

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

**UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS  
PARA ANÁLISIS HIDRODINÁMICO DE  
ESTRUCTURAS NAVALES**

Autor: Julio García Espinosa  
Director: Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra  
Codirector: Honorio Sierra Cano



# Capítulo 5

## Un Método para Análisis Hidrodinámico de Buques

*A lo largo de los anteriores capítulos hemos revisado diferentes aspectos de los problemas de resolución del análisis hidrodinámico de buques basado en técnicas CFD. Aquí haremos una revisión de estos aspectos, al presentar el algoritmo desarrollado para resolver el problema. Estos aspectos incluyen una descripción detallada del algoritmo de resolución del problema de mecánica de fluidos y sus posibles variantes, una presentación del método de solución de la ecuación de superficie libre, una descripción del método de movimiento de malla y una discusión del algoritmo general. Por último se presentarán diversos resultados de aplicaciones prácticas del método. Estos resultados se discutirán, comparándose con datos experimentales disponibles.*

### 5.1 Introducción

Hasta aquí hemos estudiado con detenimiento diferentes aspectos de los problemas de resolución del análisis hidrodinámico de buques basado en técnicas CFD. Entre los mencionados aspectos, pueden enumerarse los siguientes:

1. Resolución de las ecuaciones de Navier Stokes en flujo laminar y turbulento mediante el algoritmo *CF* de pasos fraccionados (capítulo 3).
2. Resolución de la ecuación de superficie libre no lineal completa, gracias a la metodología *CF* (capítulo 2).
3. Modificaciones de las anteriores ecuaciones para su resolución, teniendo en cuenta el movimiento de la malla de elementos finitos, de acuerdo con la metodología *ALE* (capítulo 2 y 3).

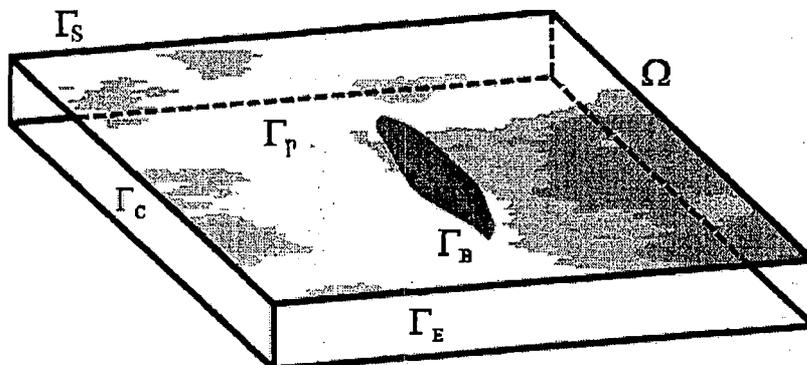


Figura 5.1: Definición del problema de análisis de flujo fluido alrededor de un buque.

4. Metodología para la deformación cuasi uniforme de mallas de elementos finitos (capítulo 4).

En el presente capítulo se pretende llevar a cabo una revisión de estos aspectos, al presentar el algoritmo completo que ha sido desarrollado para resolver el problema planteado. De esta manera, se discutirán diversos problemas específicos, así como algunos detalles más directamente relacionados con la programación del algoritmo.

## 5.2 Un Método Estabilizado para Análisis Hidrodinámico de Buques

Consideremos el problema del movimiento de un fluido<sup>1</sup> alrededor de un buque, definido en la figura 5.1. En ella se representa un dominio fluido  $\Omega$  limitado por los siguientes contornos:

$$\begin{array}{ll}
 \Gamma_{\eta} & \text{Superficie libre} \\
 \Gamma_E & \text{Contorno de entrada del fluido} \\
 \Gamma_B & \text{Contorno del buque (superficie mojada)} \\
 \Gamma_S & \text{Contorno de salida del fluido} \\
 \Gamma_C & \text{Resto de contornos del dominio } \Omega
 \end{array} \quad (5.1)$$

La definición del problema anterior requiere además los siguientes datos:

<sup>1</sup>Definido por su densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ , que se consideran constantes.

- Velocidad de avance del buque. Dado que, por simplicidad en el planteamiento del problema, se definirá un sistema de referencia que avanza con una velocidad uniforme igual a la del buque, esta será la que se debe imponer como condición de entrada del fluido.
- Aceleración de la gravedad. Esta, se puede modificar a conveniencia para controlar el valor de  $F_n$ .
- Características del fluido, definido por  $\mu$  y  $\rho$ .
- Inercia al movimiento del buque, desplazamiento y centro de gravedad si se pretende simular el movimiento de este.

Junto a los anteriores, es necesario indicar que tipo de condiciones se imponen sobre los contornos definidos en (5.1). Evidentemente, dependiendo del tipo de análisis que se pretenda llevar a cabo, las condiciones de contorno aplicables sobre los anteriormente mencionados variarán. A continuación se presentan las diferentes alternativas que se pueden presentar,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\eta & p = p_\eta(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_E & v_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_B & v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i \\
 \Gamma_S & p = 0 \\
 \Gamma_C & v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i \quad \vee \quad p = 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\eta & p = p_\eta(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_E & v_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_B & v_i = 0 \\
 \Gamma_S & n_j \tau'_{ij} = n_j \tau_{ij}^m \\
 \Gamma_C & v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i \quad \vee \quad p = 0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\eta & p = p_\eta(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_E & v_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_B & n_j \tau'_{ij} s_i = \tau_p(\mathbf{x}, t) \\
 \Gamma_S & n_j \tau'_{ij} = n_j \tau_{ij}^m \\
 \Gamma_C & v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i \quad \vee \quad p = 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

La opción (5.2) es adecuada para un análisis con  $\mu = 0$  (ecuaciones de Euler). Mientras que la (5.3) es la correspondiente a un análisis típico con velocidad nula en la pared del buque. Es evidente que esta simulación sólo



Como puede apreciarse, el esquema general del algoritmo consta de cinco fases, correspondientes a otros tantos sistemas de ecuaciones, que deben resolverse para cada paso de tiempo. Estos pueden definirse como<sup>4</sup>:

1. Resolución de la **Ecuación de Cantidad de Movimiento Fraccionaria** siguiente, que permite calcular el campo de velocidades aproximadas  $\mathbf{v}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^* d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \\
 &- \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\
 &- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_{2_i} \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} r_{m_i}^n d\Omega - \\
 &- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_{2_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \\
 &+ \Delta t \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma \\
 r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  se calculan a partir de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \alpha(\gamma) \frac{h}{2} |\mathbf{v}|, & \gamma &= \frac{|\mathbf{v}| h^e}{2\nu} \\
 k_{2_i} &= \beta(\gamma_{||i}) \frac{h}{2} \frac{|r_{m_i}|}{|\nabla v_i|}, & \gamma_{||i} &= \frac{|\mathbf{v}_{||i}| h^e}{2\nu}
 \end{aligned}$$

donde, para tetraedros lineales, se puede tomar,

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) & \begin{cases} |x| > 3 & 1 \\ |x| \leq 3 & \frac{x}{3} \end{cases} \\
 \beta(x) & \max(0, 0.7 - \frac{1}{x})
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

<sup>4</sup>La notación empleada a continuación corresponde a la presentada en los capítulos anteriores.

*Condiciones de contorno aplicables*

Contorno libre  $\Gamma_F$

Tracción  $t_{c_i}^n$  impuesta en  $\Gamma_N$

2. Resolución de la **Ecuación de Continuidad** siguiente, que permite calcular el campo de presiones  $p^{n+1}$ ,

$$\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \quad (5.7)$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} r_{m_i}^{in} d\Omega$$

$$r_{m_i}^{in} = \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right)^n$$

*Condiciones de contorno aplicables*

Presión prescrita en  $\Gamma_P$

Velocidad normal a  $\Gamma$  fijada a  $v_{c_i} n_i$  en  $\Gamma_{D_n}$

Velocidad normal a  $\Gamma$  fijada a  $v_i^n n_i$  en  $\Gamma - \Gamma_{D_n}$

3. Resolución de la **Ecuación de Momento o de proyección** siguiente, de donde se obtiene el campo de velocidades  $\mathbf{v}^{n+1}$ ,

$$\int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \psi_{h_i} v_i^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \psi_{h_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.8)$$

*Condiciones de contorno aplicables*

Velocidad prescrita a  $v_{c_i}$  en  $\Gamma_D$

4. Cálculo de la nueva distribución de la elevación de la **Superficie Libre**  $\eta^{n+1}$ , aplicando la condición cinemática de superficie libre siguiente,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t-\Delta t} d\Omega + \\
&+ \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega + \\
&+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} v_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} w d\Omega - \\
&- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \frac{v_i}{|\mathbf{v}|^2} (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega - \\
&- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} d\Omega \quad i, j = 1, 2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Los coeficientes  $k_1^{fs}$  y  $k_2^{fs}$  se obtienen a partir de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned}
k_1^{fs} &= \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \\
k_2^{fs} &= 0.35h \left| \frac{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - w}{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}} \right| \quad i, j = 1, 2
\end{aligned}$$

*Condiciones de contorno aplicables*

Elevación  $\eta$  prescrita a  $\eta_{fix}$  en  $\Gamma_{\eta_{fix}}$

- A partir de la distribución de la altura de la superficie libre  $\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ , se puede calcular el campo de presiones  $p_{\eta}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  correspondiente a la condición dinámica de superficie libre, en la siguiente forma,

$$p_{\eta}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = g\eta_{dif}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \tag{5.10}$$

- Donde  $\eta_{dif}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  es la diferencia entre la elevación de la superficie libre calculada  $\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  y la elevación de la malla correspondiente. La ecuación (5.10) tiene dos límites de especial interés. Si la posición de los nodos de la malla correspondiente siguen el movimiento de la superficie libre, la ecuación (5.10) se transforma en la simple imposición de que la presión es nula sobre la superficie libre  $p_{\eta}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = 0$ . Si por otra parte, la malla sobre la superficie libre no se actualiza, la condición anterior se transforma en  $p_{\eta}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = g\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ .

5. **Actualización de la Malla** de elementos finitos, teniendo en cuenta la deformación del contorno definida por el movimiento de la superficie libre y la nueva posición del buque. De este proceso se obtiene la nueva posición de todos los nodos de la malla  $\mathbf{x}^{n+1}$ . Para ello es necesario, en primer lugar, estimar la nueva posición del buque. Esto se lleva a cabo por integración directa de las fuerzas que el fluido ejerce sobre la carena. Estas fuerzas son integradas explícitamente en el tiempo para obtener los desplazamientos y giros instantáneos, de acuerdo con la dinámica del sólido rígido clásica.

Podemos escribir el esquema completo del algoritmo iterativo para la deformación de mallas como,

- |      |               |                       |                   |
|------|---------------|-----------------------|-------------------|
| I.   | $n = 0$       |                       |                   |
| II.  | [...]         |                       | Solución Fluido   |
| III. | $n = n + 1$   |                       |                   |
| IV.  | Si $n = 1$    |                       | $ALGBAS(Malla_1)$ |
| V.   | Si $n \neq 1$ | Si $n/N$ es entero    | $ALGINC(Malla_n)$ |
|      |               | Si $n/N$ no es entero | $ALGANT(Malla_n)$ |
| VI.  | Volver a II.  |                       |                   |

(5.11)

- Donde  $n$  es el indicador del paso de tiempo ( $t = t_n$ ) y  $N$  es un control interno del algoritmo, que indica cada cuantos pasos de tiempo se actualizará la malla. Los métodos  $ALGBAS(Malla_1)$ ,  $ALGINC(Malla_n)$  y  $ALGANT(Malla_n)$  se aplican sobre la malla en el paso de tiempo  $t_n$  y se pueden describir como sigue,

$$ALGBAS = \left[ \begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con } E_1 \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Calcular } E_2^{(e)} = \frac{E_1 [(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) - 2\nu(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1)]}{3\epsilon^2(1-2\xi)}. \\ 4. \text{Ensamblar problema elástico con con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 5. \text{Resolver sistema.} \\ 6. \text{Mover nodos.} \end{array} \right] \quad (5.12)$$

$$ALGANT = \left[ \begin{array}{l} 1. \text{Ensamblar problema elástico con con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\ 2. \text{Resolver sistema.} \\ 3. \text{Actualizar malla.} \end{array} \right] \quad (5.13)$$

$$\text{ALGINC} = \left[ \begin{array}{l}
 1. \text{Ensamblar problema elástico con } E_1 \text{ y } \xi. \\
 2. \text{Resolver sistema.} \\
 3. \text{Calcular } E_2^{(e)} = C_1 \vartheta \left[ \frac{F^{(e)} - F_{min}^{(e)}}{F_{max}^{(e)} - F_{min}^{(e)}} \right]^2 + (1 - C_1) E_{2old}^{(e)}. \\
 5. \text{Ensamblar problema elástico con con } E_2^{(e)} \text{ y } \xi. \\
 6. \text{Resolver sistema.} \\
 7. \text{Actualizar malla.}
 \end{array} \right] \quad (5.14)$$

- En el anterior algoritmo (5.14),  $\vartheta$  es una constante que mide la relación de rigideces máxima y mínima de los elementos (valores en torno a 1000 son suficientes en la mayoría de los casos prácticos)  $E_{2old}^{(e)}$  es el valor de  $E_2^{(e)}$  en la iteración anterior, y  $C_1$  es un coeficiente tal que  $0 < C_1 < 1$ . Por otra parte, se ha denominado  $F_{min}^{(e)}$ ,  $F_{max}^{(e)}$  a los valores mínimo y máximo de  $F^{(e)}$ , definido por,

$$F^{(e)} = \frac{[(\Delta\varepsilon_1^2 + \Delta\varepsilon_2^2 + \Delta\varepsilon_3^2) - 2\xi(\Delta\varepsilon_1\Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2\Delta\varepsilon_3 + \Delta\varepsilon_3\Delta\varepsilon_1)]}{(1 - 2\xi)} \quad (5.15)$$

Donde  $\Delta\varepsilon$  son las deformaciones incrementales, calculadas a partir de los desplazamientos de los nodos de la malla en la última iteración.

El algoritmo de solución del problema, presentado en los anteriores puntos 1-5, puede ser utilizado para la resolución de problemas en los que sólo interese la solución estacionaria. Sin embargo, si el objetivo del estudio es el análisis del proceso transitorio, el algoritmo presentado debe ser corregido, de manera que se tenga en cuenta el movimiento de la malla en la resolución del problema de Navier Stokes. Esta corrección se hace mediante la metodología *ALE*, presentada en los capítulos anteriores. Teniendo en cuenta esta metodología, los cinco puntos anteriores quedan como sigue,

1. Resolución de la **Ecuación ALE de Balance de Cantidad de Movimiento Fraccionaria** siguiente, que permite calcular el campo de

velocidades aproximadas  $\mathbf{v}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^* d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^n d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} d\Omega - \\
 &- \Delta t \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} v_i^n \frac{\partial v_j^n}{\partial x_j} d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^m d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \\
 &- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \langle k_1 - k_2 \rangle \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega - \\
 &- \Delta t \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} k_{2_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} d\Omega + \\
 &+ \Delta t \int_{\Gamma_F} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma_N} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma \\
 r_{m_i} &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho v_i \frac{\partial v_j^n}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

- En la anterior ecuación (5.16)  $v_j^{m^n}$  representa el campo de la velocidad de los nodos de la malla en el proceso de actualización de esta. Conviene señalar que, en el presente caso, la ecuación (5.5) continúa siendo válida, sin embargo, tal y como se presentó en capítulos anteriores, la formulación *ALE* permite que los términos sean evaluados en el sistema de coordenadas correspondiente a la deformación de la malla.

En la ecuación (5.16) los coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$ , se calculan igual que en el caso anterior.

2. Resolución de la **Ecuación de Continuidad** siguiente, que permite calcular el campo de presiones  $p^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} (\Delta t + \delta_d^n) \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega &= - \int_{\Omega} \psi_h \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} (v_i^* - v_i^n) d\Omega - \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega^e} \delta_d^n \frac{\partial \psi_h}{\partial x_i} \tau_{m_i}^m d\Omega
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$r_{m_i}^n = \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right)^n$$

*Condiciones de contorno aplicables*

Presión prescrita en  $\Gamma_P$

Velocidad normal a  $\Gamma$  fijada a  $v_{c_i} n_i$  en  $\Gamma_{D_n}$

Velocidad normal a  $\Gamma$  fijada a  $v_i^n n_i$  en  $\Gamma - \Gamma_{D_n}$

3. Resolución de la **Ecuación de Momento** o de proyección (5.8), de donde se obtiene el campo de velocidades  $\mathbf{v}^{n+1}$ .

4. Resolución de la **Ecuación cinemática ALE** de Superficie Libre  $\eta^{n+1}$ , aplicando la condición cinemática de superficie libre siguiente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta^{t-\Delta t} d\Omega + \\ &+ \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} v_j \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j} w d\Omega - \\ &- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} \frac{v_i}{|\mathbf{v}|^2} (v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega - \\ &- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} d\Omega \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Los coeficientes  $k_1^{fs}$  y  $k_2^{fs}$  se obtienen a partir de las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} k_1^{fs} &= \frac{h}{2} |\mathbf{v}| \\ k_2^{fs} &= 0.35h \left| \frac{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} - w}{(v_j^n - v_j^{m^n}) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}} \right| \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

*Condiciones de contorno aplicables*

Elevación  $\eta$  prescrita a  $\eta_{fix}$  en  $\Gamma_{\eta_{fix}}$

- El campo de presiones  $p_\eta(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  correspondiente a la condición dinámica de superficie libre se calcula mediante la ecuación (5.10) anterior.
5. **Actualización de la Malla** de elementos finitos, mediante el algoritmo (5.11). De este proceso se obtiene la nueva posición de todos los nodos de la malla  $\mathbf{x}^{n+1}$  y a partir de ellos es inmediato calcular la velocidad de movimiento de los nodos de la malla. En la forma más simple, esto se puede hacer mediante la siguiente relación,

$$v_j^{m^{n+1}} = \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\Delta t}$$

Por otra parte las condiciones de contorno presentadas en (5.2)-(5.4) son impuestas en los algoritmos anteriores como sigue,

- Condición de contorno de presión impuesta sobre  $\Gamma_\eta$ ,  $p = p_\eta(\mathbf{x}, t)$ . Se impone directamente sobre los sistemas (5.7) o (5.17). Lo mismo se hace sobre  $\Gamma_C$ ,  $p = 0$  en el caso de elegir esa opción.
- Condición de contorno de velocidad prescrita sobre  $\Gamma_E$ ,  $v_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t)$  y sobre  $\Gamma_B$ ,  $v_i = 0$  en el caso de la alternativa (5.3). Se prescribe la velocidad corrigiendo el campo de velocidades obtenido en (5.8).
- Condición de contorno de velocidad normal prescrita sobre  $\Gamma_C$ ,  $v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i$ . Al igual que en el caso anterior, se prescribe esta componente de la velocidad corrigiendo el campo de velocidades obtenido en (5.8). De esta manera la condición natural de las ecuaciones (5.7) o (5.17) es precisamente  $v_i n_i = v_{c_i}(\mathbf{x}, t) n_i$ .
- Condición de contorno de tensión tangencial impuesta sobre  $\Gamma_B$ ,  $n_j \tau'_{ij} s_i = \tau_p(\mathbf{x}, t)$ . Se impone ensamblando el término de la integral de contorno  $\int_{\Gamma_B} \psi_{h_i} (t_{c_i}^n + p n_i^n) d\Gamma = \int_{\Gamma_B} \psi_{h_i} \tau_p \frac{v_i}{|v|} d\Gamma$  de la ecuación (5.5) o (5.16).
- Condición de contorno de flujo libre en  $\Gamma_S$ ,  $n_j \tau'_{ij} = n_j \tau_{ij}^m$ . Se impone ensamblando el término de la integral de contorno  $\int_{\Gamma_S} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^m d\Gamma$  de la ecuación (5.5) o (5.16).

A continuación se presentan diferentes aspectos generales de la solución del problema que completan el desarrollo del algoritmo presentado.

### 5.2.1 Cálculo del Incremento de Tiempo

El algoritmo de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.5)-(5.8), tiene, evidentemente limitaciones en su estabilidad en el avance temporal. Dada su naturaleza semi-implícita<sup>5</sup>, estas limitaciones se hacen muy evidentes y obligan a la elección de un incremento de tiempo  $\Delta t$  de manera que el esquema sea estable. Por ello presentaremos aquí unas recomendaciones para la elección del incremento de tiempo. Estas están basadas en el estudio de ciertos casos particulares de la ecuación de convección difusión estabilizada y se pueden consultar en [Cod93a] [OM99]. Según estos análisis, la ecuación transitoria de convección difusión integrada en el tiempo con un esquema explícito es incondicionalmente estable, si se cumple que [Cod93a],

$$\Delta t \leq \frac{\Delta t_\xi \Delta t_\zeta}{\Delta t_\xi + \Delta t_\zeta} \quad (5.19)$$

Donde  $\Delta t_\xi$  es el incremento de tiempo para el cual se consigue la estabilidad incondicional en el problema unidimensional de convección pura<sup>6</sup>, mientras que  $\Delta t_\zeta$  es el límite para la ecuación unidimensional de difusión pura. Estos límites para la ecuación unidimensional estabilizada en el espacio con el método *SUPG*, pueden obtenerse sencillamente en el caso de una malla uniforme formada por elementos lineales de tamaño  $h^e$ , para el problema con velocidad uniforme  $v$ , a partir de la relación,

$$c \leq \min \left( \frac{\gamma}{1 + \alpha\gamma}, \frac{1}{\gamma} + \alpha \right) \quad (5.20)$$

Donde  $c$  es el denominado número de Courant que se define por,

$$c = \frac{v\Delta t}{h^e} \quad (5.21)$$

Por otra parte, si suponemos que  $\alpha$  está dado por la definición (5.6), la condición (5.20) anterior se puede escribir como,

$$c \leq \frac{\gamma}{1 + \min \left( \frac{\gamma}{3}, 1 \right) \gamma}$$

<sup>5</sup>La ecuación de balance de cantidad de movimiento es integrada mediante un esquema de Euler hacia delante (*forward Euler*).

<sup>6</sup>Difusión nula, o bien  $v \rightarrow \infty$ .

De donde pueden obtenerse los siguientes límites,

$$\Delta t_{\xi} \leq \frac{h^e}{\min\left(\frac{\gamma}{3}, 1\right)v} \quad \gamma \gg 1 \quad (5.22)$$

$$\Delta t_{\zeta} \leq \frac{h^{e^2}}{2k} \quad u \rightarrow 0$$

Y sustituyendo (5.22) en (5.19) se tiene la expresión,

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{\min\left(\frac{\gamma}{3}, 1\right)v}{h^e} + \frac{2k}{h^{e^2}}} \quad (5.23)$$

Hay que hacer notar que una opción alternativa [VCZ97], más restrictiva que (5.23), es considerar que el límite del incremento temporal para el caso de  $u \gg 1$  es  $\Delta t_{\zeta}^{-1} \leq \frac{\min\left(\frac{\gamma}{3}, 1\right)v}{h^e} + \frac{2k}{h^{e^2}}$ , que se puede obtener de aplicar de nuevo (5.23) en (5.19). Dado que esta forma es más restrictiva, será la que adoptaremos. Si además incluimos un factor de seguridad  $FS$ , para la determinación del incremento de tiempo que asegura la estabilidad temporal del esquema, la restricción (5.19), queda como,

$$\Delta t \leq \frac{FS}{\frac{\min\left(\frac{\gamma}{3}, 1\right)v}{h^e} + \frac{4k}{h^{e^2}}} \quad (5.24)$$

Ahora, consideremos la identificación de términos entre la ecuación de convección difusión y las ecuaciones de Navier Stokes, con el objeto de hacer aplicable la relación (5.24) a nuestro caso<sup>7</sup>. En este caso, (5.24) puede escribirse, para su uso en la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes, como,

$$\Delta t \leq \frac{FS}{\frac{\min\left(\frac{\gamma}{3}, 1\right)|v|}{h^e} + \frac{4\mu}{\rho h^{e^2}}} \quad (5.25)$$

De esta manera, se tomará como valor del incremento temporal para la resolución de las ecuaciones (5.5)-(5.9) el dado por,

<sup>7</sup>Esta identificación ya ha sido considerada en el capítulo 3.

$$\Delta t = \min_e \left( \frac{FS}{\frac{\min(\frac{2^e}{3}, 1)|v^e|}{h^e} + \frac{4\mu}{\rho h^e}} \right) \quad (5.26)$$

Es decir el mínimo de todos los incrementos temporales calculados para cada uno de los elementos de la malla<sup>8</sup>.

### 5.2.2 Solución con Incremento de Tiempo Local

Evidentemente, la elección del incremento de tiempo mediante la expresión (5.26) limita las posibilidades del algoritmo presentado, en el sentido que, en general para problemas prácticos el incremento de tiempo será proporcional al mínimo tamaño de los elementos de la malla. Esto implica que a medida que refinemos la malla, el tiempo de cálculo necesario para resolver el problema, no sólo aumentará por la necesidad obvia de resolver un problema mayor, sino que también el incremento temporal disminuirá por lo que necesitaremos resolver más veces el sistema de ecuaciones.

Sin embargo, hemos visto que la restricción (5.25) es sólo local, por lo que podemos plantearnos tomar diferentes incrementos de tiempo para cada elemento de la malla. De esta manera, no resolveremos ningún problema físico, pero esta elección nos permitirá llegar a la solución final estacionaria de muchos problemas prácticos con un tiempo de cálculo significativamente menor. Además, en problemas generales, donde no exista una situación final estacionaria, o bien interese estudiar la evolución de los fenómenos, este algoritmo con incrementos de tiempo locales, puede utilizarse en las primeras iteraciones, con el fin de acelerar el proceso de llegada a la situación de interés.

En general, para muchos de los estudios de interés en hidrodinámica naval, este esquema con incrementos de tiempo locales es interesante. En las diferentes pruebas que se han realizado, se ha comprobado que la aceleración de la convergencia a una situación estacionaria es óptima y que las ganancias de tiempo pueden situarse entre las 10 y 30 veces.

Sin embargo, hay que hacer mención de que la inclusión de un paso de tiempo local en las ecuaciones (5.5)-(5.9) nos obligaría a su integración, complicando las expresiones dadas [VCZ97]. Efectivamente, el parámetro  $\Delta t$  ya no es constante, por lo que la derivación de la forma (5.5) no es posible. Si tenemos lo anterior en cuenta, y retomando la forma general de la ecuación de balance de cantidad de movimiento, dada en el capítulo 3, siguiente,

<sup>8</sup>El índice  $e$  indica que el valor correspondiente es elemental.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} d\Omega = & - \int_{\Omega} \rho \psi_{h_i} \frac{\partial (v_i v_j)^n}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_{h_i}}{\partial x_j} \tau_{ij}^n d\Omega - \\
- \int_{\Omega} \psi_{h_i} f_i^n d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (h_{m_{ij}}^n \psi_{h_i})}{\partial x_j} \tau_{m_i}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \psi_{h_i} n_j^n \tau_{ij}^n d\Gamma + & \quad (5.27) \\
+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_{h_i} h_{m_{ij}}^n n_j^n \tau_{m_i}^n d\Gamma
\end{aligned}$$

Vemos que el problema se reduce a integrar el primer miembro de (5.27). Pero si consideramos que  $\Delta t$  es constante por elementos, podemos volver a recuperar la forma (5.5) (o bien la (5.16)).

Aplicando los mismos criterios anteriores, puede concluirse que las ecuaciones (5.7) y (5.17) continúan siendo válida en este caso.

Como comentario final, se desea añadir que, la formulación del algoritmo con paso de tiempo local, estabilizado mediante la técnica *Characteristic Galerkin*, requiere la inclusión de diferentes términos adicionales [VCZ97, pag. 79] a la forma de Galerkin de la ecuación de balance de cantidad de movimiento. En el caso del método de *Cálculo Finitesimal*, estos términos podrían justificarse si se tomara  $h_{m_{ij}}^n = \alpha v_i \Delta t$ . Durante el desarrollo del presente trabajo, se ha probado la inclusión de estos términos en la forma (5.27). La experiencia no ha mostrado que la influencia de esta adición sea positiva, hallando que incluso, en algunos casos, su efecto puede ser negativo para la estabilidad del esquema (5.5)-(5.9).

### 5.2.3 La Condición de Superficie Libre sobre Referencias no Planas

En el capítulo 2, se justificó la forma de la ecuación (5.9). Sin embargo, su desarrollo está basado en la suposición de que  $\eta(x, y, t)$  es la función que define la elevación de un punto de coordenadas  $x, y$  de la superficie libre en un instante dado. De esta manera, se puede definir la función implícita de la superficie libre  $F(x, y, z, t)$ , como,

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (5.28)$$

La forma de la ecuación (??) hace evidente que  $\eta(x, y, t)$  debe referirse a una superficie plana y en concreto a la definida por  $z = 0$ . De esta manera, si nuestro dominio original  $\Omega$ , estuviera limitado por un contorno no plano o bien no paralelo a  $z = 0$ , la ecuación (5.9) dejaría de ser válida, por ello es

necesario corregirla ligeramente para tener en cuenta esta situación, que se produce, por ejemplo, si actualizamos el contorno para seguir el movimiento de la propia superficie libre. Si denominamos entonces  $\eta_*^t(x, y, t)$  a la elevación de la superficie libre, en el instante  $t$ , respecto a un contorno genérico  $\Gamma_\eta := z = \chi^t(x, y, t)$ , se tiene que  $\eta^t(x, y, t) = \eta_*^t(x, y, t) + \chi^t(x, y, t)$ , y sustituyendo en la ecuación (5.9), podemos escribir que,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t-\Delta t} d\Omega + \\
 + \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega + \\
 + \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi_h) w d\Omega - \\
 - \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \tilde{\nabla} \varphi_h \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \tilde{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega - \\
 - \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} (\tilde{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) \cdot \tilde{\nabla} \varphi_h) d\Omega
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Donde, para la obtención de (5.29) se han eliminado los términos de la estabilización temporal correspondientes a  $\chi^t$ .

#### 5.2.4 Condición Absorbente para la Superficie Libre

Al objeto de prevenir la reflexión de las olas generadas en la superficie libre, en los contornos del dominio es necesario disponer algún tipo de contorno absorbente, a imagen de las playas que se disponen en los canales de ensayos. Aunque diversos autores han desarrollado métodos muy elaborados para permitir eliminar estos indeseables efectos de los contornos (ver por ejemplo [D'E97]) aún no se ha desarrollado ninguna metodología utilizable en problemas no lineales o transitorios. En el presente trabajo se ha empleado un sistema mucho más simple para evitar las reflexiones en los contornos. Este sistema consiste en imponer un amortiguamiento [LYO98] [HMJ93] [CA99] al campo de elevaciones de la superficie libre en aquellas zonas en las que existe riesgo de que las reflexiones afecten a la solución. Este amortiguamiento consiste en la adición de un término proporcional a la elevación de la superficie libre en la ecuación (5.29). De esta manera podemos escribir esta ecuación como,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t+\Delta t} d\Omega &= \frac{4}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^t d\Omega - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \varphi_h \eta_*^{t-\Delta t} d\Omega + \\
&+ \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h w d\Omega - \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \varphi_h (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega + \\
&+ \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \frac{\langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \varphi_h) w d\Omega - \quad (5.30) \\
&- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} \langle k_1^{fs} - k_2^{fs} \rangle \tilde{\nabla} \varphi_h \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|^2} \right) \cdot \tilde{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega - \\
&- \sum_{e=1}^{N_{el}} \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega^e} k_2^{fs} (\tilde{\nabla} (\eta_*^t + \chi^t) \cdot \tilde{\nabla} \varphi_h) d\Omega - \\
&- \frac{2\Delta t}{3} \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) \varphi_h (\eta_*^t + \chi^t) d\Omega
\end{aligned}$$

Donde  $\Lambda(\mathbf{x})$  es una función de amortiguamiento dada por,

$$\Lambda(\mathbf{x}) := \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } x \in \Gamma_d & -\frac{2}{L_i} \ln(\varepsilon^*) \left[ 1 - \min \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{L_i} \right] \\ \text{si } x \notin \Gamma_d & 0 \end{array} \right\} \quad (5.31)$$

Donde  $\Gamma_d$  es el contorno sobre el que se impone en amortiguamiento, que es una franja en torno al límite de la superficie libre, de anchura variable (dada por  $L_1, L_2, L_3, L_4$ ), tal y como se indica en la figura 5.3.

En la definición (5.31)  $\min \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{L_i}$  representa el valor mínimo de las distancias del punto  $\mathbf{x}$  a uno de los laterales donde se impone el amortiguamiento dividido entre la anchura de la banda correspondiente (ver figura 5.3), mientras que  $\varepsilon^*$  es un parámetro relativo<sup>9</sup> a la amplitud de las olas, que mide la intensidad del amortiguamiento.

<sup>9</sup>Si consideramos la solución particular a la siguiente ecuación diferencial unidimensional,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{k}{\varpi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + s\phi = 0$$

dada por,

$$\phi = A \sin(kx + \varpi t) e^{-sx}$$

Si  $s$  es tal que tiene un valor diferente de 0, sólo sobre un intervalo de longitud  $\mathcal{L}$ , el factor

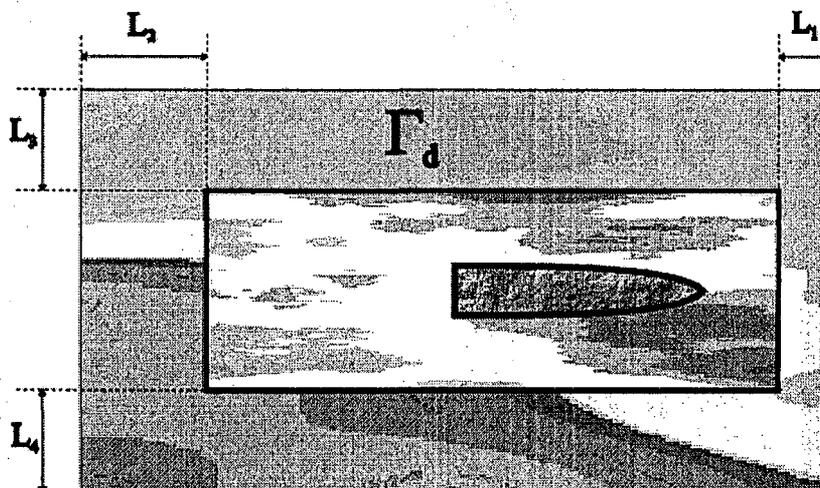


Figura 5.3: Disposición esquemática de las zonas donde se impone el amortiguamiento en la superficie libre.

En todo caso, cabe añadir que aún solucionado el problema de la inestabilidad de la ecuación discreta de transporte convectivo aún queda por salvar la limitación que supone la imposición de condiciones en las paredes del dominio de análisis. En efecto, la resolución de las ecuaciones de dinámica de fluidos por el método de los elementos finitos, lleva consigo la necesidad de imponer condiciones en los contornos, que perturban de algún modo la solución. De hecho estas condiciones de contorno sólo reflejan la necesidad física de disponer de límites en el problema. El efecto de estos contornos en nuestro caso, sería similar al de las paredes de un canal de experiencias, provocando rebotes indeseables. Estos reflejos sobre los contornos, producen perturbaciones que, si la inestabilidad de la ecuación de superficie libre está corregida, tienden a quedar localizados en el contorno pero, en caso contrario, se propagan aguas arriba. En efecto, en este caso, el operador discreto es *ciego* para estas olas propagadas corriente arriba, y en el contrario evita su propagación. Se han propuesto diferentes maneras de evitar este fenómeno, desde la amortiguación directa de las olas para evitar el rebote [Daw77][HMJ93] hasta métodos más sofisticados que eliminan la posibilidad de que se transmitan olas aguas arriba [D'E97] [SDI98], pero una solución efectiva a este problema está aún por descubrir.

de amortiguamiento máximo será  $e^{-sL}$ , por lo que el máximo valor posible en esa zona será  $A e^{-sL}$ . Si queremos que  $A e^{-sL} < \varepsilon$ , entonces se debe cumplir que  $s > -\frac{1}{2} \ln(\varepsilon^*)$ ; siendo  $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{A}$ .

Este criterio se aplica en el presente problema para la amortiguación de la solución de la ecuación cinemática de superficie libre.

### 5.2.5 La Problemática de las Popas de Espejo

Al contrario de lo que ocurre con la mayoría de los códigos numéricos existentes, el algoritmo (5.5)-(5.9) presentado es de aplicación absolutamente general a cualquier geometría naval. Sin embargo hay un aspecto que por su especial peculiaridad conviene discutir aquí. Este se refiere a las dificultades que se presentan en la simulación de los fenómenos que se desarrollan en presencia de una popa con espejo. Efectivamente, en la figura 5.4 se pueden observar los tres tipos de flujos que se pueden encontrar en presencia de una popa de espejo. La aparición de uno u otro dependerá de la configuración del buque en cada momento.

El flujo que se ha denominado de popa tradicional en la figura 5.4, es similar al que se produce en popas de crucero y no presenta dificultades especiales, debido a que el espejo queda sobre la línea de flotación inicial y no afecta en forma alguna. Sin embargo, las popas habituales en la mayoría de los buques modernos presentan los dos tipos de flujos adicionales que se presentan en la figura 5.4. El flujo con aguas muertas aparece para velocidades bajas, desarrollándose una zona de flujo turbulento localizado a popa del buque. Sin embargo, a medida que se aumenta la velocidad, la popa de espejo comienza a secarse hasta llegarse a una situación como la indicada bajo el nombre de popa de espejo en la figura 5.4, siendo en esta configuración en la que suele situarse la condición de diseño. Al contrario que lo que ocurre en los códigos de uso en hidrodinámica naval, existentes en la actualidad [Rav96], todas las situaciones referidas pueden ser perfectamente simuladas gracias al algoritmo (5.5)-(5.9). Sin embargo, existe una problemática asociada a la resolución de la situación típica de la popa de espejo. En este caso la superficie libre que se observa experimentalmente, presenta dos zonas claramente diferenciadas<sup>10</sup>. Una que se extiende desde la popa de espejo hacia aguas abajo y otra está formada por el resto de la superficie libre, tal y como se representa esquemáticamente en la figura 5.5.

En esta situación, el problema que se presenta en la resolución del problema de superficie libre, por su carácter de ecuación de convección pura, es la necesidad de imponer una condición de contorno para que la solución esté definida. En este caso es pues necesario prescribir la elevación de la superficie libre de manera que coincida con la salida del flujo fluido, tal y como se indica en la figura 5.6.

Tal prescripción es suficiente para poder simular los fenómenos en este tipo de flujos, sin necesidad de añadir ningún artificio especial, como es común en otros códigos [Rav96]. Sin embargo, la necesidad de prescribir el valor

<sup>10</sup>Hecho en el que se basan la mayoría de los códigos comerciales para incluir correcciones específicas para esta situación.

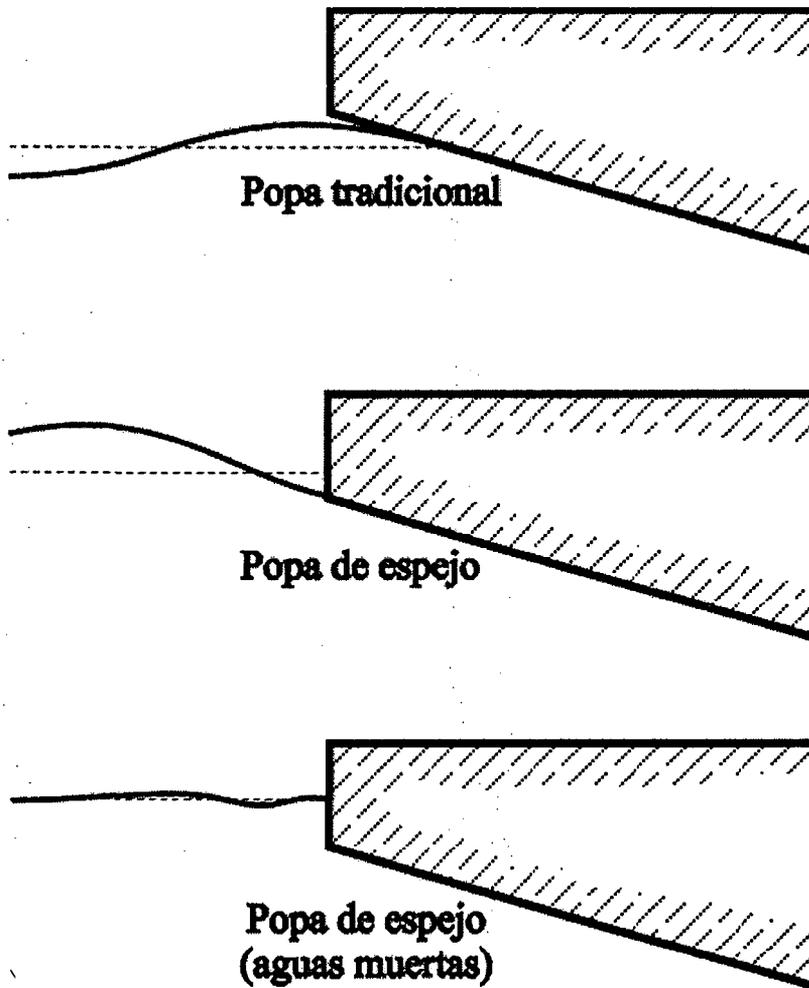


Figura 5.4: Esquemas de los posibles regímenes de flujo que pueden aparecer en una popa de espejo.

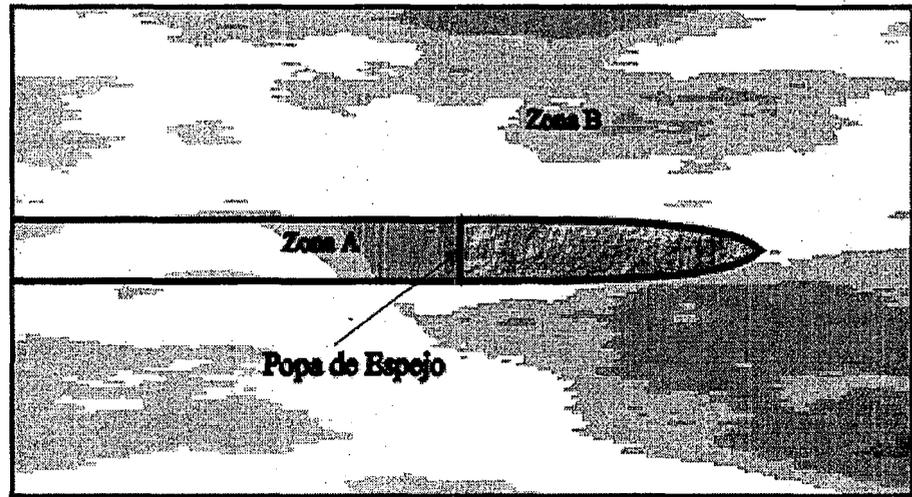


Figura 5.5: Diferentes zonas que se presentan en la superficie libre con popas de espejo.

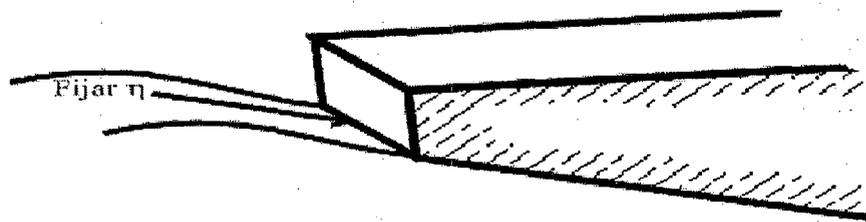


Figura 5.6: Situación de la zona donde es necesario prescribir  $\eta$  en los flujos con popa de espejo.

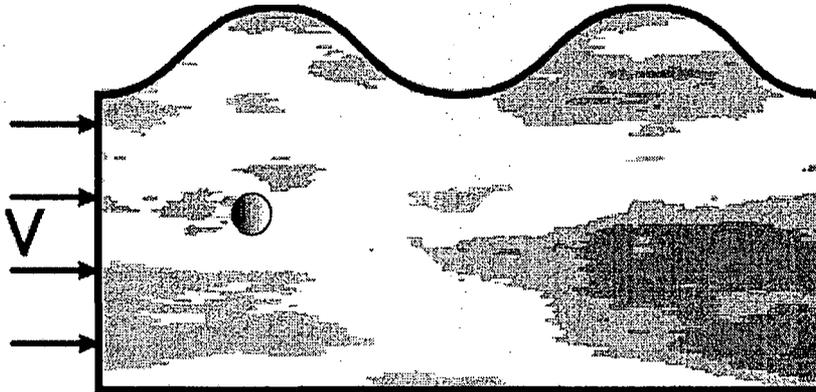


Figura 5.7: Efecto de una perturbación fija sobre la superficie libre.

de la elevación de la superficie libre, complica la simulación del proceso de transición de flujo con aguas muertas a flujo en popa de espejo. La manera de proceder en estos casos es partir de velocidades elevadas, donde es seguro que no aparezca el flujo con aguas muertas, para ir descendiendo la velocidad gradualmente. De esta manera se llegará a un punto donde el algoritmo no converja, que corresponderá a la situación en que el espejo comience a mojarse, por lo que la imposición hecha sobre la superficie libre no es ya física. A partir de este punto el problema se resuelve de la manera habitual, sin ningún tipo de imposiciones excepcionales.

### 5.3 Un Generador de Olas Numérico

Otro aspecto que se ha considerado durante el presente trabajo es el desarrollo de un generador de olas numérico. Este generador podría ser incluido en las simulaciones para tener en cuenta el efecto del oleaje en el comportamiento de la carena. A continuación se describe el método diseñado para conseguir esta generación.

Consideremos el efecto que sobre la superficie libre, tiene una perturbación fija, como la representada en la figura 5.7. En efecto, si consideramos, un dominio  $\Omega$ , con una superficie libre  $\Gamma_\eta$ , en el que entre un fluido con una velocidad  $V$  que choca con un obstáculo, se produce una ola estacionaria en la superficie libre, que en el caso de que la profundidad del dominio sea muy grande, se cumple, aproximadamente, la siguiente relación [Llo89];

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} V^2 \quad (5.32)$$

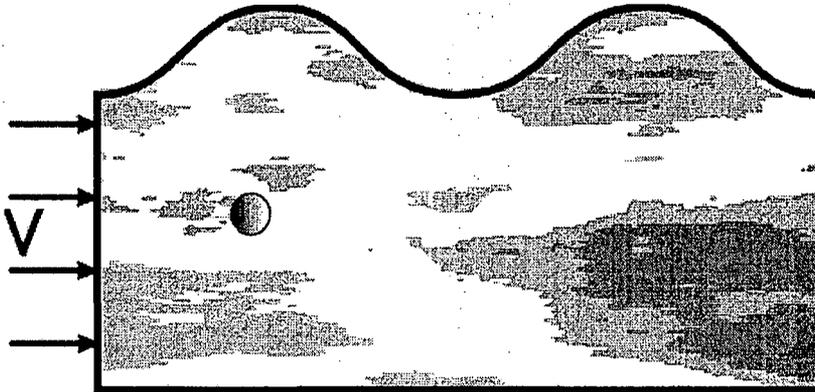


Figura 5.7: Efecto de una perturbación fija sobre la superficie libre.

de la elevación de la superficie libre, complica la simulación del proceso de transición de flujo con aguas muertas a flujo en popa de espejo. La manera de proceder en estos casos es partir de velocidades elevadas, donde es seguro que no aparezca el flujo con aguas muertas, para ir descendiendo la velocidad gradualmente. De esta manera se llegará a un punto donde el algoritmo no converja, que corresponderá a la situación en que el espejo comience a mojarse, por lo que la imposición hecha sobre la superficie libre no es ya física. A partir de este punto el problema se resuelve de la manera habitual, sin ningún tipo de imposiciones excepcionales.

### 5.3 Un Generador de Olas Numérico

Otro aspecto que se ha considerado durante el presente trabajo es el desarrollo de un generador de olas numérico. Este generador podría ser incluido en las simulaciones para tener en cuenta el efecto del oleaje en el comportamiento de la carena. A continuación se describe el método diseñado para conseguir esta generación.

Consideremos el efecto que sobre la superficie libre, tiene una perturbación fija, como la representada en la figura 5.7. En efecto, si consideramos, un dominio  $\Omega$ , con una superficie libre  $\Gamma_\eta$ , en el que entre un fluido con una velocidad  $V$  que choca con un obstáculo, se produce una ola estacionaria en la superficie libre, que en el caso de que la profundidad del dominio sea muy grande, se cumple, aproximadamente, la siguiente relación [Llo89];

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} V^2 \quad (5.32)$$

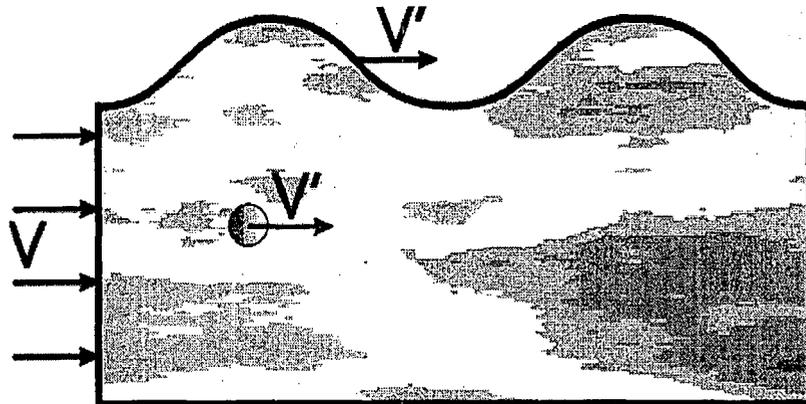


Figura 5.8: Efecto de una perturbación móvil sobre la superficie libre.

Donde  $\lambda$  es la longitud de la ola que aparece y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Consideremos ahora la situación presentada en la figura 5.8. En este caso la perturbación se mueve a una velocidad  $V'$  respecto al fondo, provocando que la ola que produce, estacionaria respecto a ella, se desplace respecto al fondo a la misma velocidad. En este caso, dado que la velocidad con la que se mueve el fluido respecto a la perturbación es  $(V - V')$ , se cumple la siguiente relación,

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} (V - V')^2 \quad (5.33)$$

Con esta sencilla base teórica, podemos imaginar el siguiente generador de olas. Dada la velocidad de encuentro de las olas con el barco  $V_e = (V - V')$ , podemos calcular la longitud de onda correspondiente a partir de (5.33). Entonces, podemos perturbar el fluido imponiendo un campo de presiones sobre la superficie libre, tal y como se representa en la figura 5.9, dado por la siguiente expresión,

$$p(x, t) = Ag \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{V'}{\lambda}t\right) \quad (5.34)$$

Donde  $A$  es un parámetro que permite controlar la amplitud de las olas generadas<sup>11</sup> y que depende de manera compleja de cada problema particular,

<sup>11</sup>Este parámetro es del orden de la altura de olas generada, pero su relación con ellas depende de la energía transmitida al fluido por el generador, que es significativamente dependiente de la geometría del dominio, por lo que la relación entre ambas varía en cada caso particular.

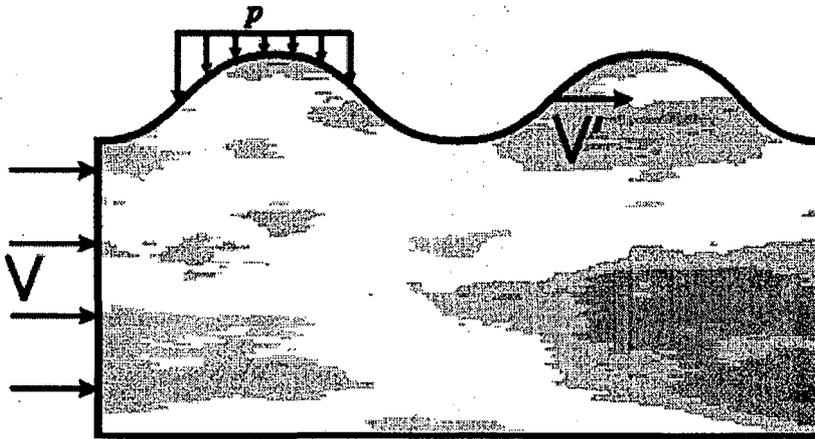


Figura 5.9: Esquema de un generador de olas numérico, consistente en la imposición de una presión oscilatoria sobre la superficie libre.

por lo que requiere ser calibrado en cada caso. El resultado que produce la aplicación de (5.34) es idéntico al representado en la figura 5.8.

Es posible modificar la forma del generador dado en (5.34) para permitir incluir el efecto de una composición de ondas. En este caso podemos imponer un campo de presiones dado por [GÁ88],

$$p(x, t) = \sum_i A_i g \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{V'}{\lambda} t\right) \quad (5.35)$$

Por otra parte, es evidente que el generador (5.35) puede complicarse, dándole más flexibilidad, si permitimos que la perturbación sea variable según el otro eje horizontal  $Oy$ . De esta manera, podemos añadir un desfase en (5.35), en la forma,

$$p(x, y, t) = \sum_i A_i g \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{V'}{\lambda} t + \varphi(y)\right) \quad (5.36)$$

La forma (5.36) permite obtener espectros de olas reales, mediante técnicas similares a las utilizadas en los canales de experiencias (ver [GÁ88]).

## 5.4 Ejemplos

A continuación se presentan diversos ejemplos prácticos de aplicación de la metodología presentada. Entre ellos se pueden encontrar diversos problemas

reales, de aplicación directa en la industria naval. En los análisis escogidos para esta exposición se tuvo en consideración especial uno de los aspectos que se considera esencial de este trabajo. Este se refiere al salto cualitativo que supone el no tener que restringirse a la teoría de los buques lentos. Efectivamente los análisis CFD tradicionales en hidrodinámica naval, se restringían a un valor de  $F_n$  relativamente bajo, con el problema añadido de que en la solución para  $F_n$  muy pequeños está polucionada por los errores numéricos (una buena aproximación a la solución, en estos casos, es la del doble modelo sumergido) y es en general poco fiable (en códigos no lineales provoca importantes inestabilidades en muchos casos). El método presentada en esta tesis rompe esta barrera y puede ser aplicado a problemas con  $F_n$  elevados.

Todos los análisis aquí realizados se han llevado a cabo con mallas de tetraedros lineales, por la flexibilidad de estas mallas para adaptarse a geometrías complejas y el bajo coste de cálculo de este elemento. Otros tipos de elementos se consideraron en fases iniciales del trabajo pero su uso se limitó a problemas académicos.

#### 5.4.1 Ejemplo 1

El primer ejemplo que se analiza es una prueba clásica en el análisis CFD de buques; el modelo de la serie 60 con coeficiente de bloque  $C_B = 0.6$ . Este modelo ha sido analizado por diferentes autores (ver por ejemplo [Rav96]) dado que fue elegido para tal objeto dentro del Programa de Cooperación Experimental del Comité de Flujo y Resistencia de la ITTC (*International Towing Tank Conference*), existiendo por lo tanto diversos resultados experimentales publicados, correspondientes al remolque del buque trincado. Para la siguiente discusión se han tomado los resultados publicados en [TSL93b] y [TSL93a]. Este ejemplo ha sido analizado numéricamente en diferentes aspectos, presentándose a continuación un resumen de los resultados encontrados.

En la figura 5.10 puede verse la definición geométrica del modelo que ha sido usada en el análisis, para el cual se han utilizado diferentes mallas volumétricas de tetraedros lineales, variando entre 35.000 y 700.000 elementos.

En la figura 5.11 se presenta el mapa de olas (arriba) y el campo de velocidades sobre la superficie libre para el análisis no viscoso correspondiente a  $F_n = 0.316$ . Para este mismo caso se presentan diferentes perfiles de olas. En ellos se comparan los resultados numéricos con los experimentales publicados en [TSL93b].

En la figura 5.12 se presentan los resultados del perfil de olas sobre el casco. Los resultados numéricos que se incluyen corresponden al análisis no

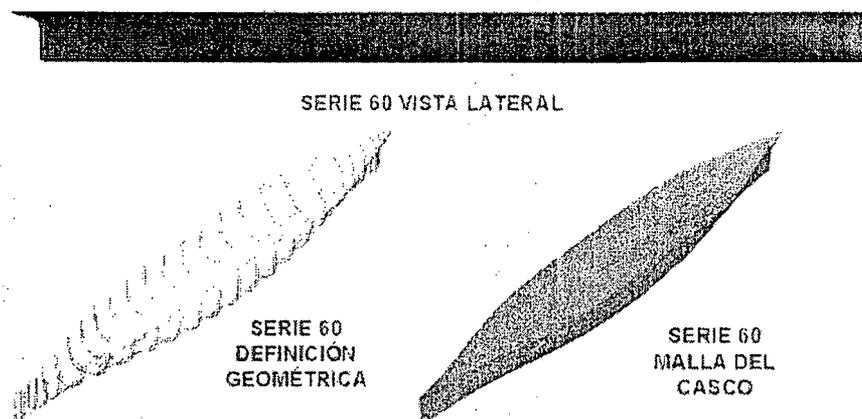


Figura 5.10: Geometría utilizada en el análisis del modelo de la serie 60 con  $C_b = 0.6$ .

viscoso y viscoso ( $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\mu = 10^{-3} \text{ Kg/ms}$  y condición de contorno sobre el buque de tracción impuesta, dada por la ley de pared logarítmica) para  $F_n = 0.316$  (el modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de coordenadas). En el análisis viscoso se utilizó un modelo de turbulencia de Smagorisky. Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan muy bien con los experimentales. Pudiendo observarse una sensible mejora en los mismos, en el caso del análisis viscoso.

En la figura 5.13 se presentan los resultados del perfil de olas en un corte practicado a una distancia  $y/L_{pp} = 0.0755$  del plano de crujía. Los resultados numéricos que se incluyen corresponden, al igual que en el caso anterior, al análisis viscoso y no viscoso para  $F_n = 0.316$  (el modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de coordenadas). Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan muy bien con los experimentales en ambos casos. Pudiendo observarse, no obstante, una importante mejora en los mismos, en el caso viscoso.

El tercer perfil de olas, que se presenta en la figura 5.14 corresponde a los resultados en un corte practicado a una distancia  $y/L_{pp} = 0.2067$  del plano de crujía. Los resultados numéricos se obtuvieron para  $F_n = 0.316$  (el modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de coordenadas). Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan muy bien con los experimentales en ambos casos. En este caso, la mejora apreciada en el caso del análisis viscoso es, en este corte, mucho más significativa.

Por otra parte, en la figura 5.15 se muestran diferentes instantáneas del proceso de convergencia de la solución para  $F_n = 0.316$ .

A continuación, en las figuras 5.16 y 5.17 se muestran la evolución del

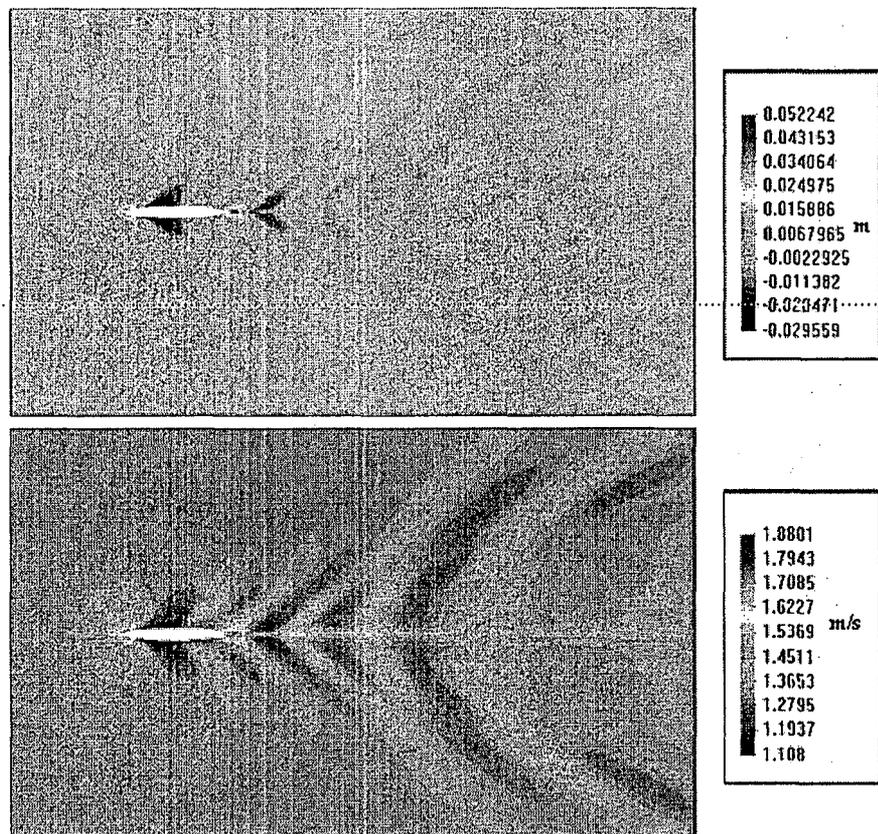


Figura 5.11: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del buque de la serie 60 ( $F_n = 0.316$ )

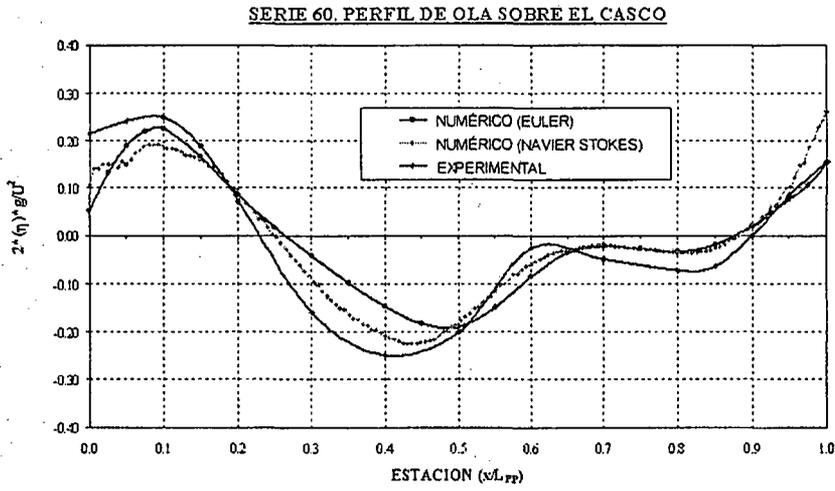


Figura 5.12: Comparación de los resultados del perfil de olas sobre el casco del buque de la serie 60 ( $F_n = 0.316$ )

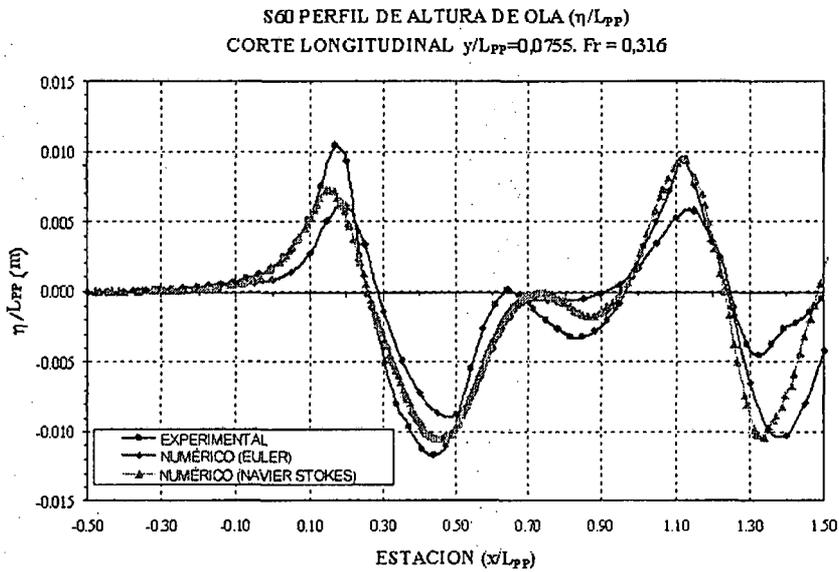


Figura 5.13: Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia  $y/L_{pp} = 0.0755$  del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ( $F_n = 0.316$ ).

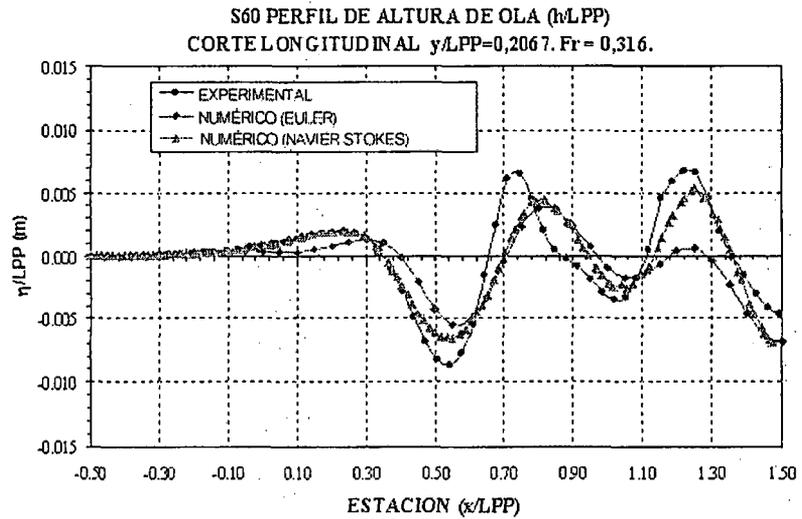


Figura 5.14: Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia  $y/L_{pp} = 0.2067$  del plano de crujía, en el análisis del buque de la serie 60 ( $F_n = 0.316$ ).

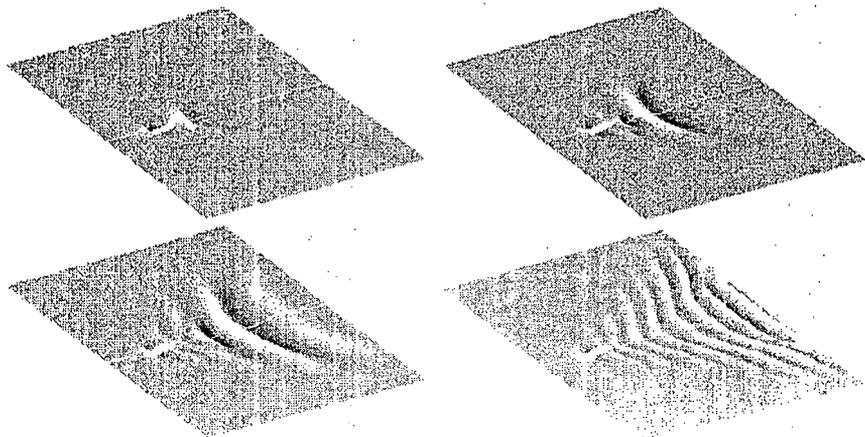
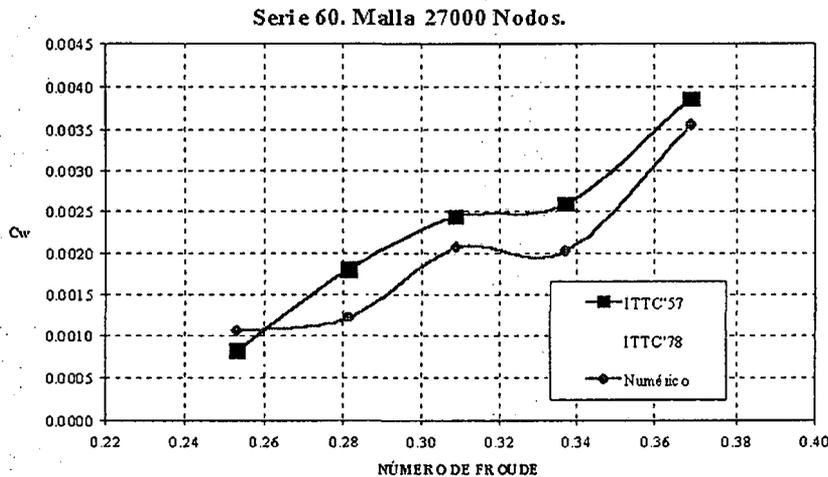


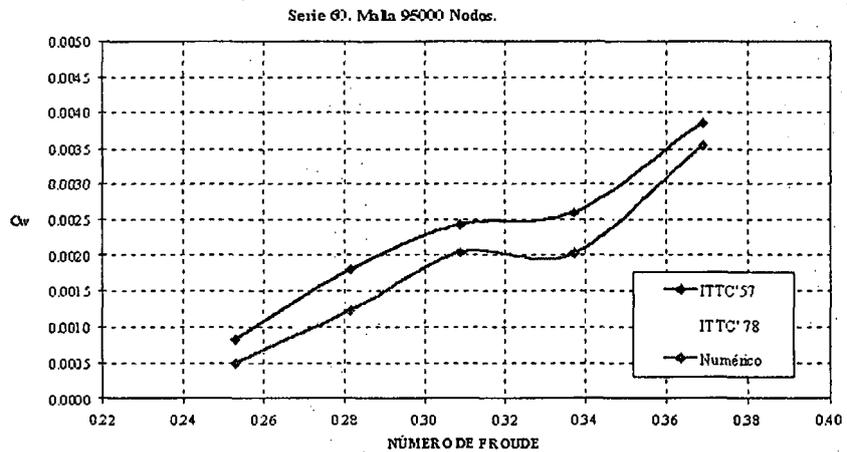
Figura 5.15: Instantáneas del proceso de convergencia de la solución de las olas creadas por el modelo de la serie 60 ( $F_n = 0.316$ ).



**Figura 5.16:** Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 27000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la ITTC.

coeficiente de resistencia por formación de olas, obtenido numéricamente del análisis no viscoso, con el valor de  $F_n$ . Este valor se compara con los obtenidos, según las recomendaciones de la ITTC, de los datos experimentales. Como puede observarse, en la figura 5.16, correspondiente al análisis con una malla grosera, la solución obtenida para  $F_n$  pequeños se separa mucho de la esperable. Esto se debe a que la malla utilizada no permite capturar las pequeñas perturbaciones que ocurren en la superficie libre, resultando en una solución inestable. Es evidente que, una solución más aproximada en este caso correspondería al análisis del doble modelo sumergido. En la gráfica 5.17, correspondiente al análisis con una malla más fina, puede verse como la solución para  $F_n$  pequeños vuelve a acercarse al valor esperado. Sin embargo, los problemas de inestabilidad persisten en este caso para mallas más finas.

A continuación se presentan los resultados del análisis del buque a *escala real* (considerando que el modelo estudiado con anterioridad está a una escala  $\lambda = 40$ ) de la serie 60, propuesto en [TSL91]. Este buque tiene una eslora entre perpendiculares  $L_{pp} = 121.9m$ , una manga  $B = 16m$  y un calado  $T = 6m$ . El análisis ha sido hecho con las constantes físicas características del medio siguientes  $\rho = 1000Kg/m^3$ ,  $\mu = 10^{-3}Kg/ms$ . Se impuso sobre el buque la condición de contorno de tracción prescrita, dada por la ley de pared logarítmica extendida. El análisis se llevó a cabo con un modelo



**Figura 5.17:** Gráfica del coeficiente de resistencia por formación de olas del modelo de la serie 60. Los resultados numéricos, obtenidos con una malla de 95000 nodos, se comparan con los extraídos de los experimentos según las recomendaciones de la ITTC.

de turbulencia de Smagorisky. Se analizaron tres casos, correspondientes a  $F_n = 0.316$ ,  $F_n = 0.238$  y  $F_n = 0.160$ . A continuación se presentan diferentes resultados gráficos de los análisis efectuados.

En la figura 5.18 se muestra el mapa de olas para el caso de  $F_n = 0.316$ . Este mapa es muy similar al obtenido en el análisis del modelo a escala  $\lambda = 40$ , aunque se apreciaron diferencias significativas en la zona cercana a la popa, probablemente debidas a fenómenos relacionados con la turbulencia. En las figuras 5.19 y 5.20 se muestran diversas líneas de corriente en las cercanías de la popa del buque, pudiendo apreciarse su gran curvatura, indicativa de que el flujo está separado en esa zona. Además, se han dibujado sobre el casco los contornos de la componente  $Ox$  de la velocidad, pudiendo apreciarse la zona donde el flujo comienza a separarse, indicado, de manera aproximada por el cambio de signo de esta componente (en azul).

Por otra parte, en la figura 5.21 se muestran las mismas líneas de corriente en las cercanías de la proa del buque. Se puede apreciar la importante perturbación que, el buque, produce en el flujo, indicada por la curvatura de estas líneas.

En la figura 5.22 se muestran los contornos componente  $Ox$  de la velocidad sobre la superficie libre, mientras que en la figura 5.23 se muestran los mismos contornos en las cercanías del buque.

A continuación se muestran diversos resultados del análisis del buque

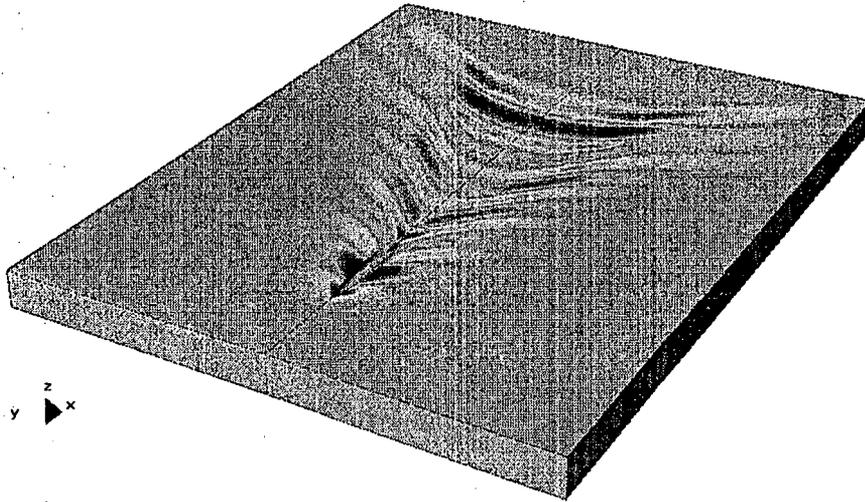


Figura 5.18: Mapa de olas del buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 1.3 \cdot 10^9$  y  $F_n = 0.316$ .

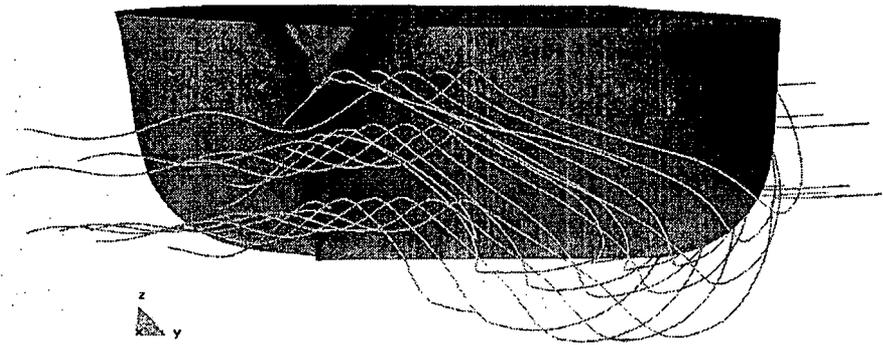


Figura 5.19: Líneas de corriente en torno a la popa del buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 1.3 \cdot 10^9$  y  $F_n = 0.316$ .

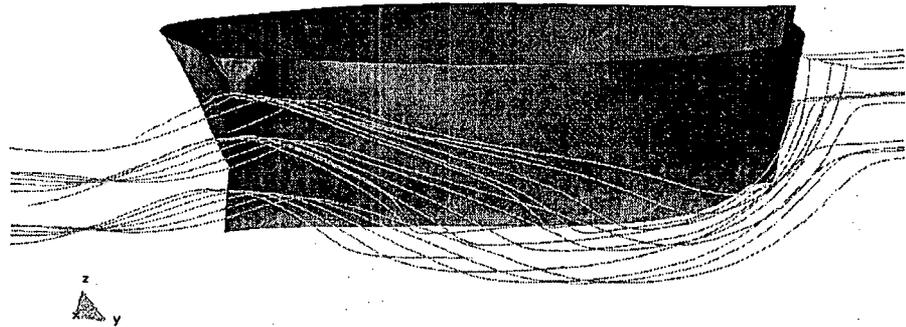


Figura 5.20: Perspectiva de las líneas de corriente en torno a la popa del buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 1.3 \cdot 10^9$  y  $F_n = 0.316$ .

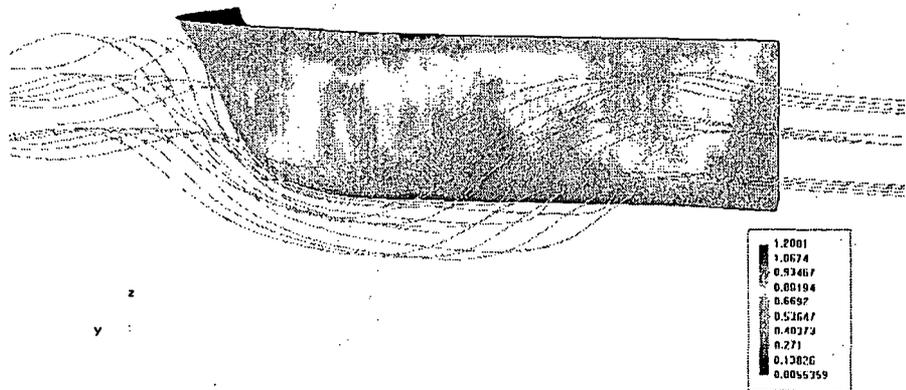


Figura 5.21: Líneas de corriente en torno al buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 1.3 \cdot 10^9$  y  $F_n = 0.316$ .

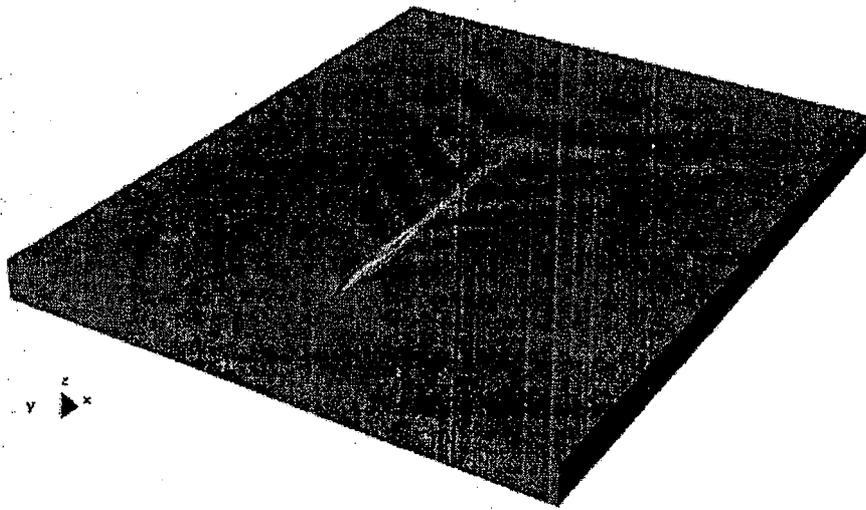


Figura 5.22: Contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre del buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 1.3 \cdot 10^9$  y  $F_n = 0.316$ .

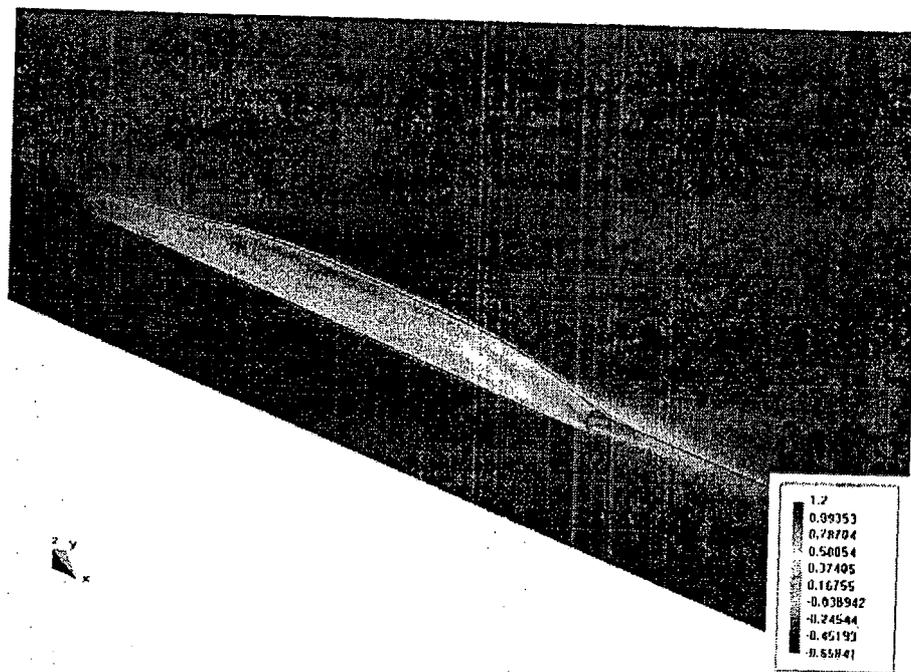


Figura 5.23: Contornos de la componente según  $Ox$  de la velocidad del buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 1.3 \cdot 10^9$  y  $F_n = 0.316$ .

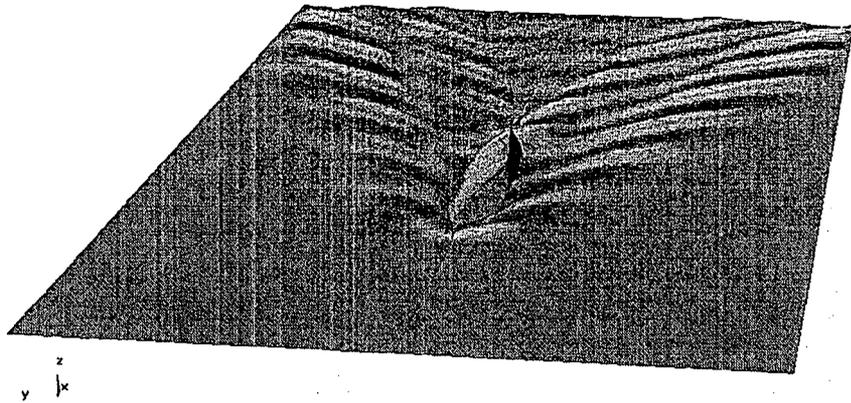


Figura 5.24: Mapa de olas del buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 10^9$  y  $F_n = 0.238$ .

para  $R_n = 10^9$  y  $F_n = 0.238$ . En la figura 5.24 se muestra el mapa de olas calculado. La malla se ha deformado con un factor de amplificación de 5. Por su parte, en la figura 5.25 se muestra el trazado de varias líneas de corriente en las cercanías de la popa del buque. Sobre el casco se han dibujado los contornos del módulo de la velocidad. Estos mismos contornos, pueden verse sobre la superficie libre, en la figura 5.26. Por último se presenta, en la figura 5.27, la distribución de presión en las cercanías del casco. Las superficies se han hecho transparentes, permitiendo que se vean las líneas de corriente trazadas.

Por último en la figura 5.28 se presentan los contornos del módulo de la velocidad en torno al buque para  $R_n = 6.5 \cdot 10^8$  y  $F_n = 0.16$ .

Como conclusión del análisis del modelo de la serie 60, debe señalarse la importancia significativa, que los fenómenos relacionados con la viscosidad, parecen tener en la solución. Esta influencia es más destacable en las zonas cercanas a la popa del buque. La variación de las condiciones de contorno sobre el buque pueden mejorar los resultados en el caso con viscosidad nula, pero este efecto depende del caso concreto. Por otra parte, la convergencia del problema se complica a medida que se disminuye<sup>12</sup> el valor de  $F_n$ . Esto se debe a que la perturbación de la superficie libre es despreciable, y no puede capturarse sino con una malla lo suficientemente fina. El resultado, en este caso, es la aparición de oscilaciones numéricas que desaparecen utilizando mallas más finas. Es evidente, que este proceso de refinamiento tiene un límite, llegado al cual hay que suponer que la mejor aproximación posible al problema es considerar que la superficie libre permanece imperturbada.

<sup>12</sup>Este problema es mucho más significativo en los análisis con viscosidad nula.

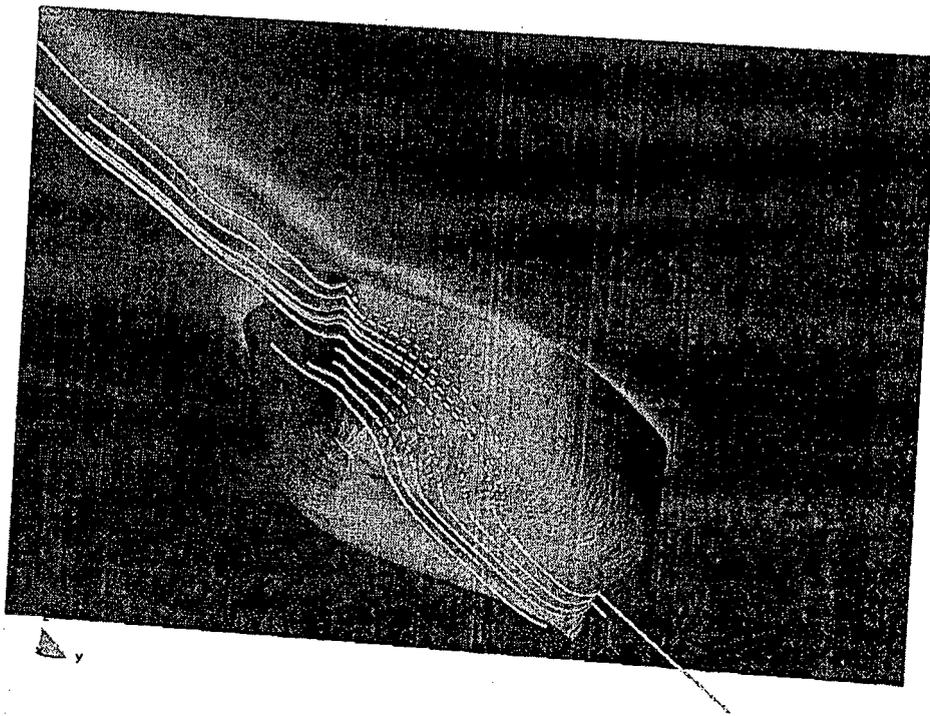


Figura 5.25: Líneas de corriente en torno al buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 10^9$  y  $F_n = 0.238$ .

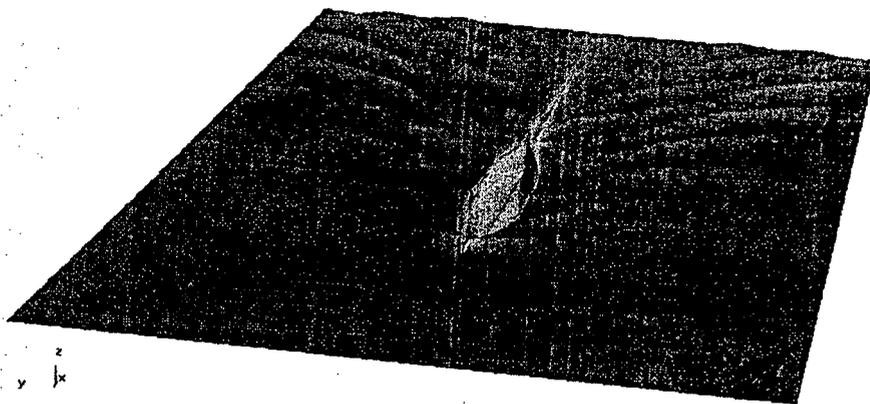


Figura 5.26: Contornos del módulo de la velocidad en torno al buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 10^9$  y  $F_n = 0.238$ .

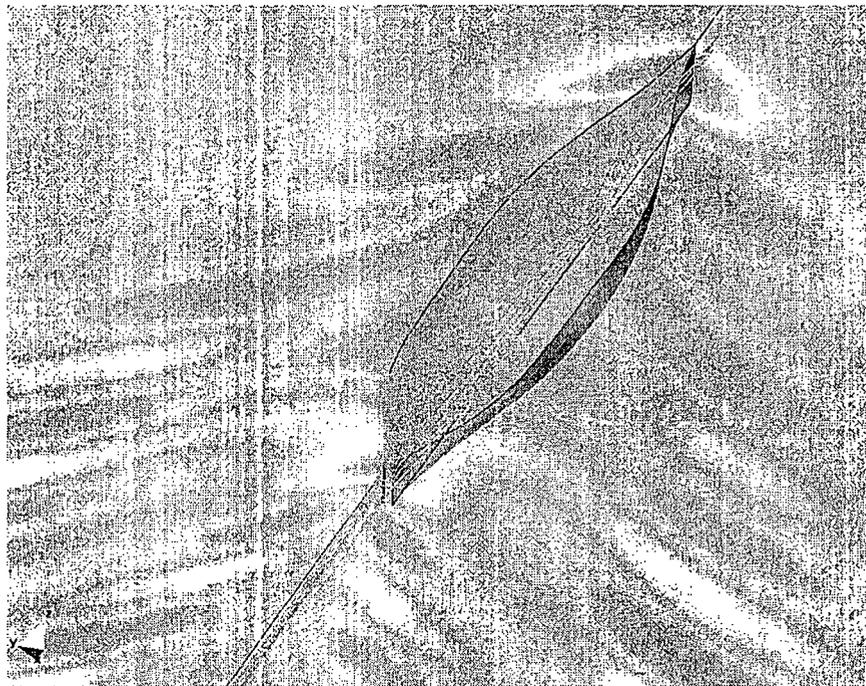


Figura 5.27: Contornos de presión en torno al buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 10^9$  y  $F_n = 0.238$ . La superficie libre transparente permite ver las líneas de corriente trazadas en torno al buque.

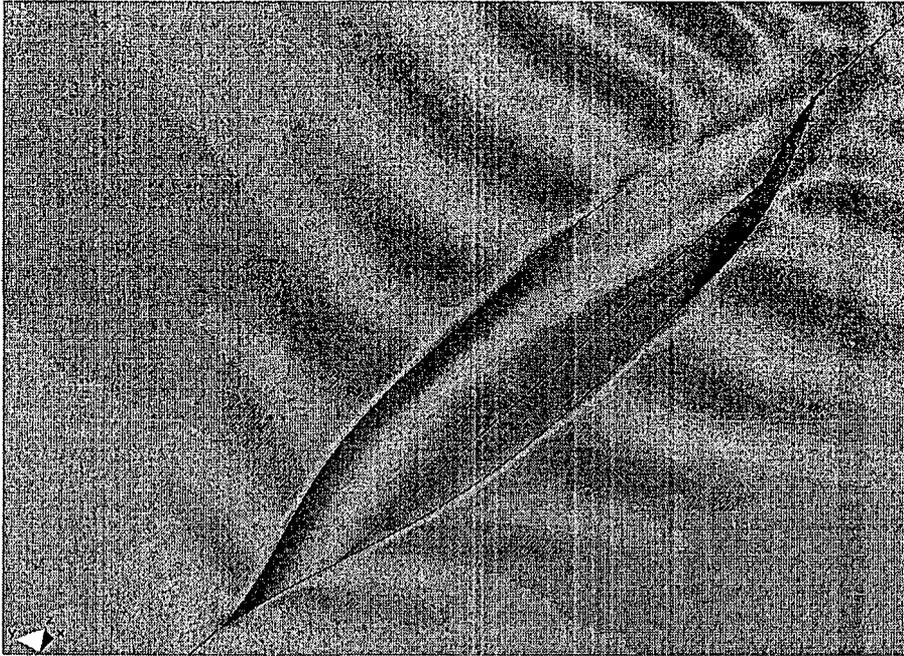


Figura 5.28: Contornos del módulo de la velocidad en torno al buque de  $L_{pp} = 122m$  de la Serie 60. Análisis para  $R_n = 6.5 \cdot 10^8$  y  $F_n = 0.16$ .

Por otra parte, es importante señalar, que la solución con viscosidad es mucho más estable que la obtenida para  $\mu = 0$ . Los ensayos llevados a cabo para  $R_n$  elevados confirman este aspecto, habiéndose podido correr casos para valores de  $F_n$  relativamente bajos, con mallas modestas en torno a 80.000 elementos tetraédricos.

Además los ensayos realizados con valores de  $R_n \simeq 10^9$  ofrecen valores de la resistencia total muy cercanos a los que pueden obtenerse, a partir de los ensayos en canal (ver [TSL91]), siguiendo las recomendaciones de la *ITTC*. A continuación se presenta una tabla que recoge los valores de resistencia al avance obtenidos en los ensayos, comparándolos con los extrapolados a partir de los datos experimentales. Los primeros se han separado en dos componentes, la primera correspondiente a la integración de los esfuerzos en la pared, y la segunda por integración de la presión. Todos los valores de resistencia están dados en Newtons y la velocidad en m/s.

V	Experimental	Numérico( $p$ )	Numérico( $\tau$ )	Numérico( $p + \tau$ )
5.33	72.000	5.500	75.200	80.700
8.23	155.000	30.400	167600	198.000
10.93	300.000	83.200	243600	326.800

Como puede apreciarse, las diferencias máximas son del orden del 15%. Estas diferencias, pueden no ser tan significativas, habida cuenta de la incertidumbre que existe tanto en el método de extrapolación, como en el proceso de integración numérica sobre el casco.

### 5.4.2 Ejemplo 2

A continuación se presentan los resultados del análisis de la fragata denominada HSDF04 perteneciente a la E.N. Bazán de C.N.M. Esta geometría ha sido ensayada en el Basin d'Essais des Carènes de París [ddC98]. En los análisis numéricos que se presentan, se ha analizado el modelo a escala con el objeto de validar los resultados con los obtenidos experimentalmente.

En la figura 5.29 puede verse la compleja definición geométrica del modelo que ha sido usada en el análisis, para el cual se han utilizado diferentes mallas volumétricas de tetraedros lineales, variando entre 35.000 y 150.000 elementos. Como puede apreciarse, el modelo posee un significativo bulbo en proa, cuyo objeto es alojar el equipo de sónar, una quilla y termina con una popa de espejo. La simulación se llevó a cabo fijando en la zona central del espejo la elevación de la superficie libre, siguiendo la metodología explicada en este mismo capítulo.

En la figura 5.30 y 5.31 se presentan los resultados del perfil de olas sobre el casco. Los resultados numéricos que se incluyen corresponden al análisis no viscoso ( $\rho = 1000 \text{Kg/m}^3$ ,  $\mu = 0$ ) del modelo, a escala 1:22 (la eslora entre perpendiculares del buque es  $L_{pp} = 122 \text{ m}$ ), para un valor de  $F_n = 0.45$ . El modelo se sitúa con su perpendicular de proa en el origen de coordenadas. Como puede apreciarse, los resultados numéricos concuerdan apreciablemente bien con los experimentales, aunque las oscilaciones de mayor frecuencia no se han recogido, probablemente por su origen en fenómenos no reproducidos numéricamente como olas rompientes y por los errores introducidos por lo grosero de la malla empleada. La diferencia entre los perfiles, que se aprecia en la parte derecha de las gráficas se debe al efecto del amortiguamiento numérico añadido en esta zona, a la solución numérica, para impedir la reflexión en el contorno.

El mapa de olas correspondiente al mismo caso se presenta en la figuras 5.32 y 5.33.

Por otra parte, en la figura 5.34 se presenta la curva de resistencia por formación de olas obtenida en los análisis, y se compara con las curvas correspondientes a las recomendaciones de la *ITTC* de 1978 y 1957. Como puede apreciarse, el resultado obtenido, debe considerarse óptimo, al encontrarse entre ambas, y con diferencias relativas menores del 7%. No fue posible obtener resultados numéricos estables, con las condiciones de contorno men-

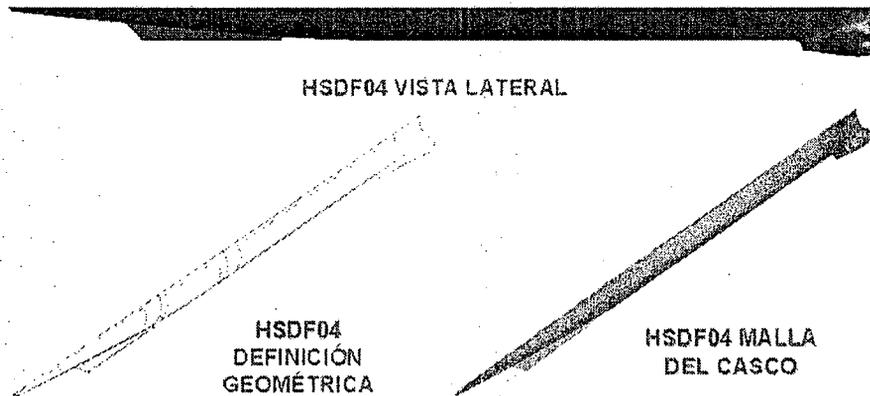


Figura 5.29: Geometría utilizada en el análisis de la carena HSDF04.

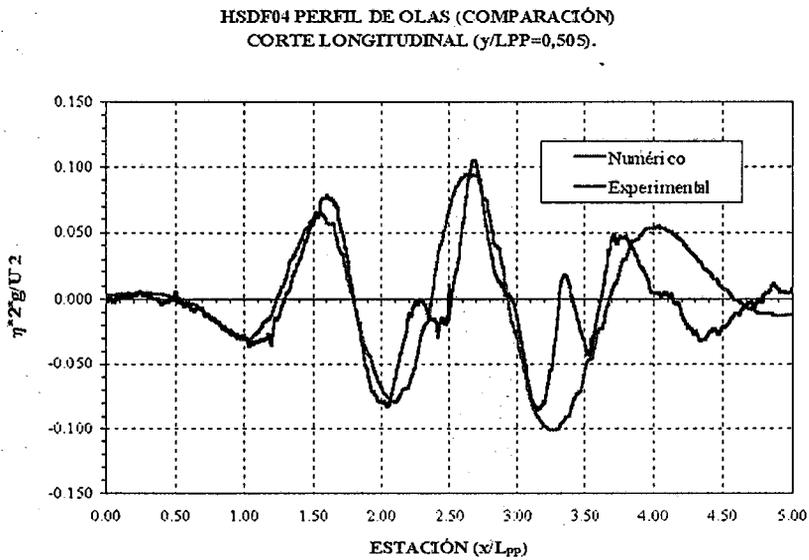
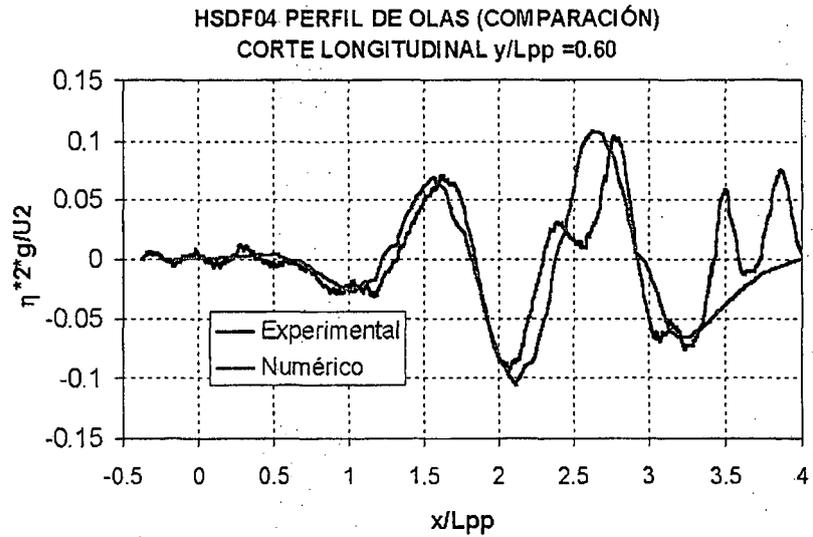
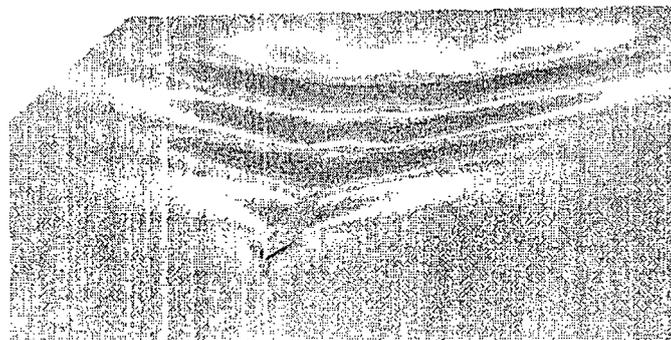


Figura 5.30: Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia  $y/L_{pp} = 0.505$  del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ( $F_n = 0.45$ ).



**Figura 5.31:** Comparación de los resultados del perfil de olas en un corte a una distancia  $y/L_{pp} = 0.60$  del plano de crujía, en el análisis de la carena HSDF04 ( $F_n = 0.45$ ).



**Figura 5.32:** Mapa de olas resultado del análisis de la carena HSDF04 ( $F_n = 0.45$ )

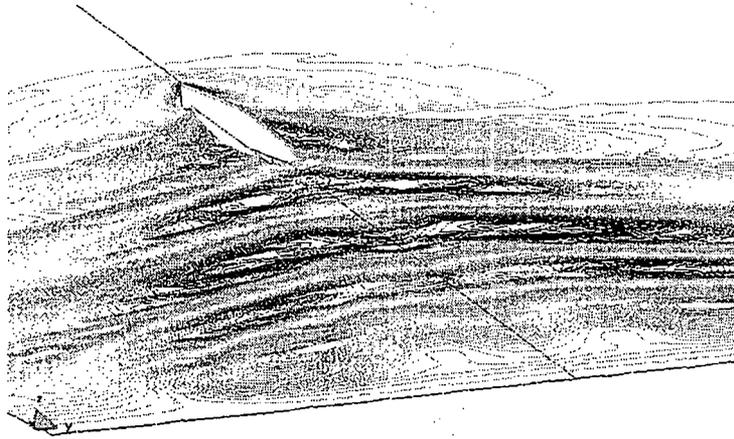


Figura 5.33: Isocontornos de altura de olas, resultado del análisis de la carena HSDFO4 ( $F_n = 0.45$ )

cionadas con anterioridad, para  $F_n$  menores de 0.39. Esto concuerda con las observaciones experimentales, que detectaron que la popa empezaba a estar mojada para valores inferiores de  $F_n$ . Por lo tanto, la metodología de análisis de buques con popa de espejo parece ser adecuada para detectar la zona de tránsito al flujo con aguas muertas. A partir de ese punto, sería necesario eliminar la prescripción de la altura de la superficie libre en la popa de espejo, pues ya no es física.

Por último, se presentan diferentes resultados gráficos del análisis viscoso ( $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\mu = 10^{-3} \text{ Kg/ms}$ ) del modelo, a escala, para un valor de  $F_n = 0.45$ . Este análisis se llevó a cabo con la imposición de la tracción sobre el casco, dada por la ley de pared logarítmica extendida. Además se utilizó un modelo de turbulencia de Smagorinsky.

En la figura 5.35 se presentan los contornos de velocidad sobre el casco del modelo. Se puede observar claramente la importante estela que crea el bulbo de proa. En la figura 5.36 se han trazado diferentes líneas de corriente, que permiten observar la influencia del modelo en el flujo. Por otra parte, esta misma influencia, en lo referente al bulbo, puede verse en la figura 5.37.

### 5.4.3 Ejemplo 3

El siguiente ejemplo que se presenta corresponde al análisis de un submarino. La geometría pertenece a la E.N. Bazán de C.N.M. y por razones de confidencialidad y seguridad, sólo se presentan aquí ciertos resultados cualitativos. El objetivo del análisis es determinar la firma radar (perturbación del submarino en la superficie libre) y firma de presión (perturbación de la

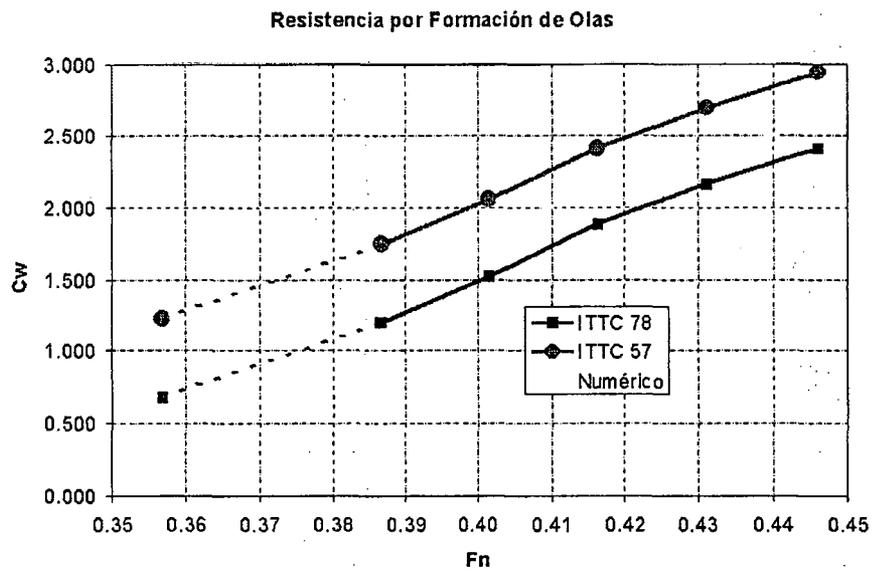


Figura 5.34: Curva de resistencia por formación de olas de la fragata. Se indica en rayado la zona donde experimentalmente se observó que el espejo comenzaba a estar mojado.

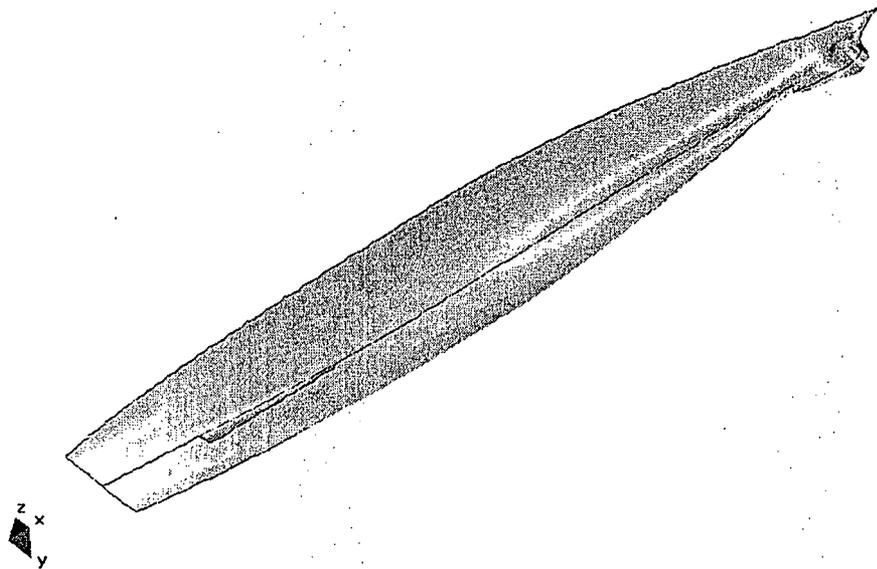


Figura 5.35: Contornos de velocidad sobre la carena HSDF04 para  $F_n = 0.45$ .

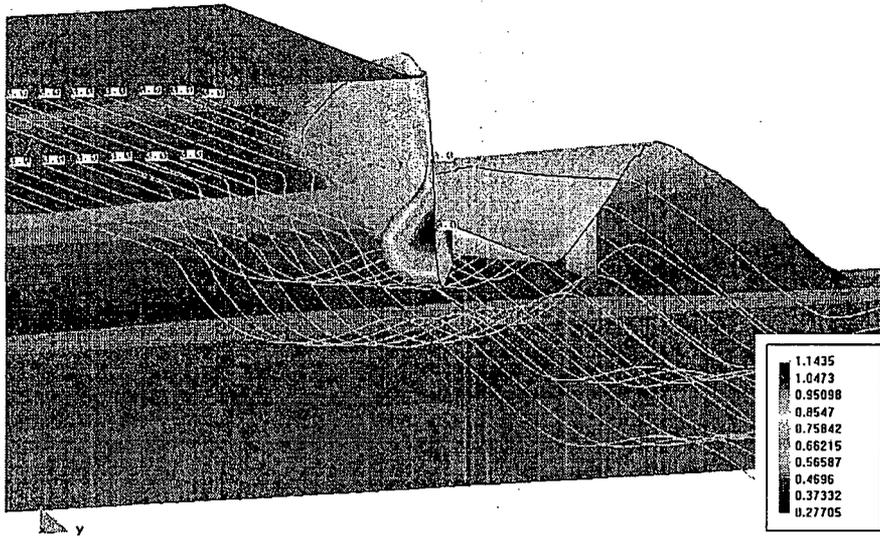


Figura 5.36: Trazado de líneas de corriente en torno al casco de la fragata ( $F_n = 0.4$ ).

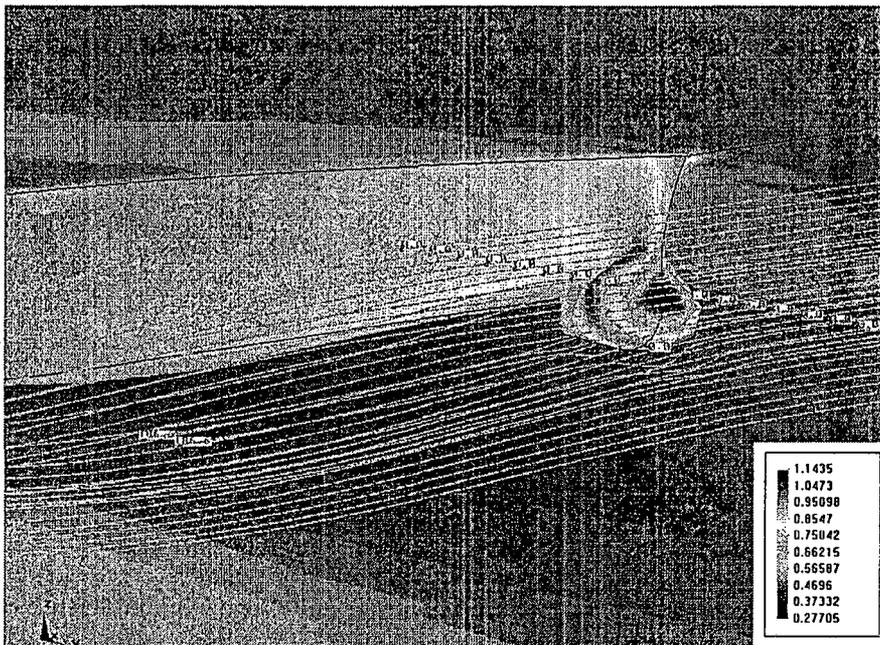


Figura 5.37: Trazado de líneas de corriente en torno al bulbo de la fragata ( $F_n = 0.4$ ).

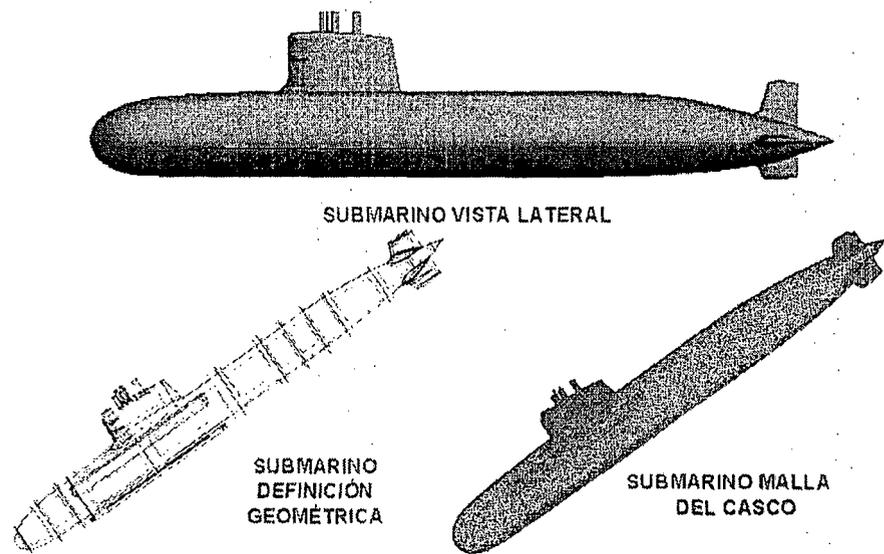


Figura 5.38: Definición geométrica (CAD) de un submarino y malla de superficie utilizada en el análisis.

distribución de presión que produce a diferentes alturas) con el objeto de permitir mejorar su diseño, de manera que se dificulte su detección, y en el sentido opuesto, poder encontrar medios más eficaces para la detección de estos artefactos navales. En la figura 5.38 se muestra la definición geométrica superficial del submarino, junto con la malla utilizada en el análisis. Las mallas volumétricas completas, utilizadas en el análisis tenían más de 1.000.000 de elementos tetraédricos lineales y más de 175.000 nodos.

En la figura 5.39 se muestran varios resultados gráficos del análisis de la firma de presión del submarino. Para ello se han practicado diversos cortes (el submarino, en situación de ataque, se encuentra entre los dos superiores) sobre los que se han dibujado las líneas isobaras en diferentes instantes de tiempo.

Por otra parte, en la figura 5.40 se presentan diferentes imágenes del análisis de la firma radar del submarino. En este caso el interés se centra en calcular la deformación de la superficie libre, que éste produce cuando se encuentra en situación de ataque. En las diferentes instantáneas de la figura 5.40 se muestra la deformación producida en el mar y la distribución de presiones sobre el casco del submarino.

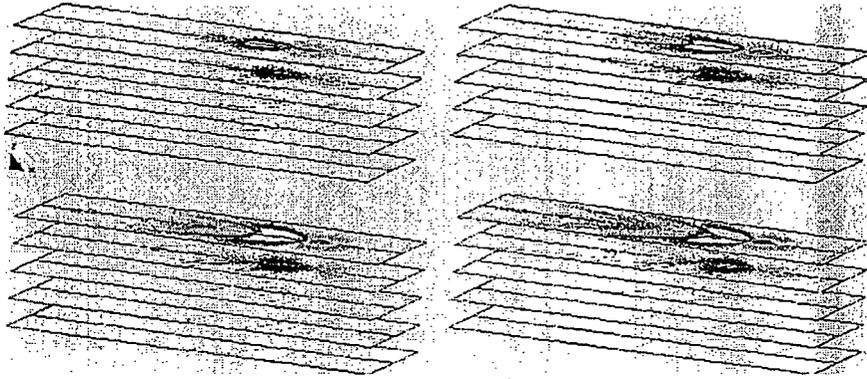


Figura 5.39: Análisis de la firma de presión del submarino. Líneas isobaras en diferentes instantes de tiempo.

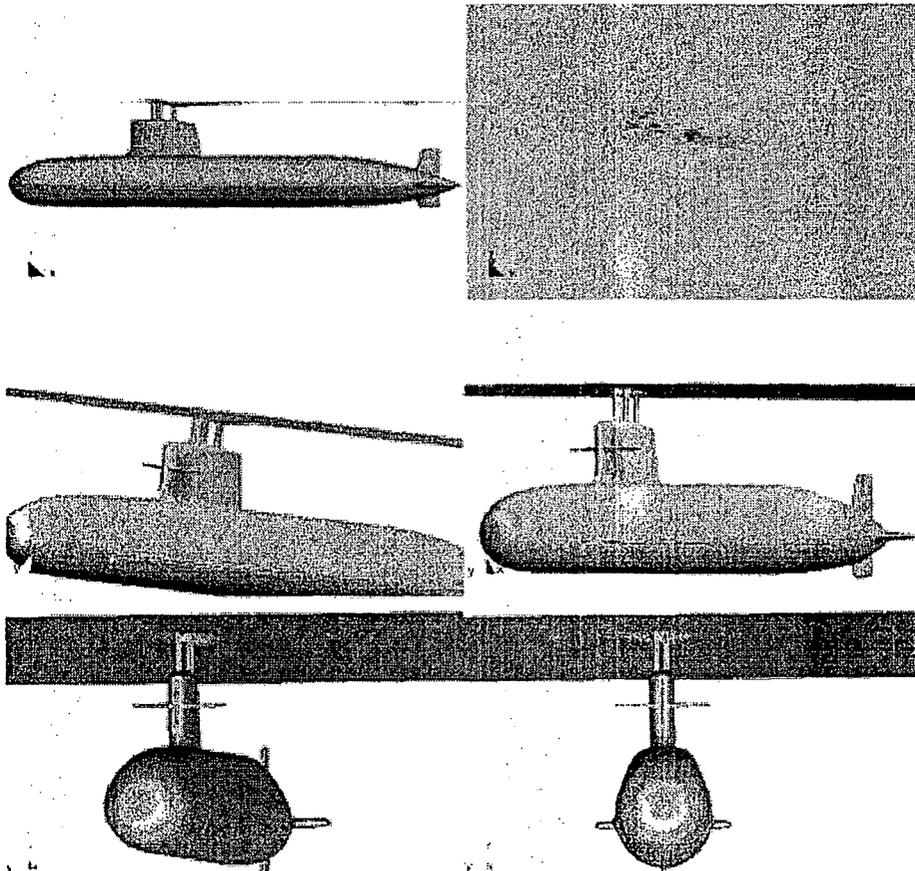


Figura 5.40: Diferentes imágenes del análisis de la firma rádar de un submarino en situación de ataque.

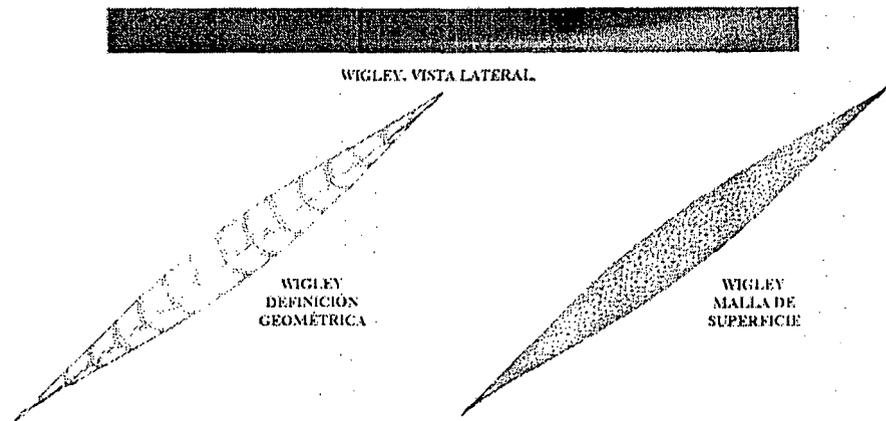


Figura 5.41: Definición geométrica del modelo Wigley.

#### 5.4.4 Ejemplo 4

A continuación se analiza otra carena clásica, como test de validación de códigos numéricos en hidrodinámica naval: el modelo Wigley. En este caso, las formas de esta carena están dadas analíticamente por la siguiente ecuación,

$$y = \frac{B}{2} 4x(1-x) \left( 1 - \left( \frac{z}{d} \right)^2 \right)$$

donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las coordenadas de los puntos que definen la superficie del modelo y  $B$ ,  $d$  son las constantes que definen la manga y calado de la carena, que en nuestro caso toman los valores  $B = 0.1$ ,  $d = 0.0625$ . En la figura 5.41 puede verse la definición geométrica de este modelo.

El análisis que se ha llevado a cabo en este caso consistió en un primer estudio del comportamiento del modelo en un rango de  $F_n$ , utilizando una malla fija de 125.000 tetraedros lineales. Los resultados de estos ensayos, llevados a cabo con viscosidad nula, se presentan en las figuras 5.42, 5.43 y 5.44, donde se incluyen mapas de velocidad y contornos de altura de ola para valores de  $F_n$ , 0.266, 0.316 y 0.452.

A continuación, se tratarán de reproducir los análisis experimentales publicados en [NJ83], correspondientes a un modelo con una eslora de 6m. Para el análisis numérico se tomaron los siguientes valores  $\rho = 1000 \text{Kg}/\text{m}^3$ ,  $\mu = 10^{-3} \text{Kg}/\text{ms}$  y  $F_n = 0.316$  (que corresponde a una velocidad de 2.424m/s). El cálculo se ha llevado a cabo imponiendo la tracción en el casco, dada por la ley de pared extendida y utilizando un modelo de turbulencia de Smagorinsky. Los resultados experimentales, para este caso, ofrecen un valor

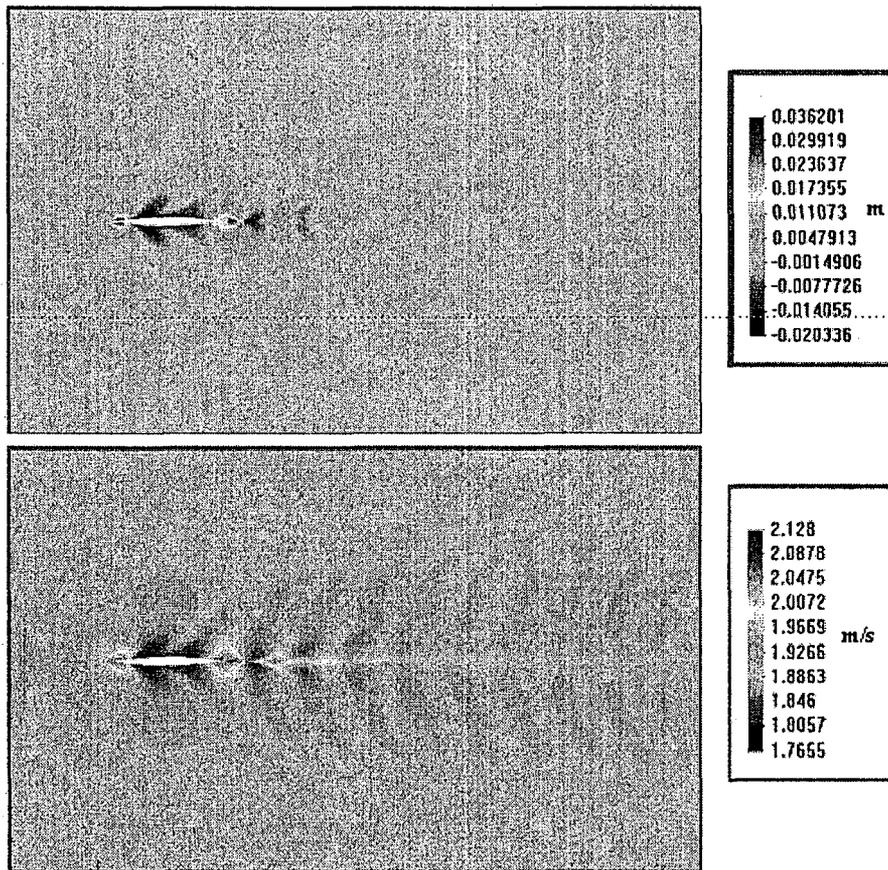


Figura 5.42: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ( $F_n = 0.266$ ).

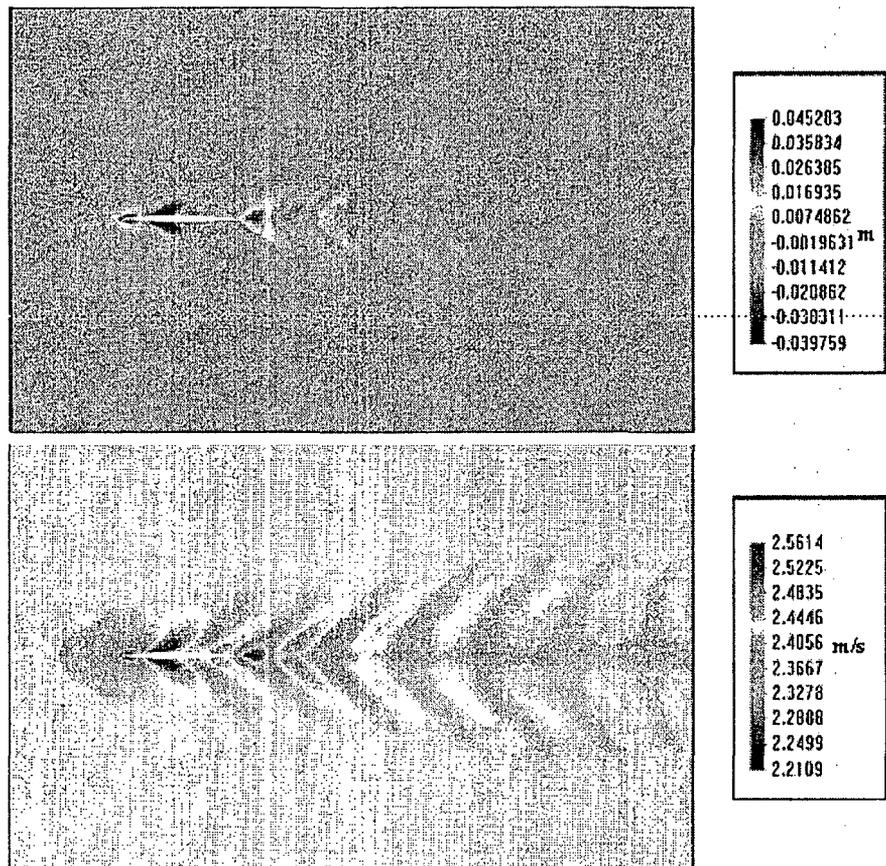


Figura 5.43: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ( $F_n = 0.316$ ).

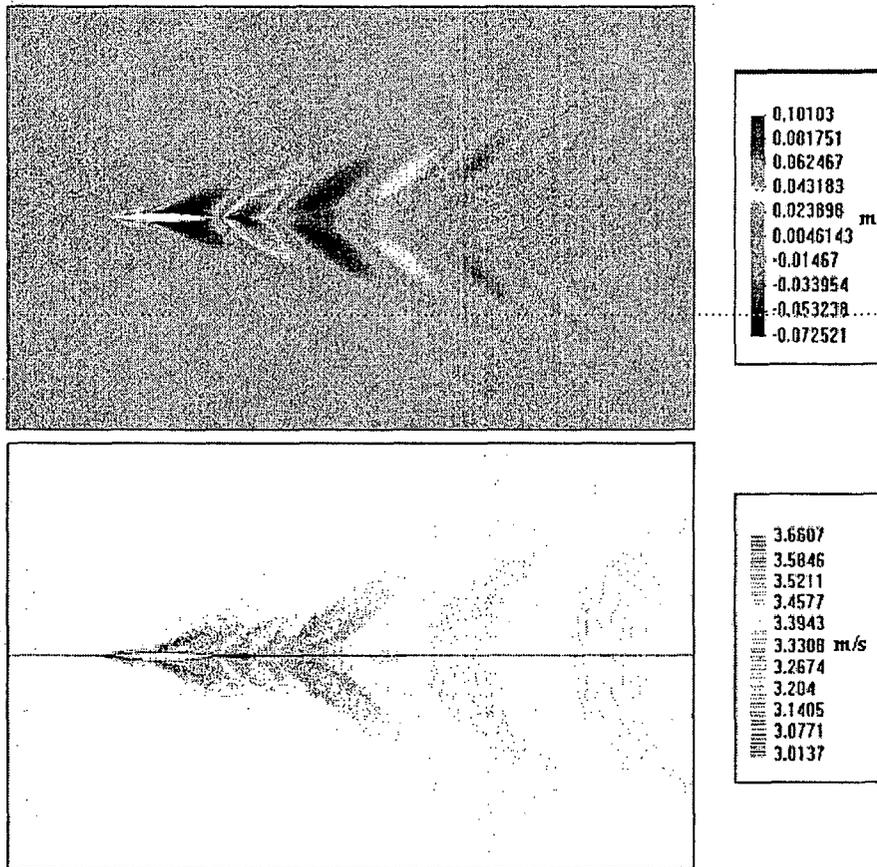


Figura 5.44: Mapa de olas (arriba) y de velocidades (abajo) sobre la superficie libre, resultado del análisis del modelo Wigley ( $F_n = 0.452$ ).

del coeficiente de resistencia total, para el modelo trincado, de  $C_T = 5.2 \cdot 10^{-3}$  y de  $C_T = 4.9 \cdot 10^{-3}$  para el modelo libre (en cuya situación de equilibrio, los valores de trimado y hundimiento son  $-0.15\%$  y  $0.04$ , respectivamente).

Para permitir validar la capacidad del método presentado, se llevaron a cabo tres ensayos. En el primero de ellos se corrió con una malla fija y el modelo en la situación adrizada, correspondiente a su posición de trincado. El valor del coeficiente de resistencia obtenido en este caso fue de  $C_T = 4.9 \cdot 10^{-3}$ . Lo cual representa un error de apenas el  $6\%$  respecto al valor experimental. Las figuras 5.45 y 5.46 muestran diversos resultados de este análisis.

En la segunda prueba se permitió la deformación de la malla, pero sólo debida a la variación de la superficie libre. Este análisis debiera reproducir exactamente el experimental con el modelo trincado. El coeficiente de resistencia obtenido en este caso fue de  $C_T = 5.3 \cdot 10^{-3}$ , lo que representa un error de menos del  $2\%$  respecto al valor experimental. Los resultados gráficos, en este caso, apenas se diferencian de los obtenidos en el tercer ensayo, que se presenta a continuación.

En el último ensayo se permitió el movimiento del modelo. Este debiera reproducir exactamente el experimental con el modelo libre, si bien, la posición vertical del centro de gravedad del modelo numérico (que se tomó a la altura de la flotación en reposo), puede diferir de la utilizada en el remolque, pues este dato es desconocido. El coeficiente de resistencia obtenido en este caso fue de  $C_T = 5.1 \cdot 10^{-3}$ , lo que representa un error del orden del  $4\%$  respecto al obtenido en el ensayo de remolque. El buque quedó en una situación estable con un trimado de  $-0.1\%$  y un hundimiento de  $0.035$ . Las diferencias encontradas en este caso con los datos experimentales, pueden deberse al aspecto ya mencionado, de la diferente posición del centro de gravedad del modelo en cada caso. En la figura 5.50 se muestra la superficie libre en las cercanías del casco, resultado del análisis de este caso. Por otra parte, en la figura 5.48 se muestra la superficie mojada final. A continuación, en las figuras 5.49 y 5.50, se muestran los contornos del módulo de la velocidad sobre la superficie libre y el mapa de olas obtenido. Por último se incluyen, en las figuras 5.51 y 5.52, las distribuciones del módulo de la velocidad y de la presión sobre el modelo. En estas figuras se ha incluido el trazado de unas líneas de corriente que permiten ver como el modelo perturba el flujo uniforme. En este sentido, hay que hacer mención a las diferencias encontradas en la zona cercana a la popa del modelo, entre este análisis y el no viscoso, que se presentó anteriormente.

Por último, se presenta una gráfica comparativa de los perfiles de ola sobre el casco, obtenidos con el modelo libre, y sin mover la malla y los obtenidos experimentalmente. Puede apreciarse que las diferencias son mínimas en los dos casos analizados numéricamente, y a su vez con los datos experimenta-

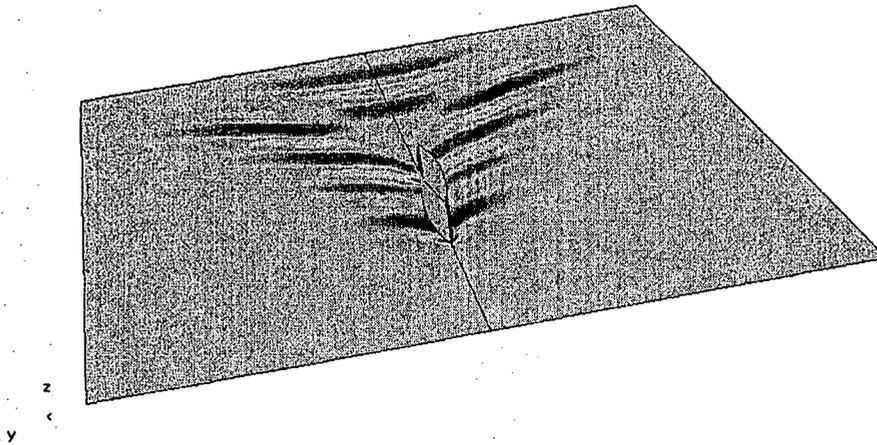


Figura 5.45: Mapa de olas resultado del análisis del modelo Wigley (truncado).

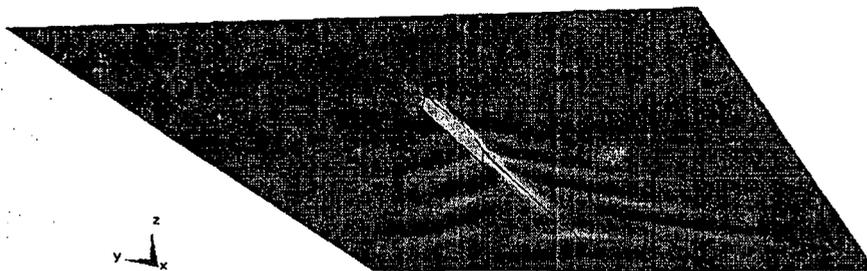


Figura 5.46: Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo Wigley (truncado).

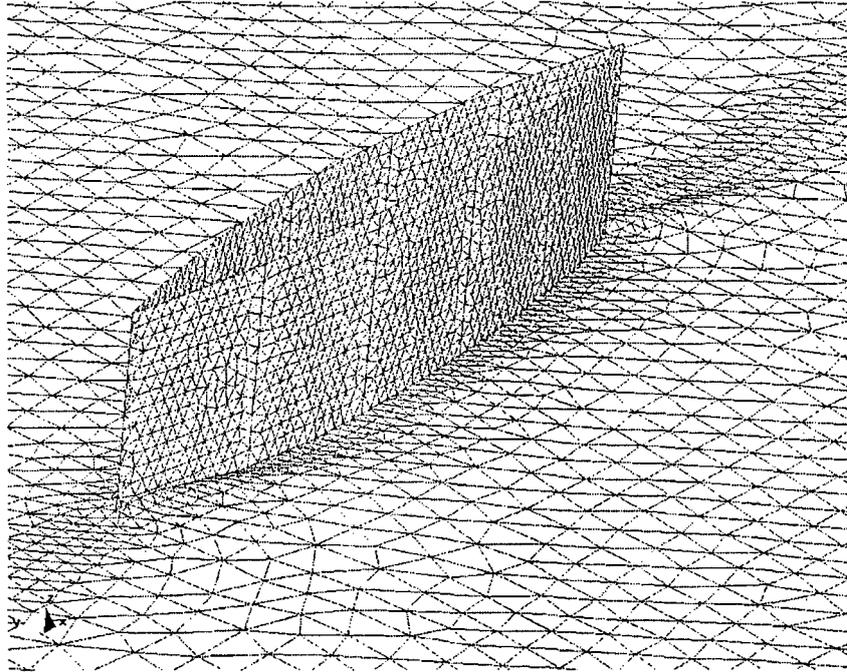


Figura 5.47: Deformación de la malla del modelo wigley (libre) en las cercanías del casco.

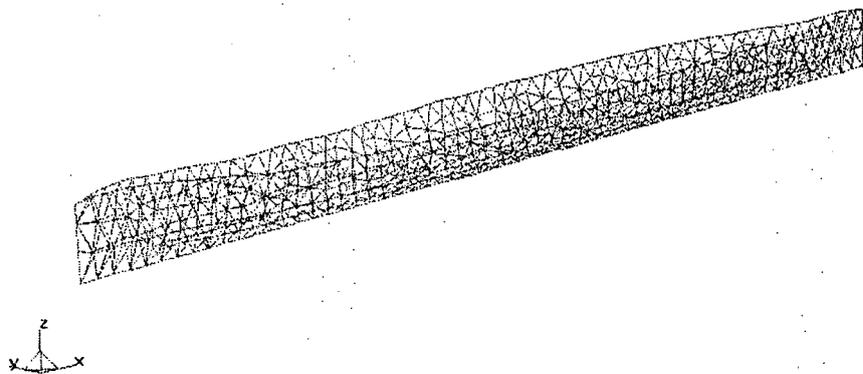


Figura 5.48: Malla de la superficie mojada resultante del análisis del modelo Wigley (libre).

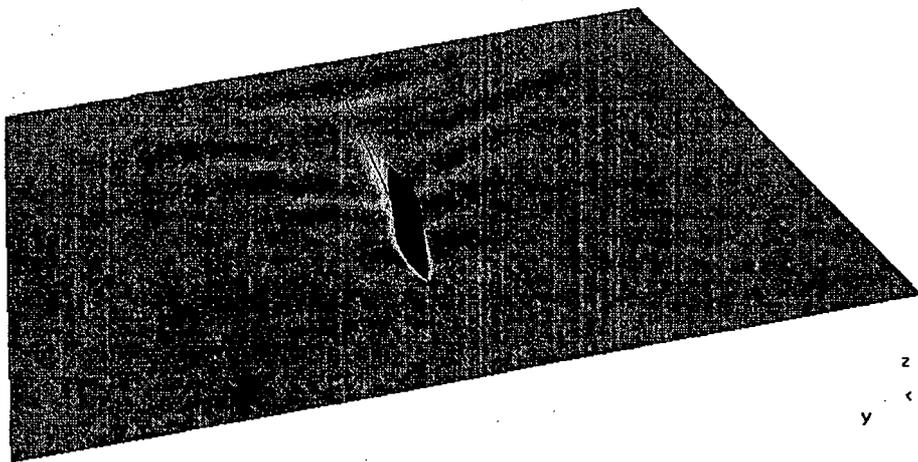


Figura 5.49: Contornos del módulo de velocidad sobre la superficie libre del modelo Wigley (libre).

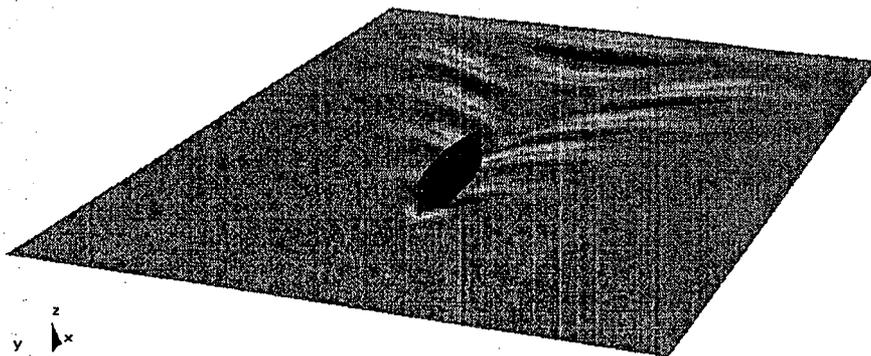


Figura 5.50: Mapa de olas resultado del análisis del modelo Wigley (libre). La altura se ha amplificado por un factor de 4.

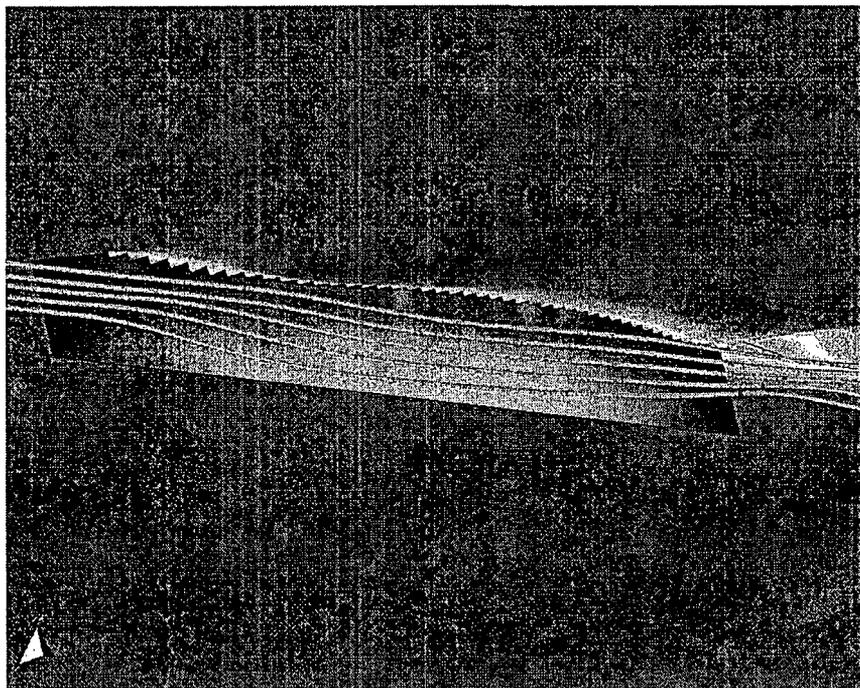
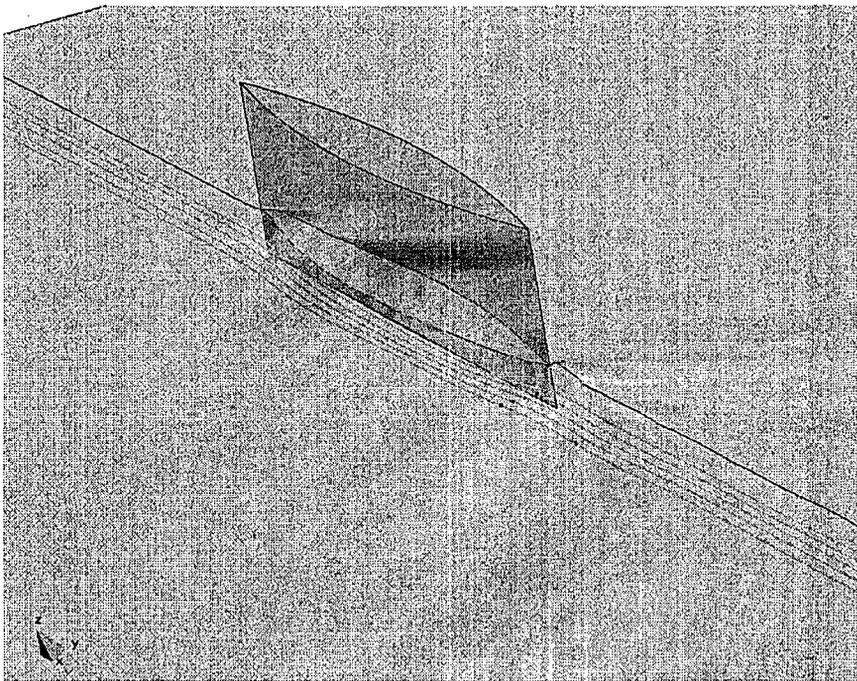
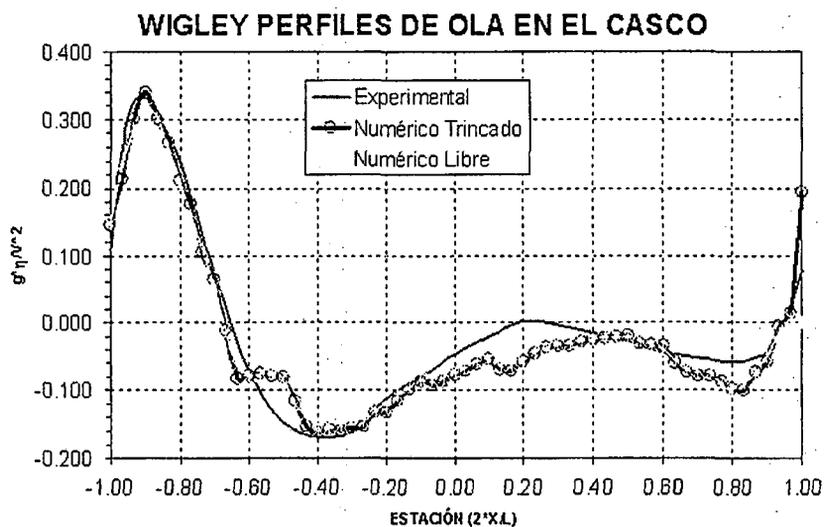


Figura 5.51: Contornos del módulo de velocidad sobre la obra viva y la superficie libre del modelo Wigley (libre). También puede verse el trazado de algunas líneas de corriente.



**Figura 5.52:** Contornos de presión resultado del análisis del modelo Wigley (libre). En la imagen, la superficie libre se transparenta, dejando a la vista la obra viva y algunas líneas de corriente trazadas.



**Figura 5.53:** Comparación de los perfiles de ola obtenidos en el análisis numérico (con modelo trincado y libre) con los experimentales disponibles.

les. Es significativo señalar, que la mayor diferencia entre los dos resultados numéricos, se da en la zona cercana a la popa, donde en el caso de no mover la malla, se produce una importante variación en la pendiente del perfil, que se separa apreciablemente del obtenido experimentalmente.

#### 5.4.5 Ejemplo 5

A continuación se presentan unos resultados gráficos de una prueba preliminar del funcionamiento del generador de olas numérico introducido en este capítulo. La geometría que se utilizó corresponde al modelo snowdrift que se presenta en la figura 5.54. La ola generada es regular, de una longitud de 80 m., mientras que el valor de  $F_n$  para el buque es de 0.32. En los contornos de la superficie libre se dispuso un área de absorción de anchura una longitud de onda. En el movimiento del buque se consideró que su desplazamiento era despreciable, teniendo sólo en cuenta su velocidad. Para la definición dinámica de su evolución se utilizaron los radios de giro tradicionales en problemas de comportamiento en la mar [Llo89].

En las figuras 5.55 y 5.56 se muestran diversas imágenes de la evolución del análisis.

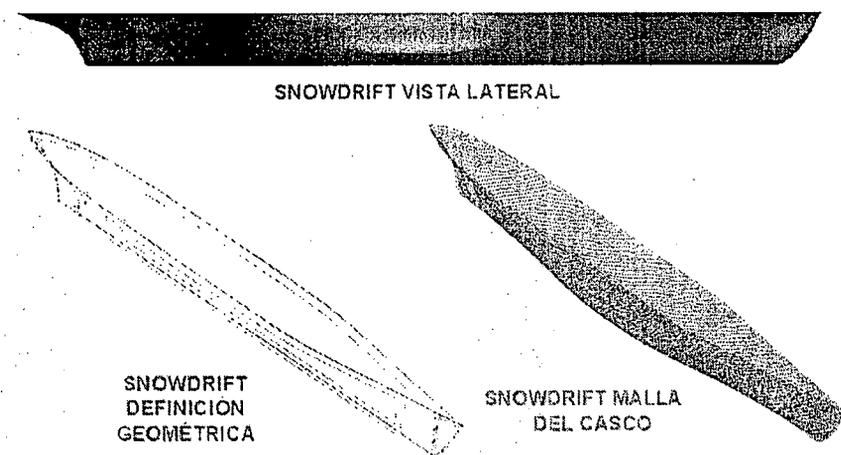


Figura 5.54: Definición geométrica del modelo Snowdrift.

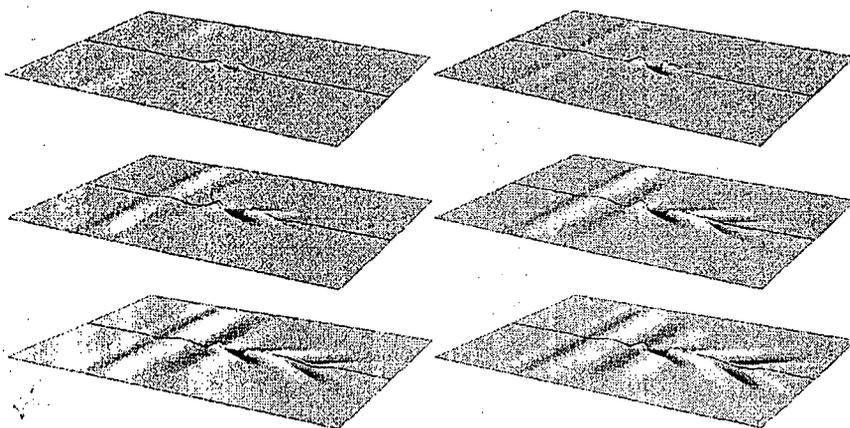


Figura 5.55: Imágenes de la evolución de la ola regular generada (a).

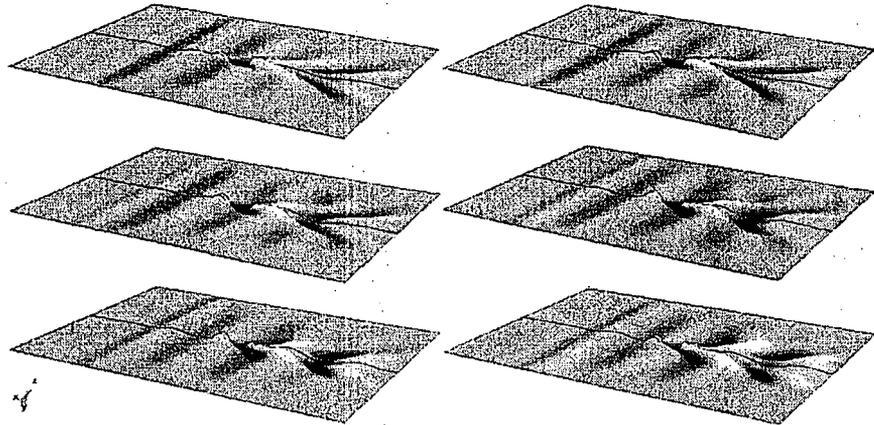


Figura 5.56: Imágenes de la evolución de la ola regular generada (b).

#### 5.4.6 Ejemplo 6

El siguiente ejemplo corresponde al análisis del comportamiento de una pala de timón de un velero de competición. Esta geometría pertenece a la empresa Nautatec S.L., presentándose aquí sólo parte de los análisis llevados a cabo y reservando las conclusiones por razones de confidencialidad. En los diferentes análisis llevados a cabo, considerando varias combinaciones de escora y deriva y diversas velocidades de avance, se utilizaron mallas entre 180.000 y 400.000 tetraedros lineales. En todos los análisis se impuso sobre el timón una condición de tracción dada por la ley de pared logarítmica, a la vez que se incluía un modelo de turbulencia de Smagorinsky. En la figura 5.57 se puede ver la definición *CAD* de uno de los análisis llevados a cabo, mostrando en la figura 5.58 la malla superficial correspondiente. En ella, se ha practicado un corte oblicuo con el objeto de poder ver el interior de la malla.

A continuación se muestran diversos resultados del análisis. En la figura 5.59 se muestran los contornos de velocidad (componente horizontal) sobre el timón, en las caras de presión (izquierda) y de succión (derecha). Por otra parte en la figura 5.60 pueden verse los contornos de presión sobre la pala del timón, correspondientes a la cara de presión (izquierda) y de succión (derecha). Por último, en la figura 5.61 se presentan los contornos de velocidad (componente vertical). En esta figura se ha practicado un corte oblicuo, sobre el que se proyecta la misma componente.

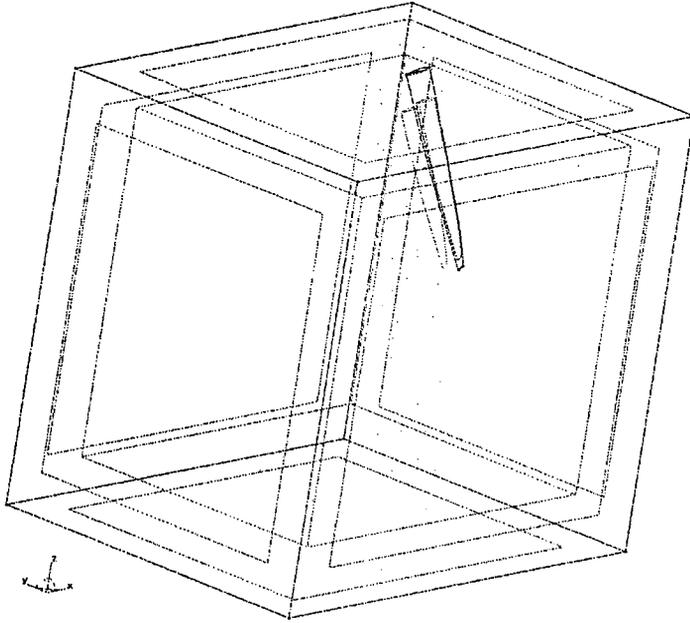


Figura 5.57: Definición *CAD* de un timón perteneciente a un velero de competición.

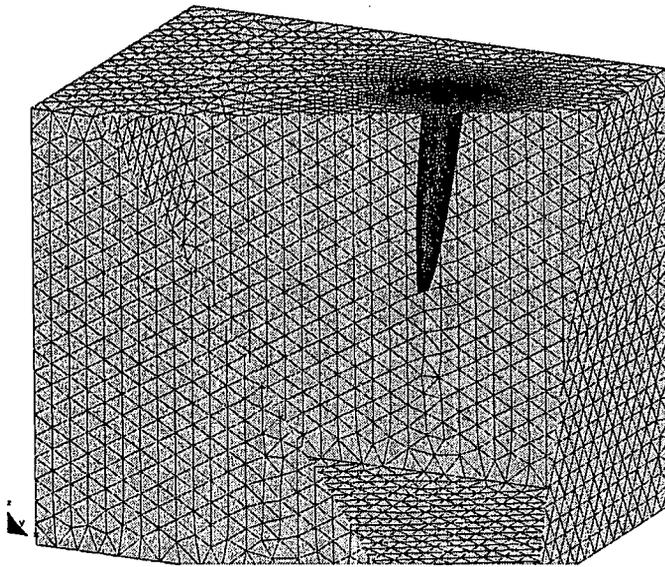


Figura 5.58: Malla utilizada en el análisis de un timón.

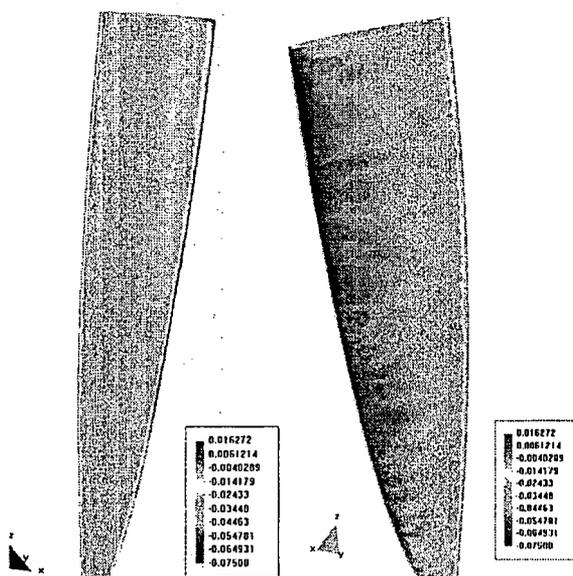


Figura 5.59: Contornos de velocidad (componente horizontal) sobre el timón, en las caras de presión (izquierda) y de succión (derecha).

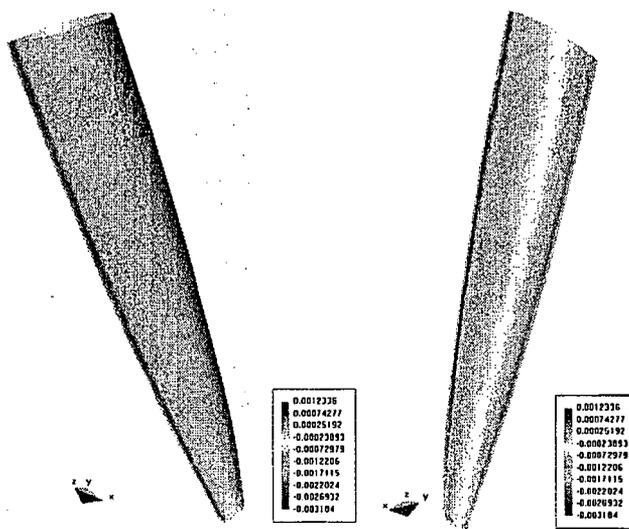


Figura 5.60: Contornos de presión sobre la pala de un timón, correspondientes a la cara de presión (izquierda) y de succión (derecha).

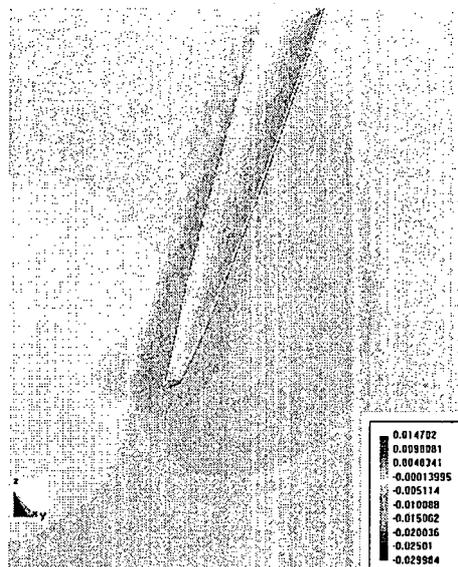


Figura 5.61: Contornos de velocidad (componente vertical) sobre la pala de un timón. Adicionalmente se presentan los mismos contornos sobre un plano de corte oblicuo.

### 5.4.7 Ejemplo 7

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación poco clásico en el diseño naval, pero no por ello de poco interés. Se trata del análisis del comportamiento aerodinámico del sistema formado por un conjunto vélico de génova y mayor correspondiente a un velero de competición. La definición geométrica (*CAD*) del problema se presenta en la figura 5.62. La geometría pertenece a la empresa Toni Tió Velas y las conclusiones del análisis no son presentadas aquí por razones de confidencialidad.

Las condiciones de contorno que se han aplicado al problema han sido de velocidad normal nula en todos los contornos del dominio, excepto en la superficie de entrada (prescripción de velocidad fija a  $v_\infty = 15Kn$ ) y en la salida que se dejó libre. El problema se analizó con las características físicas del aire ( $R_n \simeq 5 \cdot 10^5$ ), utilizando el modelo de turbulencia de Smagorinsky. Sobre las velas se impuso la tracción dada por la ley de pared logarítmica extendida. La malla utilizada en el análisis puede verse en la figura 5.63. Esta malla consta de 188007 elementos tetraédricos lineales y 35324 nodos.

En la figura 5.64 puede verse la distribución de la presión sobre las velas en la situación cuasi estacionaria encontrada. En esta figura puede observarse claramente el efecto de acoplamiento de las dos velas.

En la figura 5.65 se presenta un trazado de líneas de corriente en este mis-

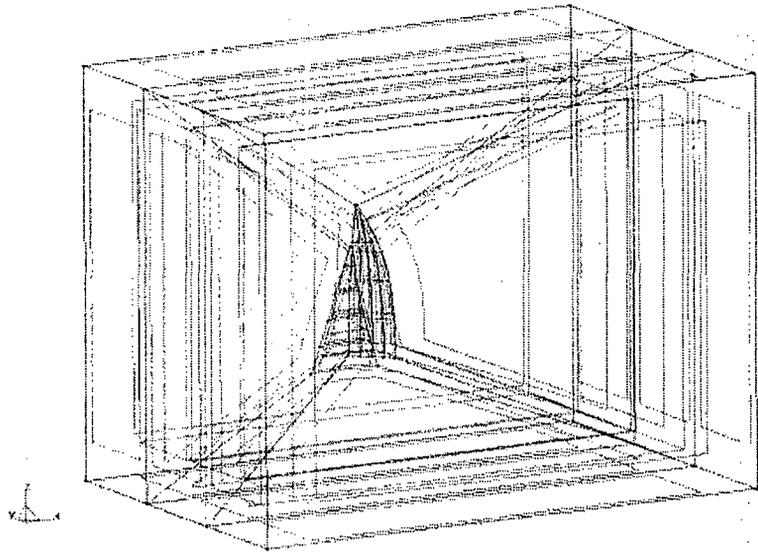


Figura 5.62: Definición geométrica del problema de análisis fluidodinámico del sistema compuesto por unas velas góndola y mayor.

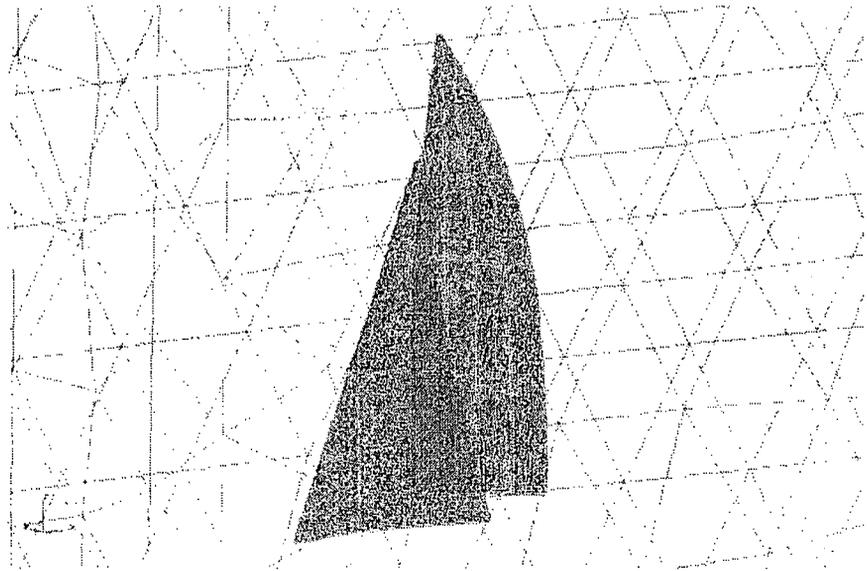


Figura 5.63: Detalle de la malla utilizada en el análisis de las velas góndola y mayor.

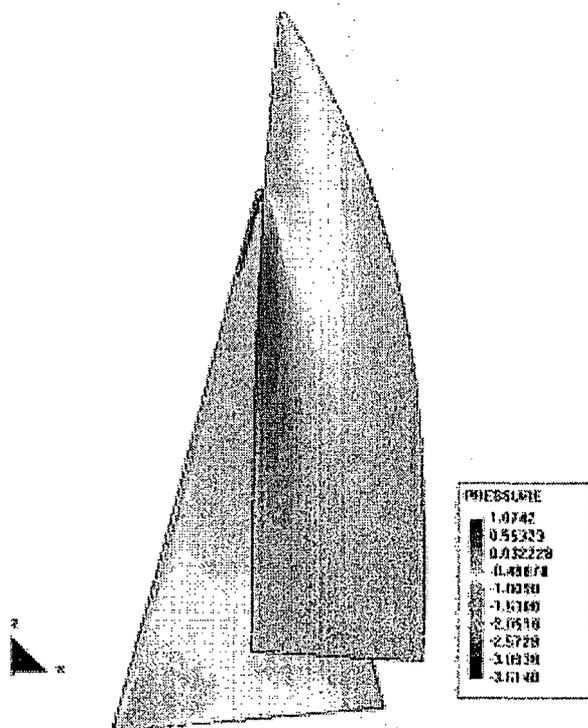


Figura 5.64: Distribución de presión sobre las velas. Vista lateral.

mo problema, permitiendo observar la perturbación en el flujo que producen. Por último, en la figura 5.66 se presenta una vista frontal de las velas, sobre la que se ha dibujado la distribución de velocidad (componente según  $Ox$ ).

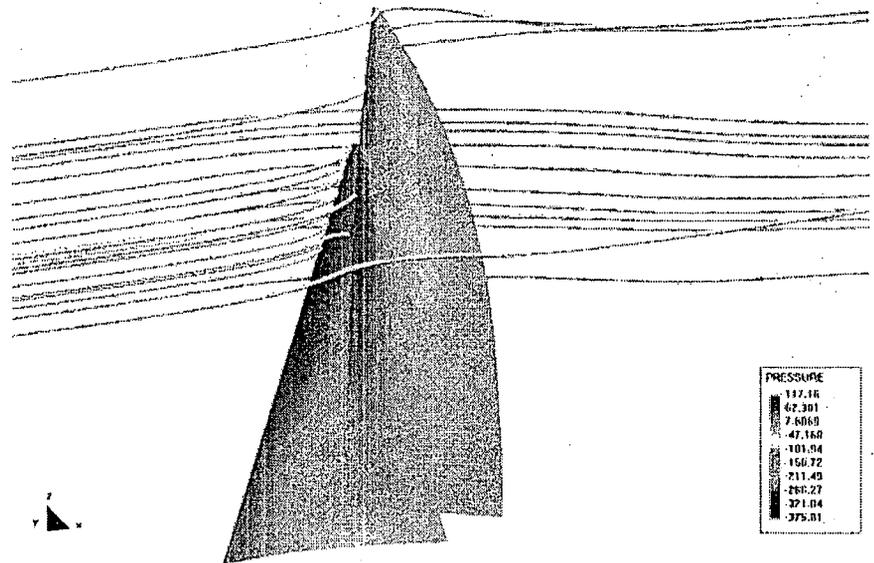


Figura 5.65: Trazado de líneas de corriente en el análisis de las velas génova y mayor. Vista lateral.

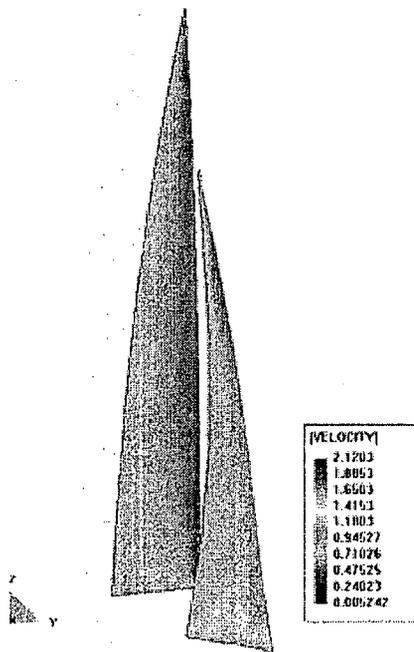


Figura 5.66: Distribución de la velocidad (componente según  $Ox$ ) sobre las velas. Vista frontal.