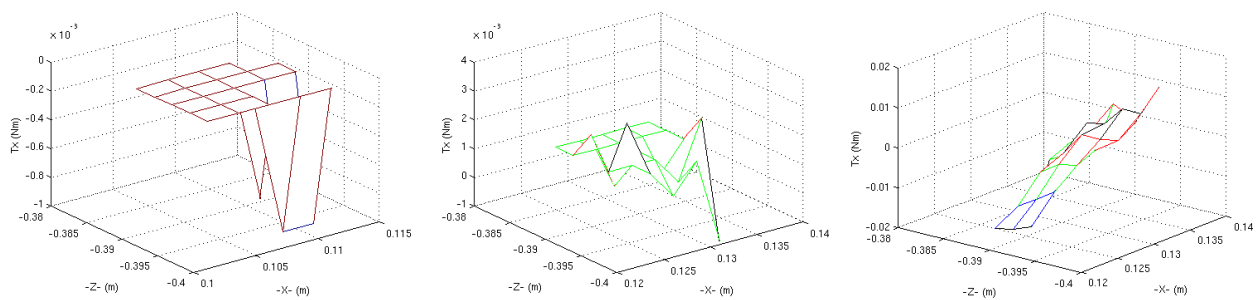


Figura A.23: Medidas de par sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

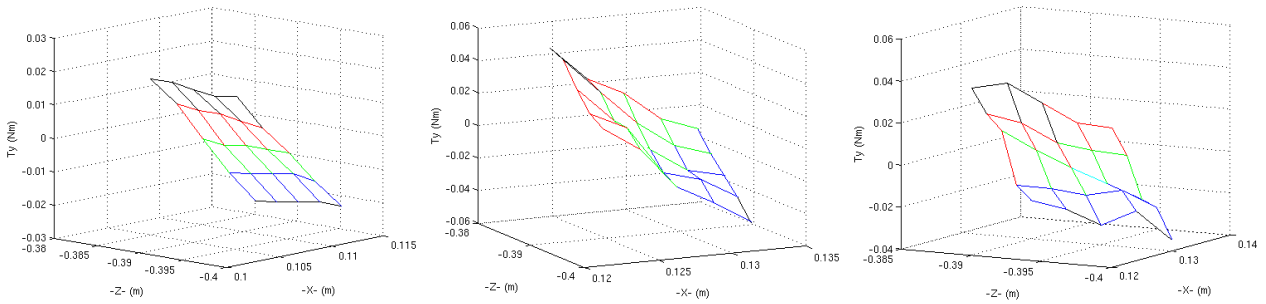


Figura A.24: Medidas de par sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

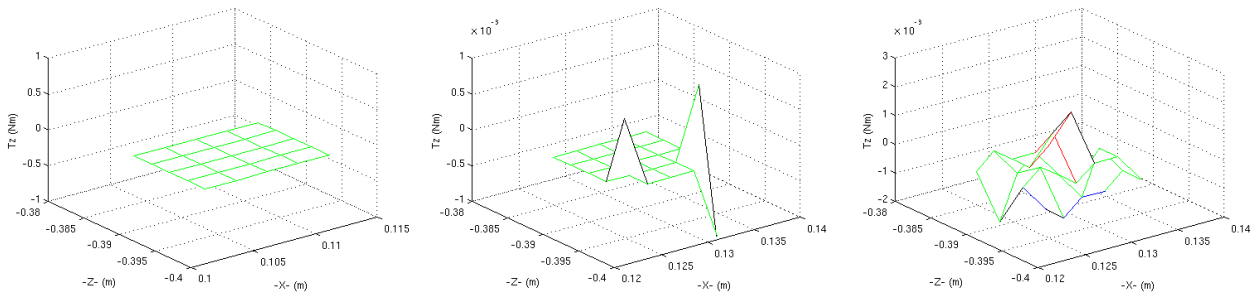


Figura A.25: Medidas de par sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

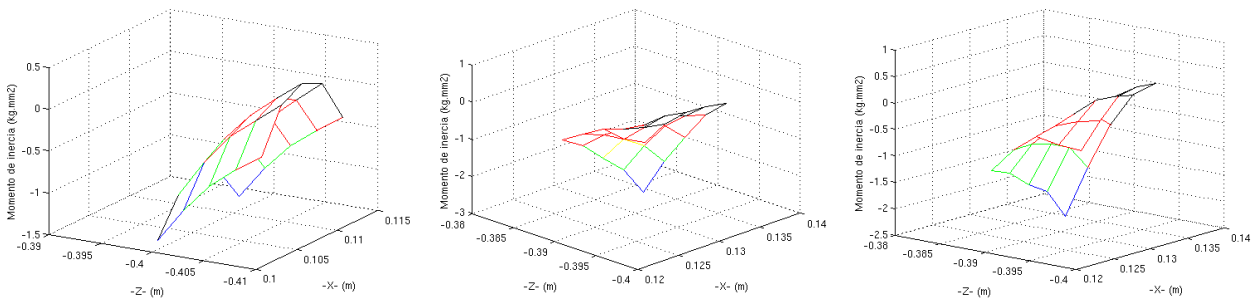


Figura A.26: Medidas de momento angular para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

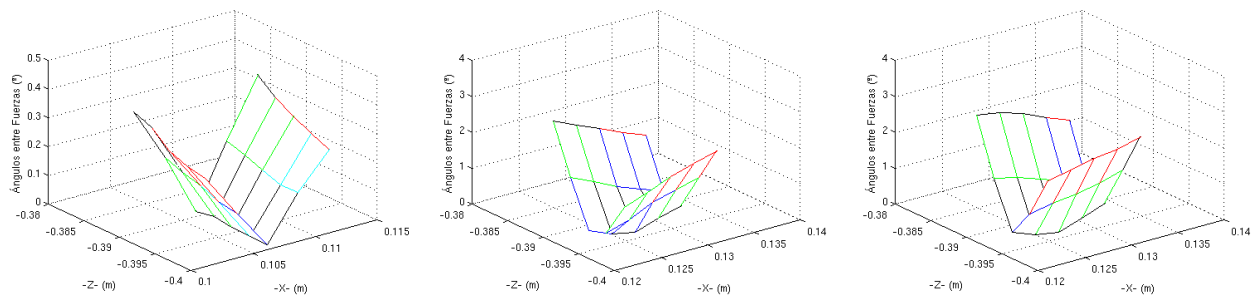


Figura A.27: Medidas de ángulos entre fuerzas para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ.

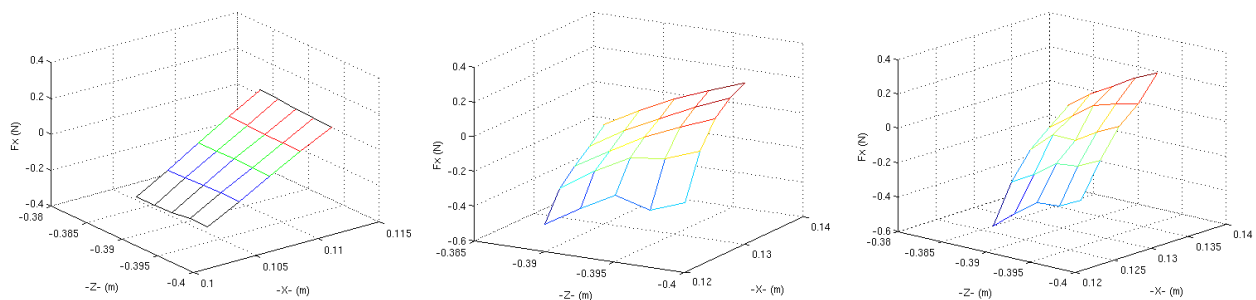


Figura A.28: Medidas de fuerzas sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

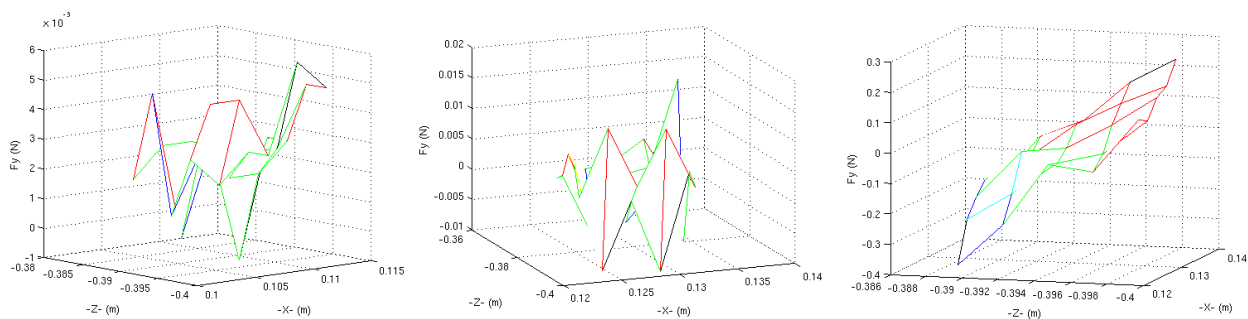


Figura A.29: Medidas de fuerzas sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

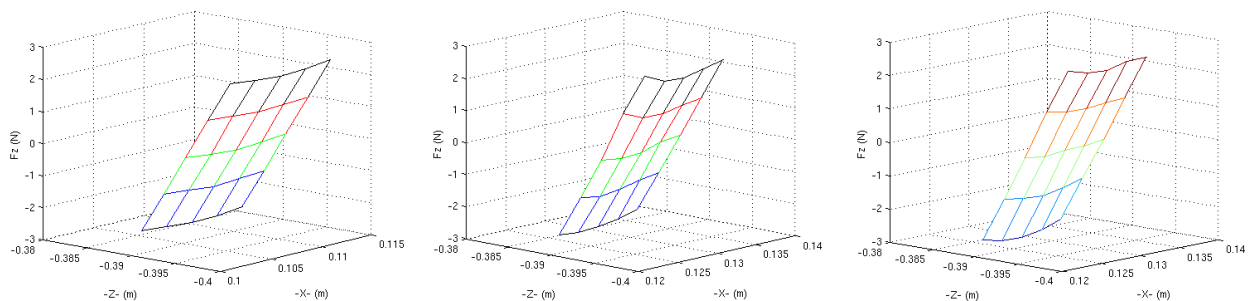


Figura A.30: Medidas de fuerzas sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

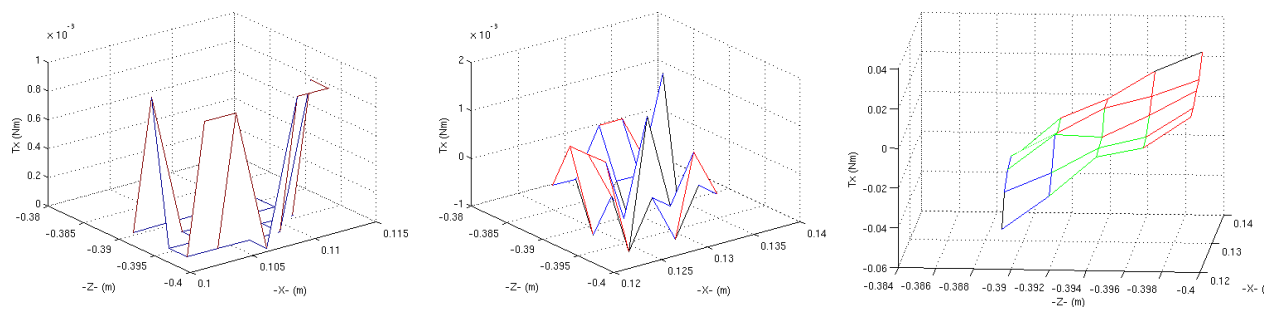


Figura A.31: Medidas de par sobre el eje X para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

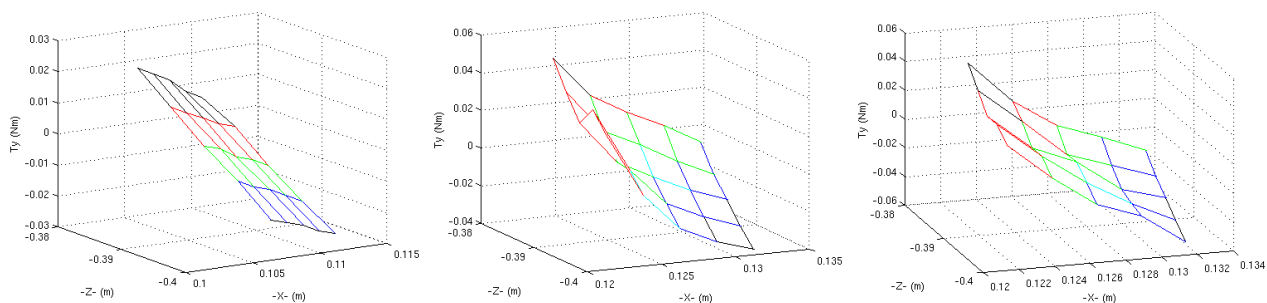


Figura A.32: Medidas de par sobre el eje Y para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

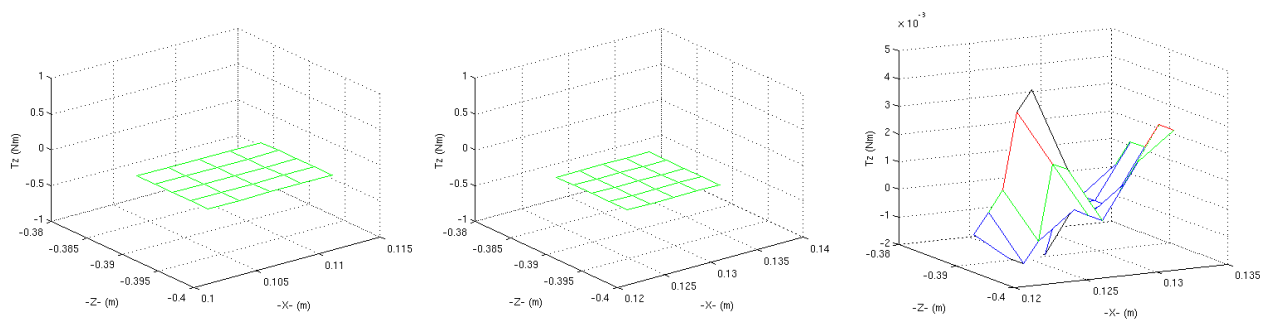


Figura A.33: Medidas de par sobre el eje Z para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

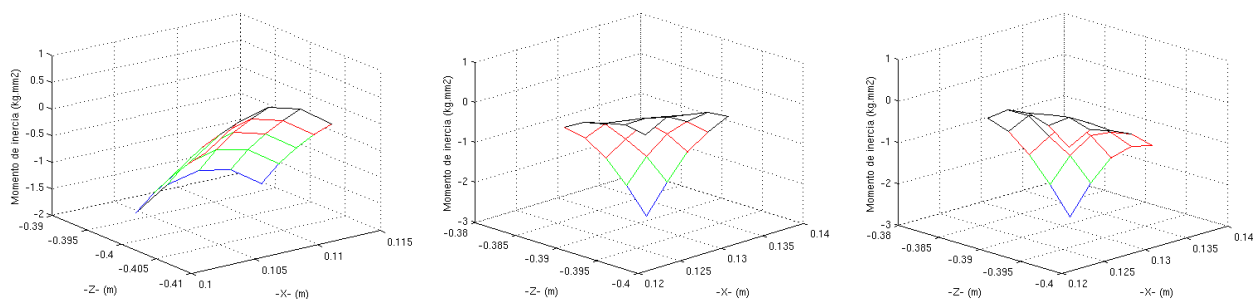


Figura A.34: Medidas de momento angular para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

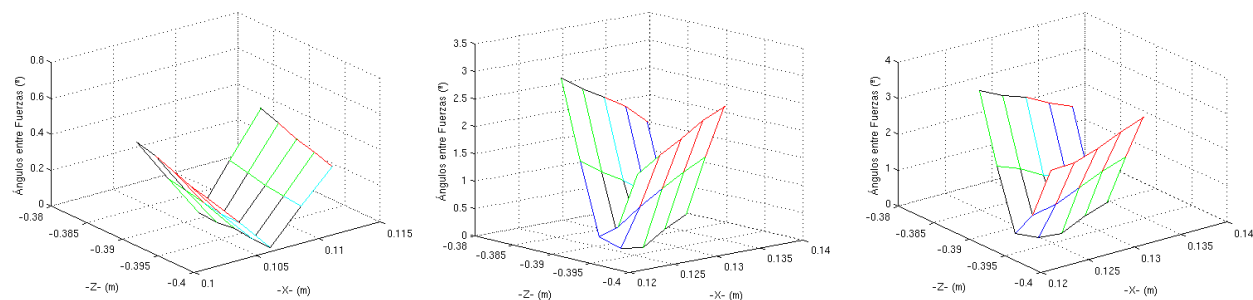


Figura A.35: Medidas de ángulos entre fuerzas para los caminos C_1 , C_2 y C_3 , con test XZ y 8 m/n.

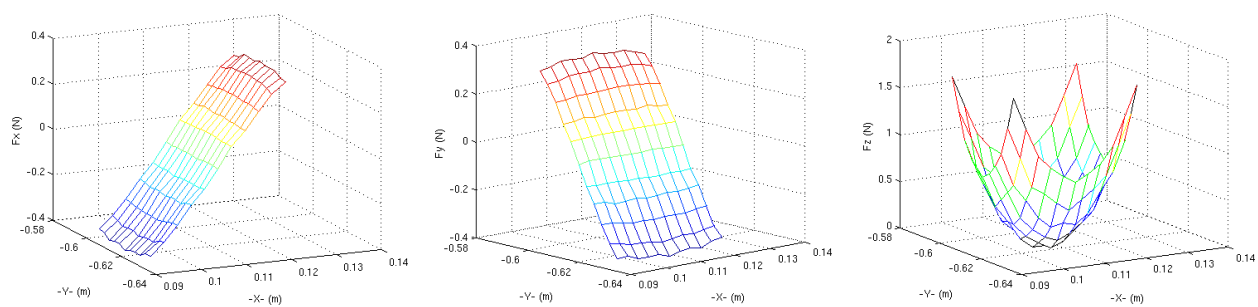


Figura A.36: Medidas de fuerza para camino C_1 , con test XY y explorando 3 cm^2 .

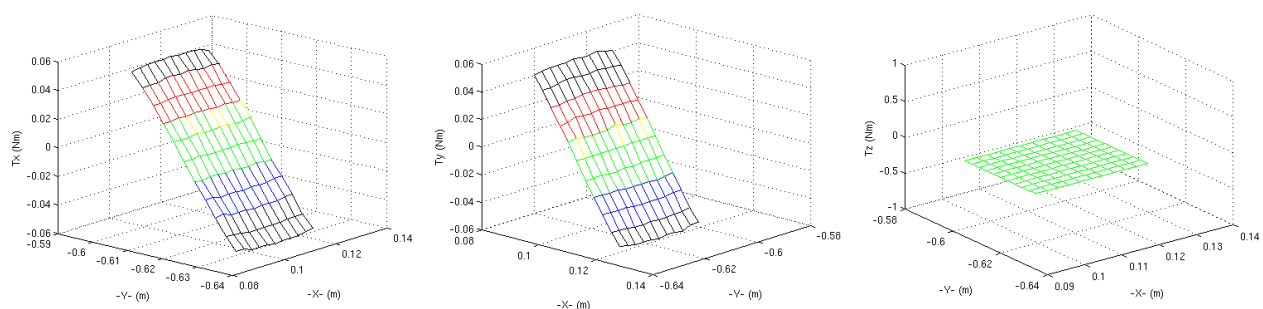


Figura A.37: Medidas de par para camino C_1 , con test XY y explorando 3 cm^2 .

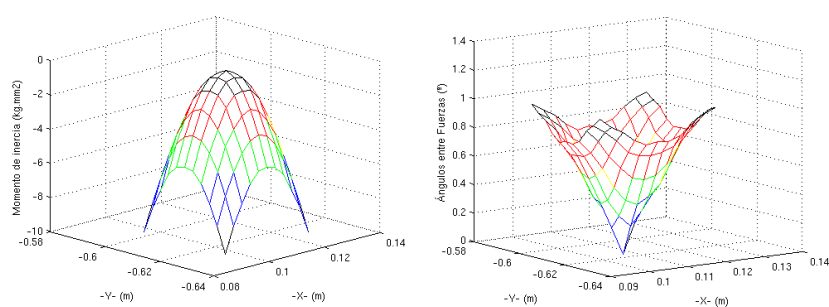


Figura A.38: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para camino C_1 , con test XY y explorando 3 cm^2 .

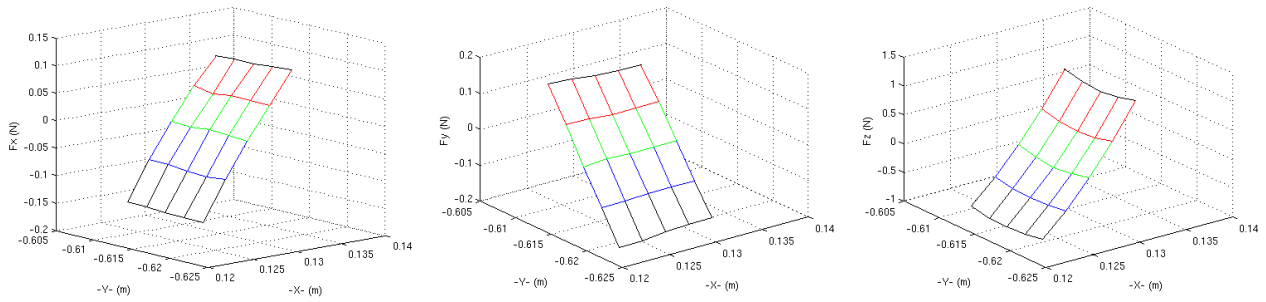


Figura A.39: Medidas de fuerza para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XY.

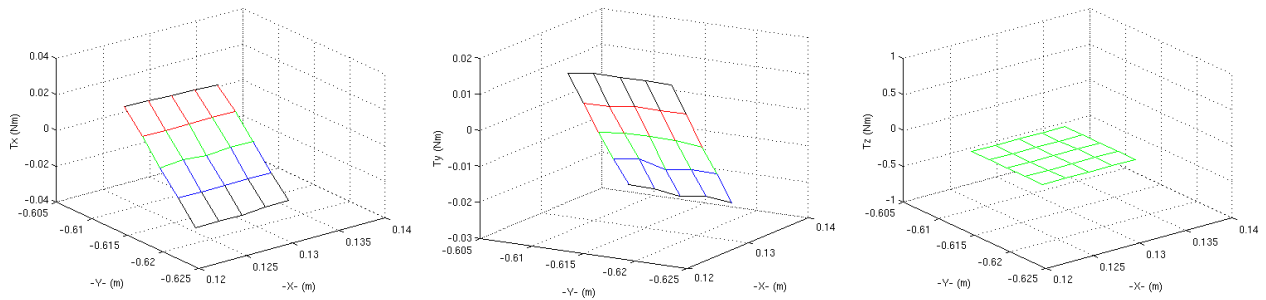


Figura A.40: Medidas de par para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XY.

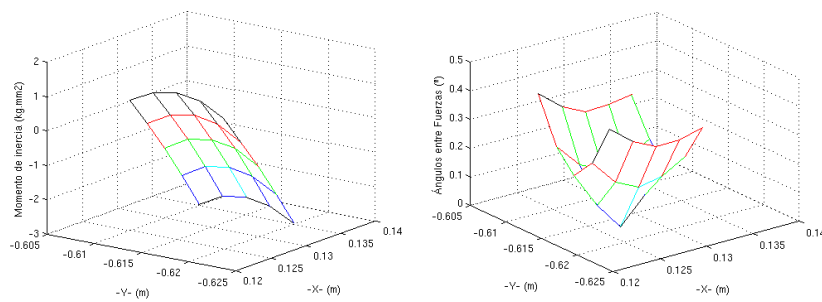


Figura A.41: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XY.

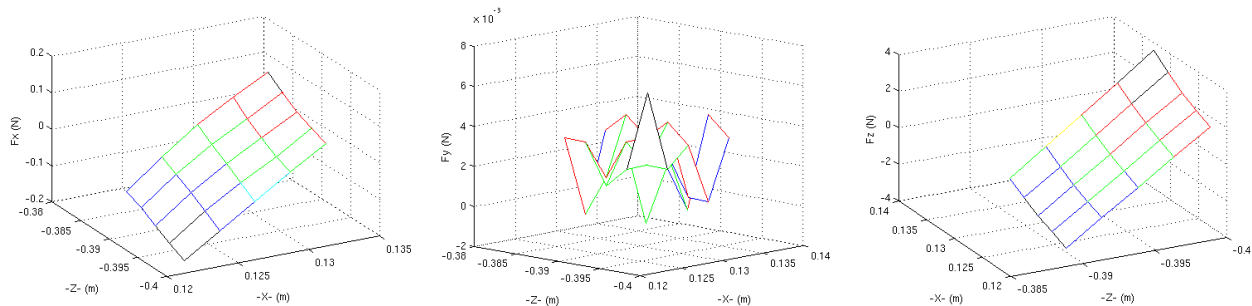


Figura A.42: Medidas de fuerza para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XZ.

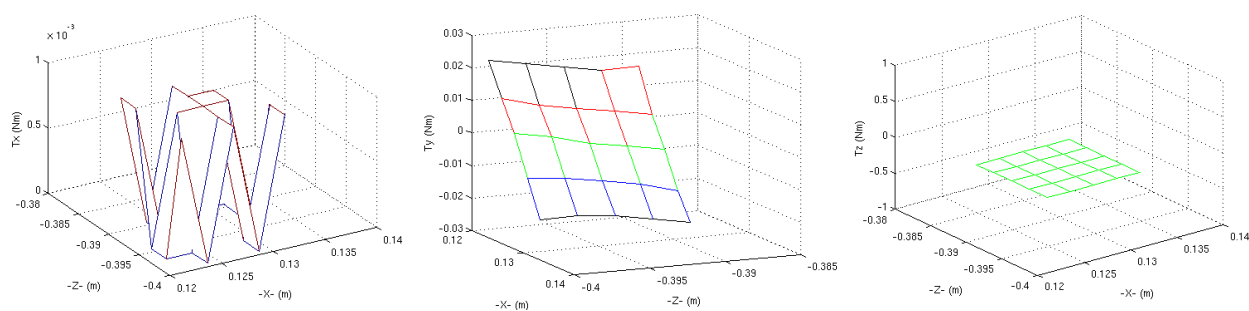


Figura A.43: Medidas de par para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XZ.

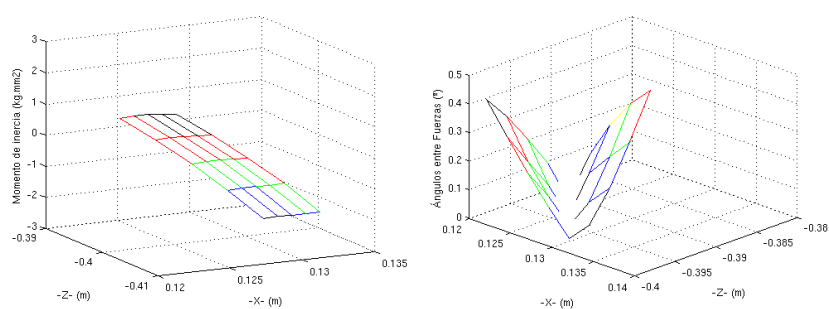


Figura A.44: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para ruta paralela al camino C_1 , desviada 2 cm en X y con test XZ.

B

Figuras del test radial en fuerzas y pares

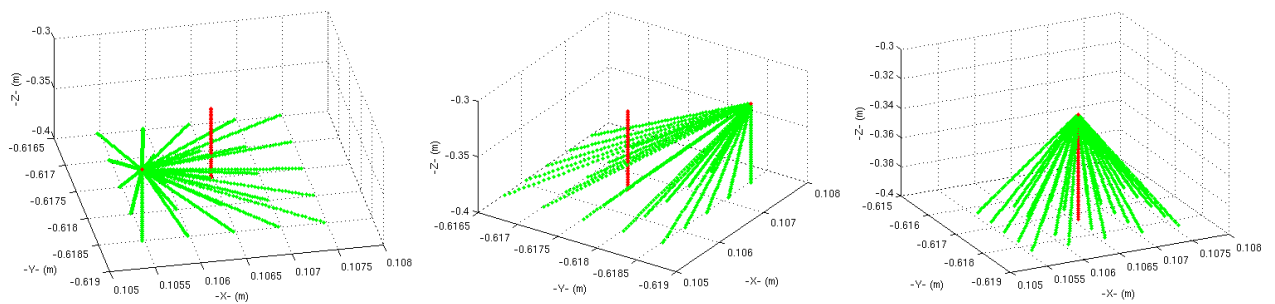


Figura B.1: Trayectorias radiales 1, 5 y 13 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

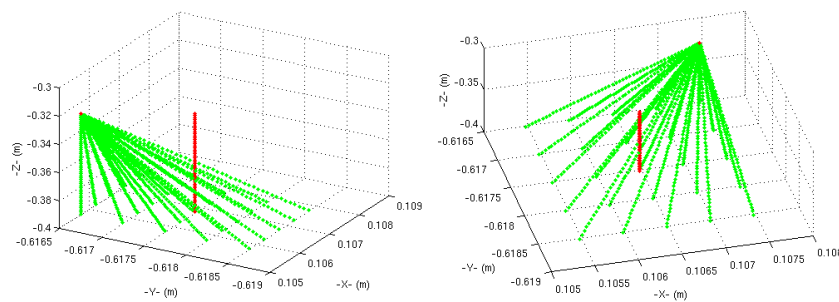


Figura B.2: Trayectorias radiales 21 y 25 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

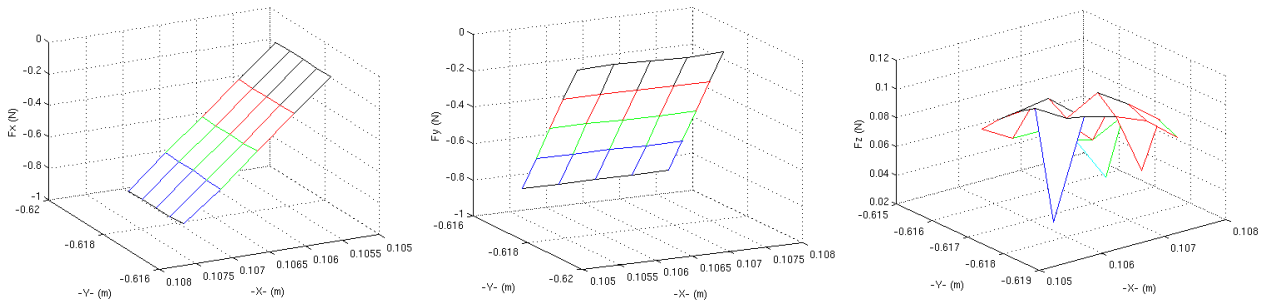


Figura B.3: Medidas de fuerza para trayectorias radiales 1 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

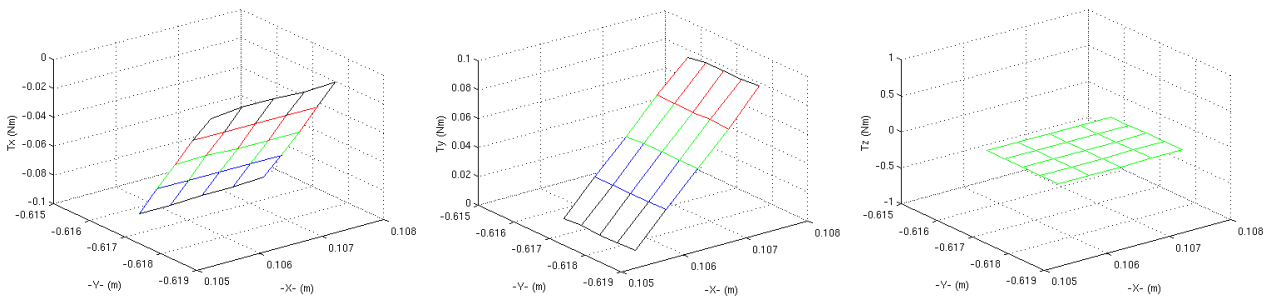


Figura B.4: Medidas de par para trayectorias radiales 1 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

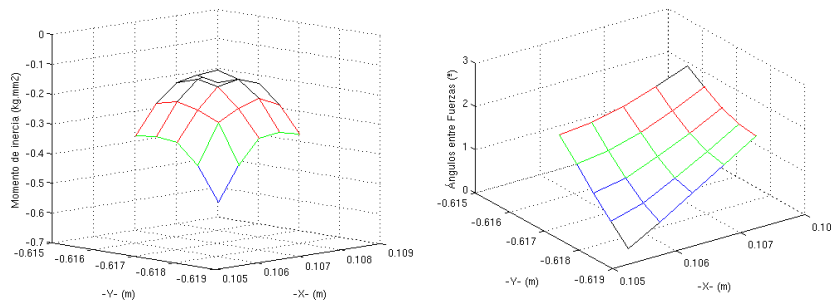


Figura B.5: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 1 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

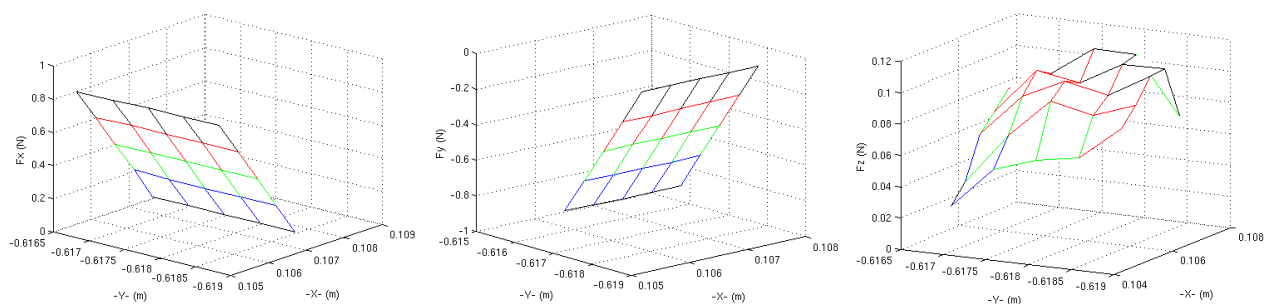


Figura B.6: Medidas de fuerza para trayectorias radiales 5 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

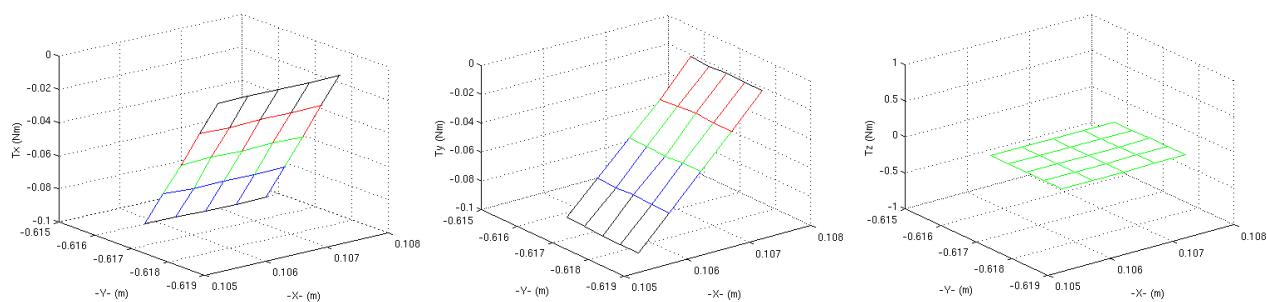


Figura B.7: Medidas de par para trayectorias radiales 5 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

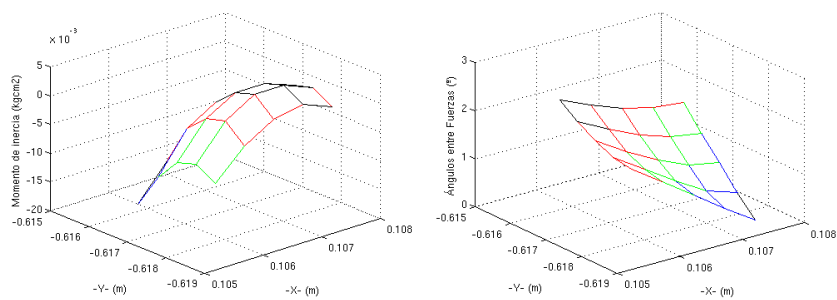


Figura B.8: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 5 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

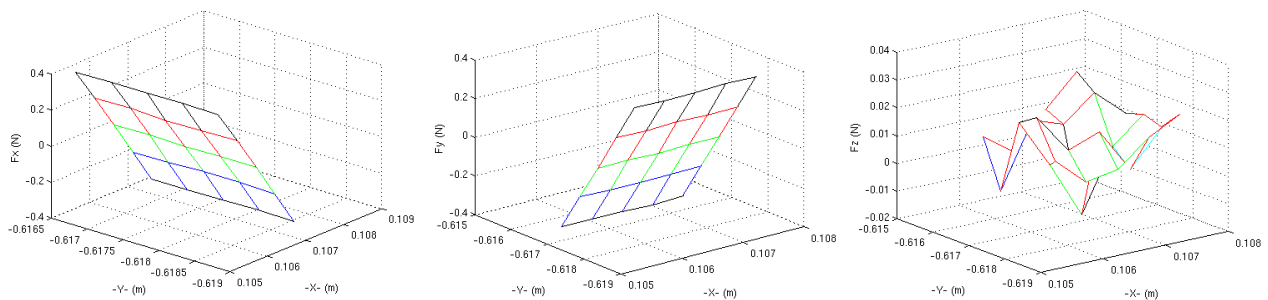


Figura B.9: Medidas de fuerza para trayectorias radiales 13 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

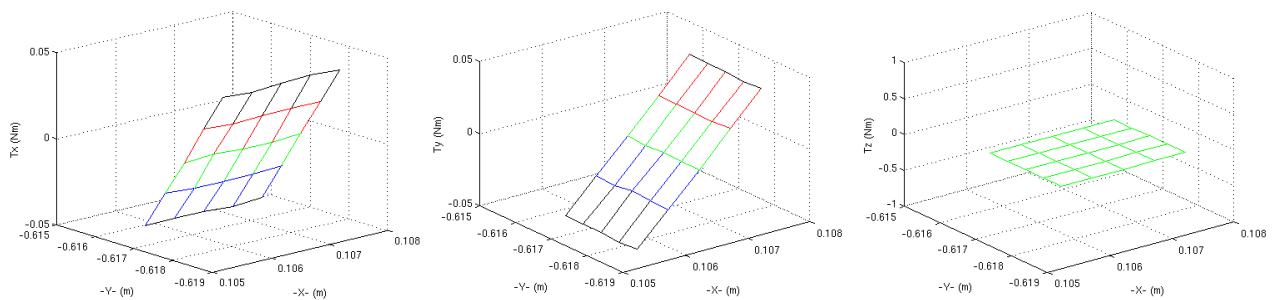


Figura B.10: Medidas de par para trayectorias radiales 13 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

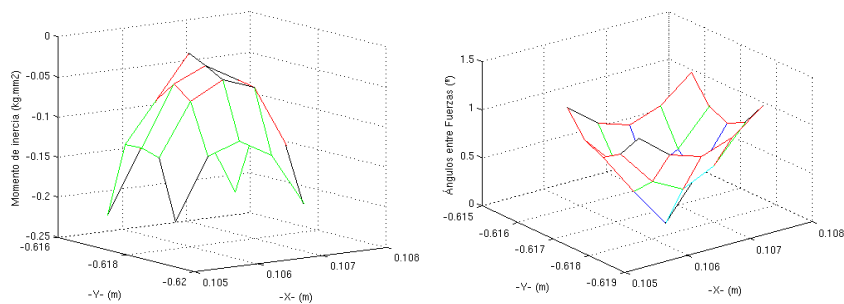


Figura B.11: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 13 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

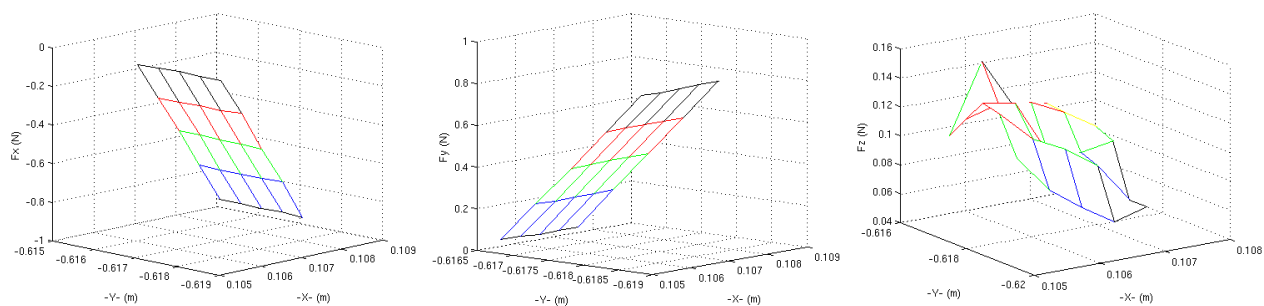


Figura B.12: Medidas de fuerza para trayectorias radiales 21 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

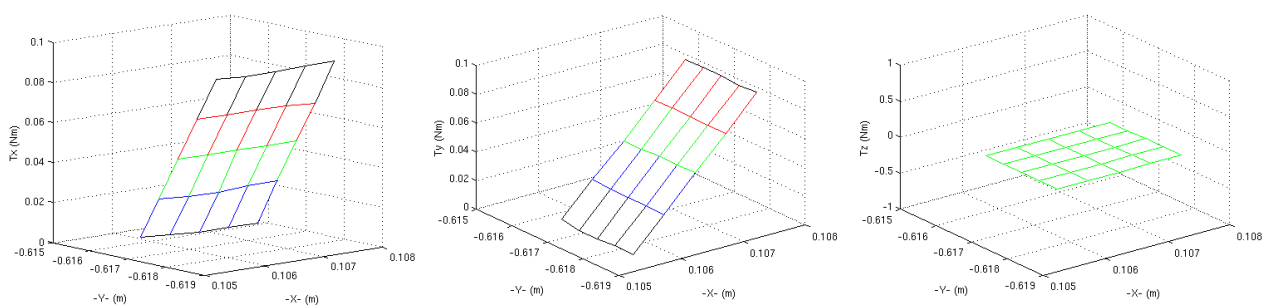


Figura B.13: Medidas de par para trayectorias radiales 21 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

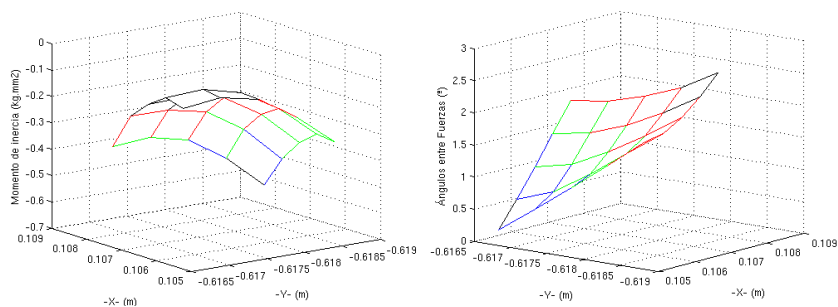


Figura B.14: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 21 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

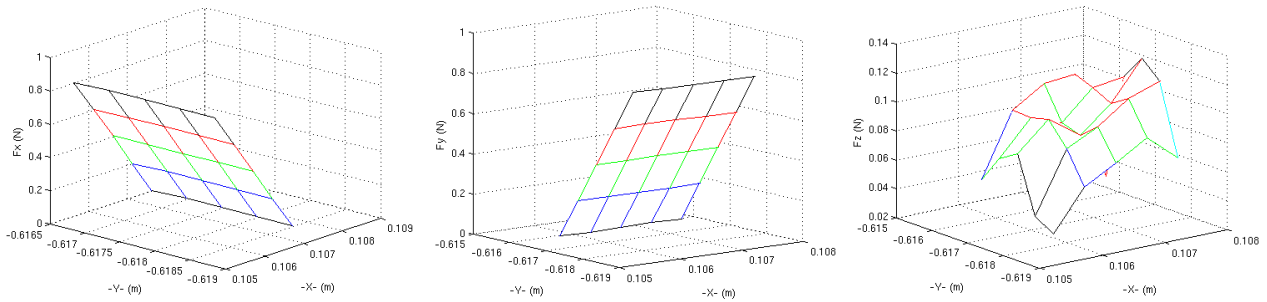


Figura B.15: Medidas de fuerza para trayectorias radiales 25 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

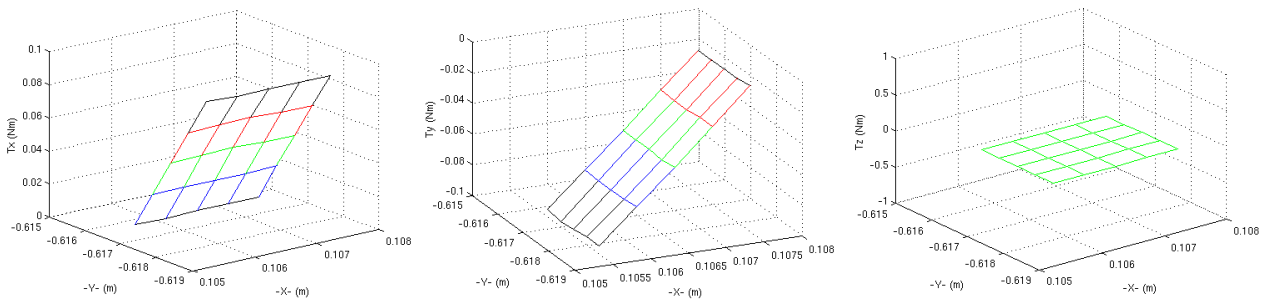


Figura B.16: Medidas de par para trayectorias radiales 25 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .

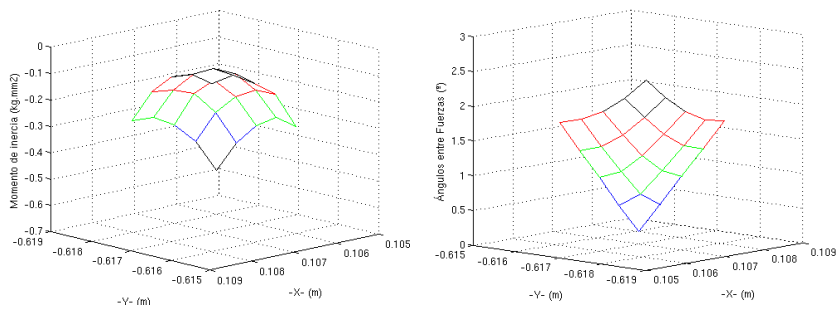


Figura B.17: Medidas de momento angular y ángulos entre fuerzas para trayectorias radiales 25 sobre plano XY y explorando 2 mm^2 .



Figuras de la fusión de fuerzas y pares

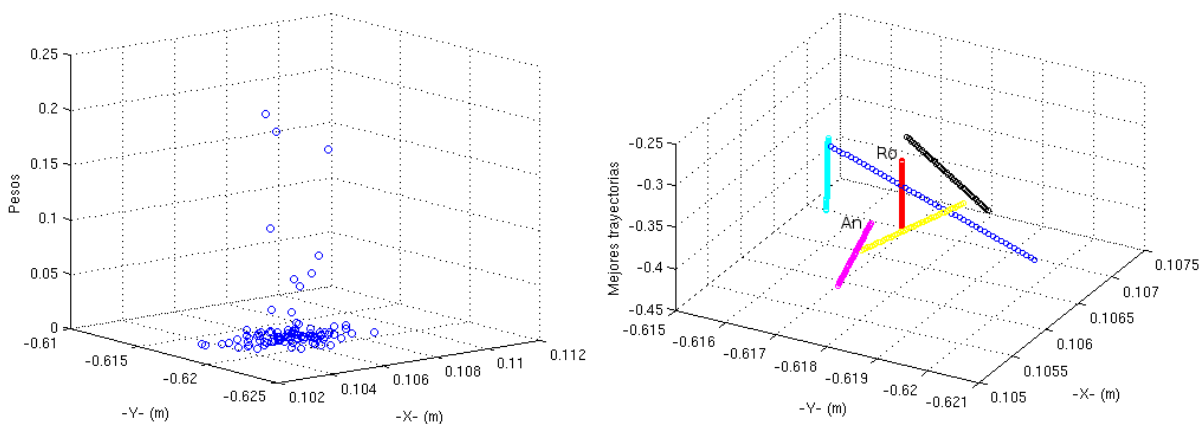


Figura C.1: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de la componente de fuerza F_x .

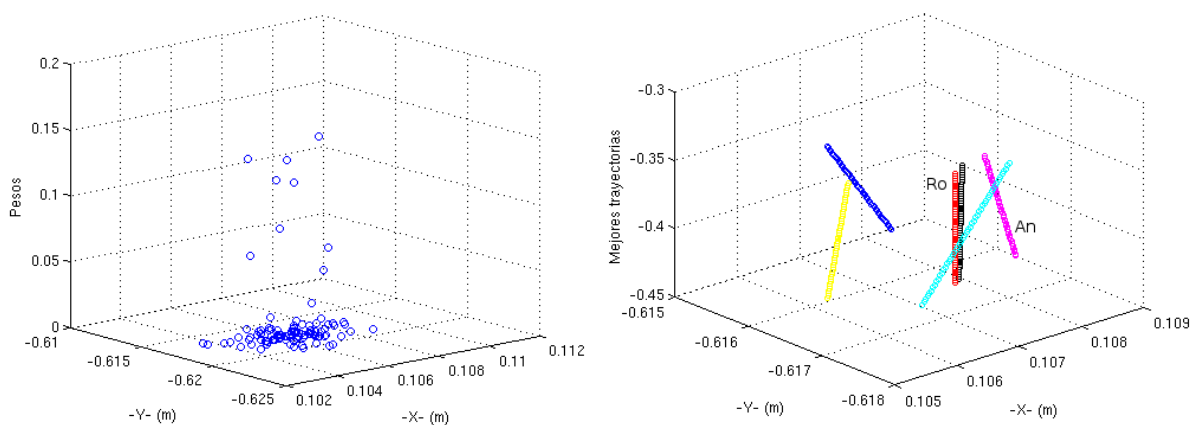


Figura C.2: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de la componente de fuerza F_y .

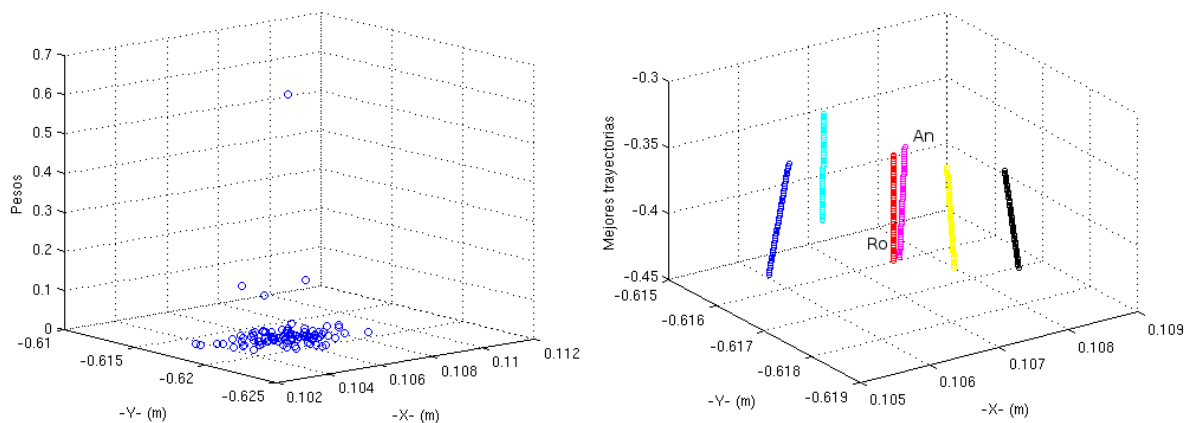


Figura C.3: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de las componentes de fuerza F_x y F_y .

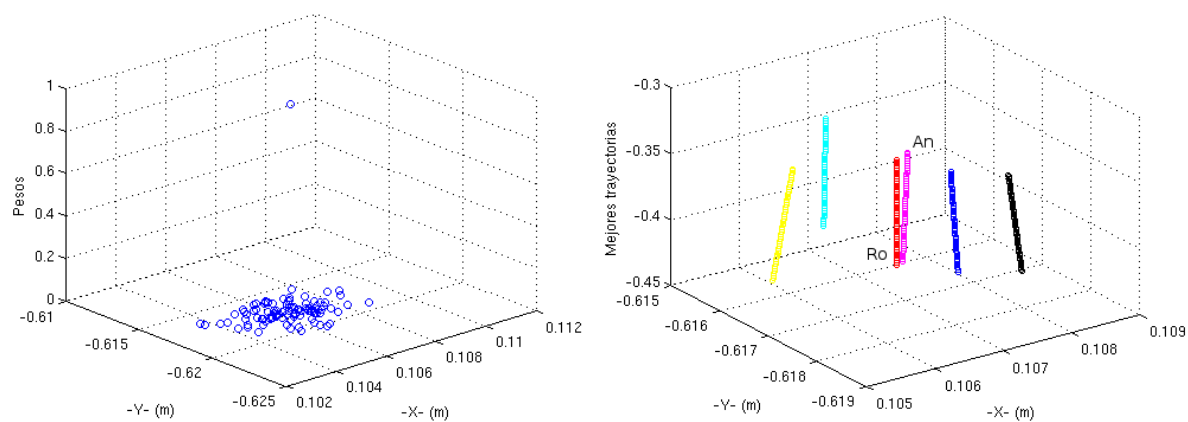


Figura C.4: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de las componentes F_x , F_y , T_x , y T_y .

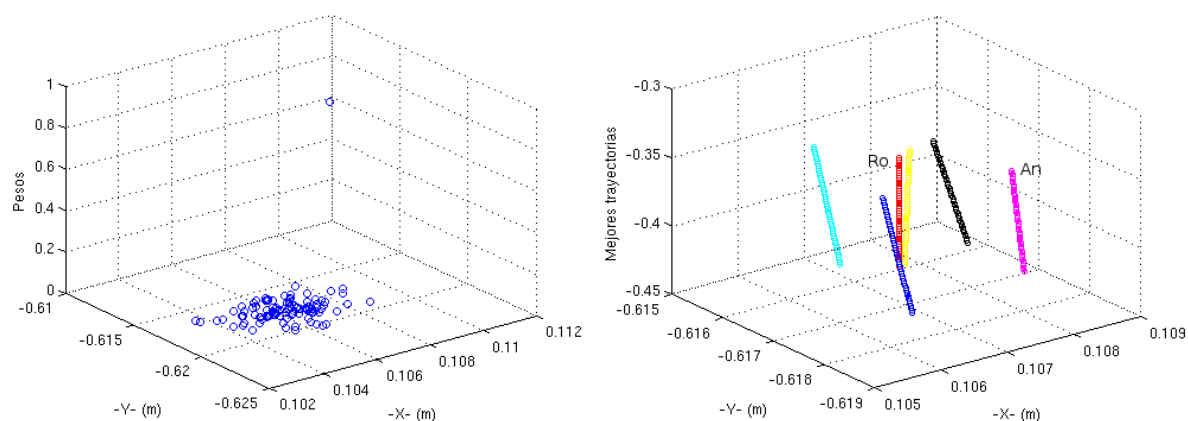


Figura C.5: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de las componentes de fuerza F_x , F_y y F_z .

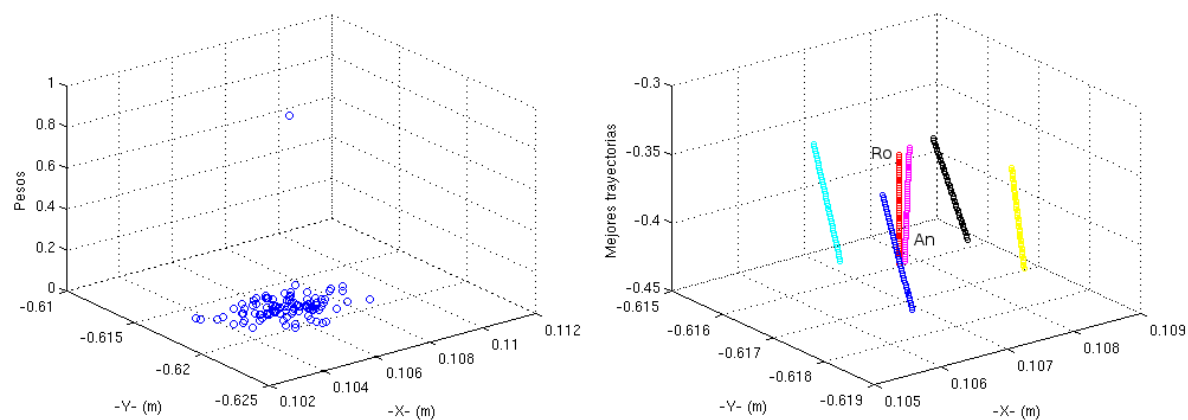


Figura C.6: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de las componentes F_x , F_y , F_z , y A_f .

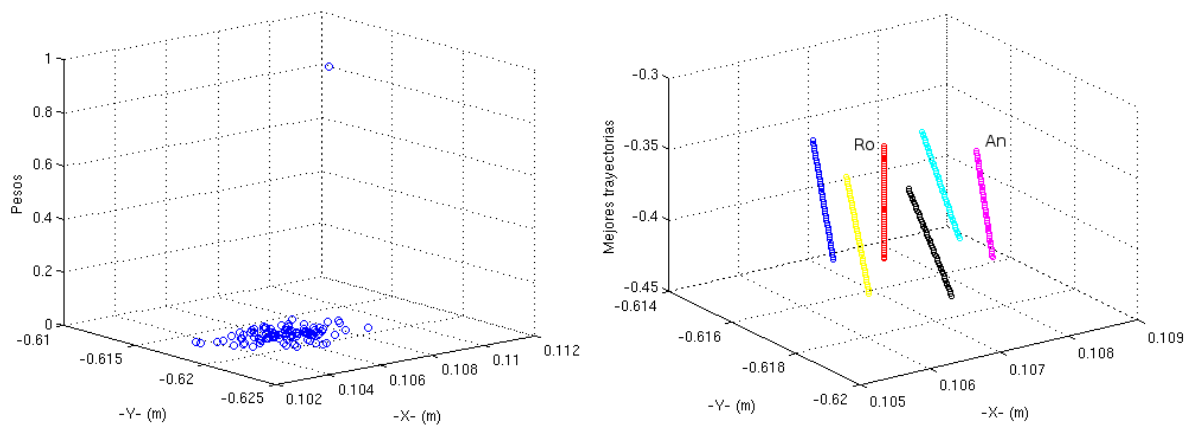


Figura C.7: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de las componentes de fuerza F_x , F_y y F_z , descartando la mejor trayectoria.

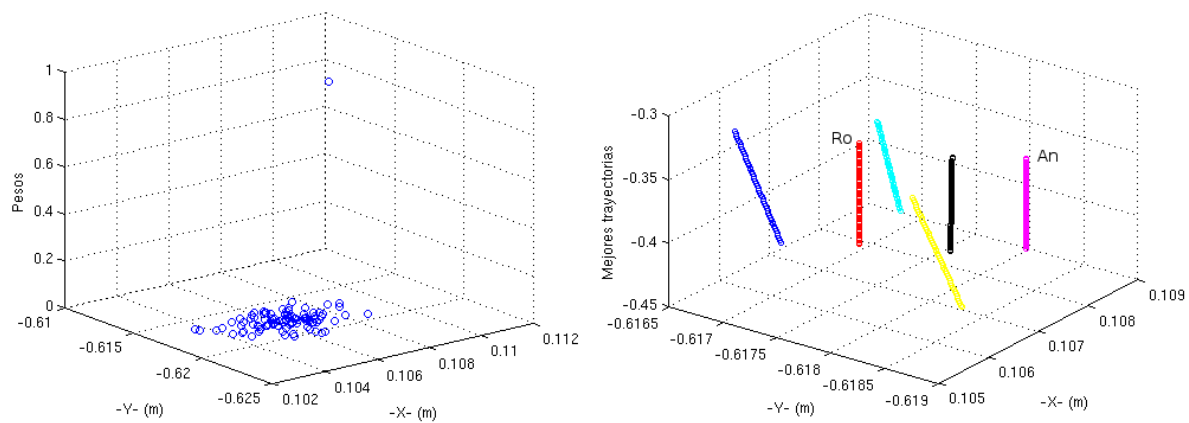


Figura C.8: Pesos normalizados y mejores trayectorias resultantes de usar la información de las componentes F_x , F_y , F_z y A_f , descartando la mejor trayectoria.

D

Figuras del test paralelo en píxeles

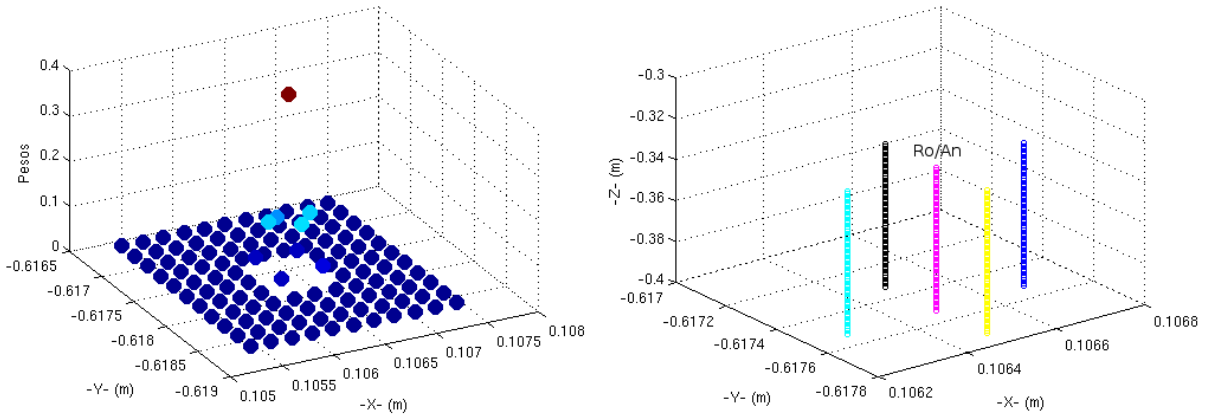


Figura D.1: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XY paralelo con patrón de píxeles completo.

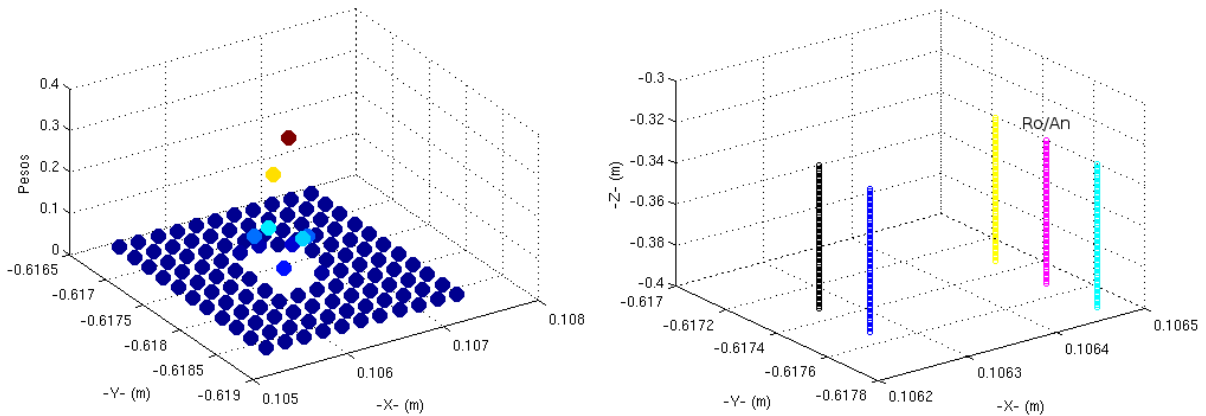


Figura D.2: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XY paralelo con patrón de píxeles medio.

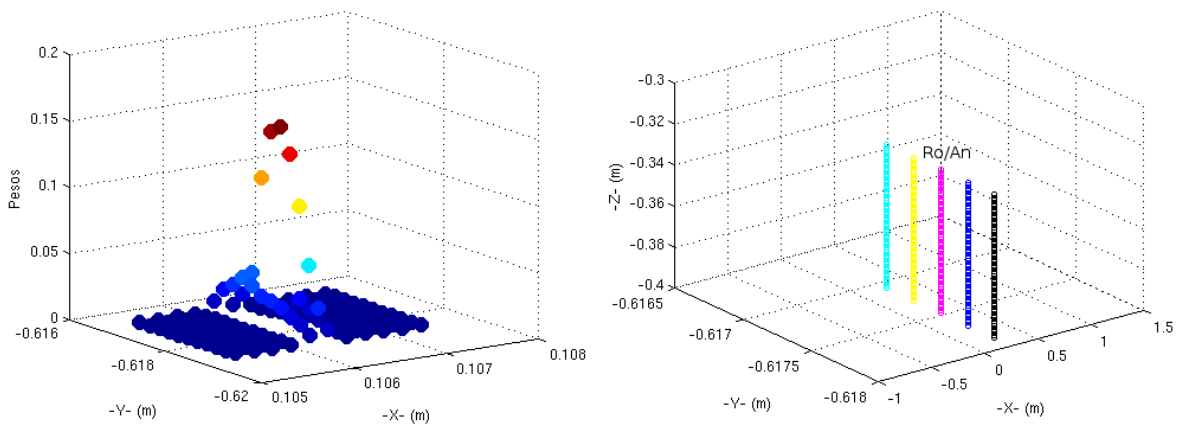


Figura D.3: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XY paralelo con patrón de píxeles reducido.

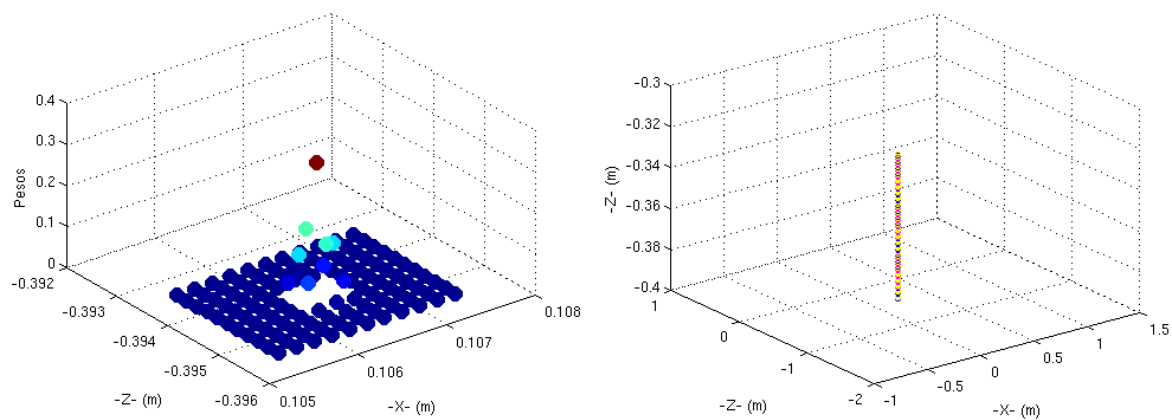


Figura D.4: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XZ paralelo con patrón de píxeles completo.

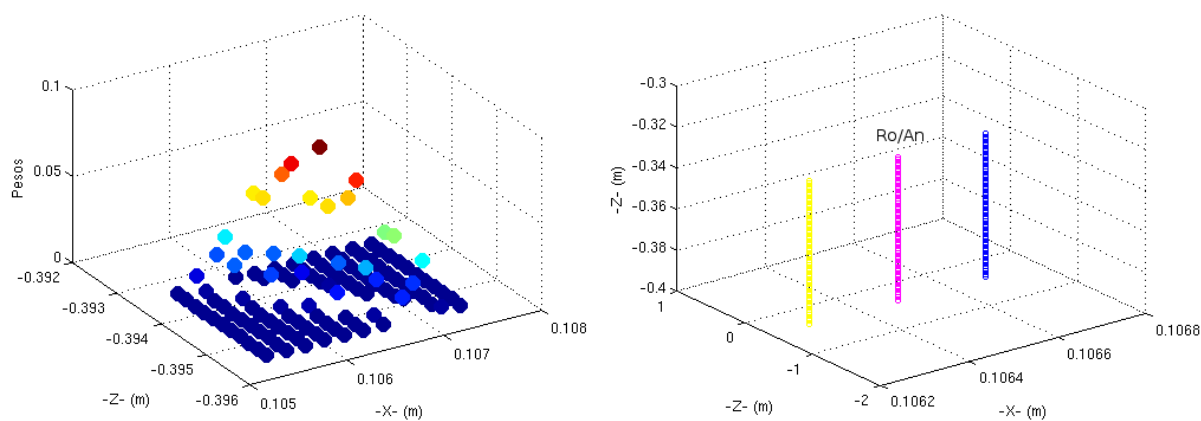


Figura D.5: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XZ paralelo con patrón de píxeles medio.

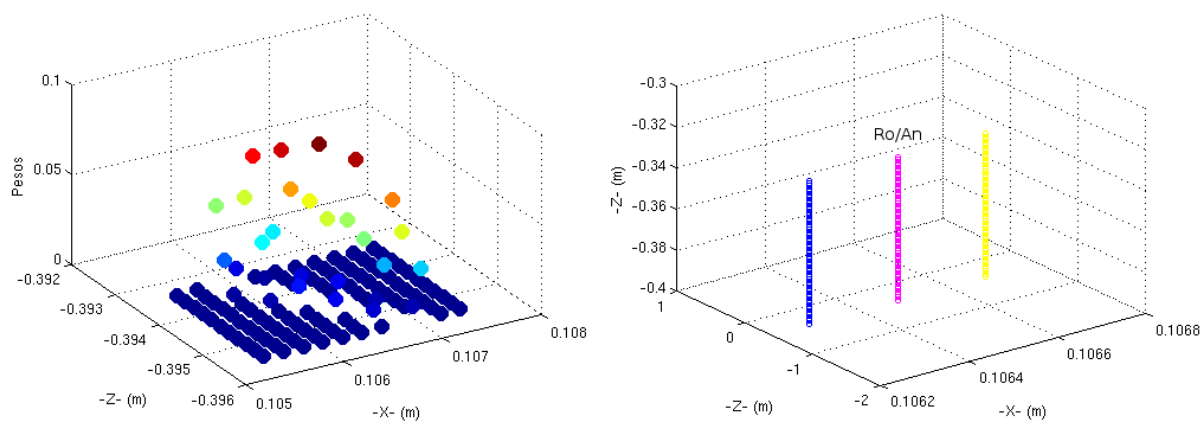


Figura D.6: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XZ paralelo con patrón de píxeles reducido.

E

Figuras del test radial en píxeles

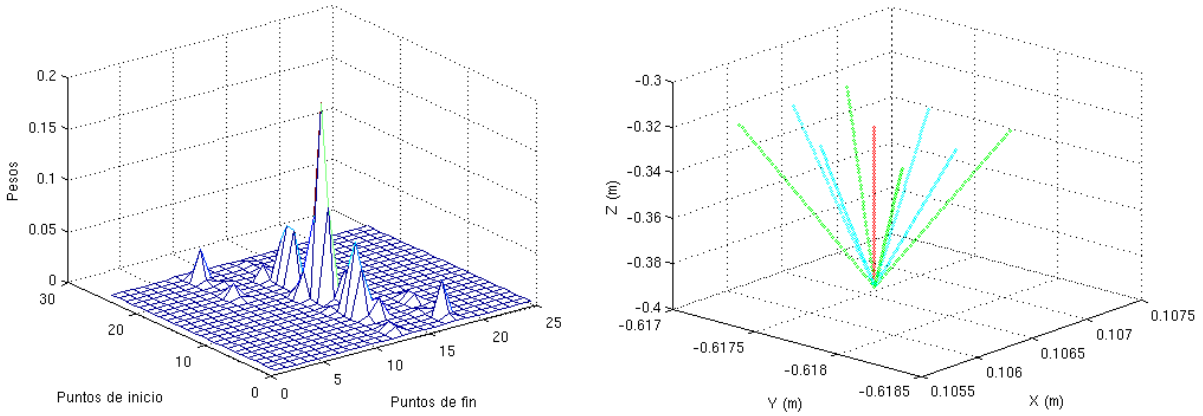


Figura E.1: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XY radial de 2 mm con patrón de píxeles completo.

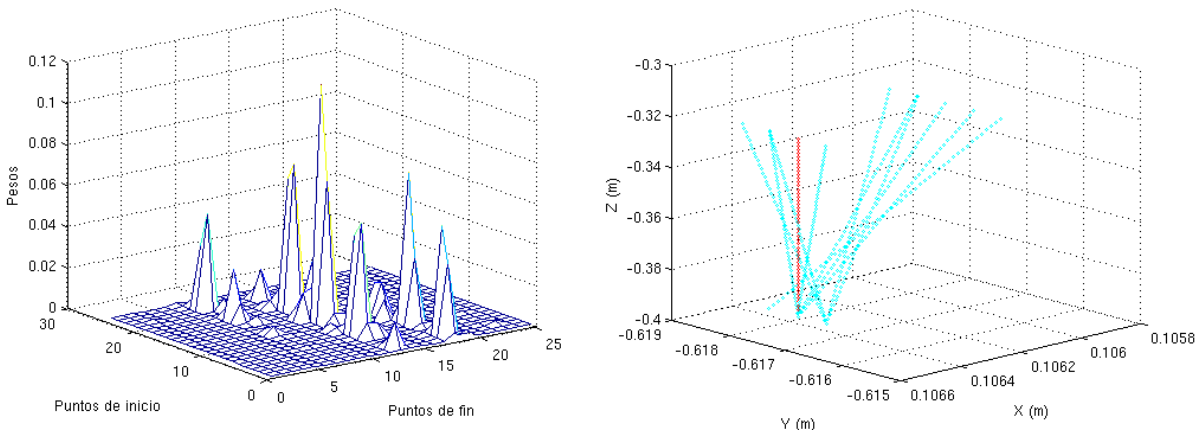


Figura E.2: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XY radial de 2 mm con patrón de píxeles medio.

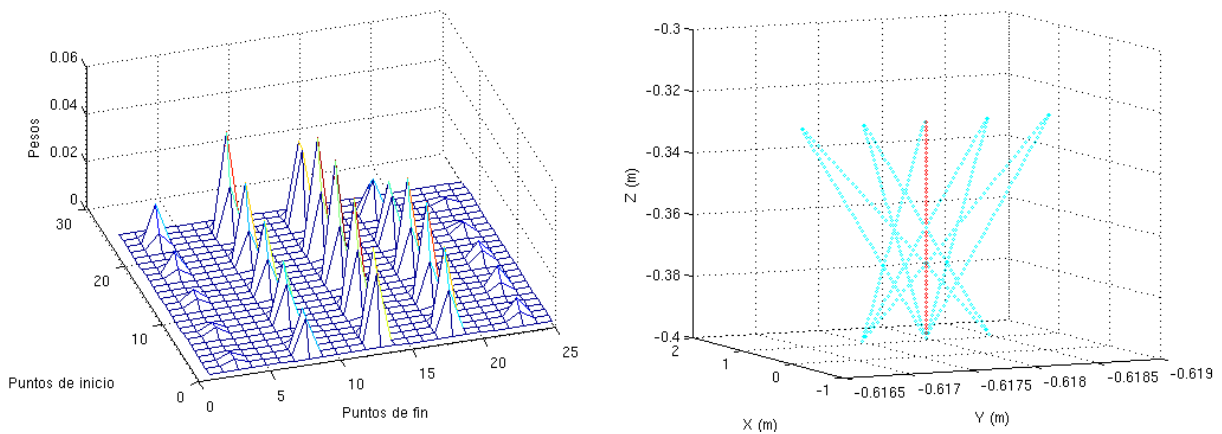


Figura E.3: Pesos normalizados y mejores trayectorias para el test XY radial de 2 mm con patrón de píxeles reducido.

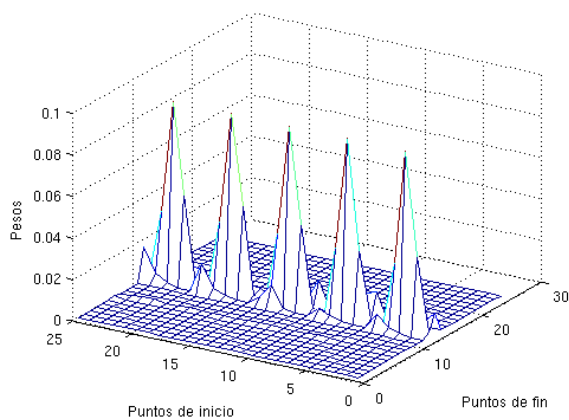


Figura E.4: Pesos normalizados para el test XZ radial de 2 mm con patrón de píxeles completo.

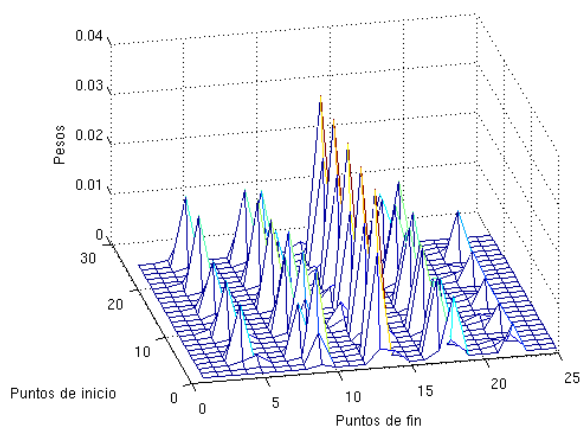


Figura E.5: Pesos normalizados para el test XZ radial de 2 mm con patrón de píxeles medio.

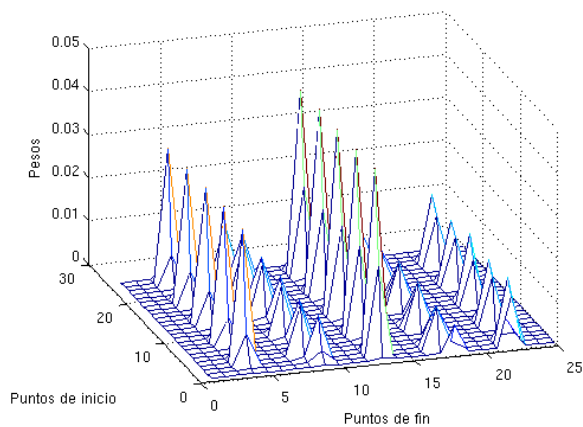


Figura E.6: Pesos normalizados para el test XZ radial de 2 mm con patrón de píxeles reducido.



Algoritmos

Cuadro F.1: **Método del punto medio.**

Estimación del estado en el centro del paso de integración

$$\mathbf{v}_{k+h/2} \simeq \mathbf{v}_k + \frac{h}{2} \mathbf{a}(\mathbf{P}_k, \mathbf{v}_k)$$

$$\mathbf{P}_{k+h/2} \simeq \mathbf{P}_k + \frac{h}{2} \mathbf{v}_k$$

Estimación del estado al final del paso de integración

$$\mathbf{v}_{k+h} \simeq \mathbf{v}_k + h \mathbf{a}(\mathbf{P}_{k+h/2}, \mathbf{v}_{k+h/2})$$

$$\mathbf{P}_{k+h} \simeq \mathbf{P}_k + h \mathbf{v}_{k+h/2}$$

Cuadro F.2: **Método de Runge-Kutta de orden 4.**

Paso 1: Estado al inicio del paso de integración.

$$\mathbf{P}_a = \mathbf{P}_k$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}(\mathbf{P}_a, \mathbf{v}_a)$$

Paso 2:

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{P}_k + \frac{h}{2} \mathbf{v}_a$$

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_k + \frac{h}{2} \mathbf{a}_a$$

$$\mathbf{a}_b = \mathbf{a}(\mathbf{P}_b, \mathbf{v}_b)$$

Paso 3:

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{P}_k + \frac{h}{2} \mathbf{v}_b$$

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_k + \frac{h}{2} \mathbf{a}_b$$

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}(\mathbf{P}_c, \mathbf{v}_c)$$

Paso 4:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_k + h \mathbf{v}_c$$

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_k + h \mathbf{a}_c$$

$$\mathbf{a}_d = \mathbf{a}(\mathbf{P}_d, \mathbf{v}_d)$$

Conclusión: Estimación del estado al final del paso de integración

$$\mathbf{P}_{k+h} = \mathbf{P}_k + \frac{h}{6} (\mathbf{v}_a + 2\mathbf{v}_b + 2\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_d)$$

$$\mathbf{v}_{k+h} = \mathbf{v}_k + \frac{h}{6} (\mathbf{a}_a + 2\mathbf{a}_b + 2\mathbf{a}_c + \mathbf{a}_d)$$

Cuadro F.3: Método implícito de Kang.

Fuerza elástica total sobre el nodo i :

$$\mathbf{F}_{i_k}^m = \sum_{\forall j|(i,j) \in E} b_{ji} (\|\mathbf{P}_{j_k} - \mathbf{P}_{i_k}\| - l_{ji}^0) \frac{\mathbf{P}_{j_k} - \mathbf{P}_{i_k}}{\|\mathbf{P}_{j_k} - \mathbf{P}_{i_k}\|}$$

Fuerza viscosa total sobre el nodo i debida a los muelles:

$$\mathbf{F}_{i_k}^{vm} = h \sum_{\forall j|(i,j) \in E} b_{ji} (\mathbf{v}_{j_k} - \mathbf{v}_{i_k})$$

Fuerza total sobre el nodo i al inicio del paso de integración:
(no se considera aquí la viscosidad en los nodos)

$$\mathbf{F}_{i_k} = \mathbf{F}_{i_k}^m + \mathbf{F}_{i_k}^{vm}$$

Incremento de velocidad al final del paso de integración:

$$\Delta \mathbf{v}_{i_{k+h}} = \frac{h \mathbf{F}_{i_k} + \sum_{\forall j|(i,j) \in E} h^2 b_{ji} \|\Delta \mathbf{v}_{j_k}\| (\mathbf{F}_{j_k} / \|\mathbf{F}_{j_k}\|)}{m_i + h^2 \sum_{\forall j|(i,j) \in E} b_{ji}}$$

Estimación del nuevo estado al final del paso de integración:
(se considera la viscosidad en los nodos)

$$\mathbf{v}_{i_{k+h}} = \frac{\mathbf{v}_{i_k} + \Delta \mathbf{v}_{i_{k+h}}}{1 + a_i \|\mathbf{v}_{i_k}\|}$$

$$\mathbf{P}_{i_{k+h}} = \mathbf{P}_{i_k} + h \mathbf{v}_{i_{k+h}}$$

Cuadro F.4: **Algoritmo para el filtro SIR (Sampling Importance Resampling).**

$$(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{SIR} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, \mathbf{y}_k)$$

1. For $i = 1 : N$

a) Derivar partículas $\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i)$

- Generar muestras a partir del ruido del proceso $w_{\mathbf{r}_{k-1}}^i$
- Propagar el estado usando $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, w_{\mathbf{r}_{k-1}}^i)$ para generar nuevas partículas

b) Calcular pesos $\tilde{w}_k^i = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)$

2. End for

3. Normalizar pesos

a) $s = \sum \{\tilde{w}_k^i\}_{i=1}^N$

b) For $i = 1 : N$

- Normalizar: $w_k^i = s^{-1} \tilde{w}_k^i$

c) End for

4. $(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, -, -\}_{i=1}^N) = \mathbf{Remuestrear} (\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$

Cuadro F.5: **Algoritmo para el filtro ASIR (Auxiliary SIR).**

$$(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{ASIR} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \mathbf{y}_k)$$

1. For $i = 1 : N$

a) Derivar μ_k^i con alguna de las siguientes opciones:

- Media: $\mu_k^i = E[p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i)]$.
 - Si el ruido es aditivo $N(0, \sigma^2) \rightarrow \mu_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i)$
- Muestra: $\mu_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i)$

b) Determinar peso: $\tilde{w}_k^i = p(\mathbf{y}_k | \mu_k^i) w_{k-1}^i$

2. End for

3. Normalizar pesos

a) $s = \sum \{\tilde{w}_k^i\}_{i=1}^N$

b) For $i = 1 : N$

- Normalizar: $w_k^i = s^{-1} \tilde{w}_k^i$

c) End for

4. $(\{-, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^{i^j}, -, i^j\}_{i=1}^N) = \mathbf{Remuestrear} (\{\mu_k^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$

5. For $i = 1 : N$

a) Derivar estado: $\mathbf{x}_k^j \sim q(\mathbf{x}_k | i^j, \mathbf{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{i^j}, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^{i^j})$

b) Determinar peso: $\tilde{w}_k^i = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^j) / p(\mathbf{y}_k | \mu_k^{i^j})$

6. End for

7. Normalizar pesos

a) $s = \sum \{\tilde{w}_k^i\}_{i=1}^N$

b) For $i = 1 : N$

- Normalizar: $w_k^i = s^{-1} \tilde{w}_k^i$

c) End for

Cuadro F.6: **Algoritmo de Remuestreo.**

$$(\{\mathbf{x}_k^{j*}, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_k}^{j*}, w_k^j, i^j\}_{j=1}^N) = \mathbf{Remuestrear} (\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_k}^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$$

1. Inicializar la suma de pesos acumulados (SPA): $c_1 = w_k^1$
2. For $i = 2 : N$
 - Construir SPA: $c_i = c_{i-1} + w_k^i$
3. End for
4. Comenzar en la base de SPA: $i = 1$
5. Derivar un punto de partida: $u_1 \sim U[0, N^{-1}]$
6. For $j = 1 : N$
 - a) Mover a lo largo de SPA: $u_j = u_1 + N^{-1}(j - 1)$
 - b) While $u_j > c_i$
 - $i = i + 1$
 - c) End While
 - d) Asignar muestra: $\mathbf{x}_k^{j*} = \mathbf{x}_k^i$
 - e) Asignar control: $\mathbf{u}_{\mathbf{r}_k}^{j*} = \mathbf{u}_{\mathbf{r}_k}^i$
 - f) Asignar peso: $w_k^j = N^{-1}$
 - g) Asignar padre: $i^j = i$
7. End for

Cuadro F.7: **Procedimiento general.**

ProcedimientoGeneral ($\{\bar{\mathbf{u}}_r^c\}_{c=1}^C$, otros)

otros = $\{\dots, \text{'parámetros de operación'}\}$

1. Inicializar el estado de la malla y la acción de control
 - $(\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Inicializar} (\{\bar{\mathbf{u}}_r^c\}_{c=1}^C, \text{otros})$
 2. For $c = 1 : C$ Para cada uno de los caminos preestablecidos
 - a) Aplicar la acción de control con el robot
 - **RobotControl** ($\bar{\mathbf{u}}_r^c$)
 - b) Tomar lectura de las medidas de los sensores
 - $(\{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M) = \mathbf{LeerSensores} ()$
 - c) Determinar el nuevo estado de la malla
 - $(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{AdSIR} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \text{otros})$
 - d) Generar nuevas trayectorias para cubrir el siguiente camino
 - $(\{\mathbf{u}_{r_k}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{NuevasTrayectorias} (\{\mathbf{u}_{r_{k-1}}^i\}_{i=1}^N, \{\bar{\mathbf{u}}_r^c\}_{c=1}^C, c)$
 - e) Actualizar los índices temporales para la siguiente iteración
 - $\{\mathbf{x}_{k-1}^i\}_{i=1}^N = \{\mathbf{x}_k^i\}_{i=1}^N$
 - $\{\mathbf{u}_{r_{k-1}}^i\}_{i=1}^N = \{\mathbf{u}_{r_k}^i\}_{i=1}^N$
 3. End for
-

Cuadro F.8: **Inicialización del estado de la malla y de la acción de control.**

$(\{\mathbf{x}_0^i, \mathbf{u}_{r0}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Inicializar} (\{\bar{\mathbf{u}}_r^c\}_{c=1}^C, \text{otros})$

$\mathbf{u}_r = \{\mathbf{P}_{r0}, \mathbf{P}_{r1}, \mathbf{v}_r\} \quad \bar{\mathbf{u}}_r = \{\bar{\mathbf{P}}_r, \bar{\mathbf{v}}_r\}$

1. $c = 1$

2. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{InicializarMalla} (\text{otros})$

3. For $i = 1 : N$

a) Establecer puntos de origen y destino de la trayectoria

$$\mathbf{P}_0 = \bar{\mathbf{P}}_r^c + w_0^i$$

$$\mathbf{P}_1 = \bar{\mathbf{P}}_r^{c+1} + w_1^i$$

b) Establecer la excitación

$$\mathbf{P}_{r0k}^i = \mathbf{P}_0$$

$$\mathbf{P}_{r1k}^i = \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{v}_{rk}^i = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0}{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|} \|\bar{\mathbf{v}}_r^c\|$$

c) Establecer el estado de la malla para el origen de la trayectoria.

$$\mathbf{x}_0^i = \mathbf{x}_0$$

4. End for

Cuadro F.9: Establece nuevas trayectorias aleatorias para el siguiente camino.

$$(\{\mathbf{u}_{\mathbf{r}k}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{NuevasTrayectorias} (\{\mathbf{u}_{\mathbf{r}k-1}^i\}_{i=1}^N, \{\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}^c\}_{c=1}^C, c)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{r}} = \{\mathbf{P}_{\mathbf{r}0}, \mathbf{P}_{\mathbf{r}1}, \mathbf{v}_{\mathbf{r}}\} \quad \bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} = \{\bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}\}$$

1. For $i = 1 : N$

a) Establecer puntos de origen y destino de la trayectoria

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{\mathbf{r}1k-1}^i$$

$$\mathbf{P}_1 = \bar{\mathbf{P}}_{\mathbf{r}}^{c+1} + w_1^i$$

b) Establecer la excitación

$$\mathbf{P}_{\mathbf{r}0k}^i = \mathbf{P}_0$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{r}1k}^i = \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}k}^i = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0}{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|} \|\bar{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}}^c\|$$

2. End for

Cuadro F.10: Algoritmo para el filtro SIR2.

$$(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{SIR2} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \text{otros})$$

1. For $i = 1 : N$
 - a) Derivar partículas (cuadro F.13) $\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i)$
 - $(\mathbf{x}_k^i, \{\mathbf{y}_{s_k}^i\}_{s=1}^M) = \mathbf{PropagarEstado} (\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$
 - b) Determinar pesos asociados a cada medida
 - For $s = 1 : M$
 - $\tilde{w}_{s_k}^i = p(\mathbf{y}_{s_k} | \mathbf{x}_k^i)$
 - End for
 2. End for
 3. Normalizar pesos (Cuadro F.18)
 - $(\{\{w_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M) = \mathbf{NormalizarTodo} (\{\{\tilde{w}_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M)$
 4. Fusionar información (Cuadro F.19)
 - $(\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Fusionar} (\{\{w_{s_k}^i\}_{s=1}^M\}_{i=1}^N)$
 5. Remuestrear (Cuadro F.6)
 - $(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, -, -\}_{i=1}^N) = \mathbf{Remuestrear} (\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$
-

Cuadro F.11: Algoritmo para el filtro AdSIR (*SIR adaptado*).

$$(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{AdSIR} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \mathbf{otros})$$

1. Derivar partículas (cuadro F.13)

$$\blacksquare (\{\mathbf{x}_k^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}^i\}_{s=1}^M) = \mathbf{DerivarPartículas} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \mathbf{otros})$$

2. Determinar pesos asociados a cada medida

- For $s = 1 : M$
 - $\tilde{w}_{s_k}^i = p(\mathbf{y}_{s_k} | \mathbf{x}_k^i)$
- End for

3. Normalizar pesos (Cuadro F.18)

$$\blacksquare (\{\{w_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M) = \mathbf{NormalizarTodo} (\{\{\tilde{w}_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M)$$

4. Fusionar información (Cuadro F.19)

$$\blacksquare (\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Fusionar} (\{\{w_{s_k}^i\}_{s=1}^M\}_{i=1}^N)$$

5. Remuestrear (Cuadro F.6)

$$\blacksquare (\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, -, -\}_{i=1}^N) = \mathbf{Remuestrear} (\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{\mathbf{r}_{k-1}}^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$$

Cuadro F.12: Algoritmo para el filtro AdASIR (*ASIR adaptado*).

$$(\{\mathbf{x}_k^i, \mathbf{u}_{k-1}^i, w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{AdASIR} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \mathbf{otros})$$

1. Derivar partículas (cuadro F.13)

$$\blacksquare (\{\mu_k^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M) = \mathbf{DerivarPartículas} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \mathbf{otros})$$

2. Determinar pesos asociados a cada medida

a) For $i = 1 : N$

▪ For $s = 1 : M$

$$\bullet \tilde{w}_{s_k}^i = p(\mathbf{y}_{s_k} | \mu_k^i) w_{k-1}^i$$

▪ End for

b) End for

3. Normalizar pesos (Cuadro F.18)

$$\blacksquare (\{\{w_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M) = \mathbf{NormalizarTodo} (\{\{\tilde{w}_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M)$$

4. Fusionar información (Cuadro F.19)

$$\blacksquare (\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Fusionar} (\{\{w_{s_k}^i\}_{s=1}^M\}_{i=1}^N)$$

5. Remuestrear (Cuadro F.6)

$$\blacksquare (\{-, \mathbf{u}_{k-1}^{ij}, -, i^j\}_{i=1}^N) = \mathbf{Remuestrear} (\{\mu_k^i, \mathbf{u}_{k-1}^i, w_k^i\}_{i=1}^N)$$

6. Derivar partículas $\mathbf{x}_k^i \sim q(\mathbf{x}_k | i^j, y_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{ij}, \mathbf{u}_{k-1}^{ij})$

$$\blacksquare (\{\mathbf{x}_k^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M) = \mathbf{DerivarPartículas} (\{\mathbf{x}_{k-1}^{ij}, \mathbf{u}_{k-1}^{ij}\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}\}_{s=1}^M, \mathbf{otros})$$

7. Determinar pesos asociados a cada medida

a) For $i = 1 : N$

▪ For $s = 1 : M$

$$\bullet \tilde{w}_{s_k}^i = p(\mathbf{y}_{s_k} | \mathbf{x}_k^i) / p(\mathbf{y}_{s_k} | \mu_k^i)$$

▪ End for

b) End for

8. Normalizar pesos (Cuadro F.18)

$$\blacksquare (\{\{w_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M) = \mathbf{NormalizarTodo} (\{\{\tilde{w}_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M)$$

9. Fusionar información (Cuadro F.19)

$$\blacksquare (\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Fusionar} (\{\{w_{s_k}^i\}_{s=1}^M\}_{i=1}^N)$$

Cuadro F.13: Algoritmo para derivar partículas.

$$(\{\mathbf{x}_k^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}^i\}_{s=1}^M) = \text{DerivarPartículas} (\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i\}_{i=1}^N, \{\mathbf{y}_{s_k}^i\}_{s=1}^M, \text{otros})$$

$$\text{otros} = \{\dots, \mathbf{d}, \alpha_{min}\}$$

1. For $i = 1 : N$

a) Derivar partículas $\psi_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i)$

$$\blacksquare (\psi_k^i, \{\mathbf{y}_{s_k}^i\}_{s=1}^M) = \text{PropagarEstado} (\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$$

b) Determinar ángulos entre fuerzas

$$\blacksquare \alpha_{F_k}^i = \cos^{-1}((\mathbf{y}_{F_k}^i) \cdot (\mathbf{y}_{F_k})) / (\|\mathbf{y}_{F_k}^i\| \|\mathbf{y}_{F_k}\|)$$

2. End for

3. Obtener la dirección de la mejor trayectoria

$$a) (j, \alpha_{min}) = \text{Min} (\alpha_{F_k})$$

$$b) \mathbf{d} = (\mathbf{P}_{r1_{k-1}}^j - \mathbf{P}_{r0_{k-1}}^j) / (\|\mathbf{P}_{r1_{k-1}}^j - \mathbf{P}_{r0_{k-1}}^j\|)$$

4. For $i = 1 : N$

a) Nueva inicialización

$$\blacksquare (\mathbf{u}_{k-1}^i) = \text{EstablecerTrayectoria} (\mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$$

b) Derivar partículas $\mathbf{x}_k^i \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i)$

$$\blacksquare (\mathbf{x}_k^i, \{\mathbf{y}_{s_k}^i\}_{s=1}^M) = \text{PropagarEstado} (\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i, \text{otros})$$

5. End for

Cuadro F.14: Propaga el estado de la malla y toma lectura de los sensores simulados.

$$(\mathbf{x}_k^i, \{y_{s_k}^i\}_{s=1}^M) = \mathbf{PropagarEstado}(\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$$

$$\text{otros} = \{\dots, h, v_{max}, count_{max}\}$$

1. For $\mathbf{P}_{r0_{k-1}}^i = \mathbf{P}_{r0_{k-1}}^i : \mathbf{P}_{r1_{k-1}}^i$

a) Establecer la nueva acción de control

$$\blacksquare \mathbf{P}_{r0_{k-1}}^i = \mathbf{P}_{r0_{k-1}}^i + h\mathbf{v}_{r_{k-1}}^i$$

b) Integrar mientras algún nodo supere la velocidad máxima y no se alcance un número máximo de integraciones. Se hace uso de $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{k-1}^i)$

$$\blacksquare count = 0$$

■ do

$$\bullet (\mathbf{x}_{k-1}^i) = \mathbf{IntegrarMalla}(\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$$

$$\bullet integrar = NO; \quad count = count + 1$$

• for $j = 1 : \text{NodosMalla}$

$$\bullet \text{ if } \|v_j^i\| > v_{max} \ \& \ count < count_{max}$$

$$\bullet \quad integrar = SI; \quad break$$

• End for

$$\blacksquare \text{ While } integrar == SI$$

2. End for

3. Tomar lectura de los sensores simulados

a) For $s = 1 : M$

$$\blacksquare y_{s_k}^i = \text{medida}(s)$$

b) End for

Cuadro F.15: **Establece una trayectoria siguiendo una dirección dada.**

$(\mathbf{u}_{k-1}^i) = \text{EstablecerTrayectoria} (\mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$

$\mathbf{u} = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{v}\}; \quad \mathbf{u}_r = \{\mathbf{P}_{r0}, \mathbf{P}_{r1}, \mathbf{v}_r\}; \quad \text{otros} = \{\dots, \mathbf{d}\}$

1. Establece los puntos de origen y destino de la trayectoria

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{r0_{k-1}}^i$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{r1_{k-1}}^i$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \mathbf{d} \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|$$

2. Establece la excitación

$$\mathbf{P}_{0_{k-1}}^i = \mathbf{P}_0$$

$$\mathbf{P}_{1_{k-1}}^i = \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{v}_{k-1}^i = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0}{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|} \|\mathbf{v}_{r_{k-1}}^i\|$$

Cuadro F.16: **Establece una trayectoria con perturbación direccional.**

$(\mathbf{u}_{r_k}^i) = \text{EstablecerTrayectoria2} (\mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$

$\text{otros} = \{\dots, \mathbf{d}, \alpha_{min}, \sigma_F, \|\mathbf{y}_{F_k}\|\}$

1. Determinar la desviación tipo a aplicar como perturbación para la dirección

$$\alpha_d = \sqrt{(4 - \pi)/2} \arctan (\sigma_F / \|\mathbf{y}_{F_k}\|)$$

if $(\alpha_{min} > \alpha_d)$ then $\sigma_d = \sin (\alpha_{min})$
 else $\sigma_d = \sin (\alpha_d)$

2. Convertir el vector con mejor dirección a coordenadas esféricas

- $(elevation, azimuth) = \text{cartesianasAesfericas} (\mathbf{d})$

3. Perturbar el vector $\{0, 0, 1\}$ en un sistema de coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \text{ranElevacion} &\sim N(0, (\sqrt{2}\sigma_d)^2) \\ \text{ranAzimut} &\sim U(0, 2\pi) \end{aligned}$$

4. Convertir a coordenadas cartesianas

- $(\mathbf{u}) = \text{esfericasAcartesianas} (\text{ranElevacion}, \text{ranAzimut})$

5. Rotar del vector \mathbf{u} sobre el eje Y el ángulo $elevation$

- $(\mathbf{v}) = \text{rotacion} ('Y', \mathbf{u}, elevation)$

6. Rotar del vector \mathbf{v} sobre el eje Z el ángulo $azimut$

- $(\mathbf{d}) = \text{rotacion} ('Z', \mathbf{v}, azimuth)$

7. Establecer nueva trayectoria

- $(\mathbf{u}_{r_{k-1}}^i) = \text{EstablecerTrayectoria} (\mathbf{u}_{r_{k-1}}^i, \text{otros})$

Cuadro F.17: **Normalización.**

$$(\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Normalizar} (\{\tilde{w}_k^i\}_{i=1}^N)$$

1. $S = \sum \{\tilde{w}_k^i\}_{i=1}^N$
2. For $i = 1 : N$
 - Normalizar: $w_k^i = \tilde{w}_k^i / S$
3. End for

Cuadro F.18: **Normalización total.**

$$(\{\{w_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M) = \mathbf{NormalizarTodo} (\{\{\tilde{w}_{s_k}^i\}_{i=1}^N\}_{s=1}^M)$$

1. For $s = 1 : M$
 - Normalizar pesos (Cuadro F.17)
 - $(\{w_{s_k}^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Normalizar} (\{\tilde{w}_{s_k}^i\}_{i=1}^N)$
2. End for

Cuadro F.19: **Fusión probabilística según Eq. 3.8.**

$$(\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Fusionar} (\{\{w_{s_k}^i\}_{s=1}^M\}_{i=1}^N)$$

1. For $i = 1 : N$
 - $\tilde{w}_k^i = \prod_{\forall s} w_{s_k}^i$
2. End for
3. $(\{w_k^i\}_{i=1}^N) = \mathbf{Normalizar} (\{\tilde{w}_k^i\}_{i=1}^N)$

Cuadro F.20: **Índice y valor de la trayectoria con menor medida angular.**

$(j, \alpha_{min}) = \mathbf{Min} (\{\alpha_{F_k}^i\}_{i=1}^N)$

1. $\alpha_{min} = \infty$

2. For $i = 1 : N$

 if $\alpha_{F_k}^i < \alpha_{min}$ then $\alpha_{min} = \alpha_{F_k}^i; j = i$

3. End for



Técnicas de fusión en el marco posibilístico

LA teoría de la posibilidad y el cuerpo de operaciones de agregación aportados por la teoría de conjuntos borrosos, proporcionan herramientas para dirigir el problema de combinar información proveniente de varias fuentes. Existen dos modos primarios para implementar la fusión: conjuntivo y disyuntivo, y la elección entre ellos depende del supuesto de si todas las fuentes son fiables o no, respectivamente (DeCETI, 2005).

G.1 Fusión conjuntiva

La fusión conjuntiva consiste en realizar la intersección de conjuntos borrosos. Este tipo de fusión asume que las fuentes de información están en total acuerdo: los conjuntos que albergan al verdadero valor de X deben solaparse ampliamente.

Si A y B son dos conjuntos borrosos, el grado de pertenencia de x a A se denota por $\mu_A(x)$, y la intersección i se denota por $i(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A \cap B}(x)$.

Los diferentes procedimientos aportados por la teoría de conjuntos borrosos para realizar la conjunción de dos conjuntos se conocen como *T-Normas* (normas triangulares). Los axiomas que cumplen las T-Normas son los siguientes:

Cierre:	$i(a, 1) = a$
Monotonicidad:	$b \leq c \rightarrow i(a, b) \leq i(a, c)$
Conmutatividad:	$i(a, b) = i(b, a)$
Asociatividad:	$i(a, i(b, c)) = i(i(a, b), c)$

Otros axiomas deseables:

Continuidad:	i es una función continua
Sub-idempotencia:	$i(a, a) < a$
Monotonicidad estricta:	$a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2 \rightarrow i(a_1, b_1) < i(a_2, b_2)$

Las T-normas más comunes son las siguientes:

	$\forall a, b \in [0, 1]$
Intersección estándar:	$i(a, b) = \min(a, b)$
Producto algebraico:	$i(a, b) = ab$
Diferencia limitada:	$i(a, b) = \max(0, a + b - 1)$
Intersección drástica:	$i(a, b) = 0$ si $a, b \neq 1$.

De entre todos estos procedimientos de fusión, la función mínimo corresponde a la idea más conservadora. La fuente que asigna el grado más bajo de posibilidad para el verdadero valor de X se asume como la mejor informada. Cabe observar que esta operación no introduce un efecto de fortalecimiento entre las fuentes cuando proporcionan la misma información. En el otro extremo se sitúa la función intersección drástica. Los valores numéricos suministrados por estas funciones cumplen la siguiente relación de orden

$$i_{drastica}(a, b) \leq \max(0, a + b - 1) \leq ab \leq \min(a, b)$$

La Fig. G.1 muestra el resultado de aplicar la función mínimo a cuatro distribuciones de posibilidad con distinto grado de conflicto entre ellas.

La fusión realizada por el operador $\min()$ en la teoría de la posibilidad equivale a la fusión por la regla de Bayes en el campo de la teoría de la probabilidad. Tiene un comportamiento muy severo, ya que basta que una sola fuente entre todas las que aportan información manifieste desacuerdo (conflicto total), para que el resultado sea

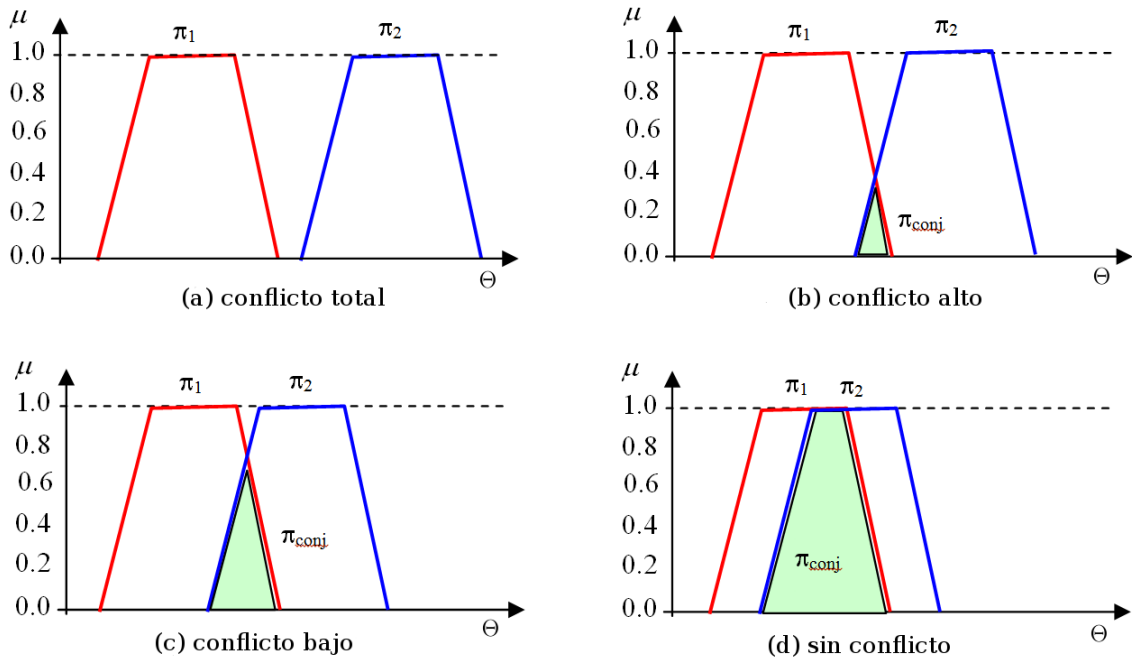


Figura G.1: Fusión conjuntiva.

nulo. Esto la hace inoperante para combinar múltiples fuentes. De entre sus ventajas principales se encuentran las siguientes: fácil implementación, complejidad lineal, y asociatividad.

G.1.1. Fusión conjuntiva renormalizada

Se asume que dos fuentes están de acuerdo incluso si existe un conflicto bajo entre ellas. Cuando existe conflicto, la fusión conjuntiva produce una distribución sub-normalizada. Para normalizarla, se puede usar la altura h de la intersección entre las dos distribuciones originales π_1 y π_2 de la forma siguiente

$$\pi_{renorm}(\theta) = \frac{\pi_{conj}(\theta)}{h(\pi_1, \pi_2)}$$

donde

$$\begin{aligned}\pi_{conj}(\theta) &= \min(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta)) \\ h(\pi_1, \pi_2) &= \max_{\theta \in \Theta}(\min(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta)))\end{aligned}$$

La fusión conjuntiva renormalizada sólo se debe usar con fuentes con acuerdo suficiente (conflicto bajo). En caso de conflicto total, $h(\pi_1, \pi_2) = 0$, la fusión conjuntiva renormal-

izada no está definida y, por defecto, el resultado será nulo. La Fig. G.2 muestra esta idea haciendo uso, como antes, del operador mínimo.

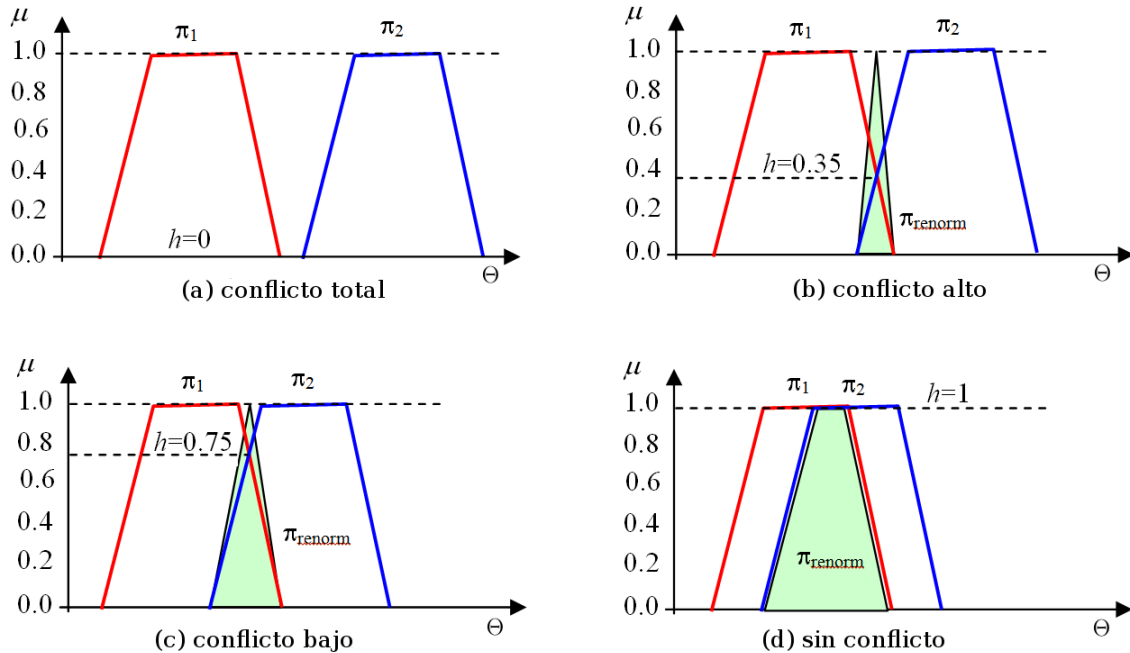


Figura G.2: Fusión conjuntiva renormalizada.

Puede hacerse una serie de consideraciones en base a los diferentes escenarios posibles:

1. Con conflicto total, la fusión conjuntiva renormalizada no conduce a ninguna mejora comparado con la simple fusión conjuntiva. Este tipo de fusión tiene comportamiento conjuntivo, así que se requiere una mínima cantidad de acuerdo entre las fuentes para proporcionar un resultado. Si el desacuerdo es total (no hay intersección entre las distribuciones de posibilidad de las fuentes), la fusión conjuntiva renormalizada no funciona. En este caso, la hipótesis básica (fiabilidad de las fuentes, lo que justifica el uso de la fusión conjuntiva) es completamente falsa.
2. Cuando ocurre una intersección entre distribuciones de posibilidad, es posible renormalizar la distribución resultante de la fusión conjuntiva. Esta renormalización permite que el resultado alcance el grado de posibilidad 1. Pero esta renormalización lleva consigo un indeseable efecto de discontinuidad para valores próximos a cero. Además, cuando el conflicto entre las fuentes es alto, la renormalización asigna un grado de posibilidad muy alto a valores encontrados posibles por ambas fuentes, aunque la intersección sea baja. Así, el uso de la fusión conjuntiva es discutible cuando las fuentes están en conflicto alto.
3. Parece más razonable renormalizar la fusión conjuntiva resultante cuando el escenario es de conflicto bajo, que está próximo a la hipótesis de fiabilidad entre

las fuentes. En esta situación la renormalización apenas afecta al resultado de la fusión conjuntiva.

4. Si no existe conflicto, se realiza una fusión conjuntiva sencilla dado que el resultado ya está normalizado por defecto.

Cabe observar que el uso de la renormalización elimina el conflicto entre las fuentes. El grado de conflicto puede considerarse como la distancia entre la máxima altura de la intersección y el valor 1, es decir $1 - h(\pi_1, \pi_2)$. La renormalización crea dos efectos indeseables: inestabilidad alrededor del cero, y desaparición de la información de conflicto. Aunque por esos motivos su uso no parece muy adecuado, será muy útil para la fusión adaptativa que se comenta más adelante. Los efectos indeseables mencionados, parecen decrecer cuando la renormalización se usa con otros métodos de fusión.

G.2 Fusión disyuntiva

La fusión disyuntiva es el método usado para fusionar fuentes en conflicto, y consiste en la unión de conjuntos borrosos. Se usa cuando una de las dos fuentes a combinar, y solamente una, es considerada como fiable, y la otra errónea. Este método es apropiado para la fusión de fuentes que proporcionan bajo o ningún solapamiento entre conjuntos.

Si A y B son dos conjuntos borrosos, el grado de pertenencia de x a A se denota por $\mu_A(x)$, y la unión u se denota por $u(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A \cup B}(x)$.

Los diferentes procedimientos aportados por la teoría de conjuntos borrosos para realizar la disyunción de dos conjuntos se conocen como *T-Conormas*. Los axiomas que cumplen son los siguientes:

Cierre:	$u(a, 0) = a$
Monotonicidad:	$b \leq c \rightarrow u(a, b) \leq u(a, c)$
Conmutatividad:	$u(a, b) = u(b, a)$
Asociatividad:	$u(a, u(b, c)) = u(u(a, b), c)$

Otros axiomas deseables:

Continuidad:	u es una función continua
Sub-idempotencia:	$u(a, a) > a$
Monotonicidad estricta:	$a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2 \rightarrow u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$

Las T-Conormas más comunes son las siguientes:

$$\forall a, b \in [0, 1]$$

Unión estándar:	$u(a, b) = \max(a, b)$
Suma algebraica:	$u(a, b) = a + b - ab$
Suma limitada:	$u(a, b) = \min(1, a + b)$
Unión drástica:	$u(a, b) = 1 \quad \text{si } a, b \neq 0$

Los valores numéricos suministrados por estas funciones cumplen la siguiente relación de orden:

$$\max(a, b) \leq a + b - ab \leq \min(1, a + b) \leq u_{drastica}(a, b)$$

Con las distribuciones de posibilidad suele usarse el operador máximo de la forma siguiente:

$$\forall \theta \in \Theta \quad \pi_{disj}(\theta) = \max(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))$$

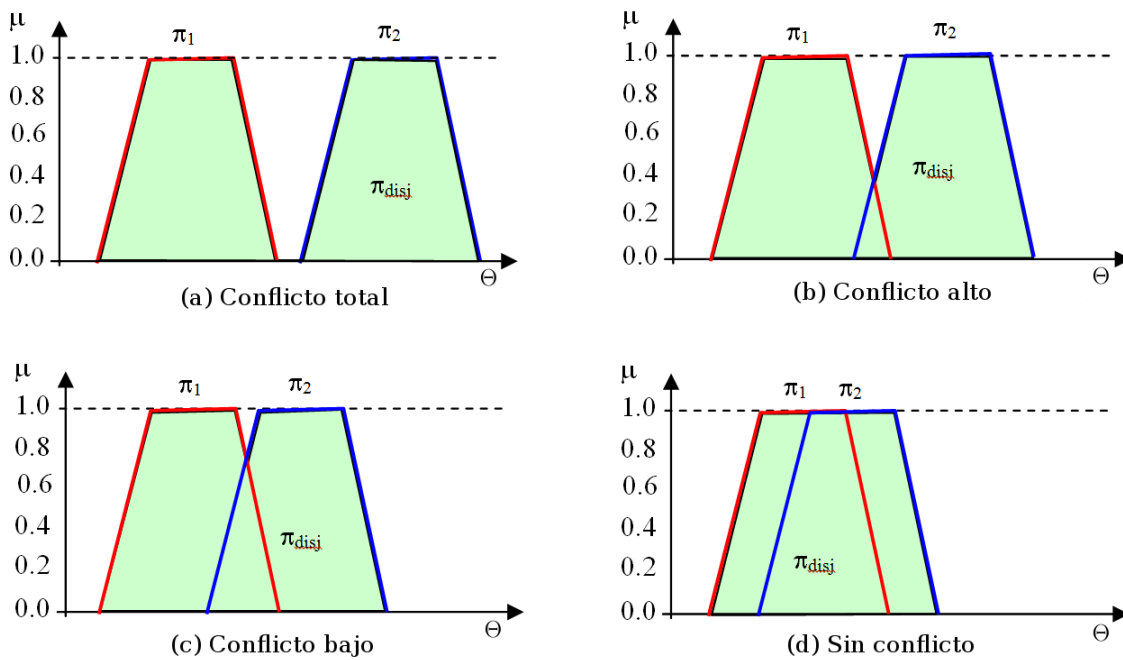


Figura G.3: Fusión disyuntiva.

La Fig. G.3 muestra el comportamiento de la fusión disyuntiva usando el operador máximo:

1. Cuando las fuentes están en conflicto total (Fig. G.3 (a)), no se puede saber cuál es la fuente segura que entrega la información correcta. La fusión disyuntiva no hace

ningún supuesto sobre la seguridad de las fuentes y guarda toda la información disponible. El resultado es obviamente poco claro.

2. Para los otros casos (Fig. G.3 (b), (c), (d)), la fusión disyuntiva muestra similar comportamiento: se guarda toda la información disponible.

El uso de la fusión disyuntiva cuando las fuentes están en conflicto total, siempre hace posible obtener un resultado, cosa que no ocurre con la fusión conjuntiva. Desafortunadamente, la fusión disyuntiva genera un resultado poco claro (poco informativo) como consecuencia de que se preserva toda la información disponible. De hecho, como se desconoce cuál es la fuente correcta, no se toma ninguna decisión y la información se guarda tal como está.

G.3 Fusión adaptativa

Para preservar los beneficios derivados de las fusiones conjuntiva y disyuntiva y eliminar sus problemas, Dubois and Prade (1994) han propuesto algunos métodos adaptativos que modifican su comportamiento de acuerdo con el tipo de información a fusionar:

1. Si las fuentes a fusionar están de acuerdo, se usa la fusión conjuntiva, con renormalización si es necesario.
2. Cuando ocurre un conflicto, se usa la fusión disyuntiva para suplementar la información resultante de la fusión conjuntiva.
3. Finalmente, si no puede encontrarse acuerdo entre las fuentes, se abandona la fusión conjuntiva, y se realiza la fusión disyuntiva.

Dos métodos que siguen estas ideas son la fusión adaptativa, y fusión adaptativa cuantificada. El criterio para determinar si las fuentes están en acuerdo o no, y así elegir el tipo de fusión adecuado, es la altura de la intersección de las distribuciones de posibilidad que indica el grado de consenso entre las fuentes, es decir, el grado de certidumbre sobre la fiabilidad de las fuentes. Se dan dos escenarios posibles:

1. Si $h(\pi_1, \pi_2) = 1$, las fuentes son fiables y sus posibilidades de distribución se solapan ampliamente, no hay conflicto. Se trata de un contexto favorable para usar la fusión conjuntiva.
2. Cuando $h(\pi_1, \pi_2) < 1$, existe algún conflicto. Cuanto más bajo el grado de consenso h , más fuerte es el conflicto.

Para tomar en cuenta el conflicto, los dos modos de fusión, conjuntivo y disyuntivo, se aplican en paralelo, la importancia que se atribuye a cada uno depende de h . Finalmente, cuando h es nulo, el conflicto es total entre las fuentes, y solamente se aplica la fusión disyuntiva. La regla para la fusión adaptativa es la siguiente:

$$\forall \theta \in \Theta$$

$$\pi_{ad}(\theta) = \max \left(\frac{\pi_{conj}(\theta)}{h(\pi_1, \pi_2)}, \min(1 - h(\pi_1, \pi_2), \pi_{disj}(\theta)) \right) \quad (G.1)$$

$$\pi_{ad}(\theta) = \max(A, B) \quad (G.2)$$

La expresión Eq. G.1 puede ser dividida en dos partes como se indica en la Eq. G.2:

- La parte A es una fusión conjuntiva renormalizada. Se usa cuando las fuentes están de acuerdo en algún grado ($0 < h(\pi_1, \pi_2) \leq 1$).
- La parte B es la fusión disyuntiva $\pi_{disj}(\theta)$ limitada por la cantidad de conflicto entre las fuentes, es decir por $1 - h(\pi_1, \pi_2)$. Esta limitación permite una conmutación desde una fusión conjuntiva a otra disyuntiva según el valor de h . Además, la fusión disyuntiva está limitada para favorecer el supuesto de que las dos fuentes sean fiables.

Cuando las fuentes a fusionar están en conflicto total (Fig. G.4), no es posible dar una opinión compartida y sólo se realiza la fusión disyuntiva (parte B). Cuando el consenso $1 - h(\pi_1, \pi_2)$ toma el valor de 1, la fusión disyuntiva no está restringida.

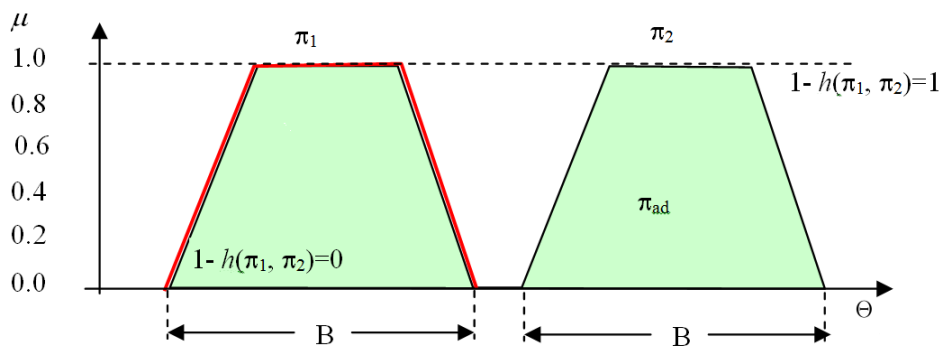


Figura G.4: Conflicto total en la fusión adaptativa.

La Fig. G.5 muestra un conflicto alto. Como la intersección es no nula entre las dos distribuciones de posibilidad (parte A), es posible usar la fusión conjuntiva renormalizada para fortalecer el peso de los valores posibles suministrados por cada fuente. No obstante, es deseable mantener la fusión disyuntiva ya que la posibilidad de que este área

contenga al verdadero valor de X es muy baja. Esta importancia decrece dependiendo del grado de conflicto entre las fuentes, que aquí es de 0,6.

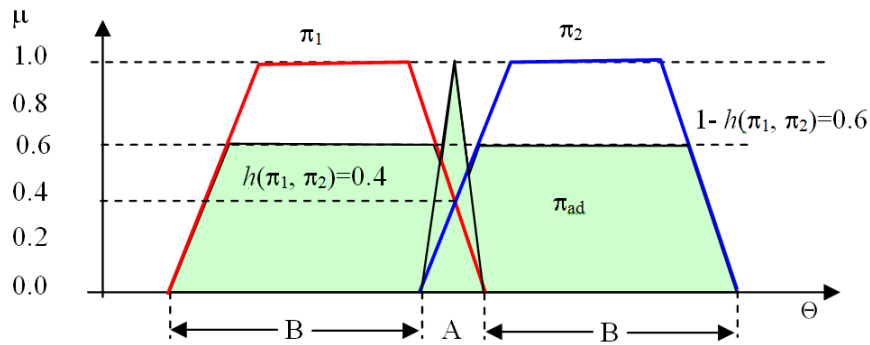


Figura G.5: Conflicto alto en la fusión adaptativa.

Cuanto más decrece el conflicto, más limitada está la fusión disyuntiva (Fig. G.6). Conforme la intersección entre las distribuciones de posibilidad se hace grande (parte A), la plausibilidad de que el verdadero valor de X esté en la intersección también se hace grande. El uso de la fusión conjuntiva renormalizada está justificada por la coherencia entre las fuentes. Pero todavía no existe un acuerdo total. La fusión disyuntiva se continúa usando, porque un pequeño conflicto entre las fuentes permanece. No obstante, la fusión disyuntiva está muy limitada cuando el conflicto entre las fuentes es bajo.

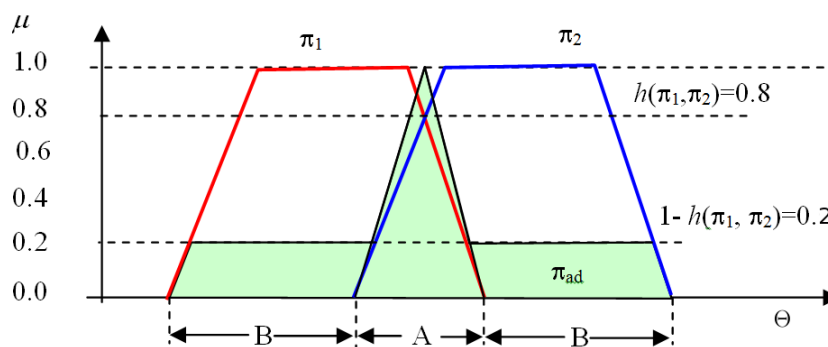


Figura G.6: Conflicto bajo en la fusión adaptativa.

Cuando el conflicto ha desaparecido completamente, las fuentes están en completo acuerdo (Fig. G.7). Este es el contexto correcto para el uso de la fusión conjuntiva. Las dos fuentes están fuertemente de acuerdo en el valor de x y así es legítimo asumir que son fiables. Además, la fusión disyuntiva es inadecuada ya que no existe conflicto.

Se ha mostrado la fusión adaptativa para la fusión de dos fuentes. Obviamente es posible usarla para un número de fuentes superior. Sin embargo, cuando el número de fuentes se incrementa, se hace generalmente difícil mantener el supuesto de fuentes seguras. En realidad, es difícil obtener una opinión común de todas las fuentes ya que suele existir

algún conflicto en alguna de ellas. Aparecen dificultades porque la fusión conjuntiva pretende expresar una opinión para la que existe unanimidad de las fuentes. La fusión adaptativa reacciona ante los conflictos intensificando el uso de la fusión disyuntiva, aunque una mayoría de fuentes estén de acuerdo sobre un intervalo común.

La limitación principal de la fusión adaptativa es una incapacidad de manejar correctamente la fusión de un gran número de fuentes. Además, aparece inestabilidad alrededor de intersecciones muy pequeñas o nulas de las distribuciones de posibilidad. No obstante, esta inestabilidad es menos problemática que antes debido al uso concurrente de la fusión disyuntiva para manejar el conflicto alto. Por último, es lamentable que la computación del grado de consenso h entre todas las fuentes haga que este operador no sea asociativo: el orden de las fuentes seguido en la fusión es importante si la fusión se realiza por grupos de dos fuentes. Para evitar este problema se deben fusionar todas las fuentes a la vez.

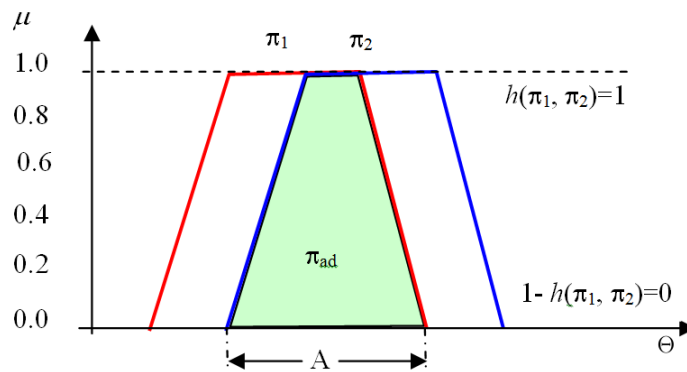


Figura G.7: Sin conflicto en la fusión adaptativa.

G.3.1. Fusión adaptativa cuantificada

Para fusionar un gran número de fuentes que comparten un acuerdo general, es importante intentar preservar la idea de la fusión conjuntiva. Sin embargo, es necesario tomar en consideración la dificultad de alcanzar la unanimidad de las fuentes cuando éstas son numerosas. Por esta razón Dubois and Prade (1994) han propuesto otro tipo de fusión adaptativa: la fusión adaptativa cuantificada.

Durante la fusión de un gran número de fuentes a menudo no todas ellas comparten un intervalo común aunque sí lo comparten una mayoría, y solamente algunas fuentes no están de acuerdo con esa mayoría. Así, es una lástima la pérdida de las virtudes de la fusión conjuntiva por esas pocas fuentes que crean conflicto y, como consecuencia, provocan la fusión disyuntiva. Es claro que el verdadero valor tiene más posibilidades de estar en la intersección de las distribuciones de posibilidad de la mayoría de fuentes en acuerdo que en la distribución generada por las pocas fuentes que crean el conflicto.

Puesto que las fuentes están en general de acuerdo, la idea es determinar esas fuentes que comparten opinión y usar la fusión conjuntiva. Esto se consigue a partir del grado de consenso h , permitiendo hacer una estimación optimista y pesimista sobre el conjunto de las fuentes seguras.

Si J es cualquier subconjunto del conjunto total de fuentes a fusionar, se tiene que

$$h(J) = \max_{\theta \in \Theta} (\min_{i \in J} (\pi_i(\theta)))$$

es el grado de consenso del subconjunto J de las fuentes. Las estimaciones pesimista m y optimista n del número de fuentes seguras ($m \leq n$) se definen como sigue:

$$m = \max(|J|, h(J) = 1) \quad \text{estimación pesimista}$$

$$n = \max(|J|, h(J) > 0) \quad \text{estimación optimista}$$

donde $|J|$ es el número de fuentes que integran J , $h(J) = 1$ indica el número de fuentes de J cuya altura es uno, y $h(J) > 0$ el número de fuentes de J con altura distinta de 0. Es plausible asumir que, entre las fuentes disponibles, existe un grupo de al menos m fuentes seguras, pero nunca más que n . La regla adaptativa vista antes, se generaliza para p fuentes como sigue:

$$\forall \theta \in \Theta$$

$$\pi_{\text{adq}}(\theta) = \max\left(\frac{\pi_{(n)}(\theta)}{h(n)}, \min(1 - h(n), \pi_{(m)}(\theta))\right)$$

$$\pi_{\text{adq}}(\theta) = \max(C, D)$$

$$h(n) = \max(h(J), |J| = n)$$

La regla de fusión adaptativa cuantificada se compone de las partes C y D :

- La parte C renormaliza sobre el mismo rango de valores posibles la fusión conjuntiva de los subconjuntos de las fuentes con acuerdo, aunque h sea sólo ligeramente superior a cero. Corresponde a la estimación optimista n del número de fuentes fiables.
- La parte D expresa el intervalo no cubierto por la parte C . Se usa para realizar la fusión que es más disyuntiva que la parte C (distribución de posibilidad proporcionada por cada fuente). Corresponde a la estimación pesimista m del número de fuentes fiables.

En particular, si es imposible encontrar al menos dos fuentes I y J tales que $h(\pi_i, \pi_j) = 1$, entonces la estimación pesimista del número de fuentes en acuerdo es $m = 1$, de forma

que $\pi_1(\theta)$ no es más que la fusión disyuntiva. Si el número de fuentes a fusionar es 2, entonces la regla coincide con la fusión adaptativa. Si $h(\pi_i, \pi_j) = 1$ (acuerdo entre las dos fuentes), entonces, $m = n = 2$ y

$$\pi_{adq}(\theta) = \pi_{(2)}(\theta) = \min(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))$$

Si $0 < h(\pi_i, \pi_j) < 1$ (conflicto parcial), entonces $m = 1$ y $n = 2$, así:

$$\begin{aligned} \pi_{adq}(\theta) &= \max\left(\frac{\pi_{(2)}(\theta)}{h(2)}, \min(1 - h(2), \pi_{(1)}(\theta))\right) = \\ &= \max\left(\frac{\min(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))}{h(2)}, \min(1 - h(2), \max(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta)))\right) = \\ &= \max\left(\frac{\pi_{conj}(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))}{h(\pi_1, \pi_2)}, \min(1 - h(\pi_1, \pi_2), \pi_{disj}(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta)))\right) = \\ &= \pi_{ad}(\theta) \end{aligned}$$

Finalmente, si $h(\pi_i, \pi_j) = 0$ (conflicto total), entonces $m = n = 1$ y $\pi_{adp}(\theta) = \max(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))$

Seguidamente se examina el comportamiento de la regla en un ejemplo donde se fusionan cuatro fuentes y se consideran separadamente los siguientes casos: conflicto total, conflicto alto, conflicto bajo, y sin conflicto.

Conflicto total (m=1, n=1): Cuando todas a fuentes a fusionar están en conflicto total, (Fig. G.8), no es posible encontrar una intersección no nula de sus distribuciones de posibilidad. Similarmente, no es posible encontrar consenso.

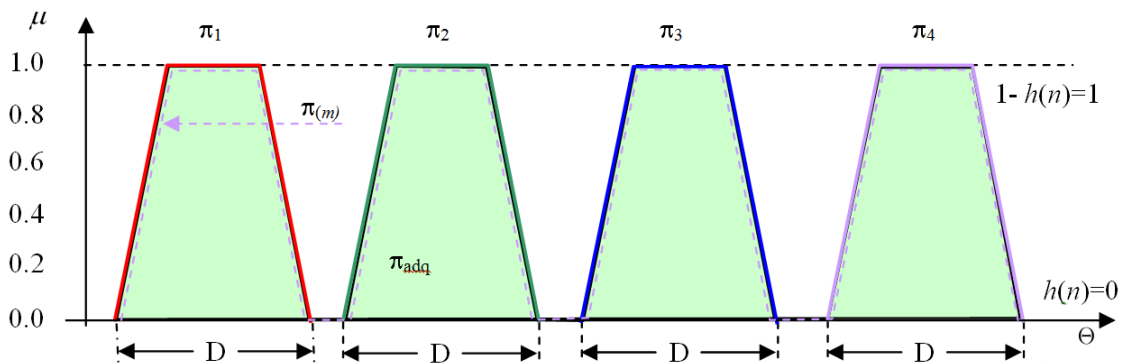


Figura G.8: Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto total.

La única solución aplicable en este caso es la fusión disyuntiva (parte D de la regla). Tan pronto como las fuentes no están de acuerdo (fuentes m), la parte D de la regla de fusión tiene un comportamiento de fusión disyuntiva.

Conflicto alto ($m=1, n=2$): Si al menos dos fuentes, entre todas las fuentes disponibles, tienen un pequeño acuerdo Fig. G.9, se buscan las áreas donde el valor de X es más cierto (áreas C). La fusión conjunta renormalizada hace esto posible dando más peso a esas áreas. Sin embargo, el procedimiento es todavía disyuntivo fuera de las áreas C porque existe un conflicto alto entre todas las otras fuentes. El modo de fusión permanece principalmente disyuntivo.

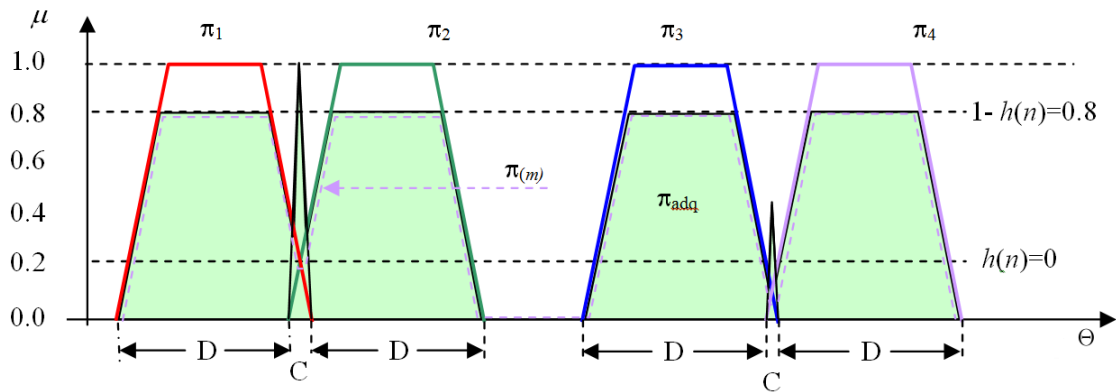


Figura G.9: Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto alto.

En la Fig. G.9 hay dos áreas C de acuerdo entre fuentes: la intersección de distribuciones π_1 y π_2 por un lado y π_3 y π_4 por otro. En este caso, se da preferencia al área donde la altura de la intersección es mayor, es decir, el área con mayor consenso. En el ejemplo de la Fig. G.9, $h(n)$ podría valer de 0,2 (altura de la intersección de π_1 y π_2), ó 0,1 (altura de la intersección de π_3 y π_4), pero se toma $h(n) = 0,2$ porque es el área más plausible, y porque es necesario permanecer dentro de los límites del intervalo $[0, 1]$ para la renormalización de $\pi_n(\theta)$ por $h(n)$. Como la renormalización de la fusión conjunta se realiza con $h(n) = 0,2$, la intersección de π_1 y π_2 resulta favorecida comparada con la intersección de π_3 y π_4 .

Conflicto bajo ($m=2, n=3$): Las Figs. G.10 y G.11 muestran una mayoría de fuentes con cierto acuerdo. El número de fuentes en acuerdo es $m = 2$ con $h(\pi_1, \pi_2) = 1$ y $n = 3$ con $h(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0,75 > 0$ y con $h(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0,35 > 0$. El área C corresponde al valor considerado más plausible para X por la mayoría de las fuentes. Esta área está favorecida con la fusión conjunta renormalizada. Fuera del área C todavía se encuentran áreas de acuerdo, pero para un bajo número de fuentes. Para no realizar una fusión puramente disyuntiva, se usa la fusión conjunta de nuevo, pero para un restringido número de fuentes. Se lleva a cabo una estimación pesimista m del número de fuentes seguras preservando solamente las áreas con intersección de m fuentes (áreas D). Para reducir su peso comparado con la mayoría de fuentes en acuerdo, su efecto se limita al grado de conflicto entre las fuentes n . Así, si n fuentes están en gran acuerdo ($h(n) \simeq 1$), entonces, las m fuentes, limitadas por ($h(n) \simeq 1$), son poco usadas (Fig. G.10). Sin em-

bargo, si n fuentes, aunque más numerosas, están poco de acuerdo ($h(n) \simeq 0$), entonces estas deberán estar contrarrestadas por las fuentes que son menos numerosas pero más seguras (fuentes m) (Fig. G.11).

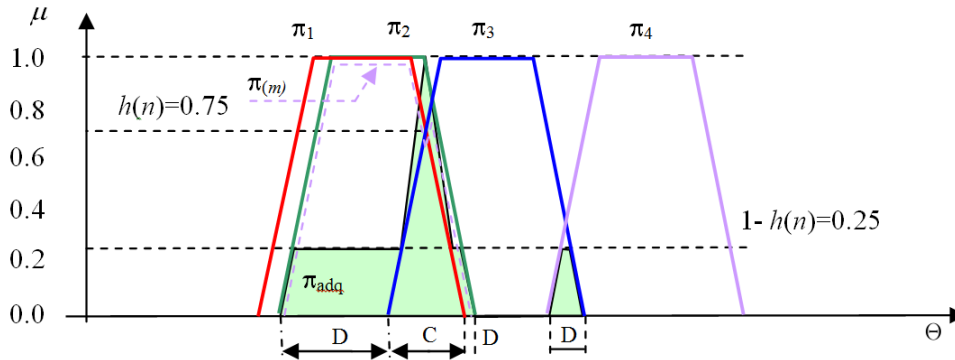


Figura G.10: Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto bajo.

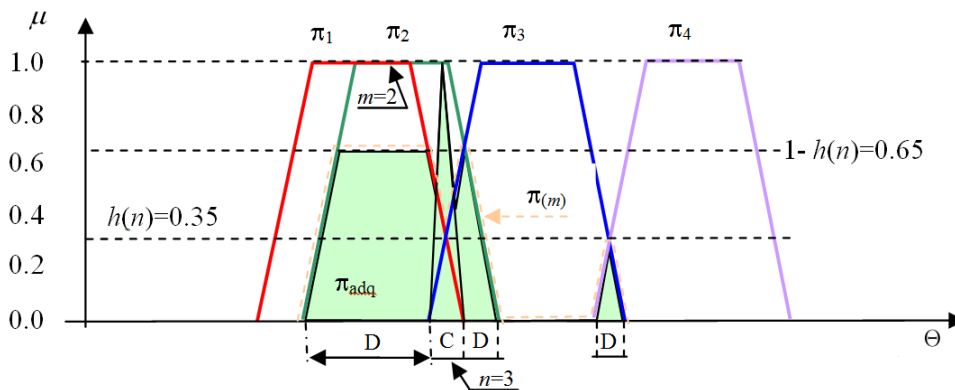


Figura G.11: Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes en conflicto alto.

Sin conflicto ($m=4, n=4$): Cuando las fuentes están en total acuerdo (Fig. G.12), se aplica una simple fusión conjuntiva tanto para la parte C (fuentes n) de la regla como para la parte D (fuentes m).

Conclusiones a la fusión adaptativa cuantificada

La fusión conjuntiva adaptativa es capaz de realizar adecuadamente la fusión de un gran número de fuentes globalmente en acuerdo. Cuando las fuentes son principalmente coherentes, el modo de fusión más adaptado es la fusión conjuntiva de las fuentes en acuerdo. Solamente cuando no existe una clara mayoría se seleccionará una fusión menos conjuntiva. La transición desde una fusión conjuntiva hacia una fusión disyuntiva se retrasa todo lo posible. Cada vez que es posible, se intenta extraer una opinión común

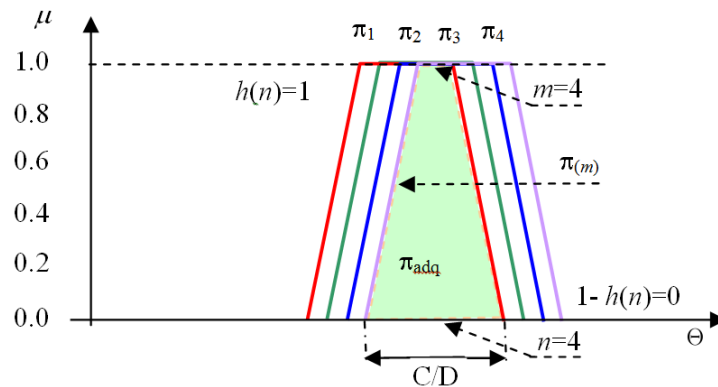


Figura G.12: Fusión adaptativa cuantificada de cuatro fuentes sin conflicto.

de una mayoría de fuentes. La tendencia es usar la fusión disyuntiva sólo cuando la opinión común está soportada por un pequeño número de fuentes. La fusión puramente disyuntiva se aplica solamente cuando cada fuente tiene una opinión diferente.

Sin embargo, la mayoría de los defectos de la fusión adaptativa también se encuentran aquí. La fusión adaptativa cuantificada no es asociativa debido al cálculo del número de fuentes en acuerdo, que se realiza a partir de la altura de la intersección de las distribuciones de posibilidad. Además, el cálculo de la altura es laborioso, y todavía está presente el problema de la inestabilidad del operador entre una intersección vacía y una no vacía de las distribuciones de posibilidad. Pero el principal defecto de la fusión adaptativa (es decir, el comportamiento binario a la hora de elegir entre la fusión conjuntiva cuando existe unanimidad de las fuentes, y la fusión disyuntiva, en caso contrario) desaparece. La fusión conjuntiva adaptativa siempre da preferencia a la fusión del tipo conjuntivo cuando es posible. Así, si solamente dos fuentes entre K fuentes disponibles están al menos un poco de acuerdo, se continúa aplicando la fusión conjuntiva para la intersección de esas dos fuentes, y una fusión disyuntiva fuera de la intersección. La fusión conjuntiva se abandona sólo cuando no se encuentra ninguna intersección entre las fuentes.

G.4 Fusión por prioridad

Es posible que de entre todas las fuentes a fusionar algunas se consideren más fiables que otras. Por ejemplo, la altura de un individuo puede evaluarse usando información indirecta (por ejemplo, comparándolo con otros individuos de alrededor), o usando información directa (por ejemplo, usando algún sistema de medida). Es obvio que la información directa es más precisa que la información indirecta. En presencia de conflictos entre fuentes directas e indirectas, se confiará más en las primeras y se descartará la información proporcionada por las fuentes indirectas.

Se puede clasificar un conjunto K de fuentes de información según su fiabilidad. Sea K_1, K_2, \dots, K_n una K -partición tal que las fuentes que pertenecen a K_i se considera que tienen la misma fiabilidad, y que son más fiables que las que pertenecen al conjunto K_j con $j > i$. La fusión de información proporcionada por los conjuntos K_1, K_2, \dots, K_n se realiza como sigue (Fig. G.13):

1. Se combina primero la información de K_1 usando el método adaptativo cuantificado, por ejemplo.
2. El resultado precedente se refina con información del conjunto K_2 solamente si éste no contradice a K_1 .
3. Se repite el proceso con el resto de los conjuntos.

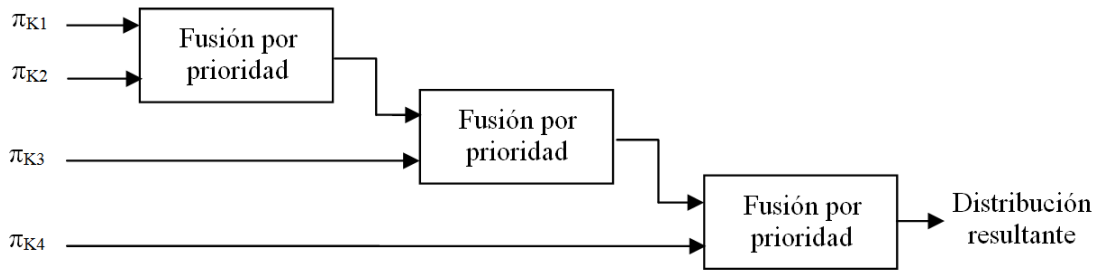


Figura G.13: Fusión por prioridad de cuatro fuentes informativas.

Puede definirse una regla de fusión por prioridad con un comportamiento conjuntivo o disyuntivo. La regla para la fusión por prioridad con comportamiento conjuntivo es la siguiente:

$$\forall \theta \in \Theta \quad \pi_{prioconj}^{1>2}(\theta) = \min(\pi_1(\theta), \max(\pi_2(\theta), 1 - h(\pi_1, \pi_2)))$$

donde $\pi_{prioconj}^{1>2}$ es la fusión prioritaria conjuntiva sobre las distribuciones 1 y 2, siendo la distribución 1 de mayor prioridad que la distribución 2. Esta regla expresa que las fuentes del conjunto K_1 proporcionan información fiable, mientras que la información resultante del conjunto K_2 se considera como segura solamente con un grado de certidumbre igual al grado de consenso h entre los conjuntos K_1 y K_2 .

Si $h(\pi_1, \pi_2) = 0$, entonces $\pi_{prioconj}^{1>2}(\theta) = \pi_1(\theta)$. Esto significa que la información del conjunto K_2 no se toma en cuenta porque está en conflicto total con la información del conjunto K_1 . Por el contrario, si $h(\pi_1, \pi_2) = 1$, entonces $\pi_{prioconj}^{1>2}(\theta) = \min(\pi_1(\theta), \pi_2(\theta))$ lo que significa que la información del conjunto K_2 está de acuerdo con la información del conjunto K_1 . Así, se usará K_2 para refinar a K_1 . El acuerdo de los conjuntos de las fuentes fortalece la credibilidad que puede darse a la intersección de sus distribuciones

de posibilidad. Esta regla corresponde a una operación de conjunción ponderada cuyo valor de ponderación es igual a 1 para la distribución π_1 y es igual a $h(\pi_1, \pi_2)$ para la distribución π_2 . Cabe observar que el resultado de esta fusión por prioridad no estará normalizada tan pronto como $h(\pi_1, \pi_2) < 1$.

La regla para la fusión por prioridad con comportamiento disyuntivo es la siguiente:

$$\forall \theta \in \Theta \quad \pi_{prio\ disj}^{1>2}(\theta) = \max(\pi_1(\theta), \min(\pi_2(\theta), 1 - h(\pi_1, \pi_2)))$$

donde $\pi_{prio\ disj}^{1>2}$ es la fusión prioritaria disyuntiva sobre las distribuciones 1 y 2, siendo la distribución 1 de mayor prioridad que la distribución 2. Esta regla expresa que si uno de dos conjuntos se supone erróneo, seguramente será el grupo menos fiable K_2 . Así, la información dada por K_2 se guarda sólo si está en acuerdo con K_1 . Cuanto más se incrementa el conflicto entre K_1 y K_2 , más se trunca la información de K_2 , que pierde confianza. Cuando el conflicto es total, solamente se guarda la información de K_1 . Como antes, el resultado de esta fusión por prioridad no estará normalizada si $h(\pi_1, \pi_2) < 1$.

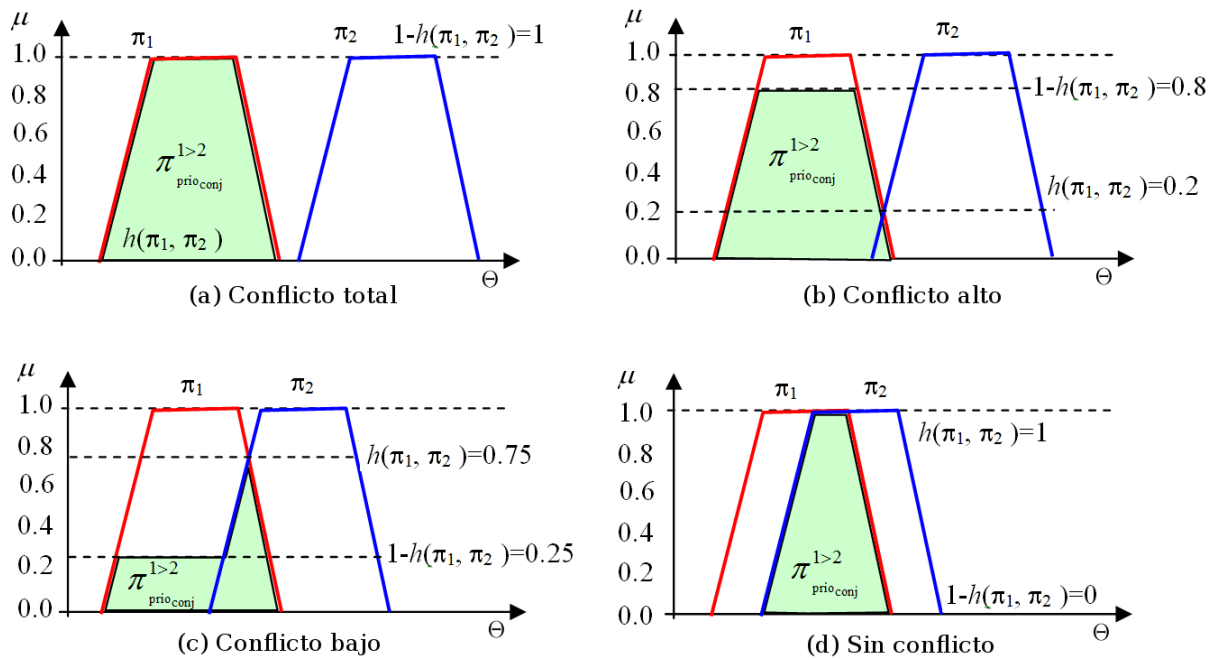


Figura G.14: Fusión por prioridad.

En el caso de conflicto total (Fig. G.14 (a)), se considera a la distribución proporcionada por el grupo K_1 como de fuentes seguras. Las fuentes del conjunto K_2 , menos seguras y en conflicto con las fuentes del conjunto de K_1 , se rechazan para la fusión. Si las fuentes del conjunto K_2 están de acuerdo con las fuentes del conjunto K_1 , aunque sea sólo un poco (Fig. G.14 (b)), entonces se comienza a dar importancia a la intersección limitando

la distribución del conjunto K_1 al grado de conflicto entre K_1 y K_2 . Sin embargo, como el acuerdo es escaso entre los dos conjuntos, se retiene un peso significativo para el conjunto K_1 .

Cuando los conjuntos K_1 y K_2 están muy de acuerdo (Fig. G.14 (c)), es muy probable que el verdadero valor de X se sitúe en el área de intersección de las distribuciones de los conjuntos K_1 y K_2 . Sin embargo, el acuerdo no es total. Así, para mantener indicios del conflicto remanente, aunque , la porción de la distribución del conjunto K_1 que está fuera de la intersección se mantiene, pero fuertemente limitada. Por último, si los conjuntos K_1 y K_2 están completamente de acuerdo en indicar que el intervalo común es el área en la cual se sitúa el verdadero valor de X (Fig. G.14 (d)), entonces sólo se preserva ese intervalo. Coincide con la aplicación de una simple fusión conjuntiva.

G.4.1. Conclusiones a la fusión por prioridad

Cuando las fuentes presentan una diferencia clara en sus fiabilidades, la fusión por prioridad favorece las fuentes más fiables valorando la mayor calidad de la información proporcionada. Se ha de hacer notar que el operador es no asociativo. Por otra parte, no es inestable cuando se pasa de un estado sin intersección de las distribuciones de posibilidad a un estado con una pequeña intersección, porque no se realiza ninguna renormalización. Se trata de un comportamiento positivo comparado con el de la fusión adaptativa, pero presenta el defecto de proporcionar una distribución no normalizada cuando $0 < h(\pi_1, \pi_2) < 1$.

G.5 Conclusiones sobre la fusión

Se han presentado diferentes técnicas de fusión de información dentro del marco posibilístico:

1. Primero los elementos básicos:
 - a) Fusión conjuntiva: adecuada para la fusión de información cuando las fuentes están muy de acuerdo.
 - b) Fusión disyuntiva: su opuesto, su objetivo consiste en manejar problemas de conflictos entre las fuentes de información.
2. Luego, dos métodos adaptativos de fusión cuyo interés está en su habilidad para modificar su comportamiento de acuerdo al grado de conflicto entre las fuentes y poder así tratar cada problema de forma adecuada. El elemento clave que da

características adaptativas a estos métodos es la altura de la intersección de las distribuciones de posibilidad de cada fuente:

- a) Alta intersección indica fuerte consenso, y eso dirige la fusión hacia un comportamiento conjuntivo.
- b) Baja intersección, por el contrario, significa que las fuentes están en conflicto. Se usa entonces una fusión del tipo disyuntivo.

La desventaja de estos métodos es su carácter no asociativo como consecuencia del cálculo de la altura de la intersección de las distribuciones de posibilidad. Esto implica que los métodos de fusión adaptativos proporcionan, probablemente, diferente resultado según el orden en que se fusionan las fuentes de información. No obstante, este problema se elimina si todas las fuentes se combinan al mismo tiempo.

3. Finalmente, un método de fusión que maneja las prioridades dadas a cada fuente. El objetivo aquí es dar preferencia a las fuentes consideradas más fiables cuando existe un conflicto a solucionar. Si existe conflicto, las fuentes menos fiables se descartan.

Referencias

- A. Howard, G. B. (2000). Intelligent learning for deformable object manipulation. *Autonomous Robots*, 9(1):51–58.
- Abidi, M. A. and Gonzalez, R. C. (1992). *Data fusion in robotics and machine intelligence*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA.
- Allen, P. K., Miller, A. T., Oh, P. Y., and Leibowitz, B. S. (1999). Integration of vision, force and tactile sensing for grasping. *Int. J. Intelligent Machines*, 4:129–149.
- Arnab, S. and Raja, V. (2008). A deformable surface model for soft volume simulation. In Loucas S. Louca, Y. C. Z. O. K. A.-B., editor, *Proceedings 22nd European Conference on Modelling and Simulation ECMS*.
- Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N., and Clapp, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(2):174–188.
- Azevedo, T., Tavares, J., and Vaz, M. (2009). *3D Object Reconstruction from Uncalibrated Images Using an Off-the-Shelf Camera*, volume 13 of *Computational Methods in Applied Sciences*. Springer Netherlands.
- Baeten, J., Bruyninckx, H., and De Schutter, J. (2003). Integrated vision/force robotic servoing in the task frame formalism. *The International Journal of Robotics Research*, 22(10-11):941–954.
- Baraff, D. and Witkin, A. (1998). Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '98*, pages 43–54, New York, NY, USA. ACM.
- Barenblatt, G. and Joseph, D. (1997). *Collected Papers of RS Rivlin*. Springer-Verlag New York, Inc., 1 edition.
- Basafa, E. and Farahmand, F. (2011). Real-time simulation of the nonlinear visco-elastic deformations of soft tissues. *International journal of computer assisted radiology and surgery*, 6(3):297–307.

- Beatty, M. F. (1987). Topics in finite elasticity: Hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues—with examples. *Appl. Mech. Rev.*, 40(12):1699–1734.
- Bedworth, M. and O'Brien, J. (2000). The omnibus model: a new model of data fusion? *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, 15(4):30–36.
- Bianchi, G., Solenthaler, B., Székely, G., and Harders, M. (2004). Simultaneous topology and stiffness identification for mass-spring models based on fem reference deformations. In *Proceedings of Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI)*. France, St-Malo.
- Bicchi, A. and Kumar, V. (2002). Robotic grasping and contact: a review. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 1, pages 348–353.
- Boyd, c. J. A. (1987). A Discourse on Winning and Losing.
- Bro-nielsen, M. (1998). Finite element modeling in surgery simulation. In *Proceedings of the IEEE*, pages 490–503.
- Bro-Nielsen, M. and Cotin, S. (1996). Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation. *Computer Graphics Forum*, 15(3):57–66.
- Byars, E. and Snyder, R. (1969). *Engineering mechanics of deformable bodies*. International Textbook Co.
- Cappe, O., Godsill, S. J., and Moulines, E. (2007). An overview of existing methods and recent advances in sequential monte carlo. *Proceedings of the IEEE*, 95(5):899–924.
- Carignan, M., Yang, Y., Thalmann, N. M., and Thalmann, D. (1992). Dressing animated synthetic actors with complex deformable clothes. In *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH)*, pages 99–104.
- Chawda, V. and OrMalley, M. (2011). Vision-based force sensing for nanomanipulation. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 16(6):1177–1183.
- Chen, F., Gu, L., Huang, P., Zhang, J., and Xu, J. (2007). Soft tissue modeling using non-linear mass spring and simplified medial representation. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2007. EMBS 2007. 29th Annual International Conference of the IEEE*, pages 5083–5086.
- Chen, Z. (2003). Bayesian filtering: From kalman filters to particle filters, and beyond. Technical report, McMaster University.
- Choi, K. J. and Ko, H. S. (2002). Stable but responsive cloth. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH Proc.)*, 21:604–611.

-
- Cotin, S., Delingette, H., and Ayache, N. (1996). Real time volumetric deformable models for surgery simulation. In *VBC*, pages 535–540.
- Cretu, A.-M., Payeur, P., and Petriu, E. (2008). Neural network mapping and clustering of elastic behavior from tactile and range imaging for virtualized reality applications. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 57(9):1918–1928.
- Cretu, A.-M., Payeur, P., and Petriu, E. (2012). Soft object deformation monitoring and learning for model-based robotic hand manipulation. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 42(3):740–753.
- Crisan, D. and Doucet, A. (2002). A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(3):736–746.
- Dasarathy, B. V. (1994). *Decision Fusion*. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA.
- DeCETI (2005). *Multi-Sources Information Fusion for Satellite Images Classification*. National Technical University of Athens, Laboratory of Remote Sensing. <http://portal.survey.ntua.gr/main/labs/rsens/DeCETI/IRIT/MSI-FUSION/index.html>.
- delCastillo, E., Basañez, L., and Gil, E. (2013). Modeling nonlinear viscoelastic behavior under large deformations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. Conditionally accepted.
- Dempster, A. P. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *The Annals of Mathematical Statistics*, 38(2):pp. 325–339.
- Desbrun, M., Schröder, P., and Barr, A. (1999). Interactive animation of structured deformable objects. In *Proceedings of the 1999 conference on Graphics interface '99*, pages 1–8, San Francisco, CA, USA. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- Diolaiti, N., Melchiorri, C., and Stramigioli, S. (2005). Contact impedance estimation for robotic systems. *Robotics, IEEE Transactions on*, 21(5):925–935.
- Douc, R. and Cappe, O. (2005). Comparison of resampling schemes for particle filtering. In *Image and Signal Processing and Analysis, 2005. ISPA 2005. Proceedings of the 4th International Symposium on*, pages 64–69.
- Doucet, A., Godsill, S., and Andrieu, C. (2000). On sequential monte carlo sampling methods for bayesian filtering. *STATISTICS AND COMPUTING*, 10(3):197–208.
- Doucet, A. and Johansen, A. M. (2011). A tutorial on particle filtering and smoothing: fifteen years later.

- Dubois, D. and Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems - Theory and applications*. Academic press, New York.
- Dubois, D. and Prade, H. (1983). Unfair coins and necessity measures: Towards a possibilistic interpretation of histograms. *Fuzzy Sets Syst.*, 10(1-3):15–20.
- Dubois, D. and Prade, H. (1988a). On the combination of evidence in various mathematical frameworks. NATO Advanced Research Workshop on Knowledge Based Robot Control.
- Dubois, D. and Prade, H. (1988b). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press.
- Dubois, D. and Prade, H. (1988c). *Théorie des possibilités: application à la représentation des connaissances en informatique*. Masson, Paris.
- Dubois, D. and Prade, H. (1990). Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets*. *International Journal of General Systems*, 17(2-3):191–209.
- Dubois, D. and Prade, H. (1994). Possibility theory and data fusion in poorly informed environments. *Control Eng. Practice*, 2:811–823.
- Dubois, D. and Prade, H. (2000). Possibility theory in information fusion. In *Information Fusion, 2000. FUSION 2000. Proceedings of the Third International Conference on*, volume 1, pages PS6 –P19 vol.1.
- Durrant-Whyte, H. F. (1988). Sensor models and multisensor integration. *I. J. Robotic Res.*, pages 97–113.
- Elbrechter, C., Haschke, R., and Helge, R. (2012). Folding paper with anthropomorphic robot hands using real-time physics-based modeling. In *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids 2012)*.
- Esteban, C. H. and Schmitt, F. (2004). Silhouette and stereo fusion for 3d object modeling. *Comput. Vis. Image Underst.*, 96(3):367–392.
- Faugeras, O. (1993). *Three-dimensional computer vision: a geometric viewpoint*. MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- Fearnhead, P. (1998). *Sequential Monte Carlo Methods in Filter Theory*. PhD thesis, University of Oxford.
- Florea, M., Jousselme, A., and Bosse, E. (2007). Fusion of imperfect information in the unified framework of random sets theory: Application to target identification. Technical Report ADA475342, Defence Research And Development Canada Valcartier (Quebec).

- Fung, Y. C. (1993). *BIOMECHANICS-Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag Inc, New York, 2 edition.
- Garg, Sohil; Dutta, A. (2006). Grasping and manipulation of deformable objects based on internal force requirements. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 3(2):107.
- Gelder, A. V. (1998). Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes. *journal of graphics, gpu, and game tools*, 3(2):21–41.
- Gibson, S. (1997). 3d chainmail: a fast algorithm for deforming volumetric objects. In *Proceedings of the Symposium on Interactive 3D Graphics, ACM SIGGRAPH*, pages 149–154.
- Gilks, W. R. and Berzuini, C. (2001). Following a moving target – Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, pages 127–146.
- Godsill, S. and Clapp, T. (2000). Improvement strategies for monte carlo particle filters. In *SEQUENTIAL MONTE CARLO METHODS IN PRACTICE*, pages 139–158. Springer-Verlag.
- Goodman, I. R., Mahler, R. P., and Nguyen, H. T. (1997). *Mathematics of Data Fusion*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA.
- Gordon, N. J., Salmond, D. J., and Smith, A. F. M. (1993). Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F*, 140(2):107–113.
- Gottschalk, S., Lin, M. C., and Manocha, D. (1996). Obbtree: A hierarchical structure for rapid interference detection. *Computer Graphics*, 30(Annual Conference Series):171–180.
- Gottschlich, S., Ramos, C., and Lyons, D. (1994). Assembly and task planning: a taxonomy. *Robotics Automation Magazine, IEEE*, 1(3):4–12.
- Greminger, M. A. and Nelson, B. J. (2004). Vision-based force measurement. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(3):290–298.
- Grimm, J., Wagner, C., and Männer, R. (2004). Interactive real-time simulation of the internal limiting membrane. In Cotin, S. and Metaxas, D., editors, *Medical Simulation*, volume 3078 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 153–160. Springer Berlin / Heidelberg. 10.1007/978-3-540-25968-8_17.
- Haibin, L., Qinghu, C., Hongyong, W., and Qianqian, Z. (2010). Robust face recognition by fusion local singular value feature and deformable model. In *Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese*, pages 2694–2699.

- Hall, D. L. and Llinas, J. (1997). An introduction to multisensor data fusion. *Proceedings of the IEEE*, 85(1):6–23.
- Hall, D. L. and Llinas, J. (2001). *Handbook of Multisensor Data Fusion*. CRC Press.
- Handschin, J. (1970). Monte carlo techniques for prediction and filtering of non-linear stochastic processes. *Automatica*, 6(4):555–563.
- Hau, H.-Y. and Kashyap, R. (1989). On the robustness of dempster’s rule of combination. In *Tools for Artificial Intelligence, 1989. Architectures, Languages and Algorithms, IEEE International Workshop on*, pages 578 –582.
- Hauth, M., Etzmuß, O., and Straßer, W. (2003). Analysis of numerical methods for the simulation of deformable models. *The Visual Computer*, 19(7-8):581–600.
- Hebert, P., Hudson, N., Ma, J., and Burdick, J. W. (2011). Fusion of stereo vision, force-torque, and joint sensors for estimation of in-hand object location. In *ICRA*, pages 5935–5941.
- Henkind, S. J. and Harrison, M. C. (1988). An analysis of four uncertainty calculi. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 18(5).
- Henrich, D. and Wörn, H. (2000). *Robot manipulation of deformable objects*. Advanced manufacturing. Springer.
- Henrion, M., Breese, J. S., and Horvitz, E. (1991). Decision analysis and expert systems. *AI Magazine*, 12(4):64–91.
- Hong, M., Jung, S., Choi, M., and Welch, S. (2006). Fast volume preservation for a mass-spring system. *IEEE Comput. Graph. and Appl.*, 26:83–91.
- Hosoda, K., Igarashi, K., and Asada, M. (1996). Adaptive hybrid visual servoing/force control in unknown environment. In *Intelligent Robots and Systems ’96, IROS 96, Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 3, pages 1097 –1103 vol.3.
- Hunt, K. H.; Crossley, F. R. E. (1975). Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 42(2):440–445.
- Ishikawa, T., Sakane, S., Sato, T., and Tsukune, H. (1996). Estimation of contact position between a grasped object and the environment based on sensor fusion of vision and force. In *Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, 1996. IEEE/SICE/RSJ International Conference on*, pages 116 –123.
- James, D. L. and Pai, D. K. (1999). Accurate real time deformable objects. In *Proc. ACM SIGGRAPH Computer Graphics Proceeding (Los Angeles)*, pages 65–72.

-
- Jansson, J. and Vergeest, J. (2002). A discrete mechanics model for deformable bodies. *Computer-Aided Design*, 34:913–928.
- Jian Huang, I. T. and Yabuta, T. (2005). *Position / Force Hybrid Control of a Manipulator with a Flexible Tool Using Visual and Force Information*. Cutting Edge Robotics. Vedran Kordic, Aleksandar Lazinica and Munir Merdan.
- Joshi, R. and Sanderson, A. (1999). *Multisensor Fusion: A Minimal Representation Framework*. Series in Intelligent Control and Intelligent Automation. World Scientific.
- Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 83:95–107.
- Kang, Y.-M., Choi, J.-H., Cho, H.-G., and Park, C.-J. (2000). Fast and stable animation of cloth with an approximated implicit method. In *Proceedings of the International Conference on Computer Graphics, CGI '00*, pages 247–, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Kass, M., Witkin, A., and Terzopoulos, D. (1988). Snakes: active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331.
- Kendall, D. G. (1974). Foundations of a Theory of Random Sets. In Harding, E. and Kendall, D. G., editors, *Stochastic Geometry*, pages 322–376. John Wiley & Sons, London, England.
- Khaleghi, B., Khamis, A., and Karray, F. O. (2011). Multisensor data fusion: a review of the state-of-the-art. *Information Fusion*.
- Khalil, F. and Payeur, P. (2007). Robotic interaction with deformable objects under vision and tactile guidance - a review. In *Robotic and Sensors Environments, 2007. ROSE 2007. International Workshop on*, pages 1 –6.
- Khalil, F. F. and Payeur, P. (2010). *Dexterous Robotic Manipulation of Deformable Objects with Multi-Sensory Feedback - a Review*. InTech.
- Kitagawa, G. (1996). Monte carlo filter and smoother for non-gaussian nonlinear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(1):1–25.
- Klein, L. A. (2004). *Data and sensor fusion: a tool for information assessment and decision making*. SPIE, Bellingham, Washington, USA.
- Klir, G. (2001). Measuring uncertainty and uncertainty-based information for imprecise probabilities. In *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, 2001. Joint 9th*, volume 3, pages 1729 –1734 vol.3.

- Klir, G. J. and Folger, T. A. (1988). *Fuzzy sets, uncertainty and information*. Prentice Hall.
- Klir, G. J. and Parviz, B. (1992). Probability-possibility transformations: A comparison. *International Journal of General Systems*, 21(3):291–310.
- Kokar, M. (2004). Formalizing classes of information fusion systems. *Information Fusion*, 5(3):189–202.
- Kong, A., Liu, J. S., and Wong, W. H. (1994). Sequential imputations and bayesian missing data problems. *Journal of the American Statistical Association*, 89(425):278–288.
- Li, H. F., Ceglarek, D., and Shi, J. (2002). A dexterous part-holding model for handling compliant sheet metal parts. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 124(1):109.
- Li, Q. and Lee, K. (2007). An adaptive meshless method for modeling large mechanical deformation and contacts. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (Roma, Italia)*, pages 1207–1212.
- Libai, A. and Simmonds, J. (1998). *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Liu, J. S. and Chen, R. (1998). Sequential monte carlo methods for dynamic systems. *Journal of the American Statistical Association*, 93:1032–1044.
- Liu, X., Sun, Y., Wang, W., and Lansdorp, B. M. (2007). Vision-based cellular force measurement using an elastic microfabricated device. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 17(7):1281.
- Llinas, J., Bowman, C., Rogova, G., Steinberg, A., Waltz, E., and White, F. (2004). Revisiting the jdl data fusion model ii. In *In P. Svensson and J. Schubert (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Information Fusion (FUSION 2004)*, pages 1218–1230.
- Lloyd, B., Székely, G., and Harders, M. (2007a). Identification of spring parameters for deformable object simulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13:1081–1094.
- Lloyd, B. A., Székely, G., and Harders, M. (2007b). Identification of spring parameters for deformable object simulation. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 13(5):1081–1094.
- Luo, R. and Chang, C.-C. (2012). Multisensor fusion and integration: A review on approaches and its applications in mechatronics. *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 8(1):49–60.

-
- Luo, R. and Kay, M. (1990). A tutorial on multisensor integration and fusion. In *Industrial Electronics Society, 1990. IECON '90., 16th Annual Conference of IEEE*, pages 707–722 vol.1.
- Luo, R. C. and Kay, M. G. (1989). Multisensor integration and fusion in intelligent systems. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 19(5):901–931.
- Luo, Y. and Nelson, B. J. (2001). Fusing force and vision feedback for manipulating deformable objects. *Journal of Robotic Systems*, 18(3):103–117.
- MacCormick, J. and Blake, A. (2000). A probabilistic exclusion principle for tracking multiple objects.
- Martins, P. A. L. S., Jorge, R. M. N., and Ferreira, A. J. M. (2006). A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: Application to silicone-rubber and soft tissues. *Strain*, 42(3):135–147. Cited By (since 1996): 32.
- Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley.
- Mayne, D. Q. and Handschin, J. E. (1969). Monte carlo techniques to estimate the conditional expectation in multi-stage non-linear filtering. *International Journal of Control*, 5(5):547–559.
- Meier, U., López, O., Monserrat, C., Juan, M. C., and Alcañiz, M. (2005). Real-time deformable models for surgery simulation: a survey. *Comput. Methods Prog. Biomed.*, 77:183–197.
- Mezger, J., Kimmerle, S., and Eitzmuß, O. (2003). Hierarchical techniques in collision detection for cloth animation. *Journal of WSCG*, 11:322–329.
- Milliron, T., Jensen, R. J., Barzel, R., and Finkelstein, A. (2002). A framework for geometric warps and deformations. *ACM Transaction on Graphics*, 21(1):20–51.
- Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.*, 11:582–592.
- Moore, M. and Wilhelms, J. (1988). Collision detection and response for computer animation. In *Computer Graphics*, pages 289–298.
- Moore, P. and Molloy, D. (2007). A survey of computer-based deformable models. In *International Machine Vision and Image Processing Conference*, pages 55–64.
- Morel, G., Malis, E., and Boudet, S. (1998). Impedance based combination of visual and force control. In *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1743–1748 vol.2.

- Morris, D. and Salisbury, K. (2008). Automatic preparation, calibration, and simulation of deformable objects. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 11(3):263–279.
- Mosegaard, J. (2004). Parameter optimisation for the behaviour of elastic models over time. In *Proceedings of Medicine Meets Virtual Reality*, volume 12.
- Müller, M., Dorsey, J., McMillan, L., Jagnow, R., and Cutler, B. (2002). Stable real-time deformations. In *Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation (San Antonio, Texas)*, pages 49–54.
- Murphy, R. R. (2000). *Introduction to AI Robotics*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1st edition.
- Murray, D. R. (2004). *Patchlets: a method of interpreting correlation stereo three-dimensional data*. PhD thesis, The University of British Columbia (Canada). AAINQ90235.
- Musso, C., Oudjane, N., and Legland, F. (2001). Improving regularized particle filters. In Doucet, A., de Freitas, N., and Gordon, N., editors, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. New York, number 12, pages 247–271. Statistics for Engineering and Information Science.
- Nealen, A., Mueller, M., Keiser, R., Boxerman, E., and Carlson, M. (2006a). Physically Based Deformable Models in Computer Graphics. *Computer Graphics Forum*, 25(4):809–836.
- Nealen, A., Mueller, M., Keiser, R., Boxerman, E., and Carlson, M. (2006b). Physically based deformable models in computer graphics. *Computer Graphics Forum*, 25(4):809–836.
- Nelson, B. J. and Khosla, P. K. (1996). Force and vision resolvability for assimilating disparate sensory feedback. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12:714–731.
- Nguyen, H. (1978). On random sets and belief functions. *J. Mathematical Analysis and Applications*, 65:531–542.
- Ogden, R. W. (1984). *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, USA, 1 edition.
- Okamura, A. M., Simone, C., and O’Leary, M. D. (2004). Force modeling for needle insertion into soft tissue. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 51(10):1707–1716.

- Okuizumi, N. and Yamamoto, T. (2009). Centrifugal deployment of membrane with spiral folding: Experiment and simulation. *Journal of Space Engineering*, 2(1):41–50.
- Oliveira, F. P. and Tavares, J. M. R. (2012). Medical image registration: a review. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 0(0):1–21. PMID: 22435355.
- Orlov, A. (1978). Fuzzy and random sets. *Prikladnoi Mnogomerni Statisticheskii Analys*, pages 262–280.
- Oudjane, N. and Musso, C. (2000). Progressive correction for regularized particle filters. In *Information Fusion, 2000. FUSION 2000. Proceedings of the Third International Conference on*, volume 2, pages THB2/10 –THB2/17 vol.2.
- Oxlund, H., Helmig, R., Halaburt, J., and Ulbjerg, N. (1990). Biomechanical analysis of human chorioamniotic membranes. *European Journal of Obstetrics & Gynecology and Reproductive Biology*, 34(3):247–255.
- Pawlak, Z. (1991). *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data*. Theory and decision library: System theory, knowledge engineering, and problem solving. Kluwer Academic Publishers.
- Pearce, S., King, J., and Holdsworth, M. (2011). Axisymmetric indentation of curved elastic membranes by a convex rigid indenter. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(9):1128 – 1138.
- Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- Picinbono, G., Delingette, H., and Ayache, N. (2000). Real-time large displacement elasticity for surgery simulation: non-linear tensor-mass model. In S.L. Delp, A. D. B. J., editor, *Proceedings of the Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI: 3)*, volume 1035, pages 643–652. Lecture Notes in Computer Science.
- Picinbono, G., Delingette, H., and Ayache, N. (2003). Non-linear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation. *Graph. Models*, 65:305–321.
- Piegl, L. and Tiller, W. (1997). *The NURBS book*. Springer-Verlag New York, Inc., 2 edition.
- Pitt, M. K. and Shephard, N. (1999). Filtering via simulation: Auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, 94(446):590–??
- Pomares, J., García, G. J., and Torres, F. (2007). A robust approach to control robot manipulators by fusing visual and force information. *J. Intell. Robotics Syst.*, 48(4):437–456.

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in C (2nd ed.): the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Provot, X. (1995). Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. In *IN GRAPHICS INTERFACE*, pages 147–154.
- Reznik, D. and Laugier, C. (1996). Dynamic simulation and virtual control of a deformable fingertip. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1669–1674.
- Rissanen, J. (2004). *Minimum-Description-Length Principle*. John Wiley & Sons, Inc.
- Ristic, B., Arulampalam, S., and Gordon, N. (2004). *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House.
- Rivlin, R. S. (1940). Large elastic deformations of isotropic materials. iv: Further developments of the general theory. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, A241(379).
- Saadat, M. and Nan, P. (2002). Industrial applications of automatic manipulation of flexible materials. *Industrial Robot-an International Journal*, 29:434–442.
- Schneider, P. J. and Eberly, D. (2002). *Geometric Tools for Computer Graphics*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA.
- Seitz, M. (1999). Towards autonomous robotic servicing: Using an integrated hand-arm-eye system for manipulating unknown objects. *Robotics and Autonomous Systems*, 26(1):23 – 42.
- Sela, G., Subag, J., Lindblad, A., Albocher, D., Achein, S., and Elber, G. (2006). Real-time haptic incision simulation using fem-based discontinuous free form deformation. In *SPM'06: Proceedings of the 2006 ACM symposium on solid and physical modeling*, pages 75–84. ACM Press. New York, NY, USA.
- Selvadurai, A. and Shi, M. (2012). Fluid pressure loading of a hyperelastic membrane. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47:228–239.
- Selvadurai, A. P. S. (2006). Deflections of a rubber membrane. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(6):1093–1119.
- Selvadurai, A. P. S. and Yu, Q. (2006). On the indentation of a polymeric membrane. *Proceedings of the Royal Society, Mathematical and Physical Sciences Series A*, 462:189–209.
- Shafer, G. (1976). *A mathematical theory of evidence*. Princeton university press.

-
- Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 1 edition.
- Skowron, A. (1989). The relationship between the rough sets and the evidence theory. *Bulletin of the Polish Academy of Science*, 37(1-2):87–90.
- Skowron, A. and Zhong, N. (2000). *Rough Sets in KDD. Tutorial Notes*. Warsaw University and Maebashi Institute of Technology. <http://roughsets.home.pl/IRSS/rs-kdd/sld001.htm>.
- Smets, P. (1989). Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty. In *Uncertainty in Artificial Intelligence 5 Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-89)*, pages 29–39, Amsterdam, NL. Elsevier Science.
- Smets, P. (1994). Non-standard probabilistic and non probabilistic representations of uncertainty. In *IPMU*, pages 13–38.
- Smets, P. (1996). Imperfect information: Imprecision and uncertainty. In *Uncertainty Management in Information Systems*, pages 225–254.
- Smets, P. and Kennes, R. (1994). The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66(2):191–234.
- Smith, A. F. M. and Gelfand, A. E. (1992). Bayesian statistics without tears: A sampling-resampling perspective. *The American Statistician*, 46(2):84–88.
- Smith, D. V. and Margolskee, R. F. (2006). Making sense of taste. *Scientific American*, (16):84–92.
- Smits, R., Bruyninckx, H., Meeussen, W., Baeten, J., Slaets, P., and Schutter, J. D. (2006). Model Based Position-Force-Vision Sensor Fusion for Robot Compliant Motion Control. In *International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*.
- Sorenson, H. W. (1980). *Parameter Estimation: Principles and Problems*, volume 9 of *Control and Systems Theory*. Marcel Dekker, inc., New York.
- Spencer, A. J. M. (1970). The static theory of finite elasticity. *Journal of Applied Mathematics*, 6(2):164–200.
- Taber, L. (2004). *Nonlinear Theory of Elasticity: Applications in Biomechanics*. World Scientific Publishing Company, Incorporated.
- Tanner, M. A. and Wong, W. H. (1987). The calculation of posterior distributions by data augmentation. *Journal of the American Statistical Association*, 82(398):528–540.

- Taylor, Z. A., Cheng, M., and Ourselin, S. (2007). Real-time nonlinear finite element analysis for surgical simulation using graphics processing units. In *Proceedings of the 10th international conference on Medical image computing and computer-assisted intervention - Volume Part I, MICCAI'07*, pages 701–708, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.
- Teran, J., Blemker, S., Hing, V. N. T., , and Fedkiw, R. (2003). Finite volume methods for the simulation of skeletal muscle. In *Proc. ACM Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, pages 68–74.
- Terzopoulos, D., Witkin, A., and Kass, M. (1988). Constrain on deformable models: recovering 3d shape and nonrigid motion. *Artificial Intelligence*, 36(1):91–123.
- Thomas, U., Molkenstruck, S., Iser, R., and Wahl, F. (2007). Multi sensor fusion in robot assembly using particle filters. In *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*, pages 3837 –3843.
- Thrun, S., Burgard, W., and Fox, D. (2005). *Probabilistic Robotic*. Intelligent Robotics and Autonomous Agents Series. Mit Press.
- Tokumoto, S., Fujita, Y., and Hirai, S. (1999). Deformation modeling of viscoelastic objects for their shape control. In *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 767 –772 vol.1.
- Tsoukalas, L. H. and Uhrig, R. E. (1996). *Fuzzy and Neural Approaches in Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition.
- van den Bergen, G. (1998). Efficient collision detection of complex deformable models using aabb trees. *J. Graph. Tools*, 2(4):1–13.
- Villard, J. and Borouchaki, H. (2002). Adaptive meshing for cloth animation. In *In Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable (IMR 2002)*, pages 243–252.
- Voorbraak, F. (1989). A computationally efficient approximation of dempster-shafer theory. *Int. J. Man-Mach. Stud.*, 30(5):525–536.
- Wasserman, R., Acharya, R., et al. (1995). Multimodality tumor delineation via fuzzy fusion and deformable modelling. *Medical imaging: image processing*, 2434:133–144.
- Xiao, D., Ghosh, B., Xi, N., and Tarn, T. (2000). Sensor-based hybrid position/force control of a robot manipulator in an uncalibrated environment. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 8(4):635 –645.
- Yang, W. H. and Hsu, K. H. (1971). Indentation of a circular membrane. *J. Appl. Mech.*, 38:227–229.

- Yen, J. (1990). Generalizing the dempster-schafer theory to fuzzy sets. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 20(3):559 –570.
- Yu, Z. and Gu, J. (2008). A survey on real-time controlled multi-fingered robotic hand. In *Electrical and Computer Engineering, 2008. CCECE 2008. Canadian Conference on*, pages 000975 –000980.
- Zadeh, L. (1978). Fuzzy sets as a basic for a theory of possibility. In *Fuzzy Sets ans System*, volume 1, pages 3–28.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353.
- Zadeh, L. A. (1984). Review of a mathematical theory of evidence. *AI Magazine*, 5(3):81–83.
- Zhang, H., Chen, H., and Xi, N. (2006). Automated robot programming based on sensor fusion. *Industrial Robot-an International Journal*, 33:451–459.