

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

*Departament de Matemàtica Aplicada I*

**COMPLEJIDAD DE ESTRUCTURAS  
GEOMÉTRICAS Y COMBINATORIAS**

Autor: Maria del Carmen Hernando Martín

Directores: Ferran Hurtado Díaz

Marc Noy Serrano

1999

# Capítulo 4

## Grafos de árboles geométricos de nubes de puntos

### 4.1 Introducción

Dado un grafo conexo  $G$ , el grafo de árboles  $T(G)$  se define como el grafo que tiene por vértices los árboles generadores de  $G$ , y una arista de  $T(G)$  une dos árboles  $T_1$  y  $T_2$  si existen aristas  $e$  y  $f$  de  $G$  tales que  $T_2 = T_1 - e + f$  (véase figura 4.1). Los grafos de árboles han sido ampliamente estudiados. Concretamente, es sabido que verifican una serie de importantes propiedades, como ser hamiltonianos [8], [35] y tener conectividad máxima [51]. Recientemente V. Estevill-Castro, M. Noy y J. Urrutia han obtenido resultados adicionales sobre grafos de árboles (véase [12]).

Aquí consideramos la versión geométrica del problema. Dado un conjunto  $P$  de puntos en el plano, sea  $\mathcal{T}(P)$  el conjunto de árboles generadores sin cortes que generan  $P$  (esto es, las aristas son segmentos rectilíneos y no se cortan). Definimos el *grafo de árboles geométrico*  $T(P)$  como el grafo que tiene como conjunto de vértices a  $\mathcal{T}(P)$  y las mismas adyacencias que en los grafos de árboles combinatorios, esto es, dos árboles generadores sin cortes  $T_1$  y  $T_2$  son adyacentes si  $T_2 = T_1 - e + f$ . Los grafos de árboles geométricos han aparecido previamente en

el trabajo de D. Avis y K. Fukuda [1] como herramienta para enumerar árboles generadores. En [1] se demuestra que  $T(P)$  es conexo, para cualquier conjunto de puntos  $P$  en posición general, y tiene diámetro acotado por  $2n - 4$  si  $n = |P|$ .

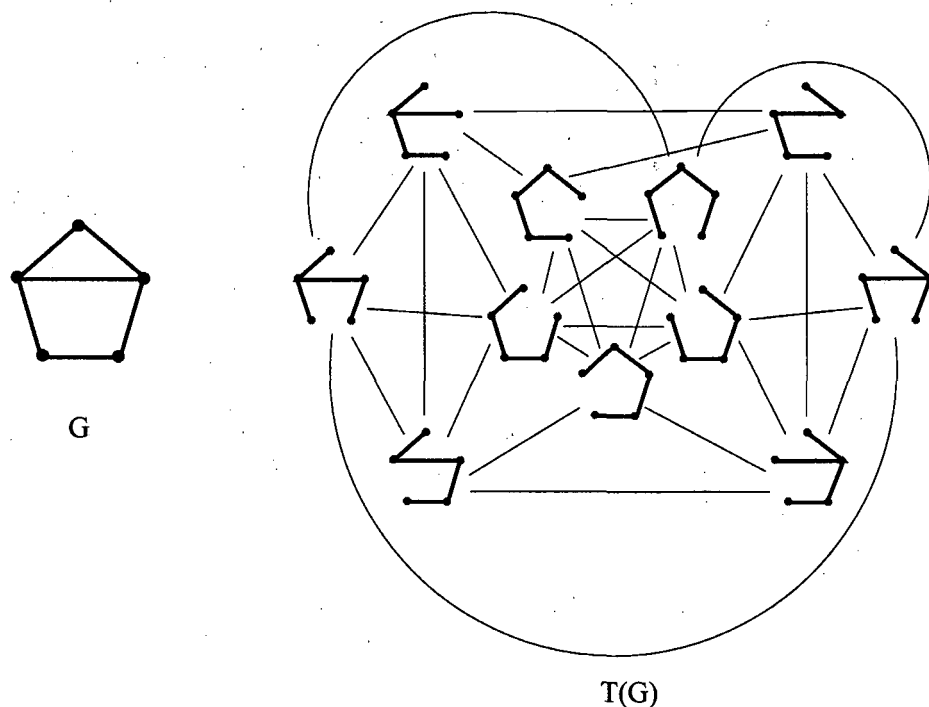


Figura 4.1: Grafo de árboles  $T(G)$ .

En este capítulo nos concentramos en las propiedades combinatorias de los grafos  $T(P)$  en el caso en que  $P$  es un conjunto de puntos en posición convexa. Para todo  $n \geq 2$ , denotamos por  $G_n$  al grafo de árboles geométrico de un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa.

Este capítulo está organizado como sigue. En el apartado 4.2 se dan definiciones y resultados previos. En los apartados 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 centramos nuestra atención en propiedades del grafo  $G_n$  como son: el máximo y el mínimo grado de  $G_n$ , el centro, una cota inferior no trivial del diámetro y el grupo de automorfismos. En el apartado 4.8 demostramos que  $G_n$  es hamiltoniano y en el apartado 4.9 comproba-

mos que la vértice-conectividad de  $G_n$  es igual al grado mínimo. La principal herramienta utilizada para demostrar estos dos últimos resultados es una construcción recursiva de los grafos  $G_n$  en la cual cada árbol  $T$  en  $G_n$  da lugar a  $\binom{d+2}{2}$  árboles diferentes en  $G_{n+1}$ , siendo  $d$  el grado del  $n$ -ésimo vértice en  $T$ . Dicha construcción la presentamos en el apartado 4.7. Este tipo de construcción se ha utilizado anteriormente para resolver problemas similares para grafos de triangulaciones en vez de grafos de árboles [39].

En el apartado 4.10 estudiamos el árbol dual de un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$ , así como el grafo  $G_n^*$  de estos árboles duales que verifica las mismas propiedades combinatorias que hemos demostrado para  $G_n$ .

En los siguientes apartados se dan diferentes generalizaciones de lo estudiado en los apartados anteriores. En el apartado 4.11 se estudia la posibilidad de hacer varios intercambios simultáneos en árboles de  $\mathcal{T}_n$ . Con ello hemos conseguido reducir el diámetro a  $O(\log n)$ .

En los apartados 4.12 y 4.13, tomando como referencia el modelo convexo, se estudian los grafos de árboles geométricos cuando el conjunto de puntos está en posición general.

Acabamos el capítulo presentando en la sección 4.14 algunos resultados del grafo de hojas, grafo estrechamente relacionado con  $T(P_n)$  y una lista de problemas abiertos en el apartado 4.15.

## 4.2 Definiciones y resultados previos

### 4.2.1 Grafos de árboles geométricos

Sea  $P = \{1, \dots, n\}$  un conjunto de puntos en el plano, no tres de ellos alineados. Un *árbol generador sin cortes* de  $P$  es un árbol generador de  $P$  cuyas aristas son segmentos rectilíneos y no se cortan. Denotamos  $\mathcal{T}(P)$  al conjunto de árboles generadores sin cortes de  $P$ .

Dos árboles  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(P)$  tales que existen aristas  $e_1 \in T_1 \setminus T_2$  y  $e_2 \in T_2 \setminus T_1$  de forma que  $T_2 = T_1 + e_2 - e_1$ , diremos que son *adyacentes* y lo notaremos como  $T_1 \sim T_2$ . Vemos un ejemplo en la figura 4.2.

El grafo de árboles geométrico  $T(P)$  de un conjunto de puntos  $P$  se define como el grafo que tiene a  $\mathcal{T}(P)$  como conjunto de vértices y  $\sim$  como adyacencias.

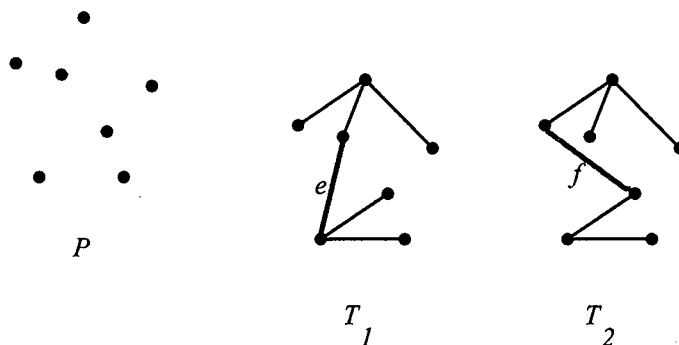
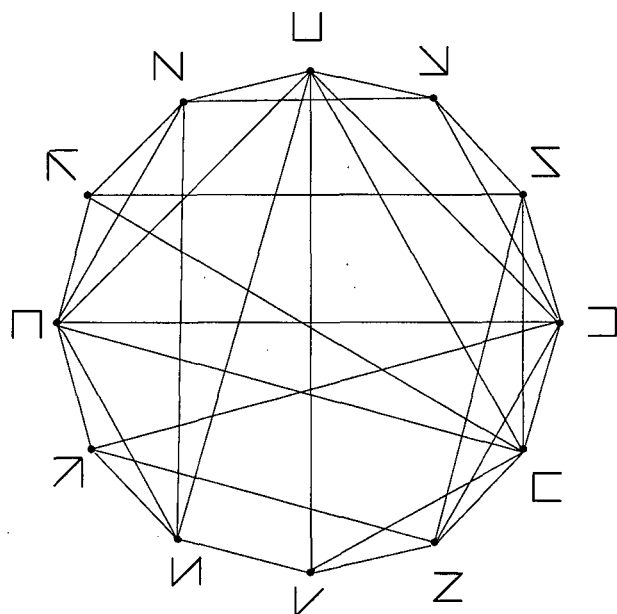


Figura 4.2: Dos árboles adyacentes en  $T(P)$ .

El objetivo principal de este capítulo es el estudio de  $T(P)$  en el caso de ser  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa.

#### 4.2.2 El grafo $G_n$

Dado que dos conjuntos de puntos, ambos en posición convexa, son equivalentes con respecto a sus árboles generadores sin cortes, todo conjunto de  $n$  puntos en posición convexa tiene el mismo grafo de árboles geométricos, el cual denotamos por  $G_n$ . Sin pérdida de generalidad, podemos trabajar suponiendo que el conjunto de puntos es el conjunto de vértices de un polígono regular, el cual notaremos como  $P_n$ . Podemos suponer que 1 es el vértice con coordenada  $x$  menor. Los otros puntos los ordenamos en sentido antihorario a partir de 1. Denotamos  $\mathcal{T}_n$  el conjunto de árboles generadores sin cortes de  $P_n$ , esto es, al conjunto de vértices del grafo  $G_n$ . En la figura 4.3 vemos el grafo  $G_4$ . Observamos que es un grafo conexo y hamiltoniano, pero no es regular, concretamente hay nodos con grados 4, 5 y 7.

Figura 4.3: El grafo  $G_4$ .

Veremos una serie de propiedades de  $G_n$  que evidencian que es un objeto combinatorio interesante en sí mismo. Damos aquí una lista de los resultados previos que se tienen sobre estos grafos.

- i) Como ya hemos mencionado antes, sabemos que  $G_n$  es conexo y que su diámetro está acotado por  $2n - 4$ .
- ii) También es conocido (véase [9], [55]) que el número de vértices de  $G_n$  es  $t_n = \frac{1}{2n-1} \binom{3n-3}{n-1}$ , y que cualquier grafo de árboles geométrico de un conjunto de  $n$  puntos tiene al menos este número de vértices [13].
- iii) Usando resultados de [12], se pueden obtener cotas ajustadas para el número cromático de  $G_n$ . Concretamente, éste es  $\Theta(n^2)$ .

Finalmente, resaltamos una propiedad que se utilizará en varias de las demostraciones siguientes.

**Lema 4.1** *Todo árbol  $T \in \mathcal{T}_n, n \leq 3$  tiene al menos dos hojas en la frontera de  $P_n$ , esto es, dos hojas de la forma  $(i, i+1)$ , donde los vértices están dados módulo  $n$ .*

*Demostración.* Hacemos la demostración por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 3$  es obvio. Sea  $T \in \mathcal{T}_n, n > 3$ . Si todas las aristas de  $T$  están sobre la frontera de  $P_n$  entonces se verifica el enunciado. Sea  $e$  una arista de  $T$  que no está en la frontera de  $P_n$ , entonces  $e$  divide  $T$  en dos árboles  $T_1$  y  $T_2$ , ambos incluyendo la arista  $e$ . Se verifica  $T_1 \in \mathcal{T}_{n_1}$  y  $T_2 \in \mathcal{T}_{n_2}$  con  $n_1 + n_2 = n + 1$  y  $n_1 > 1, n_2 > 1$ . Así pues, por inducción,  $T_1$  y  $T_2$  tienen, cada uno, al menos dos hojas en la frontera. En ambos casos, una de las hojas de la frontera podría ser  $e$ , pero en cualquier caso las restantes hojas de  $T_1$  y de  $T_2$  que están en la frontera son hojas de  $T$  que están sobre la frontera de  $P_n$ , lo cual concluye la demostración.  $\square$

### 4.3 Grado mínimo y máximo de $G_n$

En este apartado vemos que el grado de  $G_n$  no sólo varía de un vértice a otro sino que además la variación puede ser muy significativa. Hay vértices con grado lineal (en  $n$ ) y los hay que llegan a tener grado de orden cúbico. Empezaremos estudiando aquéllos que tienen el grado mínimo.

Existen unos árboles de estructura especialmente sencilla llamados *estrellas*: la estrella  $S_i$  se obtiene uniendo todos los vértices al vértice  $i$ . Observamos que para  $n = 2, 3$  todos los árboles son estrellas. Vamos a ver que el grado mínimo de  $G_n$  es  $2n - 4$  y que sólo lo alcanzan las estrellas.

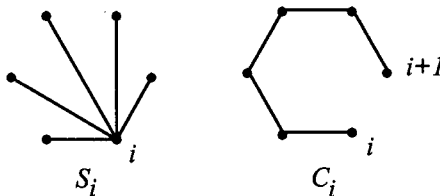


Figura 4.4: La estrella  $S_i$  y la cadena  $C_i$ .

Para obtener un árbol de  $\mathcal{T}_n$  adyacente a una estrella  $S_i$  sólo podemos añadir una arista de la envolvente convexa de  $P_n$  que no aparezca en  $S_i$ . Aristas de este tipo hay  $n - 2$ . Una vez hemos elegido una arista  $(k, k + 1)$  de entre las anteriores, en el ciclo que aparece en  $S_i + (k, k + 1)$  sólo podemos elegir quitar la arista  $(i, k)$  o la arista  $(i, k + 1)$ . Así concluimos que el conjunto de vecinos de la estrella  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) en  $G_n$  es:

$$\{S_i + (k, k + 1) - (k, i) \mid 1 \leq k \leq n, k \neq i, i - 1\} \cup$$

$$\{S_i + (k, k + 1) - (k + 1, i) \mid 1 \leq k \leq n, k \neq i, i - 1\},$$

así pues  $d_{G_n}(S_i) = 2(n - 2)$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

**Proposición 4.1**  $\delta(G_n) = 2(n - 2)$ .

*Demostración.* Hacemos la demostración por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 3$ ,  $G_3 = K_3$ . Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  y sea  $(i, i + 1)$  una hoja de  $T$ , con  $d_T(i) = 1$ . Consideramos el árbol  $T_* = T - (i, i + 1) \in \mathcal{T}_{n-1}$ . Por hipótesis de inducción el grado de  $T_*$  en  $G_{n-1}$  es al menos  $2(n - 3)$ . Si  $T'_*$  es adyacente a  $T_*$  en  $G_{n-1}$  entonces  $T'_* + (i, i + 1)$  es adyacente a  $T$  en  $G_n$ . Por otra parte, consideramos  $\mathcal{C}$  el ciclo que se crea en el grafo plano resultante al añadir la arista  $(i - 1, i)$  al árbol  $T$ . Para toda arista  $e \neq (i - 1, i)$  del ciclo  $\mathcal{C}$  se verifica que los árboles de la forma:

$$T_e = T + (i - 1, i) - e$$

son vecinos de  $T$ , y son diferentes de los considerados anteriormente. Existen  $\ell - 1$  vecinos de este tipo, siendo  $\ell$  la longitud del camino  $\mathcal{C}$ . De donde concluimos:

$$d_{G_n}(T) \geq 2(n - 3) + 2 = 2(n - 2).$$

□

**Proposición 4.2**  $d_{G_n}(T) = 2(n - 2) \iff T$  es una estrella.



*Demostración.* Ya hemos visto que las estrellas tienen el grado que aquí afirmamos. Probamos la otra implicación por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 3$  todos los árboles son estrellas y tienen grado 2. Consideramos  $T \in \mathcal{T}_n$  y sea  $(i, i + 1)$  una hoja de  $T$ , con  $d_T(i) = 1$ . Consideramos el árbol  $T_* = T - (i, i + 1) \in \mathcal{T}_{n-1}$ . Hemos visto en la demostración anterior que

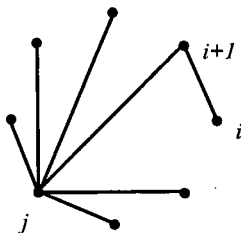
$$d_{G_n}(T) \geq d_{G_{n-1}}(T_*) + 2.$$

Luego  $d_{G_n}(T) = 2(n - 2)$  si y sólo si:

- i)  $d_{G_{n-1}}(T_*) = 2(n - 3)$ .
- ii) Cuando añadimos  $(i, i + 1)$ ,  $T$  tiene sólo dos vecinos que no provienen de añadir  $(i, i + 1)$  a  $T_*$ .

Si se verifica i) entonces  $T_*$  es una estrella de  $G_{n-1}$ . Hay dos posibilidades.

- 1)  $T_*$  es una estrella en  $i + 1$ . En este caso  $T$  es una estrella en  $i + 1$ .
- 2)  $T_*$  es una estrella en  $j \neq i + 1$ . En este caso  $T$  no es una estrella.



**Figura 4.5:** Hipótesis de trabajo.

En este caso, además de los  $2(n - 3)$  vecinos de  $T$  del tipo  $W + (i, i + 1)$ , siendo  $W$  un vecino de  $T_*$ , tenemos al menos los siguientes árboles adyacentes a  $T$  (véase figura 4.5):

$$T + (i - 1, i) - (i, i + 1)$$

$$T + (i - 1, i) - (i + 1, j)$$

$$T + (i - 1, i) - (i - 1, j)$$

De donde concluimos que  $d_{G_n}(T) > 2(n - 2)$ . □

Otros árboles especiales son las *cadena*s: llamamos cadena  $C_i$  al árbol que tiene por aristas los lados de  $P_n$  menos el lado  $(i, i+1)$ . Los vértices están dados módulo  $n$  (véase figura 4.4). De forma similar a como hemos demostrado la proposición anterior, probamos el siguiente resultado sobre el grado máximo de  $G_n$ .

**Proposición 4.3**  $\Delta(G_n) = \binom{n+1}{3} - (n-1)$  y sólo las cadenas alcanzan este grado.

*Demostración.* Hacemos la demostración por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 3$ ,  $G_3 = K_3$ . Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  y sea  $(i, i+1)$  una hoja de  $T$ , con  $d_T(i) = 1$ . Consideramos el árbol  $T_* = T - (i, i+1) \in \mathcal{T}_{n-1}$ . Por hipótesis de inducción el grado de  $T_*$  en  $G_{n-1}$  es a lo sumo  $\binom{n}{3} - (n-2)$ . Observamos que si  $T'_*$  es adyacente a  $T_*$  en  $G_{n-1}$  entonces  $T'_* + (i, i+1)$  es adyacente a  $T$  en  $G_n$ . Además  $T$  tiene otros vecinos: todos los que se formen añadiéndole a  $T$  una arista adyacente a  $i$  y quitando una arista del ciclo que se ha formado. Sea  $k_T$  el número de vecinos de  $T$  obtenidos de esta última forma. Entonces se verifica:

$$d_{G_n}(T) \leq \binom{n}{3} - (n-2) + k_T.$$

Es fácil ver que el árbol que maximiza  $k_T$  es la cadena  $C_i$ , siendo

$$k_{C_i} = \binom{n}{2} - 1.$$

Además, si  $T = C_i$  entonces  $T_*$  es una cadena de  $G_{n-1}$ . Así pues, el grado máximo de  $G_n$  es el grado de las cadenas y éste es, por inducción:

$$d_{G_n}(T) = \binom{n}{3} - (n-2) + \binom{n}{2} - 1 = \binom{n+1}{3} - (n-1).$$

□

A la vista de los resultados anteriores, una pregunta natural es la siguiente: Dado un número natural  $d$  comprendido entre  $\delta(G_n)$  y  $\Delta(G_n)$ , ¿existe siempre algún árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  tal que el grado de  $G_n$  en  $T$  sea  $d$ ? Basta observar la figura 4.3 para dar una respuesta negativa. Concretamente  $\delta(G_4) = 4$  y  $\Delta(G_4) = 7$  y no existe ningún árbol  $T \in \mathcal{T}_4$  con grado 6 en  $G_4$ .

## 4.4 Centro y radio de $G_n$

Continuamos en esta sección el estudio de propiedades del grafo  $G_n$ . En la sección anterior hemos introducido dos tipos de árboles, llamados *estrellas* y *cadenas*, que tenían, respectivamente, el grado mínimo y máximo de  $G_n$ . El siguiente teorema muestra que las estrellas y las cadenas juegan un papel muy especial en el grafo  $G_n$ .

La *distancia* en  $G_n$  entre dos árboles de  $\mathcal{T}_n$  es el mínimo número de intercambios de aristas que hay que realizar en uno de los árboles para obtener el otro, imponiendo que el árbol resultante de cada cambio ha de ser siempre un árbol sin cortes. La máxima distancia entre  $T \in \mathcal{T}_n$  y cualquier otro árbol de  $\mathcal{T}_n$  se llama *excentricidad* de  $T$ . Siendo el *centro* de un grafo el conjunto de vértices que tienen excentricidad mínima y llamando *radio* a dicha excentricidad, demostramos que el radio de  $G_n$  es  $n - 2$  y que el conjunto de las estrellas y las cadenas están en el centro de  $G_n$ .

**Lema 4.2** *No existe ningún árbol de  $\mathcal{T}_n$  con dos aristas en común con cualquier otro árbol de  $\mathcal{T}_n$ .*

*Demostración.* Hacemos la demostración por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 3$  es obvio que se verifica el enunciado. Suponemos que el enunciado es cierto para  $n - 1$ . Sea  $T \in \mathcal{T}_n$ . Sea  $i$  una hoja de  $T$  tal que la arista incidente a  $i$  en  $T$  está sobre la frontera. Suponemos  $(i, i + 1) \in T$  (análogamente si es  $(i - 1, i) \in T$ ). Consideramos  $T^* = T - (i, i + 1) \in \mathcal{T}_{n-1}$ . Por hipótesis de inducción, existe algún árbol  $U \in \mathcal{T}_{n-1}$  tal que  $T^*$  y  $U$  tienen a lo sumo una arista común. Basta considerar  $T' = U + (i, i - 1) \in \mathcal{T}_n$ . Entonces  $T'$  y  $T$  tienen a lo sumo una arista común.  $\square$

**Corolario 4.1** *Para todo  $T \in \mathcal{T}_n$  se verifica:  $e(T) \geq n - 2$ .*

Fácilmente se demuestran las siguientes propiedades de las estrellas y cadenas.

**Lema 4.3** Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  y sea  $d_i$  el grado de  $i$  en  $T$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Entonces  $d(T, S_i) = n - 1 - d_i$ .

Notamos  $ch(T)$  al número de aristas de  $T$  en la frontera de  $P_n$ .

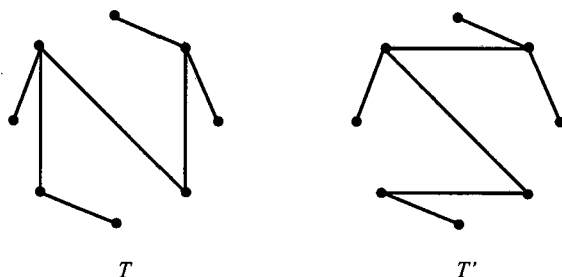
**Lema 4.4** Sea  $T \in \mathcal{T}_n$ . Entonces:

$$d(T, C_i) = \begin{cases} n - ch(T) & \text{si } (i, i+1) \in T \\ n - 1 - ch(T) & \text{si } (i, i+1) \notin T. \end{cases}$$

Por el lema 4.3 es obvio que la excentricidad de las estrellas es igual a  $n - 2$  ya que todo árbol tiene, al menos, una arista en común con cualquier estrella. Como todo árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  tiene dos aristas en la frontera de  $P_n$ , es inmediato que la excentricidad de las cadenas es también  $n - 2$ . De donde concluimos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1** El radio de  $G_n$  es  $n - 2$  y, para todo  $p$ ,  $C_p$  y  $S_p$  están contenidas en el centro.

**Observación 4.1** Con lo expuesto en el lema 4.3 y el lema 4.4 vemos que las distancias de cualquier árbol  $T$  a las estrellas y cadenas están muy definidas. Podría pensarse que estas distancias determinan dicho árbol  $T$ . Esto no es así, es más, la sucesión de grados de un árbol  $T$  en los vértices y el conjunto de aristas de  $T$  que están en la frontera de  $P_n$  no determinan un árbol generador sin cortes. Esto es, pueden existir árboles diferentes con igual sucesión de grados en los vértices y con las mismas aristas en la frontera de  $P_n$ . Vemos un ejemplo en la figura 4.6.



**Figura 4.6:**  $ch(T) = ch(T')$ ,  $d_T(i) = d_{T'}(i) \forall i$ .

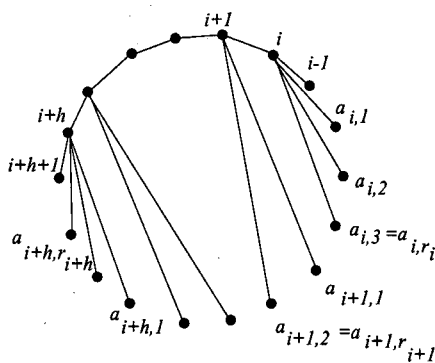
Finalmente, vamos a determinar qué tipo de árboles, además de las estrellas y cadenas, están en el centro de  $G_n$ .

Llamaremos *cepillos* a los árboles cuyas aristas sobre la frontera de  $P_n$  son todas consecutivas. En particular, se deduce que el resto de sus aristas son todas incidentes en vértices de grado 1. Vemos un ejemplo en la figura 4.7. Las estrellas y cadenas son casos particulares de cepillos. Vamos a ver que la excentricidad de este tipo de árboles es el radio de  $G_n$  y, por lo tanto, son elementos del centro.

Para ello vamos a ver primero que cualquier árbol de  $G_n$  comparte al menos una arista con cualquier cepillo.

**Lema 4.5** *Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  y  $P \in \mathcal{T}_n$  un cepillo. Entonces  $T$  y  $P$  tienen al menos una arista en común.*

*Demostración.* Sea  $h + 2$  ( $h \geq 0$ ) el número de aristas en la frontera que tiene  $P$ . Sean  $(i - 1, i), \dots, (i + h, i + h + 1)$  dichas aristas y ordenamos los vértices en los que inciden las aristas de  $P$  que no están sobre la frontera tal como se indica en la figura 4.7.



**Figura 4.7:** Ordenación de las aristas del cepillo.

Supongamos que existe un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  que no comparte ninguna arista con  $P$ . Con las notaciones de la figura 4.7, empezamos estudiando qué tipo de aristas pueden ser incidentes a  $i$  en  $T$ . No pueden serlo ninguna de las aristas de  $P$  incidentes en  $i$ . Tampoco pueden serlo las aristas del tipo  $(i, j)$  con  $i + 2 \leq j \leq i + h + 1$ , pues en este caso  $T$  tendría una arista en la frontera en común con  $P$ . Así pues,  $i$  tiene que ser vecino en  $T$  de algún vértice  $a_{i+m,k}$  con  $2 \leq m \leq h$ ,

$1 \leq k \leq r_{i+m}$ . Repetimos el estudio, ahora con el v\u00e9rtice  $i + m$ . Por un razonamiento an\u00e1logo, y puesto que no hay aristas que se corten en  $T$ ,  $i + m$  tiene que ser vecino en  $T$  de alg\u00fan v\u00e9rtice del tipo  $a_{i+m_2, k_2}$  con  $m + 1 \leq m_2 \leq h$ ,  $1 \leq k_2 \leq r_{i+m_2}$ .

De esta forma ir\u00edamos obteniendo una sucesi\u00f3n  $m = m_1, m_2, \dots$  estrictamente creciente. Llegar\u00e1 un momento en que  $m_t = h$ , pero entonces las \u00fanicas aristas incidentes en  $i + h$  en  $T$  son, o bien alguna arista de las que aparecen en  $P$  (contradiciendo lo que supon\u00edamos) o bien alguna arista  $(j, i + h)$  con  $i + m_{t-1} \leq j \leq i + h$ , en cuyo caso  $P$  y  $T$  compartir\u00edan alguna arista de la frontera (contradiciendo tambi\u00e9n la hip\u00f3tesis de partida). As\u00ed pues,  $P$  y  $T$  tienen al menos una arista en com\u00fan.  $\square$

**Teorema 4.2** Si  $T \in \mathcal{T}_n$  es un cepillo entonces  $e(T) = n - 2$ .

*Demostraci\u00f3n.* Vamos a mostrar c\u00f3mo ir de un \u00e1rbol cualquiera  $T$  a un cepillo  $P$ , de forma que en cada paso podemos introducir una arista de  $P$  en  $T$ .

En un primer estadio, introducimos las aristas de  $P$  que est\u00e1n sobre  $CH(P_n)$  y que no sean aristas de  $T$ . De esta forma, ganando una arista en cada paso, obtenemos un \u00e1rbol intermedio  $T'$  que tiene todas las aristas que  $P$  y  $T$  tienen sobre  $CH(P_n)$ .

Pasamos ahora a encargarnos de las aristas de  $P$  que no son de  $CH(P_n)$ . Las tenemos ordenadas, tal como muestra la figura 4.8.

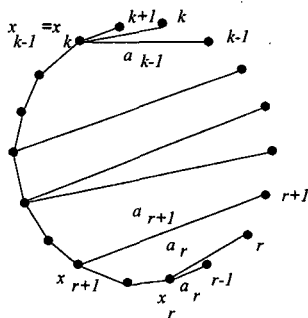


Figura 4.8: Orden de las hojas del cepillo  $P$ .

Notamos  $a_i$  la arista de  $P$  incidente en  $i$ , con  $r \leq i \leq k \pmod{n}$ .

Notamos  $x_i$  el otro extremo de  $a_i$ . Introducimos en  $T'$  las aristas  $a_r, a_{r+1}, \dots, a_\ell$  hasta donde podamos, de una en una. De igual forma introducimos  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_h$  hasta donde se pueda de una en una, obteniendo un árbol  $T''$ . Si de esta forma hemos conseguido introducir todas las aristas de  $P$  ya hemos concluido la demostración. Supongamos que no, esto es, que intentamos poner la arista  $a_{\ell+1}$  y no se puede. Esto quiere decir que existen aristas de  $T''$  que intersecan la arista  $a_{\ell+1}$ . La situación se ilustra en la siguiente figura.

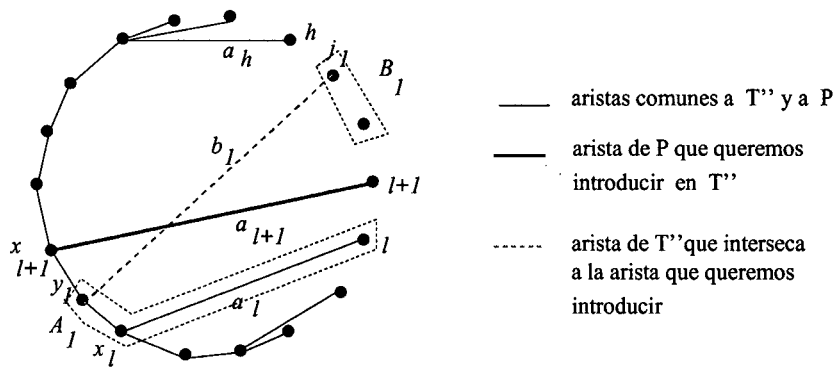


Figura 4.9: No podemos introducir en  $T''$  la arista  $a_{l+1}$  de  $P$ .

Un extremo de la arista  $a_{\ell+1}$  es  $\ell + 1$ , el otro es  $x_{\ell+1}$ . Desplazándonos desde  $x_{\ell+1}$  por la arista  $a_{\ell+1}$ , llegamos a  $b_1$  la primera arista de  $T''$  que corta  $a_{\ell+1}$ .

Notamos  $A_1$  y  $B_1$  los siguientes conjuntos de vértices:

$$A_1 = \{i \mid x_{\ell+1} < i < x_\ell \pmod{n}\} \cup \{\ell\}$$

$$B_1 = \{j \mid \ell + 1 < j < h \pmod{n}\}$$

Como en  $T''$  no puede haber ciclos,  $b_1$  tiene que tener un extremo en  $A$  y otro en  $B$ . Notamos  $j_1 \in B, y_1 \in A$  los extremos de  $b_1$ . Consideramos ahora  $a_{j_1}$  la arista de  $P$  incidente en  $j_1$ . Si podemos introducir en  $T''$  la arista  $a_{j_1}$  lo hacemos y repetiríamos un proceso análogo para introducir las aristas  $a_{j_1+1}, \dots, a_{h-1}$  por un lado y las aristas  $a_{\ell+1}, \dots, a_{j_1-1}$  por otro.

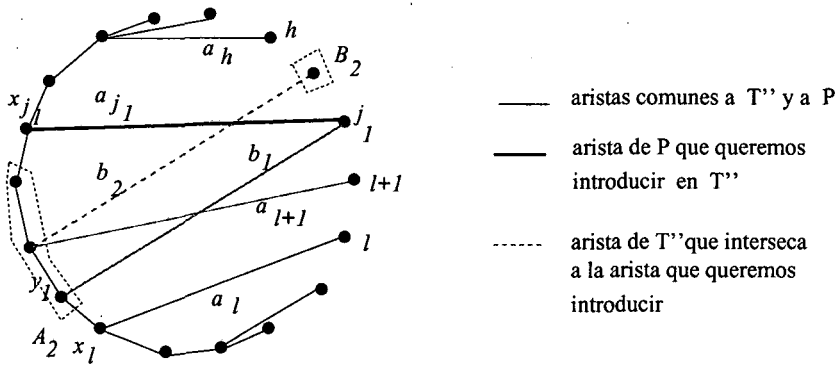
Supongamos que no se puede introducir  $a_{j_1}$  en  $T''$ . Esto quiere decir que existen aristas de  $T''$  que intersecan  $a_{j_1}$ . Volvemos pues

a repetir lo hecho anteriormente. Desplazándonos desde  $x_{j_1}$ , el otro extremo de  $a_{j_1}$ , sea  $b_2$  la primera arista de  $T''$  que interseca  $a_{j_1}$ .

Notamos:

$$A_2 = \{i \mid x_{j_1} < i \leq y_1 \pmod{n}\}$$

$$B_2 = \{j \mid j_1 + 1 < j < h \pmod{n}\}$$



**Figura 4.10:** No podemos introducir en  $T''$  la arista  $a_{j_1}$  de  $P$ .

Y así iríamos repitiendo el proceso. Observamos que  $B_2$  está incluido estrictamente en  $B_1$  y, en general,  $B_k$  lo está en  $B_r$  siempre que  $k > r$ , con lo cual el proceso no puede ser infinito y en un número finito de pasos conseguiremos introducir una arista de  $P$  en  $T''$ . Entonces volvemos a repetir el proceso en ambas partes de dicha arista. De esta forma demostramos que si  $T$  es un árbol cualquiera,  $P$  es un cepillo y  $r$  es el número de aristas comunes en  $P$  y  $T$  entonces  $d(P, T) = n - 1 - r$ . De donde concluimos que, puesto que  $r$  no puede ser cero (véase lema 4.5), la excentricidad de los cepillos es  $n - 2$ .  $\square$

El anterior resultado nos demuestra que los cepillos pertenecen al centro de  $G_n$ . El siguiente resultado nos asegura que son los únicos árboles que lo verifican.

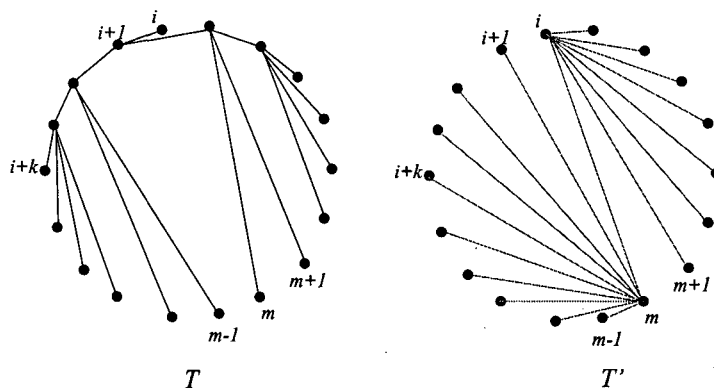
**Teorema 4.3** *Sea  $T \in \mathcal{T}_n$ . Si  $T$  no es un cepillo, entonces existe un árbol  $T' \in \mathcal{T}_n$  disjunto en aristas con  $T$ .*

*Demostración.* Hacemos la demostración por inducción sobre  $n$ . En los casos  $n = 3$  y  $n = 4$  todos los árboles son cepillos. Para  $n = 5$



se comprueba directamente que se verifica el enunciado. Suponemos cierto el enunciado para  $n - 1$ . Sea  $T \in \mathcal{T}_n$ , que no es un cepillo. Sea  $i$  una hoja de  $T$  tal que la arista de  $T$  incidente en  $i$  está sobre la frontera. Suponemos  $(i, i + 1) \in T$  (el estudio es análogo si  $(i - 1, i) \in T$ ). consideramos  $T^* = T - (i, i + 1) \in \mathcal{T}_{n-1}$ .

- Si  $T^*$  no es un cepillo, entonces –por hipótesis de inducción– existe un árbol  $U \in \mathcal{T}_{n-1}$  disjunto en aristas con  $T^*$ . Consideramos  $T' = U + (i, i - 1) \in \mathcal{T}_n$ . Entonces  $T'$  y  $T$  son disjuntos en aristas.
- Supongamos que  $T^*$  es un cepillo.
  - 1.- Si la arista  $(i + 1, i + 2) \notin T$ , entonces basta considerar  $T' = \{(i, j) \mid j \neq i + 1\} + (i + 1, i + 2)$ .
  - 2.- Si, por el contrario,  $(i + 1, i + 2) \in T$ , la situación es la que se muestra en la figura 4.11.



**Figura 4.11:**  $T^*$  es un cepillo que contiene la arista  $(i + 1, i + 2)$ .

Sea  $i + k$  el último vértice tal que existe una arista de  $T$  sobre la frontera que incide en él. Sea  $m$  el primer vértice que no es adyacente  $i + 1, i + 2, \dots, i + k$ . Consideramos entonces

$$T' = \{(m, j) \mid i \leq j \leq m - 1 \pmod{n}\} \cup$$

$$\cup \{(i, j) \mid m + 1 \leq j \leq i - 1 \pmod{n}\}. \quad \square$$

Consecuencia de estos últimos resultados es la determinación del centro de  $G_n$ .

**Teorema 4.4** *El centro de  $G_n$  está formado por los cepillos.*

### 4.5 Diámetro de $G_n$

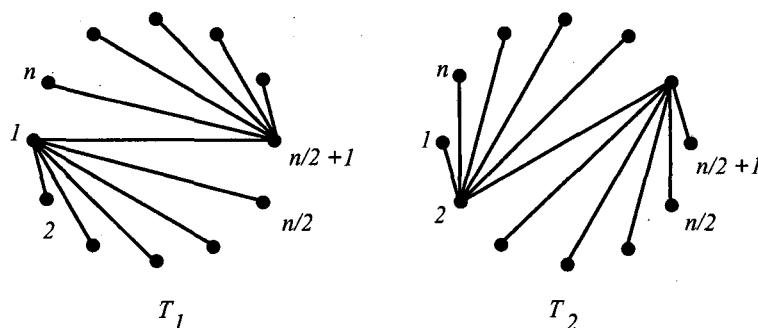
Después de estudiar el radio pasamos a analizar el diámetro, esto es, la excentricidad máxima de un árbol en  $G_n$ , o lo que es lo mismo, la distancia máxima entre dos árboles en  $G_n$ . Óbviamente el diámetro está acotado por el doble del radio. Así pues,  $2(n - 2)$  es una cota superior del diámetro de  $G_n$  y  $n - 1$  es una cota inferior trivial. Vamos a dar ahora un cota inferior más precisa.

Sea  $n$  un número par, y sean  $T_1$  y  $T_2$  (véase figura 4.12) los siguientes árboles:

$$T_1 = \{(1, k) \mid 2 \leq k \leq \frac{n}{2} + 1\} \cup \{(\frac{n}{2} + 1, k) \mid \frac{n}{2} + 2 \leq k \leq n\},$$

$$T_2 = \{(\frac{n}{2} + 2, k) \mid 3 \leq k \leq \frac{n}{2} + 1\}$$

$$\cup \{(2, k) \mid \frac{n}{2} + 2 \leq k \leq n + 1 \pmod{n}\}.$$



**Figura 4.12:** Dos árboles con  $d(T_1, T_2) = \frac{3n}{2} - 5$ .

**Teorema 4.5** *El diámetro de  $G_n$  es al menos  $\frac{3n}{2} - 5$  y  $T_1, T_2$  son un ejemplo en que se alcanza esta cota.*

*Demostración.* Una arista  $e$  de  $T_i \setminus T_j$  que realice el mínimo número de cortes en  $T_j$ , con  $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$ , corta exactamente  $n/2-1$  aristas de  $T_j$ . Para poder poner una arista de  $T_2$  en  $T_1$  (o viceversa) necesitamos hacer, al menos,  $n/2-1$  cambios. En el mejor caso necesitamos un cambio para introducir cada una de las aristas restantes de  $T_2$  que no están en  $T_1$ . Como  $T_1$  y  $T_2$  tienen en común las dos aristas sobre la frontera, obtenemos:

$$d(T_1, T_2) \geq \left(\frac{n}{2} - 1\right) + (n - 4) = \frac{3n}{2} - 5.$$

Mostramos ahora un camino entre  $T_1$  y  $T_2$  que tiene exactamente este número de nodos. Este camino es:

$$T_1 \sim T_1^* \sim \dots \sim T_{\frac{3n}{2}-5}^* = T_2$$

donde se ha notado  $T_i^*$  a los siguientes árboles:

$$T_1^* = T_1 \cup \{(2, 3)\} \setminus \{(1, 3)\},$$

$$T_2^* = T_1^* \cup \{(3, 4)\} \setminus \{(1, 4)\},$$

...

$$T_{\frac{n}{2}-2}^* = T_{\frac{n}{2}-3}^* \cup \left\{\left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\right)\right\} \setminus \left\{\left(1, \frac{n}{2}\right)\right\},$$

$$T_{\frac{n}{2}-1}^* = T_{\frac{n}{2}-2}^* \cup \{(2, n)\} \setminus \left\{\left(1, \frac{n}{2} + 1\right)\right\},$$

$$T_{\frac{n}{2}}^* = T_{\frac{n}{2}-1}^* \cup \{(2, n-1)\} \setminus \left\{\left(\frac{n}{2} + 1, n\right)\right\},$$

...

$$T_{n-4}^* = T_{n-5}^* \cup \left\{\left(2, \frac{n}{2} + 2\right)\right\} \setminus \left\{\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 3\right)\right\},$$

$$T_{n-3}^* = T_{n-4}^* \cup \left\{\left(\frac{n}{2} + 2, 3\right)\right\} \setminus \{(2, 3)\},$$

...

$$T_{\frac{3n}{2}-5}^* = T_{\frac{n}{2}-6}^* \cup \left\{\left(\frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2}\right)\right\} \setminus \left\{\left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\right)\right\} = T_2. \quad \square$$

En el ejemplo anterior la arista, no común, de uno cualquiera de los dos árboles, que produce menos cortes en el otro árbol produce

exactamente  $\frac{n}{2} - 1$  cortes. El siguiente resultado muestra que éste es el máximo mínimo número de cortes y, que, por lo tanto, la técnica del ejemplo anterior no permite mejorar la cota de  $\frac{3n}{2}$ .

**Proposición 4.4** Sean  $T, T' \in \mathcal{T}_n$  y sea  $e$  una arista de  $T' \setminus T$  que produce el mínimo número de intersecciones en  $T$ . Entonces  $e$  interseca a lo más  $\frac{n}{2} - 1$  aristas de  $T$ .

*Demostración.* Sea  $h$  el máximo número de aristas de  $T$  que corta cualquier arista de  $T'$ . Sea  $l$  una arista de  $T'$  que corta exactamente  $h$  aristas de  $T$ . Si  $h \leq \frac{n}{2} - 1$  hemos acabado. Si no, consideramos  $G_1 = T' \setminus l$ . Sea  $h_2$  el máximo número de aristas de  $T$  que corta cualquier arista de  $G_1$ . Sea  $l_2$  una arista de  $G_1$  que corta  $h_2$  aristas de  $T$  y así sucesivamente. Si existe algún  $h_k = 0$  hemos acabado. Supongamos que  $h_k > 0$ ,  $2 \leq k \leq n$ . Es posible que  $h_2 = h$ , pero es seguro que  $h_{\frac{n}{2}} < h$ , porque en este momento  $\frac{n}{2}$  vértices toman parte en el proceso. En el peor caso  $h_{\frac{n}{2}} = h - 1$  y luego  $h_{k+1} < h_k$ ,  $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ . De esta forma obtenemos  $h_n \leq h - \frac{n}{2} < \frac{n}{2}$ .  $\square$

En el camino, aún incompleto, para ajustar la cota superior del diámetro, hemos conseguido acotar la excentricidad de ciertos árboles; éstos son los resultados que completan el presente apartado.

**Proposición 4.5** Sea  $T \in \mathcal{T}_n$ . Si existe algún vértice  $i$  tal que  $d_T(i) \geq \frac{n}{2}$  o  $ch(T) \geq \frac{n}{2}$ , entonces  $e(T) \leq \frac{3n}{2} - 2$ .

*Demostración.* Utilizando lo expuesto en los lemas 4.3 y 4.4 podemos afirmar:

- i) Si hay algún vértice  $i$  tal que  $d_T(i) \geq \frac{n}{2}$  entonces, para todo  $T' \in \mathcal{T}_n$ :

$$d(T, T') \leq d(T, S_i) + d(S_i, T') \leq \frac{n}{2} + n - 2 = \frac{3n}{2} - 2.$$

- ii) Si  $ch(T) \geq \frac{n}{2}$  entonces existe alguna cadena  $C_j$  que contiene todas las aristas que  $T$  tiene en la frontera. Entonces para todo  $T' \in \mathcal{T}_n$  se verifica:

$$d(T, T') \leq d(T, C_j) + d(C_j, T') \leq \frac{n}{2} + n - 2 = \frac{3n}{2} - 2. \quad \square$$

A la vista de este resultado es lógico buscar, entre los candidatos a maximizar la excentricidad, aquellos árboles que tienen pocas aristas en la envolvente convexa y con grados pequeños en todos los vértices. Sin embargo, hemos demostrado que si  $T$  sólo tiene dos aristas en la frontera de  $P_n$  entonces su excentricidad también está acotada por  $3n/2$ .

**Proposición 4.6** Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  tal que  $ch(T) = 2$ ; entonces  $e(T) \leq \frac{3n}{2} - 3$ .

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  tal que  $ch(T) = 2$ . Sea  $U$  un árbol cualquiera de  $\mathcal{T}_n$ . Queremos ver que  $d(T, U) \leq \frac{3n}{2} - 2$ . La demostración consistirá en la construcción de un cepillo  $P$  tal que  $d(T, P) + d(P, U) \leq \frac{3n}{2} - 2$ . Pero para ello vamos -antes que nada- a caracterizar los árboles  $T \in \mathcal{T}_n$  tales que  $ch(T) = 2$ .

Todo árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  tiene dos aristas sobre  $CH(P_n)$  que son incidentes a hojas de  $T$ . En el caso de tener  $ch(T) = 2$ , sean  $x$  e  $y$  estas dos hojas. Existe un camino  $x \sim i_1 \sim i_2 \sim \dots \sim i_r \sim y$  de  $x$  a  $y$  en  $T$  tal como muestra la figura 4.13.

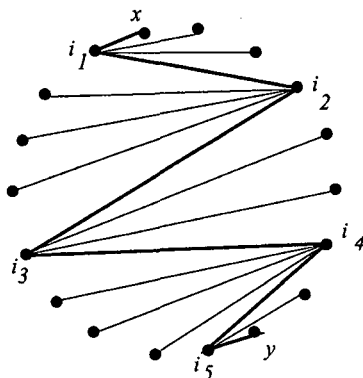
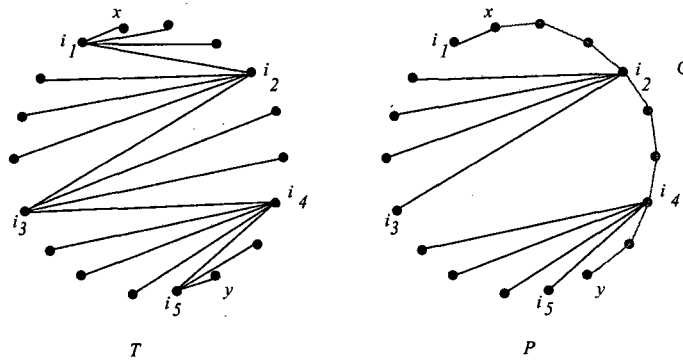


Figura 4.13: Camino que une  $x$  e  $y$  en  $P$ .

Los vértices de  $T$  que no forman parte de este camino, forzosamente tienen que ser hojas de  $T$  incidentes a algún  $i_k$ . Consideramos los dos caminos que van de  $x$  a  $y$  por la frontera de  $P_n$ . Al menos uno de los dos tiene que tener longitud  $\ell \leq \frac{n}{2}$ . Sea  $C$  un camino de  $x$  a  $y$  que tenga todas sus aristas sobre  $CH(P_n)$  y tal que su longitud sea  $\ell \leq \frac{n}{2}$ .

Añadiendo aristas de  $C$  a  $T$  tal como muestra la figura podemos obtener un cepillo  $P$  tal que  $d(T, P) \leq \ell \leq \frac{n}{2}$ .

En caso de ser  $\ell = \frac{n}{2}$  en los dos caminos de  $x$  a  $y$  sobre  $CH(P_n)$ , elegimos  $C$  aquél que más aristas tenga en común con  $T$ . En este caso  $T$  y  $C$  tienen al menos una arista común. Con lo cual podemos afirmar que  $d(T, P) \leq \frac{n}{2} - 1$ .



**Figura 4.14:** Obtención de un cepillo  $P$  que verifica  $d(T, P) \leq \frac{n}{2} - 1$ .

Por el teorema 4.2 sabemos que  $e(P) = n - 2$ . En particular, para cualquier  $U \in \mathcal{T}_n$  se verifica que  $d(U, P) \leq n - 2$ , de donde concluimos:

$$d(T, U) \leq d(T, P) + d(P, U) \leq \frac{3n}{2} - 3. \quad \square$$

Con un proceso análogo se demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 4.7** Si  $T \in \mathcal{T}_n$  es un árbol con  $k$  aristas  $e_1, \dots, e_k$  sobre  $CH(P_n)$  y de forma que existe un subconjunto  $B \subset P_n$  tal que:

- los puntos de  $B$  son consecutivos (mod.  $n$ ),
- $e_1, \dots, e_k$  están sobre  $CH(B)$ ,
- $|B| \leq \frac{n}{2} + k$ .

Entonces  $e(T) \leq \frac{3n}{2}$ .

## 4.6 Grupo de automorfismos

En esta sección determinamos completamente el grupo de automorfismos de  $G_n$ , que notaremos  $\Gamma(G_n)$ . De forma inmediata tenemos que cualquier simetría del polígono regular de  $n$  lados induce un automorfismo en  $G_n$ . Vamos a ver a continuación que no hay más automorfismos posibles.

**Teorema 4.6** *El grupo de automorfismos  $\Gamma(G_n)$  es isomorfo al grupo diedral  $D_n$  de simetrías de un polígono regular de  $n$  lados.*

*Demostración.* Consideramos el conjunto de las estrellas y cadenas

$$C = \{S_1, \dots, S_n, C_1, \dots, C_n\}.$$

Es fácil comprobar que las distancias entre dos elementos de  $C$  son:

$$\begin{aligned} d(S_i, S_j) &= n - 2, \\ d(C_i, C_j) &= 1, \\ d(C_i, S_j) &= \begin{cases} n - 2 & \text{si } j = i \text{ o } j = i + 1, \\ n - 3 & \text{en los restantes casos,} \end{cases} \end{aligned}$$

donde los índices están dados módulo  $n$ . Sea ahora  $\gamma \in \Gamma(G_n)$ . Estudiamos la acción de  $\gamma$  en  $C$ . La imagen por  $\gamma$  de una estrella tiene que ser una estrella, pues sólo sobre ellas se alcanza el grado mínimo de  $G_n$ . Y un razonamiento análogo es válido con las cadenas. Así pues, tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma(\{S_1, \dots, S_n\}) &= \{S_1, \dots, S_n\}, \\ \gamma(\{C_1, \dots, C_n\}) &= \{C_1, \dots, C_n\}. \end{aligned}$$

A partir de aquí la demostración tiene dos partes. La primera consiste en comprobar que la restricción de  $\Gamma(G)$  a  $C$  es equivalente al grupo diedral  $D_n$ . La segunda parte consiste en comprobar que todo automorfismo de  $G_n$  queda determinado por su acción sobre  $C$ . Por lo que se refiere a la primera parte, vemos que si se verifica  $\gamma(S_1) = S_j$ , como  $n - 2 = d(S_1, C_1) = d(S_j, \gamma(C_1))$ , entonces o bien  $\gamma(C_1) = C_j$  o

$\gamma(C_1) = C_{j-1}$ . En el primer caso forzosamente  $\gamma(C_2) = C_{j+1}$  y en el segundo caso  $\gamma(C_2) = C_{j-2}$ , y así sucesivamente, de donde deducimos que  $\gamma$  es una rotación o una simetría en el conjunto de índices. De esta manera queda demostrado que la restricción de  $\Gamma(G_n)$  a  $C$  es equivalente al grupo diedral  $D_n$ .

Para demostrar que un automorfismo de  $G_n$  queda completamente determinado por su acción sobre  $C$  basta probar que si  $\gamma|_C = 1|_C$  entonces  $\gamma = 1$ . Antes vamos a ver dos observaciones.

- i) Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  y sea  $d_i = d_T(i)$  el grado del vértice  $i$  en  $T$ . En el lema 4.3 ya señalamos que  $d(T, S_i) = n - 1 - d_i$ . Si suponemos que  $\gamma$  es un automorfismo trivial sobre  $C$ , y en particular sobre las estrellas  $y$ , dado que todo automorfismo conserva las distancias, se verifica:

$$d(\gamma(T), S_i) = d(\gamma(T), \gamma(S_i)) = d(T, S_i) = n - 1 - d_i$$

Luego  $T$  y  $\gamma(T)$  tienen el mismo grado en el vértice  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

- ii) Por otra parte, si suponemos  $\gamma$  trivial sobre las cadenas y  $ch(T)$  es el número de aristas que tiene  $T$  en la frontera de  $P_n$ , entonces:

$$\begin{aligned} d(\gamma(T), C_i) &= d(\gamma(T), \gamma(C_i)) = \\ &= d(T, C_i) = \begin{cases} n - ch(T) & \text{si } (i, i+1) \in T \\ n - 1 - ch(T) & \text{si } (i, i+1) \notin T \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, en este supuesto,  $T$  y  $\gamma(T)$  tienen, no sólo el mismo número de aristas en la frontera de  $P_n$ , sino que además tienen exactamente las mismas aristas sobre dicha frontera.

En la observación 4.1 vimos que la sucesión de grados en los vértices y el conjunto de aristas que están en la envolvente convexa de  $P_n$  no determinan un árbol de  $\mathcal{T}_n$ .

Vamos a probar por inducción sobre el número de vértices que si  $\gamma|_C = 1|_C$  entonces  $\gamma = 1$ . Sea  $U$  un árbol cualquiera de  $\mathcal{T}_n$  y sea  $i$  un vértice tal que  $d_U(i) = 1$  y  $(i, i+1) \in U$ .



Consideramos  $I$  el siguiente conjunto de árboles de  $\mathcal{T}_n$ .

$$I = \{T \in \mathcal{T}_n \mid d_T(i) = 1, (i, i+1) \in T\}.$$

Observamos que por i) y ii) podemos asegurar que  $\gamma(I) \subseteq I$  y, por ser  $\gamma$  un automorfismo tenemos que  $\gamma(I) = I$ . En particular, tiene sentido considerar el automorfismo  $\gamma|_I$ , restricción de  $\gamma$  al conjunto  $I$ . Por otra parte, identificando  $P_{n-1}$  con  $P_n \setminus \{i\}$ , se verifica que  $I \cong \mathcal{T}_{n-1}$ :

$$\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathcal{T}_{n-1} \\ T \longrightarrow T \setminus \{i\} \end{array}$$

Además, dados  $T, T' \in I$ ,  $T \sim T'$  en  $G_n$  si, y sólo si,  $T \setminus \{i\} \sim T' \setminus \{i\}$  en  $G_{n-1}$ .

Sea  $J$  el grafo que tiene por conjunto de vértices  $I$  y adyacencias  $\sim$ . Sea  $\varphi$  el isomorfismo entre  $\Gamma(J)$  y  $\Gamma(G_{n-1})$  inducido por el isomorfismo anterior, esto es

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi : \Gamma(J) \longrightarrow \Gamma(G_{n-1}) \\ \mu : I \longrightarrow I \\ T \longrightarrow \mu(T) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu' : \mathcal{T}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{T}_{n-1} \\ T \setminus \{i\} \longrightarrow \mu(T) \setminus \{i\} \end{array} \right\}$$

Sea  $\gamma^* = \varphi(\gamma|_I) \subset \Gamma(G_{n-1})$ . Veamos que  $\gamma^*$  restringido al conjunto de las estrellas y las cadenas de  $G_{n-1}$  es la identidad.

Sea  $S_j$  una estrella de  $G_{n-1}$ . Como estamos suponiendo que  $\gamma|_C = 1|_C$ , por i) y ii) tenemos que  $\gamma(S_j \cup (i, i+1)) = S_j \cup (i, i+1)$ . Entonces  $\gamma^*(S_j) = S_j$ . Así mismo, si  $C_j$  es una cadena de  $G_{n-1}$ , entonces  $\gamma(C_j \cup (i, i+1)) = C_j \cup (i, i+1)$ . Luego  $\gamma^*(C_j) = C_j$ . De donde concluimos que  $\gamma^*$  restringida al conjunto de las estrellas y cadenas de  $G_{n-1}$  es la identidad y aplicando inducción tenemos que  $\gamma^*$  es la identidad sobre  $G_{n-1}$ . En particular,  $\gamma^*(U \setminus \{i\}) = U \setminus \{i\}$ , de donde tenemos que  $\gamma(U) = U$  para cualquier  $U \in \mathcal{T}_n$ . Así pues,  $\gamma = 1$ .  $\square$

## 4.7 Árbol de árboles

En este apartado presentamos una construcción que será básica en las demostraciones de los resultados que aparecen en los dos aparta-

dos siguientes. Es una construcción recursiva de los grafos  $G_n$  en la cual cada árbol  $T$  en  $G_n$  da lugar a  $\binom{d+2}{2}$  árboles diferentes en  $G_{n+1}$ . De esta forma creamos un árbol infinito cuyos vértices son todos los árboles de  $\mathcal{T}_n$ , para todo  $n$ . Este tipo de construcción ya resultó útil para resolver problemas similares en los grafos de triangulaciones [39].

En este árbol de árboles, cada árbol  $T$  de  $\mathcal{T}_n$  tiene su padre en  $\mathcal{T}_{n-1}$  y algunos hijos en  $\mathcal{T}_{n+1}$ . Veamos a qué árboles de  $\mathcal{T}_{n+1}$  da lugar uno de  $\mathcal{T}_n$ .

Si  $T \in \mathcal{T}_n$  es tal que  $i_1 < i_2 < \dots < i_d$  son los vértices adyacentes al vértice  $n$  en  $T$ , construimos sus hijos  $S_{i,j}(T)$  (todos ellos árboles de  $\mathcal{T}_{n+1}$ ) como indicamos a continuación. Hay tres tipos de árboles generados a partir  $T$ .

**Tipo 0.** Añadimos la arista  $(n, n+1)$  a  $T$ , y distribuimos entre  $n$  y  $n+1$  las aristas  $(i_k, n)$  de  $T$ .

$$S_{0,0}(T) = \{(a, b) | (a, b) \in T\} \cup \{(n, n+1)\}$$

Y para todo  $k, 1 \leq k \leq d$ :

$$S_{0,k}(T) = \{(a, b) | a, b \neq n, (a, b) \in T\} \cup \{(n+1, i_p) | 1 \leq p \leq k\} \cup \{(n, i_p) | k+1 \leq p \leq d\} \cup \{(n, n+1)\}.$$

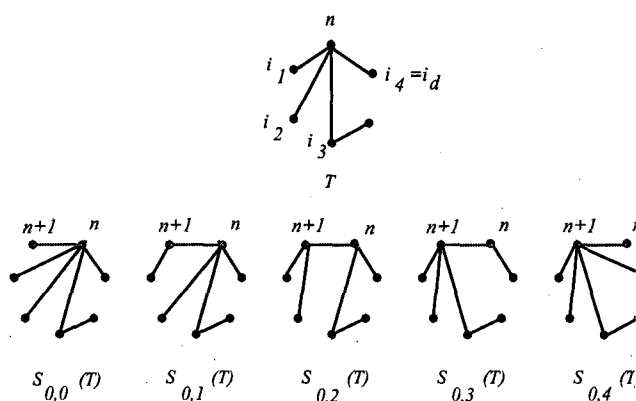


Figura 4.15: Construcción de los hijos  $S_{0,k}(T)$  de  $T$ .

**Tipo 1.** Desdoblamos en dos la arista  $(i_k, n)$ , dando lugar a las aristas  $(i_k, n)$  y  $(i_k, n + 1)$ .

$$S_{1,k}(T) = \{(a, b) | a, b \neq n, (a, b) \in T\} \cup \{(n + 1, i_p) | 1 \leq p \leq k\} \cup \{(n, i_p) | k \leq p \leq d\}.$$

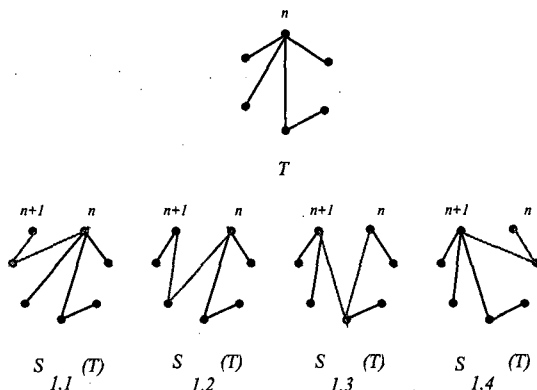


Figura 4.16: Construcción de los hijos  $S_{1,k}(T)$  de  $T$ .

**Tipo j** ( $j \geq 2$ ). Para todo subconjunto  $S = \{i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+j-1}\}$  de vértices consecutivos de  $\{i_1, \dots, i_d\}$ , unimos todos los vértices de  $S$ , cada uno con el siguiente formando un camino, el primer vértice de  $S$  lo unimos con  $n + 1$  y el último con  $n$ . Por ejemplo, con los subconjuntos de cardinal 2 tendríamos:

$$S_{2,k}(T) = \{(a, b) | a, b \neq n, (a, b) \in T\} \cup \{(n + 1, i_p) | 1 \leq p \leq k\} \cup \{(n, i_p) | k + 1 \leq p \leq d\} \cup \{(i_k, i_{k+1})\}.$$

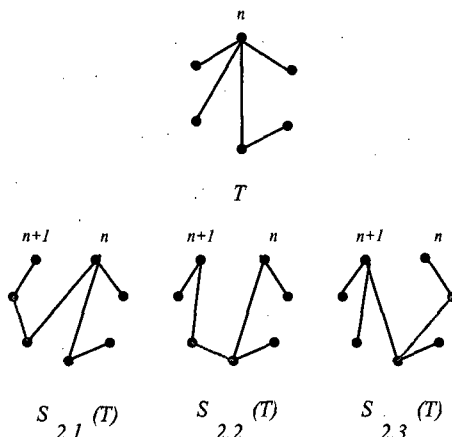


Figura 4.17: Construcción de los hijos  $S_{2,k}(T)$  de  $T$ .

En general, con  $2 \leq j \leq d$

$$S_{j,k}(T) = \{(a,b) \mid a,b \neq n, (a,b) \in T\} \cup \{(n+1, i_p) \mid 1 \leq p \leq k\} \\ \cup \{(n, i_{p+j-2}) \mid k \leq p \leq d-j+2\} \\ \cup \{(i_k, i_{k+1}), (i_{k+1}, i_{k+2}), \dots, (i_{k+j-2}, i_{k+j-1})\}.$$

En la figura 4.18 presentamos el conjunto de todos los hijos de la estrella  $S_4$ . En la planta baja del edificio que configuran están los hijos de tipo 0, en la segunda los de tipo 1, en las siguientes los de tipo  $j$ .

El número de hijos de un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  depende del grado de  $n$  en  $T$ . Concretamente, si este grado es  $d$ , entonces el número de hijos de  $T$  es

$$(d+1) + d + (d-1) + \dots + 1 = \frac{(d+2)(d+1)}{2} = \binom{d+2}{2}.$$

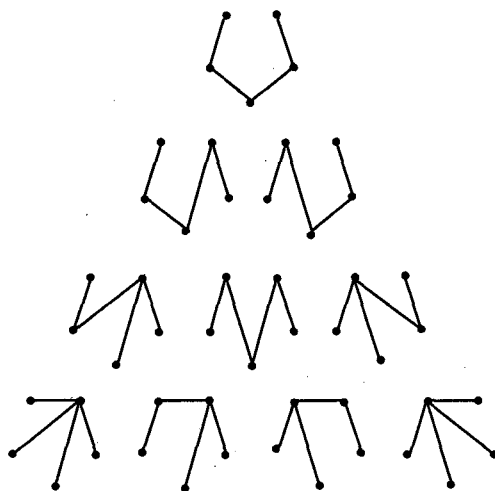
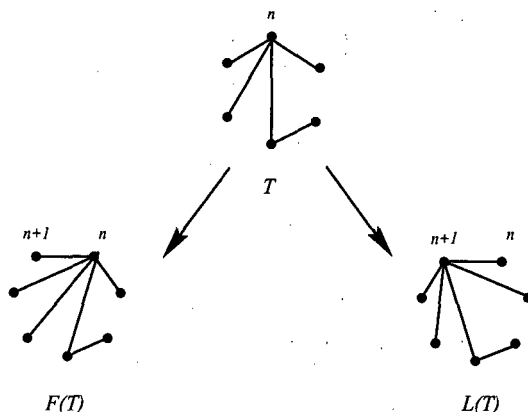


Figura 4.18: Construcción de los hijos  $S_{j,k}(S_4)$  de la estrella  $S_4$ .

En particular,  $T$  tiene al menos dos hijos de tipo 0,  $S_{0,0}(T)$  y  $S_{0,d}(T)$ . Observamos que estos hijos son una copia de  $T$  con una

arista más, la arista  $(n, n + 1)$ .



**Figura 4.19:** Los hijos  $L(T)$  y  $F(T)$ .

Estos hijos jugarán un importante papel en resultados posteriores, por ello los denotaremos de forma especial. Llamamos  $F(T) = S_{0,0}(T)$  y  $L(T) = S_{0,d}(T)$  (véase figura 4.19).

Invirtiendo el proceso anterior veamos, dado  $T \in \mathcal{T}_n$ , cómo obtener su padre  $f(T) \in \mathcal{T}_{n-1}$ .

- i) Si la arista  $(n - 1, n)$  aparece en  $T$ , obtenemos  $f(T)$  contrayendo en  $T$  esta arista.
- ii) Si aparecen en  $T$  las aristas  $(n - 1, i)$  y  $(n, i)$ , para algún  $i$ , obtenemos  $f(T)$  identificando en  $T$  los vértices  $n$  y  $n - 1$  y las aristas  $(n - 1, i)$  y  $(n, i)$ .
- iii) En los demás casos, identificamos en  $T$  los vértices  $n$  y  $n - 1$ . Aparece entonces un ciclo. Quitamos todas las aristas de este ciclo y unimos todos los vértices del ciclo con  $n - 1$ .

De este proceso se deduce inmediatamente la unicidad del padre. Esto es, árboles diferentes no pueden tener un hijo en común. Dos árboles  $T_1, T_2$  de  $\mathcal{T}_n$  diremos que son *hermanos* si  $f(T_1) = f(T_2)$ , esto es, son hijos del mismo padre.

Así pues, hemos construido un árbol (infinito) cuyos nodos son árboles geométricos. Tomando como raíz de dicho árbol el único

vértice de  $G_2$ , en el nivel  $n - 2$  están los elementos de  $\mathcal{T}_n$ , esto es, los vértices de  $G_n$ . En la figura 4.20 vemos los tres primeros niveles de este árbol de árboles.

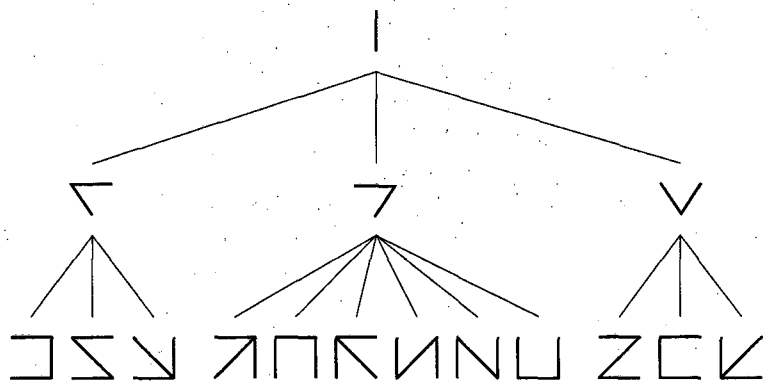


Figura 4.20: Primeros niveles del árbol de árboles.

Es fácil comprobar que algunas relaciones de adyacencias se heredan en los hijos. Listamos en el siguiente lema algunas propiedades en este sentido.

**Lema 4.6** Sean  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_n$ . Se verifican las siguientes propiedades.

1. Si  $T_1$  y  $T_2$  son adyacentes, entonces  $F(T_1)$  es adyacente a  $F(T_2)$  y  $L(T_1)$  es adyacente a  $L(T_2)$ .
2. Si  $T_1$  y  $T_2$  son adyacentes e  $(i, n) \in T_1 \cap T_2$ , con  $i_1 < \dots < i = i_r < \dots < i_d$  adyacentes a  $n$  en  $T_1$ , y  $j_1 < \dots < j_r = i < \dots < j_d$  adyacentes a  $n$  en  $T_2$ , entonces  $S_{j,i}(T_1)$  es adyacente a  $S_{j,i}(T_2)$  para  $j = 1, 2$ .
3. Si  $T_1$  y  $T_2$  son adyacentes y  $T_1, T_2$  tienen en común todas las aristas adyacentes a  $n$ , entonces  $S_{j,k}(T_1)$  es adyacente a  $S_{j,k}(T_2)$  para todo  $j, k$ .

**Observación 4.2** Dados dos árboles  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_n$  adyacentes en  $G_n$ , la relación entre el número de hijos del uno y del otro es la siguiente.

$$|\{\text{hijos}(T_1)\}| = |\{\text{hijos}(T_2)\}|$$

o

$$|\{\text{hijos}(T_1)\}| - |\{\text{hijos}(T_2)\}| = d + 1$$

donde  $d = \max(d_{T_1}(n), d_{T_2}(n))$ .

**Observación 4.3** Dados dos árboles  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_n$  adyacentes en  $G_n$ , sus padres no tienen por qué ser vértices adyacentes en  $G_{n-1}$  como lo muestra el ejemplo de la figura 4.21.

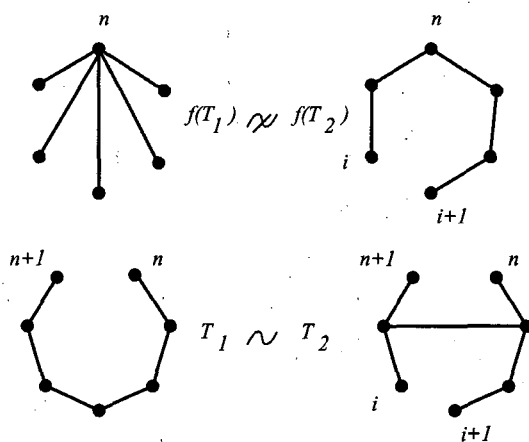


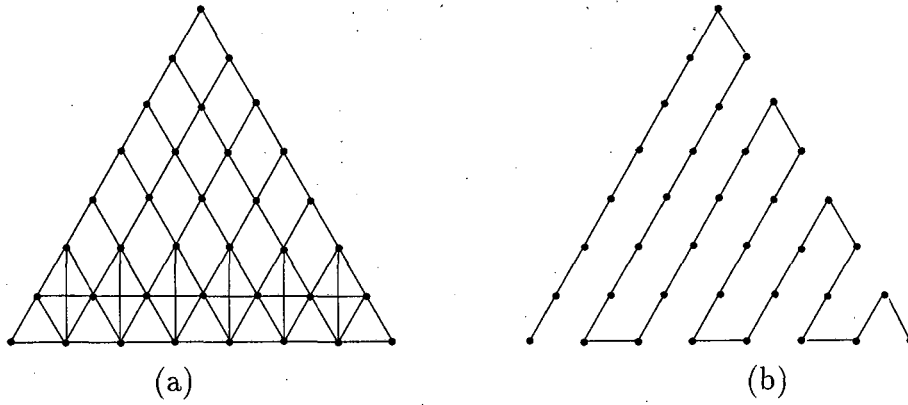
Figura 4.21:  $T_1 \sim T_2$  y  $f(T_1) \not\sim f(T_2)$ .

**Lema 4.7** El conjunto de hijos de  $T$  induce un subgrafo  $\mathcal{S}_T$  en  $G_{n+1}$  que verifica las siguientes propiedades:

1.  $\mathcal{S}_T$  es 2-conexo;
2.  $\mathcal{S}_T$  tiene un camino hamiltoniano que tiene por extremos  $L(T)$  y  $F(T)$ ;
3. el grado de los vértices de  $\mathcal{S}_T$  está entre 2 y 6.

En el resto del capítulo notaremos  $\mathcal{S}_T$  al subgrafo de  $G_{n+1}$  inducido por el conjunto de hijos de  $T$  y el camino hamiltoniano del lema 4.7(2) lo llamaremos *camino de hermanos* (de  $F(T)$  a  $L(T)$ ). En la figura 4.22 se ilustra el último lema. Cada vértice de la figura representa un

hijo del árbol  $T$ . En la planta  $j$ -ésima (de abajo hacia arriba) se han colocado los hijos del tipo  $S_{j-1,k}$ .



**Figura 4.22:** (a) El subgrafo de hijos  $\mathcal{S}_T$ .  
 (b) Camino de hermanos con extremos  $L(T)$  y  $F(T)$ .

Por el lema 4.6 sabemos que cualquier subestructura en  $G_n$  tiene una copia isomorfa en  $G_{n+1}$  vía

$$F = \{F(T) = S_{0,0}(T) \mid T \in \mathcal{T}_n\}$$

y vía

$$L = \{L(T) = S_{0,d}(T) \mid T \in \mathcal{T}_n\}.$$

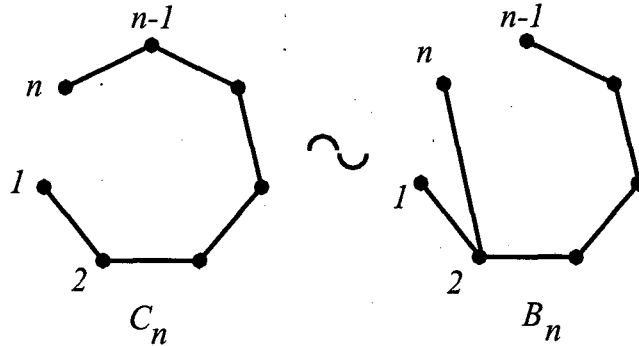
Debido a ello, podemos decir que  $F$  y  $L$  son copias de  $G_n$  en  $G_{n+1}$ . Podemos obtener todos los vértices de  $G_{n+1}$  a partir de estas dos copias de  $G_n$ , donde –para cada vértice de  $G_n$ – uniríamos sus dos copias por el camino hamiltoniano existente en  $\mathcal{S}_T$ .

## 4.8 $G_n$ es un grafo hamiltoniano

Como primera aplicación del árbol de árboles introducido en la sección anterior, vamos a demostrar que  $G_n$  es hamiltoniano. Concretamente,



vamos a construir inductivamente un ciclo hamiltoniano en  $G_n$ .



**Figura 4.23:** Árboles que juegan un papel especial en la demostración de que  $G_n$  es hamiltoniano.

Nos referiremos más adelante a dos árboles concretos que denotamos de la siguiente forma.  $C_n$  denota la cadena que tiene por aristas todos los lados de  $P_n$  excepto  $(1, n)$  y  $B_n$  el árbol que tiene todas sus aristas en común con  $C_n$ , salvo  $(n-1, n)$  que está cambiada por  $(2, n)$  (véase figura 4.23).

Es obvio que  $B_n$  y  $C_n$  son adyacentes en  $G_n$  y que sus hijos muestran las siguientes adyacencias en  $G_{n+1}$  (véase figura 4.24).

**Lema 4.8** *Los hijos de  $C_n$  y  $B_n$  verifican las siguientes propiedades:*

1.  $C_n$  tiene exactamente tres hijos, los cuales están conectados por el siguiente camino  $F(C_n) = S_{0,0}(C_n) \sim S_{1,1}(C_n) \sim S_{0,1}(C_n) = L(C_n)$ .
2.  $B_n$  tiene exactamente tres hijos, los cuales están conectados por el siguiente camino  $F(B_n) = S_{0,0}(B_n) \sim S_{1,1}(B_n) \sim S_{0,1}(B_n) = L(B_n)$ .
3.  $F(C_n) = C_{n+1}$ ,  $F(B_n) = B_{n+1}$ .
4.  $S_{i,j}(C_n) \sim S_{i,j}(B_n)$ ,  $\forall i, j$ .

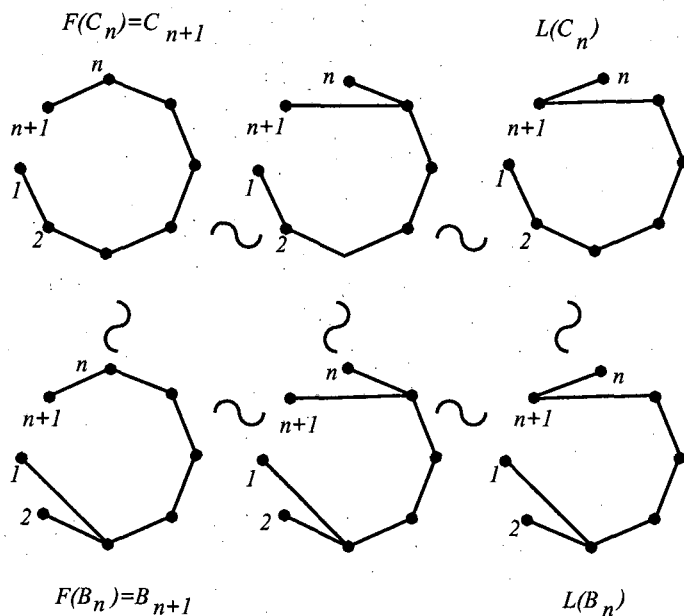


Figura 4.24: Relaciones de adyacencias entre los hijos de  $C_n$  y  $B_n$ .

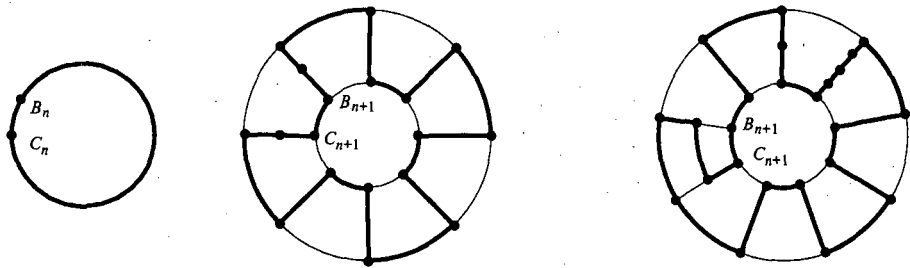
**Teorema 4.7**  $G_n$  es un grafo hamiltoniano para todo  $n \geq 3$ . Es más, existe un ciclo hamiltoniano de  $G_n$  en el cual  $C_n$  y  $B_n$  son vecinos.

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $n$ .  $G_n$  es  $K_n$  para  $n \leq 3$ . Suponemos ahora que  $G_n$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C$  que verifica el enunciado. Consideramos dos copias de  $C$  en  $G_{n+1}$ . La primera copia la obtenemos vía  $F$  y la segunda, disjunta con la anterior, la obtenemos vía  $L$ . Para cada árbol  $T_n$  de  $\mathcal{T}_n$ , los árboles  $F(T_n)$  y  $L(T_n)$  de  $\mathcal{T}_{n+1}$  están conectados por el camino formado por los hijos de  $T_n$ . Todos los vértices de  $G_{n+1}$  pertenecen a alguno de estos caminos. Por el lema 4.8 tenemos  $F(C_n) = C_{n+1}$  y  $F(B_n) = B_{n+1}$ .

Si el número de vértices de  $G_n$  es par construimos el ciclo hamiltoniano de  $G_{n+1}$  a partir del ciclo  $C$  de  $G_n$  de la siguiente manera. Suponemos  $C$  dado por

$$C_n \sim T_1 \sim T_2 \sim \dots \sim T_r \sim B_n.$$

Entonces viajamos por  $G_{n+1}$  tal como se indica en la parte central de la figura 4.25. Esto es, empezamos en  $C_{n+1} = F(C_n)$ , seguimos por el camino de hijos de  $C_n$  y llegamos a  $L(C_n)$ , pasamos entonces a  $L(T_1)$ , continuamos recorriendo el camino de hijos de  $T_1$ , llegamos a  $F(T_1)$ , pasamos ahora a  $F(T_2)$ , recorremos el camino de hijos de  $T_2$  hasta alcanzar  $L(T_2)$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $F(B_n) = B_{n+1}$ .



**Figura 4.25:** Construcción de un ciclo hamiltoniano en  $G_{n+1}$  a partir de uno de  $G_n$ .

Si el número de vértices de  $G_n$  es impar, la construcción del ciclo de  $G_{n+1}$  empieza de forma similar, pero en este caso para completar el ciclo tendremos que hacer intervenir de forma adecuada los hijos de  $C_n$  y  $B_n$  como se muestra en la parte de la derecha de la figura 4.25.  $\square$

## 4.9 Conectividad de $G_n$

Como segunda aplicación de la construcción introducida en el apartado 4.7, calculamos de forma inductiva la conectividad del grafo  $G_n$ .

**Teorema 4.8** *La vértice-conectividad del grafo  $G_n$  es igual al grado mínimo, es decir,  $2n - 4$ .*

*Demostración.* Como el grado mínimo es  $2n - 4$  sólo tenemos que probar que el grafo sigue siendo conexo cuando suprimimos  $2n - 5$  vértices cualesquiera. Esto es obvio para  $n = 3$ . Es fácil comprobar

que es cierto para  $n = 4$ . Suponemos ahora que es cierto para  $n - 1 \geq 3$  y procedemos por inducción. Queremos ver que  $G_n$  sigue siendo conexo después de suprimir cualquier conjunto  $W$  de  $2n - 5$  vértices. Recordamos que  $F$  y  $L$  son dos copias de  $G_{n-1}$  en  $G_n$ . Distinguiamos tres casos.

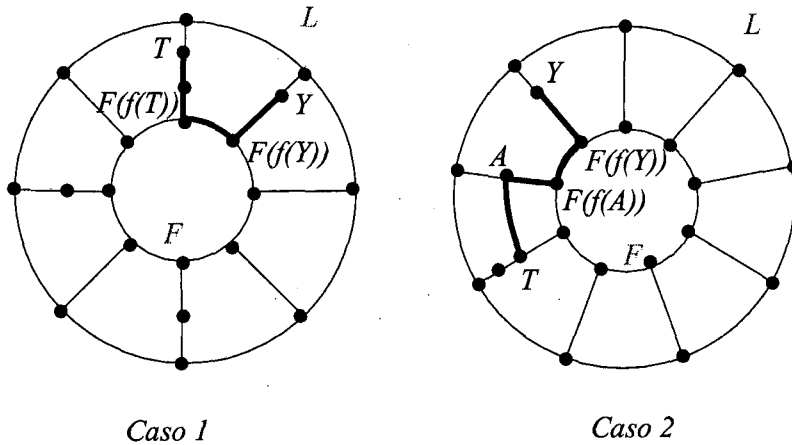


Figura 4.26: Descripción de la situación en los dos primeros casos.

*Caso 1:*  $W \subset F$  o  $W \subset L$ . Si  $W \subset L$ , podemos construir un camino entre dos nodos cualesquiera  $T$  e  $Y$  como sigue: de  $T$  a  $F(f(T))$  (viajando por el camino de hermanos en  $S_{f(T)}$ ), desde  $F(f(T))$  a  $F(f(Y))$  (viajando por el ciclo que, por inducción, sabemos que existe en  $F$ ) y, finalmente, desde  $F(f(Y))$  hasta  $Y$  (viajando por el camino de hermanos en  $S_{f(Y)}$ ). Se aplica el mismo tipo de demostración cuando  $W \subset F$ .

*Caso 2:*  $|W \cap F| = 2n - 6$  o  $|W \cap L| = 2n - 6$ . Si  $|W \cap L| = 2n - 6$ , sólo hay un vértice  $Z$  de  $W$  que no está en  $L$ . Si  $Z \neq F(f(T))$  y  $Z \neq F(f(Y))$  entonces, por la 2-conectividad de los subgrafos de hijos, podemos construir un camino como en el caso precedente. Si  $Z = F(f(T))$  o  $Z = F(f(Y))$ , es fácil ver que existe, como mínimo, un vértice  $A$  adyacente a  $T$  fuera de  $S_{f(T)}$  y que no está en  $L$ . El camino a seguir en este caso es

$$T \sim A \sim \dots \sim F(f(A)) \sim \dots \sim F(f(Y)) \sim \dots \sim Y.$$

La misma demostración se aplica cuando  $|W \cap F| = 2n - 6$ .

*Caso 3:*  $|W \cap L| \leq 2n - 7$  y  $|W \cap F| \leq 2n - 7$ . Por inducción, los subgrafos  $L \setminus W$  y  $F \setminus W$  de  $G_n \setminus W$  son conexos. Por otro lado, sabemos que el número de árboles de  $G_{n-1}$  es  $t_{n-1} > 2n - 7$  ( $n \geq 4$ ). Por lo tanto, podemos asegurar que existe al menos una familia y, más concretamente, un camino de hermanos completo en  $G_n \setminus W$  que va de  $F$  a  $L$ . Para acabar la demostración, necesitamos demostrar la siguiente afirmación.

**Afirmación:** Desde cualquier  $T \in \mathcal{T}_n$  podemos alcanzar  $F$  o  $L$  en  $G_n \setminus W$ .

*Demostración de la afirmación:*

Sea  $T$  un vértice de  $G_n$ . Si el camino en  $\mathcal{S}_{f(T)}$  desde  $T$  a  $F(f(T))$  o desde  $T$  a  $L(f(T))$  no está roto, el enunciado es cierto. Supongamos, pues, que no existe ningún camino de  $T$  a  $F(f(T))$  ni desde  $T$  a  $L(f(T))$  en el subgrafo  $\mathcal{S}_{f(T)}$ .

La idea principal de la demostración es encontrar vecinos de  $T$  en un número suficiente de familias diferentes, de manera que dan lugar a distintas formas de alcanzar  $F$  o  $L$  (véase figura 4.27).

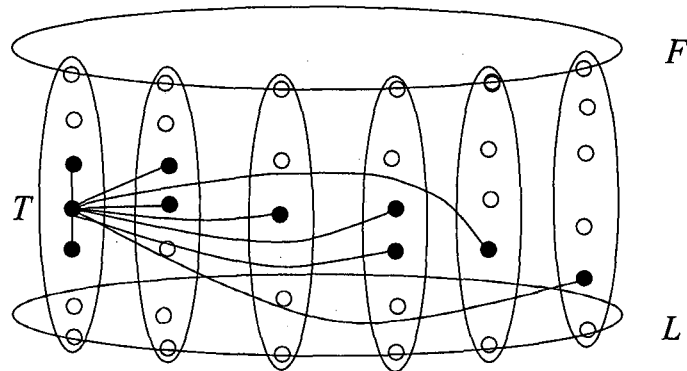


Figura 4.27: Vecinos de  $T$  distribuidos en diferentes familias.

Sea  $h$  la distancia entre los vértices  $n - 1$  y  $n$  en  $T$  y sean  $i_1 < i_2 < \dots < i_d$  los vértices adyacentes a  $n - 1$  en  $f(T)$ . Notamos  $ord(U)$  al número de vértices de  $U$ , para un árbol  $U$  cualquiera.

**Caso  $h = 1$ .** En este caso,  $T$  contiene la arista  $(n - 1, n)$  y, por lo tanto,  $T$  es un hijo de tipo 0, esto es,  $T = S_{0,k}(f(T))$  para algún  $k$ . Por lo tanto, en este caso, el padre de  $T$  se obtiene contrayendo la arista  $(n - 1, n)$ . Si  $k = 0$  o  $k = d$ ,  $T$  está ya en  $F$  o  $L$ . Para  $1 \leq k < d$  consideramos los subárboles de  $T$ ,  $T_{n-1}$ ,  $T_n$  con raíces  $n - 1$  y  $n$ , respectivamente, obtenidos eliminando la arista  $(n - 1, n)$  de  $T$ . Cada árbol de la forma  $T + e - f$ , donde  $e$  y  $f$  son ambas aristas de  $T_{n-1}$ , o ambas aristas de  $T_n$ , es un árbol adyacente a  $T$ , pero que no está en  $S_{f(T)}$ , y no hay dos de estos árboles en una misma familia. Luego, por la proposición 4.1, el número de familias distintas de  $S_{f(T)}$  que contienen vértices adyacentes a  $T$  es, como mínimo, el siguiente:

$$\begin{aligned} 2(ord(T_{n-1}) - 2) + 2(ord(T_n) - 2) &= 2(ord(T_{n-1}) + 2(ord(T_n) - 4)) \\ &= 2(n - 4) = 2n - 8. \end{aligned}$$

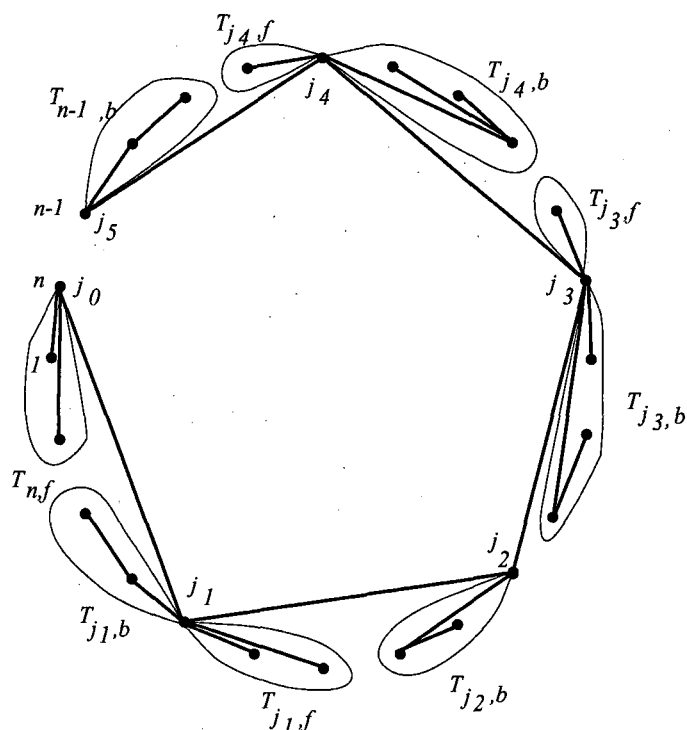
Consideramos ahora los dos árboles siguientes:

$$\begin{aligned} T + (i_k, i_{k+1}) - (i_k, n), \\ T + (i_k, i_{k+1}) - (i_{k+1}, n - 1) \end{aligned}$$

Estos árboles no son hermanos y no pertenecen a las familias precedentes. Por lo tanto, para desconectar  $T$  de  $L$  y  $F$  es necesario quitar al menos  $2n - 6$  vértices que no están en  $S_{f(T)}$ , más dos de  $S_{f(T)}$ , es decir,  $2n - 4$  vértices.

**Caso  $h \geq 2$ .** Consideramos el camino  $\mathcal{P}$  de longitud  $h$  de  $n$  a  $n - 1$  en  $T$ ,  $n = j_0 \sim j_1 \sim \dots \sim j_h = n - 1$ . Para cada vértice  $j_l$  de  $\mathcal{P}$ , consideramos los siguientes árboles, tal como ilustra la figura 4.28:

- $T_{j_l, b}$  ( $l > 0$ ) es el árbol obtenido como el subgrafo generado por el conjunto de vértices  $i \leq j_l$  tal que el camino de  $i$  a  $j_l$  en  $T$  no contiene la arista  $(j_{l-1}, j_l)$ .
- $T_{j_l, f}$  ( $l < h$ ) es el subgrafo generado por el conjunto de vértices  $i \geq j_l$  tal que el camino desde  $i$  a  $j_l$  en  $T$  no contiene la arista  $(j_l, j_{l+1})$  (véase figura 4.28).

Figura 4.28: El camino  $\mathcal{P}$ .

Distinguimos tres *clases* de aristas en el camino  $\mathcal{P}$ . Una arista  $(j_i, j_{i+1})$  es:

- de clase 2 si ambos árboles  $T_{j_i,f}$  y  $T_{j_{i+1},b}$  tienen orden mayor o igual que dos;
- de clase 1 si uno de ellos exactamente tiene orden mayor o igual que dos;
- de clase 0 si ambos tienen orden uno.

Denotamos por  $r$  y  $s$  el número de aristas de  $\mathcal{P}$  de clase 2 y 1, respectivamente. Así pues, el número de árboles de orden mayor o igual que dos definidos de esta forma es  $2r + s$ .

Consideramos, en primer lugar, los árboles adyacentes a  $T$  obtenidos haciendo un único intercambio en uno de los árboles  $T_{j_i,b}$  o  $T_{j_i,f}$ .

Los nuevos árboles pertenecen a familias distintas y no están en  $\mathcal{S}_f(T)$ . Otra vez por la proposición 4.1, el número de familias distintas que contienen vecinos de  $T$  es, al menos,

$$\begin{aligned} & \sum_{ord(T_{j_i,b}) \geq 2} 2(ord(T_{j_i,b}) - 2) + \sum_{ord(T_{j_i,f}) \geq 2} 2(ord(T_{j_i,f}) - 2) = \\ & = 2 \left( \sum_{ord(T_{j_i,b}) \geq 2} ord(T_{j_i,b}) + \sum_{ord(T_{j_i,f}) \geq 2} ord(T_{j_i,f}) \right) \\ & \quad - 4(|\{T_{j_i,b} | ord(T_{j_i,b}) \geq 2\}| + |\{T_{j_i,f} | ord(T_{j_i,f}) \geq 2\}|) = \\ & = 2(n - (h + 1) + 2r + s) - 4(2r + s) = \\ & = 2n - 2 - (4r + 2s + 2h). \end{aligned} \tag{4.1}$$

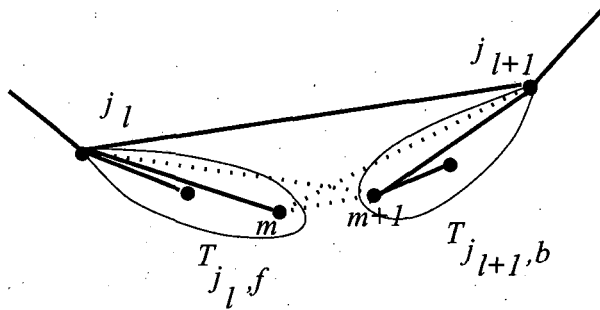


Figura 4.29: Construcción de árboles especiales adyacentes a  $T$ .

Consideramos ahora una arista  $(j_l, j_{l+1})$  de tipo 2. Existe un vértice  $m$ ,  $j_l < m < m + 1 < j_{l+1}$  tal que  $m \in T_{j_l, f}$  y  $m + 1 \in T_{j_{l+1}, b}$  (véase figura 4.29). Al añadir la arista  $(m, m + 1)$  se crea un ciclo  $C$  en  $T$ . Sea  $e$  una arista de  $C \cap T_{j_l, f}$  y  $f$  una arista de  $C \cap T_{j_{l+1}, b}$ . Los árboles:

$$\begin{aligned} & T + (m, m + 1) - e, \\ & T + (m, m + 1) - f, \\ & T + (m, j_{l+1}) - e, \\ & T + (j_l, m + 1) - f \end{aligned}$$

no están en  $\mathcal{S}_f(T)$  y pertenecen a cuatro nuevas familias diferentes.

Si la arista  $(j_l, j_{l+1})$  es de tipo 1, suponemos que el árbol  $T_{j_l, f}$  tiene orden mayor o igual que dos (si el árbol que tiene orden mayor o igual que dos es  $T_{j_{l+1}, b}$ , procedemos análogamente). Añadiendo una arista  $(j_{l+1} - 1, j_{l+1})$  se crea un ciclo  $C$  en  $T$ . Consideramos el



árbol  $T + (j_{l+1} - 1, j_{l+1}) - e$ , donde  $e$  es una arista de  $C \cap T_{j_i, j}$ . Si la arista  $(j_l, j_{l+1})$  no incide con  $n - 1$  o  $n$ , consideramos el árbol  $T + (j_{l+1} - 1, j_{l+1}) - (j_l, j_{l+1})$ . Estos árboles no pertenecen a  $\mathcal{S}_f(T)$  y están en familias nuevas.

Así pues, podemos asegurar que existen vecinos de  $T$  en, como mínimo,

$$2n - 2 - (4r + 2s + 2h) + 4r + 2s - 2 = 2n - 2h - 4 \quad (4.2)$$

familias distintas de  $\mathcal{S}_f(T)$ .

La demostración ahora estudia los distintos subcasos según los valores que toma  $h$ .

*Subcaso  $h \geq 4$ .* Para cada  $l$ ,  $1 \leq l \leq h - 1$ , los árboles:

$$\begin{aligned} T + (n - 1, n) - (j_l, j_{l+1}), \\ T + (n - 1, j_l) - (j_l, j_{l+1}) \end{aligned}$$

son hermanos pero no están ni en  $\mathcal{S}_f(T)$  ni en las familias consideradas anteriormente. Hemos encontrado, pues,  $2n - 2h - 4 + 2(h - 1) = 2n - 6$  árboles adyacentes a  $T$  y tales que como máximo dos están en la misma familia. Para desconectar  $T$  de  $L$  y  $F$  es necesario quitar al menos dos vértices de  $\mathcal{S}_f(T)$  y los  $2n - 6$  vértices considerados antes, es decir, un mínimo de  $2n - 4$  vértices.

*Subcaso  $h = 3$ .* Por (4.2), tenemos ya  $2n - 10$  árboles en familias distintas y que no están en  $\mathcal{S}_f(T)$ . Consideramos ahora los árboles

$$\begin{aligned} T + (n - 1, n) - (n, j_1), \\ T + (j_2, n) - (j_1, n) \end{aligned}$$

y los árboles

$$\begin{aligned} T + (n - 1, n) - (j_2, n - 1), \\ T + (j_1, n - 1) - (j_2, n - 1). \end{aligned}$$

Estos cuatro árboles son dos pares de hermanos en familias distintas y pertenecen a familias nuevas. Entonces sólo es posible desconectar  $T$  de  $F$  y  $L$  después de quitar como mínimo  $2n - 10 + 4$  vértices

que no están en  $\mathcal{S}_{f(T)}$  más dos de  $\mathcal{S}_{f(T)}$ , es decir, después de quitar  $2n - 4$  vértices.

*Subcaso  $h = 2$ .* En este caso,  $T$  es un hijo de tipo 1. Por (2), tenemos al menos  $2n - 8$  vecinos de  $T$  que no están en  $\mathcal{S}_{f(T)}$  y que están en familias distintas. Sabemos ya que los árboles de  $\mathcal{S}_{f(T)}$  que son hijos de tipo 0 o tipo  $j$ , para  $j \geq 2$ , están conectados a  $F$  o a  $L$  en  $G_n \setminus W$ .

Sea  $d = d_{f(T)}(n - 1)$  el grado de  $n - 1$  en  $f(T)$ . Si  $d \geq 2$ , teniendo en cuenta las adyacencias de  $T$  en  $\mathcal{S}_{f(T)}$ , es necesario quitar como mínimo  $2n - 8 + 4 = 2n - 4$  vértices para desconectar  $T$  de  $F$  y  $L$ .

Si  $d = 1$ , observamos que  $|\mathcal{S}_{f(T)}| = 3$ , por lo que tenemos que quitar los dos vértices que quedan de su familia para desconectar  $T$  de  $F$  y  $L$ . Además, en este caso,  $r = 0$  y  $0 \leq s \leq 2$  (recordemos que  $r$  y  $s$  eran el número de aristas en el camino  $\mathcal{P}$  de clase 2 y 1, respectivamente). Puesto que  $n \geq 4$ , no podemos tener  $s = 0$ .

Si  $s = 1$ , por (4.1), tenemos como mínimo  $2n - 2 - (2 + 4) = 2n - 8$  vecinos de  $T$  en familias distintas. Suponemos que la arista de clase 1 es  $(j_1, n)$  (si la arista de clase 1 es  $(j_1, n - 1)$  procederíamos análogamente). Consideramos los árboles:

$$\begin{aligned} T + (1, n) - (j_1, n), \\ T + (1, n) - e, \end{aligned}$$

donde  $e$  es una arista del árbol  $T_{j_1, b}$  y del ciclo formado al añadir la arista  $(1, n)$  a  $T$ . Estos árboles pueden ser hermanos pero no están ni en alguna de las familias de los  $2n - 8$  árboles considerados antes ni en  $\mathcal{S}_{f(T)}$ . Es decir, tenemos que quitar al menos  $2n - 8 + 2 + 2 = 2n - 4$  vértices para desconectar  $T$  de  $F$  y  $L$ .

Finalmente, si  $s = 2$ , por (4.1), tenemos al menos  $2n - 2 - (4 + 4) = 2n - 10$  árboles en familias distintas. Consideremos ahora los árboles:

$$\begin{aligned} T + (1, n) - (j_1, n), \\ T + (1, n) - e, \end{aligned}$$

donde  $e$  está en  $T_{j_1, b}$  y en el ciclo formado al añadir la arista  $(1, n)$  a

$T$ , y los árboles

$$T + (n - 2, n - 1) - (j_1, n - 1),$$

$$T + (n - 2, n - 1) - f,$$

donde  $f$  está en  $T_{j_1, f}$  y en el ciclo formado al añadir la arista  $(1, n)$  a  $T$ . De esta forma, obtenemos cuatro árboles que no están en  $\mathcal{S}_f(T)$ , y de modo que a lo sumo hay dos en la misma familia. Luego, aparte de los vértices de  $\mathcal{S}_f(T)$ , tenemos que quitar  $2n - 10 + 4 = 2n - 6$  vértices para desconectar  $T$  de  $F$  y  $L$ , es decir,  $2n - 6 + 2 = 2n - 4$  vértices.

Con esto finaliza la demostración de la afirmación y, por lo tanto, del teorema.  $\square$

Observamos que la arista-conectividad, por estar siempre entre la vértice-conectividad y el grado mínimo, es también igual a  $2(n - 2)$ .

#### 4.10 Grafo $G_n^*$ de árboles duales

Introducimos aquí el grafo  $G_n^*$ , que está estrechamente ligado con el grafo  $G_n$  que hemos estado estudiando. Por otra parte, las notaciones que introducimos en este apartado serán de gran utilidad en el siguiente apartado.

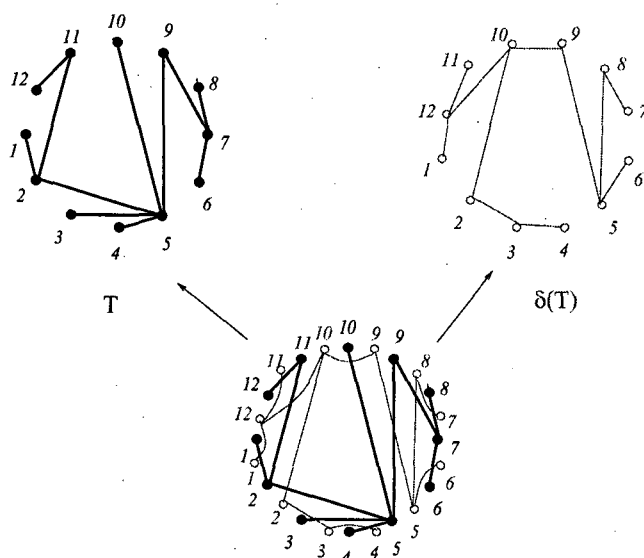


Figura 4.30: Árbol dual.

Dado un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  construimos su grafo dual  $T^* = \delta(T)$  de la siguiente forma. Entre cada par de vértices  $(i, i + 1)$  intercalamos un vértice  $i^*$  tal como se muestra en la figura 4.30. Dos vértices  $i^*, j^*$  son adyacentes en  $T^*$  si y sólo si el segmento  $(i^*, j^*)$  interseca una única arista de  $T$ . Observamos que, así definido,  $T^* \in \mathcal{T}_n$ .

Dados dos árboles  $T_1$  y  $T_2$  de  $\mathcal{T}_n$ , adyacentes en  $G_n$ , donde  $T_2 = T_1 - e + f$ , vamos a ver qué relación guardan sus respectivos árboles duales. En  $T_1 - e$  tenemos una cara interna que queda disconexa. Sean  $(i, i + 1)$  y  $(j, j + 1)$  tales que cierran dicha cara interna. En este caso, la arista  $(i^*, j^*)$  es común a  $T_1^*$  y  $T_2^*$  (véase figura 4.31).

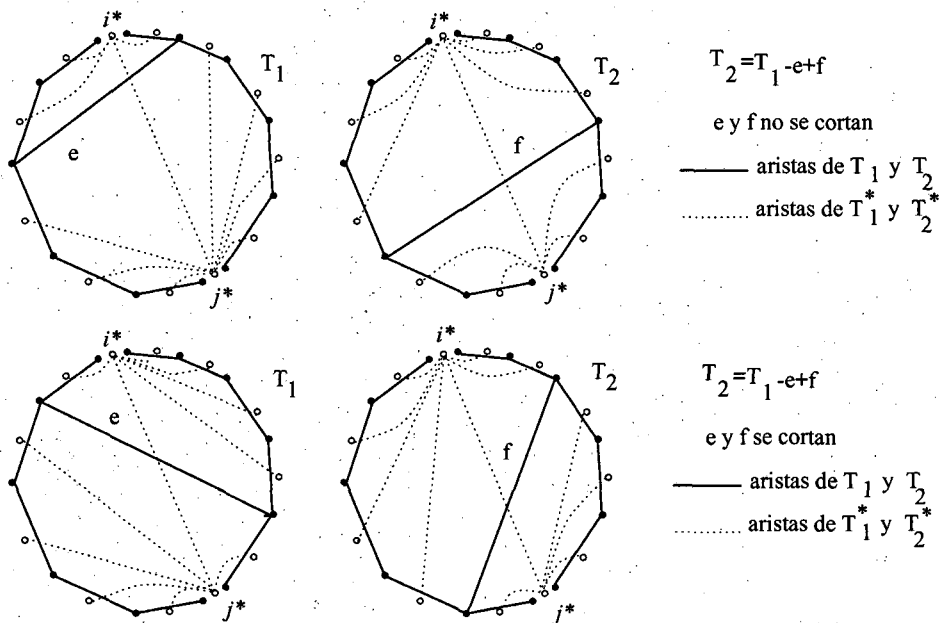


Figura 4.31: Relación entre las adyacencias en  $G_n$  y su dual.

Si las aristas que se intercambian  $T_1$  y  $T_2$  no se cortan, entonces la situación es tal como se ilustra en la primera parte de la figura 4.31. Esto es, unas cuantas aristas incidentes en  $j^*$  en  $T_1^*$  pasan a ser incidentes en  $i^*$  en  $T_2^*$ . En la segunda parte de la figura 4.31 se ilustra el caso en que las aristas intercambiadas entre  $T_1$  y  $T_2$  se cortan. En este caso, unas cuantas aristas incidentes en  $i^*$  en  $T_1^*$  pasan a ser

incidentes en  $j^*$  en  $T_2^*$  y algunas de las aristas incidentes en  $j^*$  en  $T_1^*$  pasan a ser incidentes en  $i^*$  en  $T_2^*$ .

Notamos  $G_n^*$  el grafo que tiene por conjunto de vértices  $\mathcal{T}_n$  y dos árboles  $T_1, T_2$  de  $\mathcal{T}_n$  son adyacentes si y sólo si  $T_1$  y  $T_2$  tienen una arista común  $(i, j)$  y se verifica que  $i$  y  $j$  se intercambian unos cuantos vértices adyacentes, tal como muestra la figura 4.32.

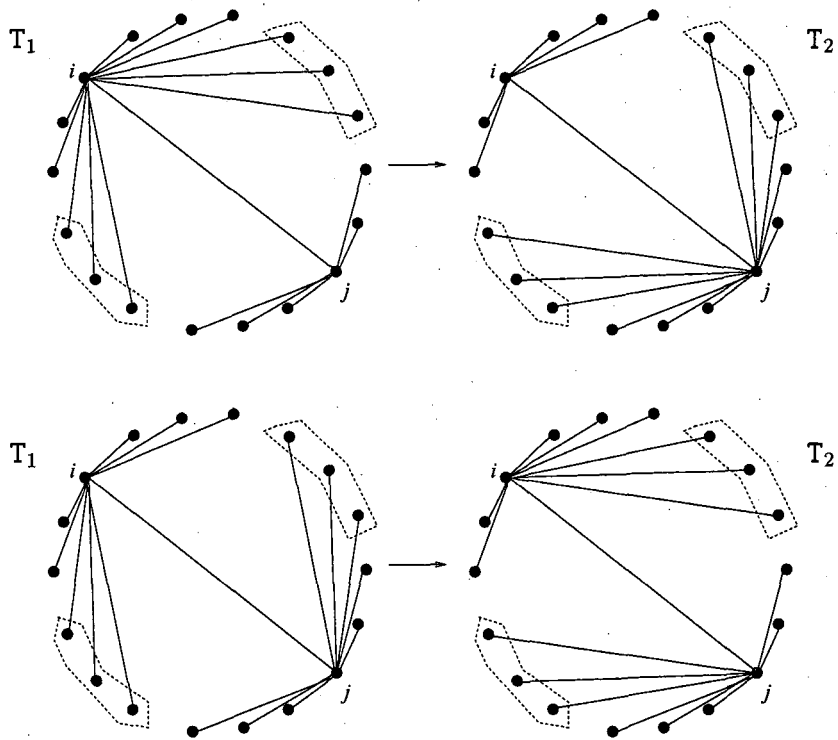


Figura 4.32: Adyacencias del grafo dual de  $G_n$ .

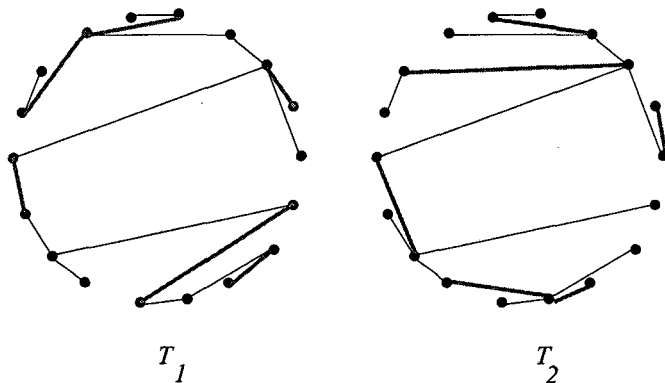
Así definido, todas las propiedades combinatorias que hemos demostrado en los apartados anteriores que verifica  $G_n$  son también válidas para  $G_n^*$ .

### 4.11 Intercambio simultáneo de aristas (o intercambio en paralelo)

Supongamos ahora que permitimos cambiar varias aristas al mismo tiempo de modo que al hacer un cambio, no se creen conflictos con los restantes. Necesitamos para ello definir la noción de cambios *independientes* (o aristas cambiables independientemente).

Sea  $P_n$  una nube de puntos en posición convexa, y sea  $T \in \mathcal{T}_n$ . Diremos que  $e_1, e_2$  son *aristas independientes* (o aristas independientemente cambiables en  $T$ , o cambiables simultáneamente en  $T$ ) si, y sólo si, al hacer el cambio  $T' = T - e_i + f_{e_i}$  (para todo  $f_{e_i}$  posible en  $T$ ,  $i = 1, 2$ ) podemos seguir realizando el cambio  $T'' = T' - e_j + f_{e_j}$ ,  $j \neq i$  (para todo  $f_{e_j}$  posible en  $T$ ). Una caracterización sencilla de las aristas independientes es la siguiente.

Al añadir a  $T$  la frontera de  $P_n$  se producen cierto número de caras internas. Dos aristas son independientes si no pertenecen dos a dos a una de estas dos caras.



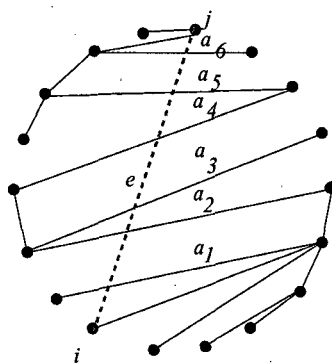
**Figura 4.33:**  $T_2$  se obtiene a partir de  $T_1$  por un solo intercambio simultáneo de aristas independientes.

Diremos que hemos efectuado en  $T$  un *cambio simultáneo de aristas* si hemos intercambiado al mismo tiempo varias aristas independientes dos a dos.

El primer resultado que presentamos es el número máximo de cambios simultáneos que tenemos que hacer para introducir una arista  $e \notin T$  en un árbol  $T$ .

**Proposición 4.8** *El coste de introducir una arista  $e \notin T$  en  $T$  es a lo sumo  $\log(n - 3) + 1$ .*

*Demostración.* La arista  $e$  cortará unas cuantas aristas de  $T$  (a lo sumo  $n - 3$ , puesto que  $T$  tiene al menos dos aristas sobre  $CH(P_n)$ ).



**Figura 4.34:** Ordenamos las aristas de  $T$  que cortan la arista  $e$ .

Ordenamos las aristas que corta  $e$  de la siguiente manera. Supuesto  $e = (i, j)$ , nos desplazamos desde el vértice  $i$  hasta el vértice  $j$  y vamos numerando las aristas según el orden en que aparecen.

Observamos que dos aristas consecutivas pertenecen a la misma cara y, lo que más nos interesa, que dos aristas no consecutivas no pertenecen nunca a una misma cara.

Notamos como  $c(T, e)$  al número de aristas de  $T$  que son cortadas por  $e$ . En un primer cambio simultáneo podemos cambiar  $\frac{1}{2}c(T, e)$  aristas de las que corta  $e$  (elegidas de forma alternada) por aristas de la frontera. Procediendo sucesivamente, obtenemos que en  $O(\log c(T, e))$  pasos podemos introducir la arista  $e$ .  $\square$

Como ejemplo en el cual se alcanza la cota enunciada en la proposición anterior, basta considerar  $T = S_p$  y  $e = (p - 1, p + 1)$ .

Vamos a ver ahora que es posible transformar un árbol cualquiera

$T \in \mathcal{T}_n$  en cualquier otro con  $O(\log n)$  cambios simultáneos.

**Teorema 4.9** *Es posible transformar un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  en otro cualquiera con  $O(\log n)$  cambios simultáneos. Además, esta cota es ajustada.*

La demostración de este teorema se apoya en los dos lemas siguientes.

**Lema 4.9** *Dado un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$ , en tiempo  $O(\log n)$  podemos pasar por intercambios simultáneos de aristas de  $T$  a un árbol  $U$  tal que su dual  $U^*$  verifica que  $\Delta(U^*) \leq 3$ .*

*Demostración.* Dado un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$ , el grado de los vértices de su árbol dual se corresponde con el tamaño de las caras internas que se producen al añadir a  $T$  la frontera. Así pues, el hecho de que  $\Delta(T^*)$  sea grande equivale a que existan caras limitadas por muchas aristas. Vamos a ver cómo “trocear” dichas caras.

Ampliamos el árbol  $T$  a una triangulación  $\mathfrak{T}$ . Sea  $e$  una diagonal larga de  $\mathfrak{T}$ , esto es, una diagonal tal que separa  $CH(P_n)$  en dos cadenas, cada una de longitud a lo sumo  $\frac{2n}{3}$ . Si  $e \in T$ , hemos terminado. Si no, puesto que  $T \subset \mathfrak{T}$  y  $e \in \mathfrak{T}$ ,  $e$  no interseca ninguna arista de  $T$  y podemos intercambiar  $e$  por alguna arista de  $T$ . Repetimos el proceso en paralelo en cada uno de los dos subconvexos que nos ha creado  $e$ .

Un detalle técnico es comprobar que siempre podemos reiterar el proceso de forma que en ningún momento quitemos ninguna de las aristas que ya hemos introducido anteriormente. Para que en un momento determinado del proceso pudiéramos vernos obligados a eliminar una de las aristas ya introducidas, sería necesario que a lo largo de éste hubiéramos introducido varias aristas que forman una cara de tamaño grande. Se puede comprobar que si  $(i_1, i_2)$ ,  $(i_2, i_3)$  e  $(i_3, i_4)$  son aristas que ya hemos introducido, entonces podemos encontrar una arista  $e$  para seguir el proceso de forma que  $e$  no sea incidente ni a  $i_1$  ni a  $i_4$ , con lo cual hemos demostrado que se verifica el enunciado, ya que en tiempo logarítmico llegaremos a un árbol tal que el tamaño



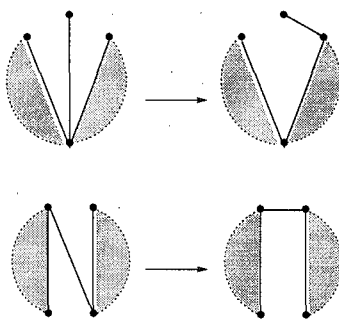
de las caras será suficientemente pequeño y, por lo tanto, el grado de su árbol dual estará acotado tal como deseamos.  $\square$

**Lema 4.10** *Sea  $T \in \mathcal{T}_n$  un árbol tal que su árbol dual  $T^*$  tiene  $\Delta(T^*) \leq 3$ ; entonces con a lo sumo cinco intercambios simultáneos de aristas se puede transformar  $T$  en un árbol  $W$  que tiene al menos  $\frac{n}{6}$  aristas en la frontera incidentes a hojas de  $W$  y  $\Delta(W^*) \leq 3$ .*

*Demostración.* Sea  $n_i$  el número de vértices de grado  $i$  en  $T^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Se verifica que:  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 2(n_1 + n_2 + n_3 - 1)$ . De donde se obtiene que  $n_3 = n_1 - 2$ . Observamos que los vértices de  $T^*$  de grado uno se corresponden con aristas de  $T$  sobre la frontera del convexo.

En un primer paso de la demostración, estudiamos cómo reducir el número de vértices de grado dos en  $T^*$ , con el objetivo de aumentar los vértices de grado uno, que se corresponde con un aumento de aristas de  $T$  en la frontera.

Para cada dos vértices consecutivos de  $T^*$  de grado dos, procediendo como se indica en la figura 4.35 pasamos a tener un vértice de grado tres y otro de grado uno. Si tenemos varios conjuntos de dos vértices consecutivos en  $T^*$ , podemos dividirlos en conjuntos de dos vértices consecutivos y operar en paralelo en cada pareja.



**Figura 4.35:** Con un intercambio se consigue una arista en la frontera.

Así pues, con sólo un intercambio simultáneo de aristas en  $T$  obtenemos un árbol  $U$  tal que su dual no tiene dos vértices de grado dos consecutivos.

Veamos ahora que  $U$  tiene al menos  $\frac{n}{4}$  aristas sobre la frontera del convexo; o lo que es equivalente, que su árbol dual  $U^*$  tiene al menos  $\frac{n}{4}$  hojas. En el peor caso,  $n_2 = 2n_3 + 1 = 2(n_1 - 2) + 1 = 2n_1 - 3$  y, como  $n_3 = n_1 - 2$ , tenemos que:

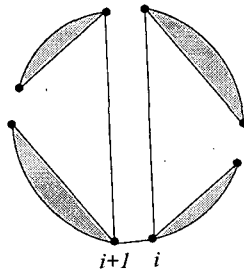
$$n = n_1 + n_2 + n_3 = n_1 + 2n_1 - 3 + n_1 - 2 = 4n_1 - 5$$

de donde:  $n_1 = \frac{n+5}{4}$ .

Así pues, en el peor caso  $U^*$  tiene al menos  $\frac{n}{4}$  hojas, lo que se traduce en que  $U$  tiene al menos  $\frac{n}{4}$  aristas sobre la frontera de  $P_n$ .

Sea  $(i, i + 1)$  una arista de  $U$  sobre la frontera de  $P_n$ . En caso de no ser incidente a una hoja, vamos a estudiar si mediante un número constante de intercambios podemos conseguir una que sí lo sea.

Consideramos el vértice  $i^*$  de  $U^*$ . Por ser  $(i, i + 1) \in U$ ,  $i^*$  es una hoja de  $U^*$ . Sea  $j^*$  el vecino de  $i^*$  en  $U$ . Ya que  $\Delta(U^*) \leq 3$ , el grado de  $j^*$  es dos o tres. Si  $d_{T^*}(j^*) = 2$ , entonces  $(i, i + 1)$  es una arista incidente en una hoja de  $T$ . Queda, pues, el caso  $d_{T^*}(j^*) = 3$ . Con una discusión de casos, distinguiendo según los grados en  $U^*$  de los otros dos vértices vecinos de  $j^*$ , se demuestra que con a lo sumo cuatro intercambios en paralelo todas las aristas de  $T$  sobre la frontera se pueden transformar en aristas sobre la frontera que son incidentes a hojas de  $T$ , salvo en el caso que se presenta en la figura 4.36, donde en cada zona sombreada hay al menos un vértice, además de los extremos indicados en la figura.



**Figura 4.36:** Aristas de la frontera no fácilmente convertibles en hojas.

Aristas de este tipo existen un número relativamente pequeño. Concretamente, si tenemos  $k$  aristas de este tipo, entonces tenemos al menos  $2k + 2$  aristas sobre la frontera que son incidentes a hojas.

Sea  $W$  el árbol obtenido a partir de  $U$  y tal que todas sus aristas sobre la frontera son incidentes a hojas o son del tipo que se muestra en la figura 4.36; teniendo de estas últimas un total de  $k$ . En el peor caso, el número de aristas en la frontera que son incidentes a hojas en  $W$  es  $2k + 2$ . Como el número de aristas en la frontera que tiene  $W$  coincide con el número de aristas de este tipo que tenía  $U$ , concluimos que es mayor o igual que  $\frac{n}{4}$ . Así pues, en el peor caso tenemos  $k + 2k + 2 \geq \frac{n}{4}$ , de donde  $k \geq \frac{1}{2}(\frac{n}{4} - 2)$ . Por lo tanto, el número de aristas en la frontera y que son incidentes a hojas en  $W$  es al menos  $\frac{2}{3}(\frac{n}{4} - 2) + 2 = \frac{n}{6} + \frac{2}{3}$ .

Concluimos que, en a lo sumo cinco intercambios simultáneos, obtenemos a partir de  $T$  un árbol  $W$  con al menos  $\frac{n}{6}$  aristas en la frontera incidentes a hojas.  $\square$

*Demostración del teorema.* Sea  $S_p$  una estrella cualquiera y sea  $T \in \mathcal{T}_n$  un árbol cualquiera. Vamos a ver que podemos pasar de  $T$  a  $S_p$  usando  $O(\log n)$  intercambios simultáneos de aristas, lo cual prueba el teorema.

Introducimos la arista  $(p - 1, p + 1)$  en  $T$ . Por la proposición 4.8 sabemos que el coste de esta operación es, a lo sumo,  $O(\log n)$ . Sea  $U$  el árbol obtenido. El vértice  $p$  será adyacente a  $p - 1$  o a  $p + 1$  en  $U$ . Suponemos que es adyacente a  $p + 1$  (es indistinto).

Aplicando el lema 4.7 podemos pasar, usando  $O(\log n)$  intercambios simultáneos, de  $U$  a un árbol  $U_0 \in \mathcal{T}_n$  tal que  $\Delta(U_0^*) \leq 3$ . Aplicando el lema 4.8, sabemos que en a lo sumo cinco intercambios en paralelo introducimos  $\frac{n}{6}$  aristas de  $U_0$  en la frontera que son incidentes a hojas. Necesitamos que  $p - 1$  y  $p + 1$  no sean hojas de  $U_0$  (ni de los árboles que aparezcan en el proceso que a continuación describimos). Con un solo intercambio adicional podemos evitar que esto ocurra.

Sea  $U_1$  el árbol obtenido a partir de  $U_0$  al quitar todas las aristas de  $U_1$  que están en la frontera y son incidentes a hojas.

Aplicando repetidas veces el lema 4.8 obtenemos una secuencia de árboles  $U_0, U_1, U_2, \dots, U_r$  donde  $U_r$  tiene un número constante de vértices. Podemos imponer que se reduce a un árbol de orden cuatro (mínimo número para que  $p - 1$  y  $p + 1$  no sean hojas de  $U_r$ ). Como en

cada caso hemos reducido una fracción constante de vértices, tenemos que  $r = O(\log n)$ .

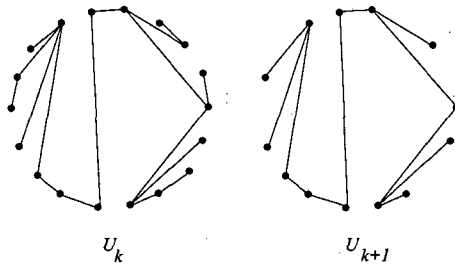


Figura 4.37: Obtención de  $U_{k+1}$  a partir de  $U_k$ .

Deshacemos ahora el proceso de  $U_r$  a  $U_0$ . Añadimos a  $U_r$  el vértice  $p$  y la arista  $(p, p+1)$ . En cada paso de  $U_{r+1}$  a  $U_r$ , todas las hojas que hemos quitado pueden conectarse con  $p$  con a lo sumo dos intercambios paralelos. Así pues, llegamos a la estrella  $S_p$  con  $O(\log n)$  intercambios paralelos.  $\square$

## 4.12 Grafos de árboles geométricos en posición general: excentricidades

En los apartados anteriores nos concentrábamos en las propiedades combinatorias de los grafos de árboles geométricos,  $T(P)$ , en el caso de que  $P$  es un conjunto de puntos en posición convexa. En el presente apartado y en el siguiente generalizamos algunos de los resultados obtenidos anteriormente para configuraciones de puntos en posición general.

En el apartado 4.4 hemos visto que si  $P_n$  es una nube de puntos en posición convexa, entonces el centro del grafo  $T(P_n)$  contiene todas las estrellas de  $\mathcal{T}(P_n)$  y también los caminos que se obtienen al eliminar una arista de la envolvente convexa de  $P_n$ . Vamos a ver ahora que si  $P_n$  no está en posición convexa, entonces el centro sólo contiene estrellas de  $\mathcal{T}(P_n)$  y no necesariamente todas.

Diremos que un punto  $q$  ve un segmento  $xy$  si, y sólo si, el triángulo de vértices  $q, x$  e  $y$  tiene interior vacío.

**Proposición 4.9** *Sea  $P_n$  una nube de  $n$  puntos que no están en posición convexa. Sea  $T \in \mathcal{T}(P_n)$ . Si  $T$  no es una estrella, entonces existe otro árbol  $T' \in \mathcal{T}(P_n)$  tal que  $T$  y  $T'$  son disjuntos en aristas.*

*Demostración.* Hacemos inducción sobre  $n$ . Para  $n = 4$  se comprueba por inspección directa que el enunciado es cierto. Supongamos cierto el enunciado para  $n - 1$ . Sea  $P_n$  una nube de  $n$  puntos que no están en posición convexa y sea  $T \in \mathcal{T}(P_n)$  tal que no es una estrella. Sea  $q$  una hoja de  $T$ . Consideramos  $T^* = T - q$  y  $P_{n-1} = P_n \setminus \{q\}$ . En caso de que  $P_{n-1}$  esté en posición convexa, es seguro que existe otra hoja de  $T$  con la que esto no ocurre. Como  $T^* \in \mathcal{T}(P_{n-1})$ , por inducción existe  $U \in \mathcal{T}(P_{n-1})$  tal que  $T^*$  y  $U$  son disjuntos en aristas. Distinguimos ahora dos casos, según si  $q$  pertenece o no a la envolvente convexa de  $P_n$ .

Si  $q$  está en la envolvente convexa de  $P_n$  entonces  $q$  ve una arista  $xy$  de  $U$ . Por ser  $q$  una hoja de  $T$ , no puede ser que las aristas  $qx$  y  $qy$  sean ambas de  $T$ . Si  $qx \notin T$ , entonces basta considerar  $T' = U + qx$ .

Si  $q$  no pertenece a la envolvente convexa de  $P_n$ , entonces consideramos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $P_{n-1}$  tal que todas las aristas de  $U$  lo sean de  $\mathcal{T}$ . Consideramos el triángulo  $xyz$  de  $\mathcal{T}$  en cuyo interior está  $q$ . Por ser  $q$  una hoja de  $T$ , a lo sumo una de las aristas  $qx$ ,  $qy$  y  $qz$  es de  $T$ . Supongamos que  $qx \notin T$ , entonces consideramos  $T' = U + qx$ . □

Recordamos que la excentricidad,  $e(T)$ , de un árbol  $T \in \mathcal{T}(P_n)$  es la máxima distancia de  $T$  a cualquier otro árbol de  $\mathcal{T}(P_n)$ .

**Corolario 4.2** *Sea  $P_n$  una nube de puntos que no está en posición convexa y sea  $T \in \mathcal{T}(P_n)$ . Si  $T$  no es una estrella, entonces  $e(T) \geq n - 1$ .*

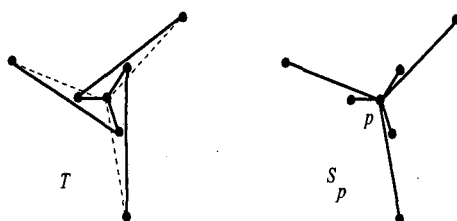
Del trabajo de D. Avis y K. Fukuda en [1] (véase también el trabajo de E. Rivera y V. Urrutia en [60]), se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 4.10** *Sea  $P_n$  una nube de  $n$  puntos,  $p$  un punto de la envolvente convexa de  $P_n$  y  $S_p$  la estrella en  $p$ , entonces  $e(S_p) = n - 2$ . En consecuencia,  $S_p$  es del centro de  $\mathcal{T}(P_n)$ .*

En los trabajos citados, para demostrar este resultado se apoyan en el siguiente.

**Lema 4.11** Sea  $P_n$  una nube de  $n$  puntos,  $p$  un punto de la envolvente convexa de  $P_n$  y  $S_p$  la estrella en  $p$ . Para cualquier árbol  $T \in \mathcal{T}(P_n)$ ,  $T \neq S_p$  existen aristas  $e \in T \setminus S_p$  y  $f \in S_p \setminus T$  tales que  $T + f - e \in \mathcal{T}(P_n)$ .

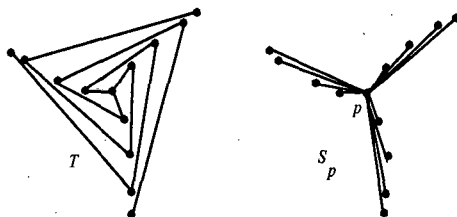
Si  $p$  no está en la envolvente convexa de  $P_n$  la implicación anterior no es, en general, cierta. El ejemplo más sencillo lo muestra la siguiente figura.



**Figura 4.38:** No es posible añadir ninguna arista de  $S_p \setminus T$  en  $T$ .

Pero en este ejemplo el número de cambios que hay que realizar para transformar  $T$  en  $S_p$  es 4, que sigue siendo menor que  $n - 2 = 5$ .

Consideramos ahora  $P_n$  una configuración de  $n$  puntos con  $n - 1$  repartidos equitativamente en tres curvas convexas, y  $S_p$  y  $T$  como muestra la siguiente figura.



**Figura 4.39:** Ejemplo de estrella que no está contenida en el centro  $T(P_n)$  ya que  $d(S_p, T) > n - 2$ .

En este caso tenemos que  $d(S_p, T) = (n - 4) + \frac{n - 4}{3} > n - 1 (n > 10)$ , de donde concluimos:

**Teorema 4.11** *Sea  $P_n$  una configuración de  $n$  puntos, entonces el radio de  $T(P_n)$  es igual a  $n-2$  y  $\{S_p | p \in CH(P_n)\} \subseteq \{\text{centro de } T(P_n)\} \subseteq \{S_p | p \in P_n\}$ . Donde, en general, ambas inclusiones no son igualdades.*

*Demostración.* El ejemplo anterior muestra que en general la segunda inclusión no es una igualdad. En general tampoco lo es la primera. Basta considerar  $P_n$  una nube de puntos que tiene  $n-1$  sobre una circunferencia y un punto  $p$  en el interior. En este caso  $S_p$  también pertenece al centro.  $\square$

De hecho tenemos un resultado más general. Denotamos por  $CH_2(P_n)$  la envolvente convexa de  $P_n \setminus CH(P_n)$ . Se tiene un resultado similar al lema 4.11 para puntos de  $CH_2(P_n)$  que nos permite asegurar que las estrellas en puntos de  $CH_2(P_n)$  también están contenidas en el centro de  $T(P_n)$ . El ejemplo de la figura 4.38 muestra que el lema 4.11 no es cierto en general para estrellas  $S_p$  con  $p \in CH_3(P_n)$  (siendo  $CH_3(P_n)$  la envolvente convexa de  $P_n \setminus \{CH(P_n) \cup CH_2(P_n)\}$ ), y el ejemplo de la figura 4.38 demuestra que tampoco es válido para puntos más profundos. Es bien conocido el resultado que se enuncia a continuación y que será utilizado en la demostración del teorema siguiente.

**Lema 4.12** *Dado  $S$  un conjunto de segmentos rectilíneos en el plano que no se cortan (salvo quizás en sus extremos) y en posición general, entonces para todo punto  $p$  exterior a la envolvente convexa de  $S$  se verifica que  $p$  ve un segmento de  $S$ .*

**Teorema 4.12** *Sea  $P_n$  una nube de  $n$  puntos,  $p \in CH_2(P_n)$  y  $S_p$  la estrella en  $p$ . Para cualquier árbol  $T \in \mathcal{T}(P_n)$ ,  $T \neq S_p$ , existen aristas  $e \in T \setminus S_p$  y  $f \in S_p \setminus T$  tales que  $T + f - e \in \mathcal{T}(P_n)$ .*

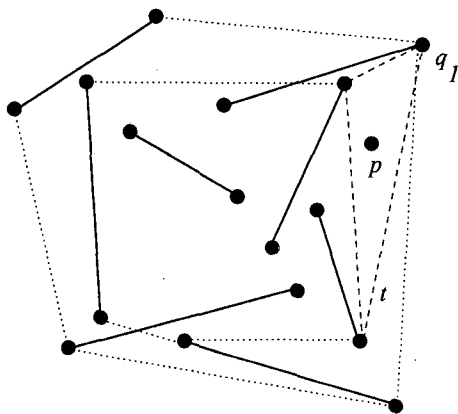
Para la demostración de este teorema vamos a ver un resultado que generaliza el lema 4.10 y que, si bien nos proporciona más información de la necesaria para demostrar el teorema 4.9, lo incluimos porque creemos que es interesante por sí mismo.

**Teorema 4.13** *Sea  $S$  un conjunto de segmentos que no se intersecan salvo quizá en los extremos,*

$$S = \{s_1 = p_1q_1, s_2 = p_2q_2, \dots, s_r = p_rq_r\}.$$

*Consideremos  $P_S$  el conjunto de puntos formado por los extremos de los segmentos de  $S$ , esto es,  $P_S = \{p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r\}$ . Si  $p$  es un punto que está fuera de  $CH_2(P_S)$  y, suponemos que  $\{p\} \cup P_S$  no contiene tres puntos alineados, entonces  $p$  ve completamente un segmento de  $S$ .*

*Demostración.* Si  $p$  está fuera de  $CH(P_S)$ , entonces por el lema 4.12 ya sabemos que se cumple el enunciado. Supongamos, pues, que estamos en el caso contrario. Ampliamos  $S$  a una triangulación  $\tau$  de  $P_S$ . Entonces  $p$  está en el interior de algún triángulo  $t$  de  $\tau$ . Si uno de los lados de  $t$  es un segmento de  $S$ , ya hemos acabado (ya que es visible desde  $p$ ). Supongamos, pues, que ninguno de los lados de  $t$  es un segmento de  $S$  (véase figura 4.45). Por ser  $p$  exterior a  $CH_2(P_S)$ , uno de los vértices de  $t$  tiene que serlo de  $CH(P_S)$ .



**Figura 4.40:** Ninguno de los lados del triángulo  $t$  que contiene a  $p$  es un segmento de  $S$ .

Notamos  $q_1$  a dicho vértice y ordenamos los demás puntos de  $P_S$  polarmente desde  $p$  (en sentido contrario a las agujas del reloj) a partir de  $q_1$ . En caso de que sólo haya un segmento de  $S$  incidente en  $q_1$ , denotamos dicho segmento por  $s_1$ . En el caso en que haya más de



un segmento de  $S$  adyacente a  $q_1$ , puede ocurrir que todos estén a un lado de la recta que definen  $p$  y  $q_1$  o que se repartan a ambos lados de dicha recta, tal como se muestra en la figura 4.41.

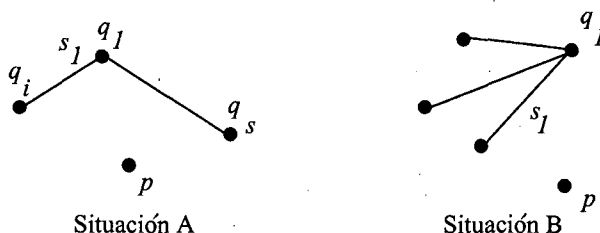


Figura 4.41: Elección del segmento  $s_1$ .

En el caso B uno de los segmentos impide la visibilidad desde  $p$  de cualquiera de los otros. Denotamos por  $s_1$  a dicho segmento y  $q_i$  a su otro extremo. En el caso A esta situación puede suceder en los dos lados de la recta determinada por  $pq_1$ . Si  $s_d$  es el segmento de un lado que impide ver todos los demás y  $s_r$  es el homólogo en el otro lado, es indistinto cuál de los dos elijamos. Para fijar un criterio, tomamos como  $s_1$  el segmento lexicográficamente menor, esto es, si suponemos que los segmentos son  $q_1q_i$  y  $q_1q_s$ , con  $q_i < q_s$ , entonces  $s_1 = q_1q_i$ . Para fijar ideas, suponemos que  $q_i$  está a la izquierda de la recta orientada que pasa por  $p$  y  $q_1$ . (El estudio es análogo en el otro caso).

Si  $q_i$  es visible desde  $p$ , basta considerar  $S^*$  la intersección del conjunto  $S$  con el interior del triángulo de vértices  $p$ ,  $q_1$  y  $q_i$ . Observamos que  $S^*$  está formada por unos cuantos segmentos de  $S$ . Puesto que  $p$  está fuera de la envolvente convexa de  $S^*$ , por el lema 4.12, podemos asegurar que  $p$  ve un segmento de  $S^*$ , que, a su vez, es segmento de  $S$ .

Supongamos que  $p$  no ve  $q_i$ . En este caso, de entre los segmentos que cortan  $pq_i$ , notamos como  $s_2$  al segmento cuyo corte con  $pq_i$  está más próximo a  $p$ . Sean  $q_{f_2} < q_{l_2}$  los extremos de  $s_2$ . Puesto que tenemos ordenación polar desde  $p$ , podemos asegurar que  $q_{f_2} < q_i < q_{l_2}$ . Estudiamos los posibles casos.

Caso 1.  $p$  ve a  $q_{f_2}$  y a  $q_{l_2}$ . Entonces consideramos  $S^*$  la intersección de  $S$  con el interior del triángulo de vértices  $p$ ,  $q_{f_2}$  y  $q_{l_2}$ . Nuevamente  $p$  está fuera de  $CH(S^*)$  y, por lo tanto,  $p$  ve un segmento de  $S^*$  que también es de  $S$ .

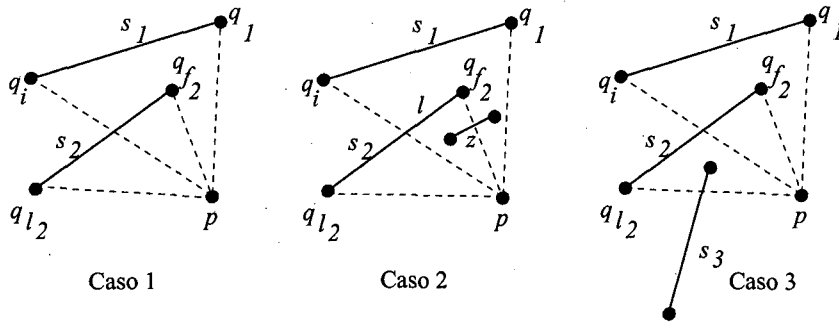


Figura 4.42: Distinción de casos.

Caso 2.  $p$  no ve a  $q_{f_2}$ . Es decir, existe algún segmento  $z \in S$  que corta  $pq_{f_2}$ . En este caso consideramos  $M^*$ , la intersección de  $S$  con el interior del triángulo formado por  $q_1$ ,  $q_i$  y  $p$ . Observamos que ahora  $M^*$  contiene algún segmento entero de  $S$  (en particular, contiene a  $z$ , por la elección que hemos hecho de  $s_2$ ) y parte de otros segmentos de  $S$  (en particular, contiene una parte del segmento  $s_2$ , que llamaremos  $l$ ).

Por el lema 4.10, sabemos que  $p$  ve algún segmento de  $M^*$  y observamos que  $z$  impide que  $p$  vea  $l$  y  $l$  impide que  $p$  vea cualquier otro segmento no entero de  $S$ . Así pues, concluimos que  $p$  ve algún segmento de  $S$  dentro del triángulo considerado.

Caso 3.  $p$  ve a  $q_{f_2}$ , pero no ve a  $q_{l_2}$ . En este caso, de entre los segmentos de  $S$  que cortan a  $pq_{l_2}$ , denotamos por  $s_3$  al que tiene el corte más próximo a  $p$ . A partir de aquí repetiremos la construcción anterior.

Observamos que este proceso debe acabar antes de dar la vuelta entera alrededor de  $p$ , pues, en caso contrario, en algún momento nos encontraríamos con una de las situaciones que se muestran en la figura 4.43.

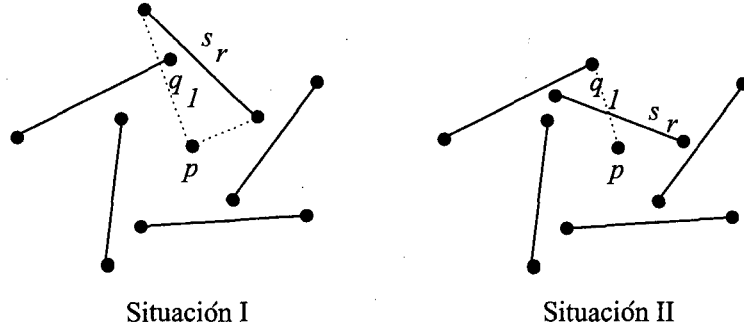


Figura 4.43: Situaciones prohibidas.

En I,  $q_1$  está en el interior del triángulo formado por  $p$  y  $s_r$ , lo cual contradice que  $q_1 \in CH(S)$ . En II, la situación presentada contradice la hipótesis de que  $p$  ve el punto  $q_1$ .

Así pues, en algún momento, antes de llegar a dar la vuelta entera, llegamos a un segmento  $s_i \in S$  tal que estamos en una situación como la expuesta en el caso 1 o como la expuesta en el caso 2, lo cual concluye la demostración.  $\square$

*Demostración del teorema 4.9.* A la luz del teorema 4.13, la demostración quedaría reducida al siguiente razonamiento. Dado un árbol  $T$  y un punto  $p \in CH_2(P_n)$ ,  $p$  ve una arista  $v \in T \setminus S_p$  y  $p$  no puede ser adyacente en  $T$  a los dos extremos de  $v$ . Supongamos que  $m$  es un extremo de  $v$  no adyacente a  $p$  y consideremos  $pm \in S_p$  la arista que añadimos a  $T$ . Quitando una arista cualquiera del ciclo que se origina, hemos concluido.  $\square$

Consecuencias del teorema 4.9 son los siguientes resultados.

**Corolario 4.3** Si  $p$  es un punto de  $CH(P_n)$  o  $CH_2(P_n)$  y  $T \in \mathcal{T}(P_n)$ , entonces  $d(T, S_p) = n - 1 - g$ , siendo  $g$  el grado de  $T$  en  $p$ .

**Teorema 4.14** Si  $p$  es un punto de  $CH_2(P_n)$ , entonces la estrella  $S_p$  pertenece al centro de  $T(P_n)$ .

**Corolario 4.4** Sea  $T \in \mathcal{T}(P_n)$ . Todo automorfismo de  $T(P_n)$  conserva el grado en  $T$  de los puntos que están sobre  $CH(P_n)$  y sobre  $CH_2(P_n)$ .

*Demostración.* Basta recordar que los automorfismos conservan las distancias.  $\square$

Acabamos este apartado mencionando que una propiedad como la que se enuncia en el teorema 4.13 no es, en general, cierta para puntos de mayor profundidad. Basta considerar el ejemplo mostrado en la siguiente figura 4.44. En este caso,  $p$  no ve ninguno de los segmentos.

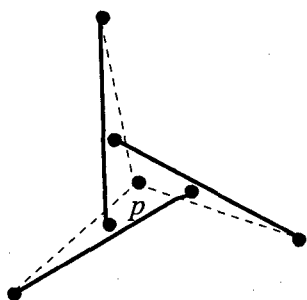
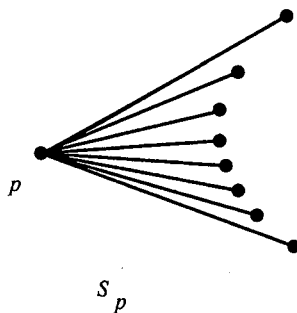


Figura 4.44: El punto  $p$  no ve ningún segmento.

### 4.13 Grafos de árboles geométricos en posición general: grados mínimo y máximo

En el apartado 4.3 hemos visto que si una nube de puntos está en posición convexa, entonces el grado mínimo de su grafo de árboles geométricos es  $2n - 4$  y sólo se alcanza este grado sobre las estrellas. Posteriormente, E. Rivera y V. Urrutia [60] demuestran que este valor es una cota inferior del grado mínimo del grafo de árboles geométricos de cualquier nube de  $n$  puntos. Es lógico interesarse por una cota superior del grado mínimo. Una pregunta que cabe hacerse es: ¿Existe alguna nube de  $n$  puntos  $P_n$  tal que  $\delta(P_n) \in \Omega(n^2)$ ? Guiados por el caso convexo uno puede centrar su atención en las estrellas. Cuanto

“menos convexa” sea la nube de puntos  $P_n$  desde un punto  $p \in P_n$  mayor será el grado de la estrella  $S_p$  en  $p$ . El caso extremo se alcanza cuando todos los puntos de  $P_n \setminus \{p\}$  están sobre una curva cóncava desde  $p$ , caso que muestra la siguiente figura.



**Figura 4.45:** Estrella con grado de orden cuadrático.

Observamos que si  $S_p$  es una estrella,  $f$  una arista de  $S_p$  y  $e$  arista que no está en  $S_p$ , entonces  $S_p + e - f$  es un árbol geométrico si y sólo si  $S_p + e$  es un grafo plano. Por otra parte tenemos que, para cualquier arista  $e$  que no es de  $S_p$ , el ciclo que se crea en  $S_p + e$  es de longitud 3.

Volviendo a la figura anterior, como el número de aristas posibles  $e$  tales que  $S_p + e$  es un grafo plano es  $\binom{n-1}{2}$ , el grado de  $S_p$  en este caso es  $2\binom{n-1}{2}$ . Tenemos, pues, un ejemplo de estrella de grado cuadrático y, además, como cualquier otra estrella de cualquier configuración tendrá grado más pequeño que ésta, obtenemos que ésta es una cota superior del grado mínimo. No obstante, es fácil ver que en la configuración de la figura cualquier estrella que no sea la considerada tiene grado lineal.

¿Existe alguna configuración  $P_n$  tal que el grado de todas sus estrellas sea cuadrático? La respuesta es afirmativa. Para verlo basta considerar una configuración con  $n/2$  puntos en dos curvas convexas, tal como muestra la figura 4.45. En este caso, cualquier estrella tiene grado mayor que  $2\binom{n/2}{2}$  y, por tanto, cuadrático. Sin embargo, al contrario de lo que ocurre en el caso de puntos en posición convexa, en este caso el grado mínimo no se alcanza en una estrella. Basta considerar el árbol  $T$  se muestra en la figura 4.46, cuyo grado es  $4n - 11$  y, por lo tanto, lineal. Queda pues aún sin contestar la primera pre-

gunta que nos hacíamos al empezar este apartado. Conjeturamos que la respuesta es negativa, pues parece que siempre podemos conseguir “romper” la visibilidad de forma similar a como lo hemos hecho en la figura 4.46. Tendríamos entonces un enunciado como el que sigue.

**Conjetura:** *El grado mínimo de todo grafo de árboles geométricos es lineal en el número de puntos.*

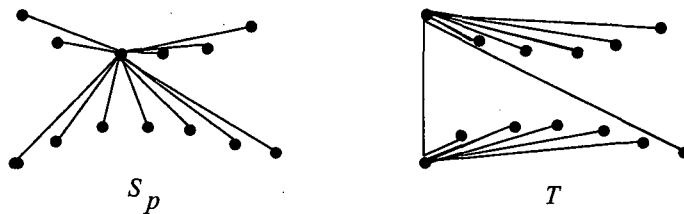


Figura 4.46: Árbol con grado  $4n - 11$ .

A continuación se presenta una acotación del grado mínimo en función del número de puntos y del número de capas convexas de la nube de puntos. Considerando  $CH(P_n)$  como la primera capa convexa de  $P_n$ , la  $i$ -ésima capa convexa de  $P_n$  es:

$$CH_i(P_n) = CH(P_n \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} CH_j(P_n))).$$

**Proposición 4.10** *Sea  $P_n$  una nube de  $n$  puntos con  $k$  capas convexas. Sea  $p$  un punto de la  $k$ -ésima capa y sea  $S_p$  la estrella en  $p$ . Entonces el grado de  $S_p$  en  $T(P)$  satisface*

$$d(S_p) \leq (4k - 2)(n - 1).$$

*Demostración.* Notamos por  $C_i$  a la  $i$ -ésima capa convexa de  $P_n$ . Sea  $n_i$  el número de puntos que tiene  $P_n$  en  $C_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Observamos que en  $S_p$  cada punto es visible a lo sumo por dos puntos que estén sobre su propia capa convexa. Por otra parte, cualquier punto de  $C_i$  es visible a lo sumo por dos puntos de  $C_j$ ,  $j < i$ .

Finalmente, como el grado de la estrella  $S_p$  es el doble que el

número de parejas de vértices que se ven en  $S_p$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 d(S_p) &\leq 2((1 + 2(k - 1))(n_k - 1) + (1 + 2(k - 2))n_{k-1} + \dots + \\
 &\quad (1 + 2)n_2 + n_1) \\
 &= 2(n_k + n_{k-1} + \dots + n_2 + n_1 - 1 + \\
 &\quad 2((k - 1)(n_k - 1) + (k - 2)n_{k-1} + \dots + n_2)) \\
 &= 2(n - 1) + 4((k - 1)(n_k - 1) + (k - 2)n_{k-1} + \dots + n_2) \\
 &< 2(n - 1) + 4((k - 1)(n - 1)) = (4k - 2)(n - 1). \quad \square
 \end{aligned}$$

De donde obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.15** *Sea  $P_n$  una nube de  $n$  puntos y  $k$  capas convexas. Entonces*

$$\delta(T(P_n)) \leq (4k - 2)(n - 1).$$

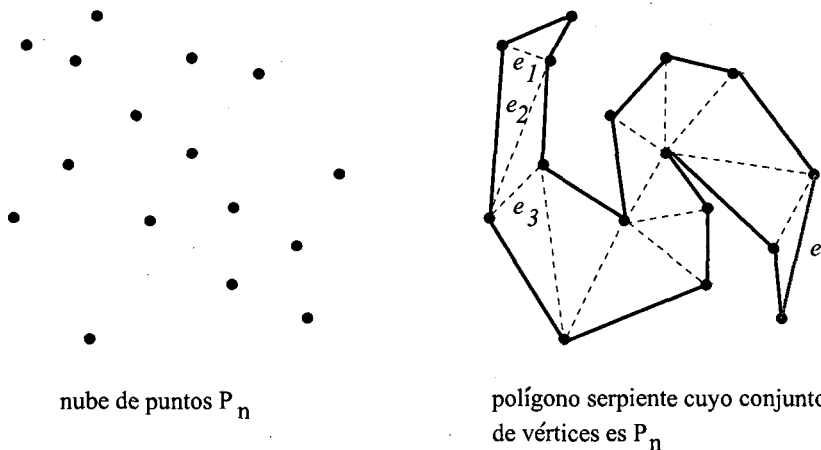
También hemos estudiado el grado máximo de  $T(P_n)$ . En caso de que la configuración de puntos esté en posición convexa, hemos visto que el grado máximo es  $\binom{n+1}{3} - n + 1$ . Posteriormente, E. Rivera y V. Urrutia en [60] demuestran que ésta es una cota superior del grado máximo de cualquier grafo de árboles geométricos. Se trata ahora de obtener una cota inferior de dicho grado. Un primer resultado en esta línea es el siguiente.

**Teorema 4.16** *El grado máximo de cualquier grafo de árboles geométricos de un conjunto de  $n$  puntos es  $\Omega(n^2)$ .*

Para ver este resultado daremos previamente una definición. Llamamos *polígono serpiente* a aquel que admite una triangulación tal que su árbol dual es un camino. Un resultado de F. Hurtado, J. Trias y G. Toussaint en [44] es el siguiente.

**Teorema 4.17** *Dada una configuración  $P$  de puntos en el plano, siempre se puede construir un polígono serpiente  $\mathcal{P}$  tal que los vértices de  $\mathcal{P}$  son los puntos de  $P$ .*

*Demostración del teorema 4.16:* Sea  $P_n$  una configuración de  $n$  puntos. Construimos un polígono serpiente  $\mathcal{P}$  tal que sus vértices sean los puntos de  $P_n$ . Sea  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  la triangulación de  $\mathcal{P}$  tal que su árbol dual es un camino. A dicho camino lo llamaremos  $\mathcal{C}$ . Sea  $e$  una de las aristas de la frontera de  $\mathcal{P}$  que está en uno de los triángulos que se corresponden con las hojas de  $\mathcal{C}$ . Consideramos el árbol  $\mathcal{P} - e$ .



**Figura 4.47:** Polígono serpiente.

Enumeramos las aristas de la triangulación  $\mathcal{T}(\mathcal{P})$  que no son de  $\mathcal{P} - e$  según el orden que nos da el camino  $\mathcal{C}$  de forma que la arista  $e$  sea la última. Sean  $\{e_1, \dots, e_{n-2} = e\}$  estas aristas. Observamos que el ciclo que aparece en  $\mathcal{P} - e + e_i$  es de longitud  $i + 2$ . Así pues, el grado de  $\mathcal{P} - e$  en  $T(P_n)$  es al menos:

$$2 + \dots + n = \frac{1}{2}(n + 2)(n - 1) \in \Omega(n^2).$$

□



## 4.14 Grafo de hojas de un conjunto de puntos

Cuando empezamos a estudiar los grafos de árboles en la versión geométrica que aquí hemos presentado, las referencias bibliográficas eran casi inexistentes.

El interés que este tipo de grafos ha suscitado en la comunidad de estudiosos de la Geometría Combinatoria y Computacional ha dado origen a la reciente aparición de otros grafos estrechamente ligados a  $T(P_n)$ . Todos ellos son subgrafos de  $T(P_n)$  y tienen en común el conjunto de vértices, que no es otro que el conjunto de árboles generadores sin cortes de una nube de puntos dada. La diferencia entre ellos estriba en las adyacencias consideradas en cada caso. En este apartado ofrecemos algunos resultados sobre uno de estos grafos.

La inclusión de este apartado en la presente memoria obedece más a que el estudio de las propiedades combinatorias de estos grafos es campo de futuros trabajos que no a la mera enumeración de los incipientes resultados que hemos obtenido hasta la fecha.

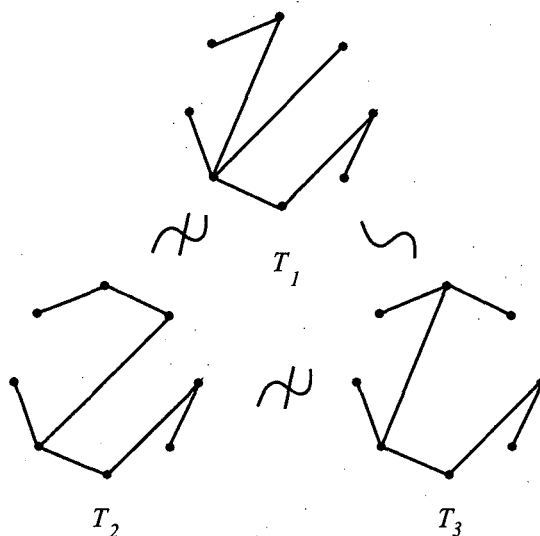


Figura 4.48: Árboles adyacentes en  $U_n$ .

Dada una nube de  $n$  puntos del plano, recibe el nombre de *grafo de hojas* de  $P_n$  el grafo  $U(P_n)$  que tiene el mismo conjunto de vértices que  $T(P_n)$ , esto es, el conjunto de todos los árboles generadores (y sin cortes) de  $P$  y cuyas adyacencias vienen definidas de la siguiente manera. Dos grafos  $T_1$  y  $T_2$  de  $\mathcal{T}(P_n)$  son adyacentes en  $U(P_n)$  si y sólo si  $T_1 - p = T_2 - p$  para un punto  $p \in P$  que es una hoja tanto en  $T_1$  como en  $T_2$ . O dicho de otra forma:  $T_1$  y  $T_2$  son adyacentes si y sólo si existe un punto  $p \in P$  tal que  $T_1 \setminus \{p\} = T_2 \setminus \{p\}$  y  $T_i \setminus \{p\}$ ,  $i = 1, 2$  sigue siendo conexo. Así por ejemplo, de los tres árboles que se presentan en la figura 4.48, que dos a dos son todos adyacentes en  $G_n$ , sólo  $T_1$  y  $T_3$  son adyacentes en  $U_n$ .

Este tipo de grafos ha sido estudiado recientemente por Kaneko y Yoshimoto (véase [48]). Concretamente ellos han demostrado el siguiente resultado.

**Teorema 4.18** *Dado un conjunto de  $P_n$  de  $n$  puntos en posición general,  $U(P_n)$  es 2-conexo.*

A continuación, presentamos algunos de los resultados que hemos obtenido sobre los grados de estos grafos.

Consecuencia del teorema 4.15 es que  $\delta(U(P_n)) \geq 2$  para cualquier configuración  $P_n$ . En cuanto a una acotación del grado máximo de estos grafos obtenemos lo siguiente. Un árbol cualquiera tiene a lo sumo  $n - 1$  hojas, y cada una de ellas puede ser reconectada a lo sumo a  $n - 2$  vértices. Así pues,  $\Delta(U(P_n)) \leq 2 \binom{n-1}{2}$  para cualquier configuración  $P_n$  de  $n$  puntos. Esta cota se alcanza en las configuraciones de puntos que tienen todos sus puntos menos uno,  $p$ , sobre una curva cóncava y todos son visibles desde  $p$  (véase figura 4.45).

Estudiamos el caso particular en que los puntos de  $P_n$  están en posición convexa. Notamos en este caso  $U_n$  a  $U(P_n)$ . Vamos a ver que  $\Delta(U_n) = 2n - 4$  y  $\delta(U_n) = 2$  y qué tipos de árboles alcanzan estos grados. Recordamos que hemos llamado cepillos a los árboles cuyas aristas sobre la frontera de  $P_n$  son todas consecutivas y tales que el resto de sus aristas son todas incidentes a vértices de grado uno (véase figura 4.7).

**Teorema 4.19** *El grado máximo del grafo  $U_n$  es  $2n - 4$  y sólo lo alcanzan los cepillos.*

*Demostración.* Hacemos la demostración por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 3, 4$  todo árbol de  $\mathcal{T}_n$  es un cepillo y se verifica el enunciado. Para  $n = 5$  se comprueba por inspección directa. Suponemos cierto el enunciado para  $n - 1$ .

Sea  $T$  un árbol de  $\mathcal{T}_n$ . Para cualquier vértice  $v$  de  $T$ , notamos

$$a_v(T) = |\text{vértices visibles desde } v \text{ en } T| - 1.$$

Observamos que podemos obtener el grado de  $T$  en  $U_n$  de la siguiente forma:

$$d_{U_n}(T) = \sum_{v \text{ hoja de } T} a_v(T).$$

Sea  $(i, i + 1)$  una arista de  $T$  de forma que  $i$  o bien  $i + 1$  es hoja de  $T$ . Suponemos que  $i$  es hoja de  $T$ . (El razonamiento es del todo análogo si es  $i + 1$  la hoja de  $T$ ).

Consideramos  $T^* = T \setminus \{i\} \in \mathcal{T}_{n-1}$ ; sea  $d = d_T(i + 1)$  el grado de  $T$  en  $i + 1$ , y sea  $\mathcal{C}$  el camino que se puede formar en  $T^*$  cuyos vértices son los vértices de  $T^*$  visibles desde  $i + 1$ . Óbviamente  $i + 1$  es un extremo de  $\mathcal{C}$  y notamos  $j$  al otro extremo.

Distinguimos los siguientes casos:

1.-  $T^*$  es un cepillo de  $U_{n-1}$ . En este caso  $d_{U_{n-1}}(T^*) = 2n - 6$ , por hipótesis de inducción.

- $d = d_T(i + 1) = 2$ . En esta situación,  $i + 1$  es una hoja de  $T^*$  y no lo es de  $T$ . Se verifica que:

$$a_i(T) = a_{i+1}(T^*) + 1.$$

Pueden suceder dos cosas.

- (a) El extremo de  $C$ ,  $j$ , es una hoja de  $T^*$ . Entonces  $T$  es un cepillo y  $j$  también es hoja de  $T$  verificándose:

$$a_j(T) = a_j(T^*) + 1$$

Como el resto de hojas de  $T$  y  $T^*$  son comunes y además:

$$a_k(T) = a_k(T^*)$$

para toda hoja  $k \neq i, i + 1, j$ , tenemos que:

$$d_{U_n}(T) = d_{U_{n-1}}(T^*) + 2 = 2n - 6 + 2 = 2n - 4$$

- (b)  $j$  no es una hoja de  $T^*$ . En este caso  $T$  no es un cepillo y

$$d_{U_n}(T) = d_{U_{n-1}}(T) + 1 = 2n - 5.$$

- $d = d_T(i + 1) \geq 3$ . En este caso la arista  $(i + 1, i - 1)$  es arista de  $T$  y  $T^*$ ;  $T$  tiene un hoja más que  $T^*$ , que es  $i$ , y  $a_i(T) = 1$ . Distinguimos dos casos.

- (a) El vértice  $i - 1$  es hoja de  $T^*$ . Entonces también lo es de  $T$  y se verifica:

$$a_{i-1}(T) = a_{i-1}(T^*) + 1.$$

En este caso  $T$  es un cepillo y

$$d_{U_n}(T) = d_{U_n}(T^*) + 2 = 2n - 4.$$

- (b) El vértice  $i - 1$  no es hoja de  $T^*$ . Entonces  $T$  no es un cepillo y

$$d_{U_n}(T) = d_{U_n}(T^*) + 1 = 2n - 5.$$

2.-  $T^*$  no es un cepillo de  $U_{n-1}$ . Por hipótesis de inducción  $d_{U_{n-1}}(T^*) < 2n - 4$ . En este caso  $T$  tampoco es un cepillo y haciendo un análisis análogo al realizado en el caso anterior se obtiene que en cualquier situación:

$$d_{U_n}(T) \leq d_{U_{n-1}}(T^*) + 2 < 2n - 4. \quad \square$$

En cuanto al grado mínimo, por el teorema 4.18 sabemos que  $\delta(U_n) \geq 2$ . Para ver que es  $\delta(U_n) = 2$  basta considerar, por ejemplo, el camino

$$T = \{(1, 2), (2, n), (n, 3), (3, n-1), \dots, (\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1)\}.$$

En general, tendrán grado 2 en  $U_n$  todos aquellos árboles  $T$  que sólo tengan dos hojas (o sea, caminos) y tales que si  $u$  es hoja de  $T$ ,  $u$  sólo ve a su padre y a otro vértice de  $T$ ; de donde se obtiene el siguiente resultado.

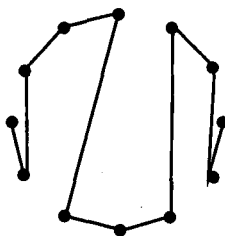


Figura 4.49: Árboles de grado dos en  $U_n$ .

**Teorema 4.20** *El grado mínimo de  $U_n$  es 2 y sólo lo alcanzan los caminos  $T$  que verifican que si  $i$  es una hoja de  $T$  entonces  $T$  contiene la arista  $(i+1, i-1)$ .*

A diferencia de lo que ocurría en  $G_n$ , vamos a ver ahora que para cualquier valor natural  $d$  que esté entre el grado mínimo y el grado máximo de  $U_n$ , existe siempre un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  tal que el grado de  $T$  en  $U_n$  es  $d$ .

**Teorema 4.21** *Sea  $d$  un número natural, con  $2 \leq d \leq 2n-4$ . Entonces existe un árbol  $T \in \mathcal{T}_n$  tal que  $d_{U_n}(T) = d$ .*

*Demostración.* Construimos explícitamente árboles  $T_d$  con grado  $d$  para cualquier  $d$  comprendido entre 2 y  $2n-4$ .

Los árboles  $T$  que presentamos para  $2 \leq d \leq n-2$  son caminos tales que una de sus hojas sólo se puede reconectar a un vértice y la

otra se puede reconectar con exactamente  $d - 1$  vértices de  $T_d$ . Para  $n - 1 \leq d \leq 2n - 5$ ,  $T_d$  es un árbol con  $d - n + 4$  hojas, todas ellas -salvo dos- reconectables sólo con dos vértices de  $T_d$ . Las otras dos hojas que faltan, una es reconectable con un solo vértice y la otra es reconectable con  $2n - d - 5$  vértices (véase figura 4.50).

Suponemos  $n$  par (la construcción es análoga en el caso  $n$  impar). Para  $2 \leq d \leq n - 2$  consideramos:

- Si  $d$  es par,

$$T_d = \{(n - k, n - k - 1) | k = 0, \dots, d - 2\} \cup \{(k, n - k - d + 1)(k, n - k - d + 2) | k = 1, \dots, \frac{n-d}{2}\}$$

- Si  $d$  es impar,

$$T_d = \{(n - k, n - k - 1) | k = 0, \dots, d - 2\} \cup \{(k, n - k - d + 1)(k, n - k - d + 2) | k = 1, \dots, \frac{n-d-1}{2}\} \cup \left\{ \left( \frac{n-d+1}{2}, \frac{n-d+3}{2} \right) \right\}$$

Para  $n - 1 \leq d \leq 2n - 6$  consideramos:

$$T_d = \{(1, k) | k = 2, \dots, n - d - 2\} \cup \{(k, k + 1) | k = n - d + 2, \dots, n - 1\}.$$

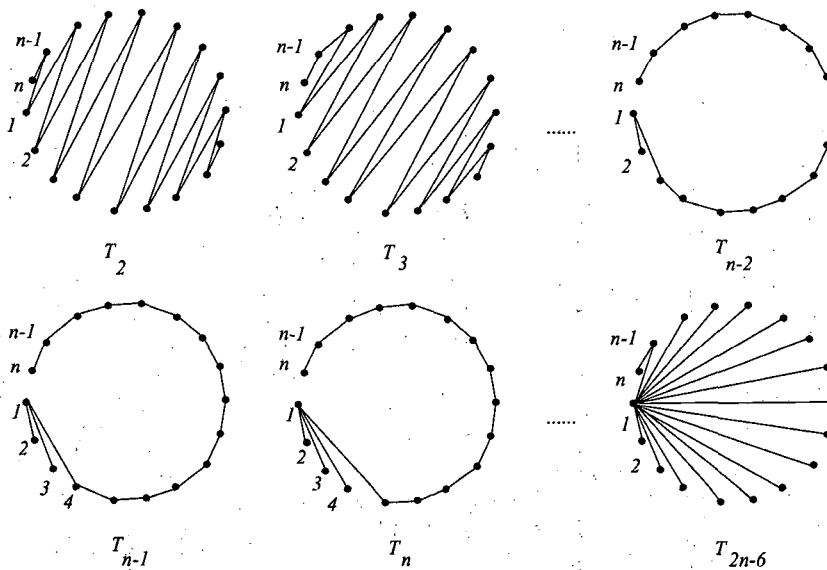


Figura 4.50: Árboles de diferentes grados en  $U_n$ .

Finalmente, consideramos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} T_{2n-5} &= S_1 - (1, n-1) + (n-1, n-2), \\ T_{2n-4} &= S_1. \end{aligned}$$

□

Un problema interesante a estudiar es la hamiltonicidad de este tipo de grafos. Como el número de aristas de  $U_n$  es sensiblemente menor que el número de aristas de  $G_n$  cabe la posibilidad de que se pierda la hamiltonicidad. Por ejemplo, para  $n = 4$ , así sucede. Para verlo, observamos los dos árboles que aparecen como  $T_1$  y  $T_2$  en la figura 4.51. Ambos tienen grado dos en  $U_4$ . Si existiese un ciclo hamiltoniano en  $U_4$ , éste tendría que contener las dos aristas incidentes en  $T_1$  y las dos que son incidentes en  $T_2^*$ . Pero estas cuatro aristas determinan un ciclo, lo cual excluye la posibilidad de que exista un ciclo hamiltoniano en  $U_4$ .

Esta situación desaparece para  $n \geq 5$ , por ello sería interesante ahondar en la cuestión. En cualquier caso, la construcción del árbol de árboles presentada en este capítulo y que es pieza clave para la construcción del ciclo hamiltoniano de  $G_n$  no sería válida para una construcción similar en  $U_n$ . Concretamente, los subgrafos de hijos que allí se presentan pasarían ahora a ser grafos no conexos.

## 4.15 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos descrito varias propiedades combinatorias de los grafos de árboles geométricos. Concretamente, en el caso de un conjunto de puntos en posición convexa, hemos determinado el grado máximo y mínimo de estos grafos así como el tipo de árboles que alcanzan estos grados. Hemos dado una cota inferior no trivial del diámetro. También hemos determinado el radio, el centro y el grupo de automorfismos, así como demostrado la existencia de ciclos hamiltonianos en estos grafos y que tienen conectividad máxima.

Guiados por el modelo convexo, también hemos obtenido varios resultados sobre los grafos de árboles geométricos cuando los puntos

están en posición general. En esta línea hemos obtenido resultados sobre el centro del grafo. Asimismo se han dado acotaciones, si bien queda el acabar de ajustarlas, del grado máximo y mínimo de  $T(P_n)$ . La siguiente tabla nos compara lo obtenido en el caso de posición convexa con lo que se ha obtenido en el caso general.

	Posición convexa	Posición general
Número de vértices	$\tau_n = \frac{1}{2n-1} \binom{3n-3}{n-1}$	$t_n \geq \tau_n$
Número cromático	$O(n^2)$	
Diámetro	$\frac{3n}{2} - 5 \leq D_n \leq 2n - 4$	
Grado mínimo	$\delta_n^* = 2n - 4$	$\delta_n^* \leq \delta_n \leq \binom{n-1}{2}$
Grado máximo	$\Delta_n^* = \binom{n+1}{3} - n + 1$	$O(n^2) \leq \Delta_n \leq \Delta_n^*$
Radio	$r(T(P_n)) = n - 2$	
Centro	$Z = \{ \text{cepillos} \}$	$\{S_p \mid p \in CH_i(P_n), i = 1, 2\}$ $\subset Z \subset \{S_p \mid p \in P_n\}$
Grupo de automorfismos	$\Gamma_n = D_n$ (grupo diedral)	?
Hamiltoniano	Sí	?
Conectividad	$2n - 4$ (máxima)	?

Tabla 4.1



Por lo que respecta a problemas abiertos, en el caso convexo el problema más significativo, y todavía no resuelto, es hallar el valor exacto del diámetro y encontrar un algoritmo eficiente para calcular caminos cortos en este grafo.

En cuanto al caso general, cabe seguir estudiando las relaciones de las propiedades geométricas del conjunto de puntos  $P$ , suponiendo ahora que los puntos de  $P$  no están en posición convexa, con las propiedades combinatorias del grafo de árboles geométrico asociado. Problemas abiertos son aquí el estudio de la hamiltonicidad o de la conectividad de grafos de árboles geométricos cuando los puntos están en posición general.

También, en el caso de puntos en posición convexa, hemos introducido el concepto de aristas independientes y haciendo intercambios simultáneos de aristas independientes hemos reducido el diámetro a  $O(\log n)$ . Cabe también preguntarse por un intercambio de aristas en paralelo en el caso general. El primer trabajo a realizar en este campo es buscar una buena definición de aristas independientes que generalice bien el concepto que hemos dado en el caso convexo.

Finalmente, también es trabajo a realizar el estudio de las propiedades combinatorias de otros grafos estrechamente ligados a  $T(P_n)$ . Citamos a continuación algunos problemas a estudiar en esta línea.

Dado un conjunto  $P_n$  de  $n$  puntos en el plano, se llama *grafo de rotaciones* al grafo cuyo conjunto de vértices es  $\mathcal{T}(P_n)$  y dos árboles  $T_1$  y  $T_2$  de  $\mathcal{T}(P_n)$  son adyacentes si y sólo si existe un punto  $p \in P$  tal que  $T_2 = T_1 + e - f$ , siendo  $e$  y  $f$  aristas incidentes en  $p$ . Este tipo de adyacencia recibe el nombre de *flip por rotación*.

Existe una prueba existencial de que se puede pasar, utilizando flips por rotación, de un árbol  $T$  cualquiera al árbol generador minimal, esto es, al que verifica

$$\ell(T^*) = \min\{\ell(T) | T \in \mathcal{T}(P_n)\},$$

siendo  $\ell(T)$  la longitud euclídea del árbol  $T$ , de forma que en cada paso se reduce la longitud y se mantiene el carácter de árbol sin cortes [6], pero no parece tener un buen comportamiento algorítmico. Cal-



Otro posible grafo a estudiar es el grafo  $T^*(P_n)$ , introducido en [60] por E. Rivera y V. Urrutia y definido de la siguiente manera. Este grafo es el que tiene por conjunto de vértices a  $\mathcal{T}(P_n)$  y dos árboles son adyacentes si y sólo si uno se obtiene del otro por el intercambio de dos aristas que no se cortan.

También es un problema muy interesante el estudio de la hamiltonicidad del grafo de hojas introducido en el apartado anterior.