

1400370940

T 99/99.

UPC
UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE CATALUNYA



Biblioteca Rector Gabriel Ferraté
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

A la mare i al pare

José A. Casas

M. Ferrer

Jaume Pous

Pere Riu.

XAVIER ROSELL

**Obtenció d'imatges de la distribució d'impedància
elèctrica en el subsòl per a la detecció d'anomalies
extenses. Aplicació a la detecció d'humitat i de
contaminants**

**Tesi doctoral presentada en la
Universitat Politècnica de Catalunya
per a l'obtenció del grau de doctor**

Josep Jordana Barnils

Director: Dr. Ramon Pallàs Areny

Barcelona, Febrer 1999

PRESENTACIÓ

La conservació i protecció del medi ambient estan adquirint cada cop més importància. Un dels factors que influeixen més en la seva degradació és la contaminació. Aquesta tesi es centra en la contaminació del subsòl com a conseqüència de fuites de productes contaminants provinents de tuberies i dipòsits soterrats a poca profunditat. D'igual forma és interessant la detecció de fuites d'aigua, doncs cada vegada més s'està convertint en un bé escàs que cal preservar.

Aquestes fuites poden ser detectades des de la superfície per mitjà de l'aplicació dels mètodes resistius, derivats dels de prospecció geolèctrica. L'anàlisi de les corbes de resistivitat aparent obtingudes a la superfície del sòl i la visualització en plans verticals i horitzontals dels canvis de conductivitat elèctrica del subsòl són uns mètodes adients per poder-ne realitzar una monitorització.

La tesi es desenvolupa en tres vessants: estudi del problema directe, estudi de la instrumentació per poder realitzar les mesures i estudi del problema invers amb la consegüent obtenció d'imatges.

L'estudi del problema directe es descriu en el capítol 3 i és el primer pas cap a la detecció de l'anomalia, ja que ens permet obtenir la distribució de potencials a la superfície del terreny tot i coneixent les resistivitats del terreny i de l'objecte que es vol detectar.

Una forma de modelar els objectes és suposar que presenten la forma esfèrica o cilíndrica. La fuga, que es pot associar a una anomalia extensa, ja que es va extenent en el terreny, la suposarem concèntrica amb la canonada o dipòsit. En el capítol 3 es resol l'equació de Laplace en un medi homogeni en el que hi ha un elèctrode puntual de corrent i $N+1$ cilindres concèntrics o $N+1$ esferes concèntriques de diferents conductivitats. Aquest estudi permet dissenyar una sèrie d'algorismes que generen diferents configuracions electròdiques.

La particularització del problema directe a la configuració Schlumberger permet caracteritzar les anomalies per un moment dipolar normalitzat que respon a una fórmula de recurrència on es fa l'aproximació que es troba sotmesa a l'acció d'un camp elèctric uniforme.

A partir de la resistivitat aparent corresponent a la configuració Schlumberger es pot discernir la grandària de la fuga i la seva profunditat. En el capítol 6 es determina la profunditat i el radi d'anomalies esfèriques i cilíndriques submergides en una cubeta amb aigua de l'aixeta a partir de l'anàlisi dels punts característics de les corbes de resistivitat aparent.

S'ha de tenir present que qualsevol error a les tensions mesurades a la superfície poden afectar a la resistivitat aparent, i per tant a la correcta detecció

de la fuga. Alguns d'aquests errors són ocasionats pel posicionament dels elèctrodes, el soroll tel·lúric (sobretot en corrent continu) i l'acoblament electromagnètic en mesures en alterna. Per reduir aquest acoblament electromagnètic, els cables injectors i detectors haurien d'estar molt allunyats entre si, la qual cosa no és possible en totes les configuracions electròniques d'interès i sobretot en les mesures de camp. Per aquesta raó hem considerat la possibilitat d'injectar un senyal quadrat de 1 kHz i una amplitud de pic a pic entre 20 V i 100 V.

En el capítol 4 es descriuen els dos sistemes de mesura utilitzats en la realització de les mesures. Amb el sistema PROGEO (PROspecció GEOelèctrica) hem realitzat les mesures de laboratori i amb el sistema portàtil, les de camp, per mitjà de configuracions de 16 i 8 elèctrodes.

El sistema portàtil es basa en la injecció de senyals quadrats. La detecció es basa en un desmodulador síncron totalment diferencial. Es realitza un mostreig síncron en la part plana del senyal, de forma que es redueixen considerablement les interferències.

Pot ser interessant poder visualitzar el recorregut d'una fuga en el subsòl i una forma adient per fer-ho és per mitjà de la reconstrucció d'imatges a partir dels criteris de la tomografia d'impedància elèctrica. Ens centrarem en els algorismes basats en la inversió de la matriu de sensibilitat (capítol 5), la qual és molt mal condicionada i per tant haurem d'aplicar diferents tècniques de regularització. Els algorismes estudiats han estat el de retroprojecció i el de Marquardt-Levenberg. Per estudiar el seu comportament a diferents paràmetres: número d'elèctrodes, distància interelectrònica, grandària i profunditat de l'anomalia es fa un primer anàlisi amb dades sintètiques (capítol 7) per aplicar-los posteriorment a dades experimentals de laboratori (capítol 8) i de camp (capítol 9).

ÍNDIX

1. INTRODUCCIÓ	1.1
1.1. Antecedents	1.3
1.2. Objectius	1.6
2. MÈTODES GEOELÈCTRICS RESISTIUS.....	2.1
2.1. Introducció als mètodes de prospecció geofísica	2.1
2.2. Limitacions dels mètodes geofísics	2.4
2.3. Els mètodes resistius	2.5
2.3.1. Propietats electromagnètiques de les roques.....	2.6
2.3.2. Prospecció elèctrica per corrent continu	2.9
2.3.3. Resistivitat aparent.....	2.12
2.3.4. Configuracions utilitzades en tomografia d'impedància elèctrica.....	2.15
2.3.5. Terreny estratificat	2.17
2.4. Aplicació dels mètodes geoeleèctrics a la detecció de contaminants	2.18
3. EL PROBLEMA DIRECTE. ANÀLISI TEÒRICA	3.1
3.1. Distribució de potencial en presència d'anomalies cilíndriques i esfèriques	3.2
3.1.1. Anomalies cilíndriques concèntriques properes a un elèctrode puntual de corrent.....	3.2
3.1.2. Anomalies cilíndriques concèntriques en un camp uniforme	3.4
3.1.3. Anomalies esfèriques concèntriques properes a un elèctrode puntual de corrent.....	3.5
3.1.4. Anomalies esfèriques concèntriques soterrades sota la influència de dos elèctrodes de corrent	3.7
3.1.5. Anomalies concèntriques sotmeses a un camp elèctric uniforme	3.10
3.1.5.1. Conductivitat equivalent de l'anomalia	3.10
3.1.5.2. Model circuital de l'anomalia	3.11
3.2. Resistivitat aparent. Configuració Schlumberger.....	3.15
3.2.1. Resistivitat aparent normalitzada i visibilitat	3.16
3.2.2. Efecte de la distància interelectròdica	3.19
3.2.3. Determinació de la profunditat i del radi d'esferes i cilindres soterrats	3.21
3.2.3.1. Detecció amb distància interelectròdica nul.la	3.21
3.2.3.2. Detecció amb distància interelectròdica no nul.la	3.22
3.2.4. Determinació de la grandària de la fuga.....	3.23

3.2.4.1. Estudi del paràmetre χ_2	3.23
3.2.4.2. Obtenció del radi de la fuga	3.25
3.2.4.3. Relació senyal a soroll.....	3.26
3.2.4.4. Límit en la detecció de fuites	3.27
3.3. Conclusions	3.29
4. INSTRUMENTACIÓ UTILITZADA EN LA REALITZACIÓ DE LES MESURES	4.1
4.1. Sistema PROGEO.....	4.2
4.2. Sistema Portàtil.....	4.4
4.2.1. Detector	4.5
4.2.2. Sistema de commutació i d'adquisició	4.12
4.2.3. Programa de control	4.13
5. EL PROBLEMA INVERS.....	5.1
5.1. Expressió matricial del problema invers.....	5.2
5.2. Mètodes de regularització.....	5.4
5.2.1. Descomposició en valors singulars (SVD)	5.6
5.2.2. La condició discreta de Picard.....	5.7
5.2.3. Regularització per Tikhonov i Truncated Singular Value Descomposition (TSVD)	5.8
5.2.4. Criteri de la corba L	5.10
5.2.5. Afegiment d'informació a priori	5.11
5.3. Algorismes de reconstrucció basats en el teorema de la sensibilitat	5.12
5.3.1. Càlcul dels coeficients de sensibilitat.....	5.16
5.3.2. Models analítics	5.17
5.4 Algorismes desenvolupats.....	5.18
5.4.1. Inversió Marquardt-Levenberg amb tensions diferència.....	5.18
5.4.2. Inversió Marquardt-Levenberg amb tensions normalitzades	5.19
5.4.3. Retroprojecció ponderada	5.20
6. RESULTATS ANALÍTICS I EXPERIMENTALS DEL PROBLEMA DIRECTE	6.1
6.1. Resultats analítics	6.1
6.1.1. Estudi de la resistivitat aparent corresponent a la configuració Schlumberger.....	6.2
6.1.2. Ajust de corbes de resistivitat aparent normalitzada per mitjà del mètode de mínims quadrats	6.6

6.1.3. Errors en la determinació de la profunditat i el radi d'anomalies esfèriques i cilíndriques	6.9
6.1.3.1. Anomalies esfèriques	6.9
6.1.3.2. Anomalies cilíndriques	6.12
6.1.4. Determinació del radi d'una corona esfèrica i cilíndrica	6.13
6.2. Resultats experimentals	6.15
6.2.1. Determinació del radi i profunditat d'una anomalia esfèrica.....	6.18
6.2.2. Determinació del radi i profunditat d'una anomalia cilíndrica	6.21
6.2.3. Influència de la distància interelectròdica en la resistivitat aparent normalitzada	6.25
6.2.4. Determinació del radi d'una fuita cilíndrica concèntrica	6.26
6.3. Conclusions	6.28
7. RESULTATS ANALÍTICS DEL PROBLEMA INVERS	7.1
<i>Part I: Visualització de la secció vertical del subsòl situada sota l'agrupació electròdica.....</i>	
	7.2
7.1. Criteris per avaluar la qualitat de les imatges	7.2
7.2. Reconstrucció d'imatges 2D de seccions verticals del subsòl per mitjà de retroprojectió i pel mètode de regularització de Tikhonov.....	7.3
7.2.1. Obtenció d'imatges per mitjà de 16 elèctrodes.....	7.3
7.2.1.1. Separació interelectròdica igual al radi de l'anomalia	7.3
7.2.1.2. Efectes de la disminució de la distància interelectròdica	7.8
7.2.2. Obtenció d'imatges per mitjà de 8 elèctrodes	7.11
7.2.2.1. Separació interelectròdica igual al radi de l'anomalia	7.11
7.2.2.2. Efectes de l'augment de la separació interelectròdica	7.14
7.2.3. Imatges d'objectes descentrats.....	7.16
7.2.4. Obtenció d'imatges de vàries anomalies per mitjà de superposició.....	7.19
7.3. Reconstrucció d'imatges 2D de seccions verticals del subsòl per mitjà de Marquardt-Levenberg i TSVD	7.22
7.3.1. Obtenció d'imatges per mitjà de 16 elèctrodes.....	7.22
7.3.2. Obtenció d'imatges per mitjà de 8 elèctrodes	7.27
7.4. Reconstrucció d'imatges de fuites concèntriques.....	7.30

7.5. Reconstrucció d'imatges de tensions analítiques amb soroll	7.33
7.5.1. Reconstrucció a partir de la matriu de sensibilitat sense normalitzar	7.34
7.5.2. Reconstrucció a partir de la matriu de sensibilitat normalitzada.....	7.37
7.6. Efecte de la profunditat de l'anomalia	7.40
7.7. Conclusions sobre la Part I.....	7.46
<i>Part II: Exploració d'una determinada àrea del terreny.....</i>	7.48
7.8 Reconstrucció d'imatges 3D	7.48
7.8.1. Reconstrucció tridimensional per mitjà de la juxtaposició de plans verticals	7.50
7.8.2. Reconstrucció tridimensional per mitjà del desplaçament d'una agrupació electròdica	7.56
7.8.3. Reconstrucció tridimensional per mitjà del desplaçament ortogonal de dues agrupacions electròdiques	7.58
7.8.4. Detecció de fuites.....	7.62
7.8.5. Reconstrucció a partir de tensions analítiques amb soroll	7.65
7.9. Conclusions de la Part II	7.73
8. RESULTATS EXPERIMENTALS DE LABORATORI DEL PROBLEMA INVERS	8.1
8.1. Mesures obtingudes per mitjà del sistema PROGEO	8.2
8.1.1. Reconstrucció de seccions verticals del subsòl per mitjà de 16 elèctrodes	8.3
8.1.1.1. Reconstrucció d'una esfera aïllant	8.3
8.1.1.2. Reconstrucció d'un cilindre conductor	8.9
8.1.1.3. Reconstrucció d'una fuga aïllant, concèntrica amb un cilindre conductor, respecte el medi homogeni	8.14
8.1.1.4. Reconstrucció d'una fuga aïllant, concèntrica amb un cilindre conductor respecte el cilindre conductor	8.20
8.1.2. Reconstrucció de seccions verticals del subsòl per mitjà de 8 elèctrodes	8.25
8.1.3. Detecció d'objectes no centrats respecte l'agrupació electròdica	8.33
8.2. Conclusions sobre les imatges reconstruïdes per mitjà de les mesures adquirides pel sistema PROGEO.....	8.36

APÈNDIX H: Resistivitat aparent d'anomalies cilíndriques i esfèriques concèntriques sotmeses a un camp elèctric uniforme

APÈNDIX I: Configuració electrònica Sch-49

APÈNDIX J: Reconstrucció d'imatges experimentals de laboratori per mitjà de la configuració Sch-49

APÈNDIX K: Mesures en una cubeta amb sorra

APÈNDIX L: Descripció de les mesures experimentals

Capítol 1

INTRODUCCIÓ

Els avenços en microelectrònica i computació permeten plantejar-se la mesura amb major resolució i precisió, i l'automatització a baix cost de mesures que abans eren feixugues perquè s'havien de fer a mà. El disseny de sensors és afavorit per la disponibilitat de programes (o per la possibilitat d'escriure'n) que permeten estudiar situacions amb geometria complexa que queden fora de l'abast de les solucions analítiques convencionals.

La possibilitat de fer mesures basades en imatges obra moltes perspectives en el camp de la instrumentació i vigilància, doncs les imatges permeten definir paràmetres de control més significatius que les simples magnituds unidimensionals que han estat tradicionalment objectiu de les mesures.

Existeix un gran nombre de magnituds físiques susceptibles de ser mesurades, la qual cosa requereix un coneixement profund de les mateixes, les quals poden pertànyer a qualsevol branca de la ciència. D'aquí prové la interdisciplinarietat que impliquen els treballs sobre la mesura de magnituds físiques. És necessari, doncs, conèixer molt bé el camp de la ciència al qual pertanyen les magnituds que volem mesurar. En el nostre cas ens centrarem en mesures realitzades sobre la superfície terrestre, el valor de les quals dependrà de les característiques del subsòl.

La ciència que té per objectiu l'estudi de la física de la terra és la geofísica. L'aportació de Gilbert, que descobrí que la Terra es comporta com un gran imant irregular i la Llei de Gravitació Universal de Newton es poden considerar com l'inici de la geofísica.

L'aplicació de la geofísica a la búsqueda de minerals data de l'any 1843, quan Von Wrede va afirmar que les variacions en el camp magnètic terrestre es podien aprofitar per descobrir estructures enterrades. No fou fins el 1879 que es van donar a conèixer aquests coneixements a partir de la publicació del llibre "On the Examination of Iron Ore Deposits by Magnetic Methods".

La contínua expansió en la demanda de metalls de tot tipus i l'increment en l'ús de productes petrolers ha portat el desenvolupament de moltes tècniques geofísiques per incrementar la sensibilitat de la detecció de dipòsits i estructures enterrades. Els principals avenços s'han realitzat a partir de la Segona Guerra

Mundial, gràcies a la millora de la instrumentació i a partir de l'aparició dels computadors per tal de processar i interpretar les dades obtingudes.

La detecció depèn de les característiques que diferencien les anomalies (*) que es volen detectar, del medi que les envolta. Aquestes característiques poden ser: canvis de gravetat, de magnetisme, de radioactivitat, variació de la resistivitat elèctrica, etc. Segons la característica diferenciadora que es vol detectar, els principals mètodes de prospecció geofísica es classifiquen en: gravitacionals, magnètics, sísmics, electromagnètics, radioactius i elèctrics. Busquet (1995), estudia la caracterització d'abocadors residuals per mitjà de l'aplicació dels diferents mètodes de prospecció geofísica, on es descriuen els avantatges i inconvenients de cada mètode per aquest estudi particular.

De tots aquests mètodes, el que nosaltres utilitzarem per aconseguir l'objectiu proposat és el de la prospecció elèctrica. La prospecció elèctrica es fonamenta en la mesura de la resistivitat aparent del subsòl (Telford et al., 1990). Hi ha diferents mètodes de prospecció elèctrica: uns utilitzen camps elèctrics naturals i altres injecten corrent artificialment. Aquests últims seran els que utilitzarem en el nostre treball. Hi ha dues modalitats de prospecció elèctrica: sondeigs elèctrics verticals i calicates elèctriques.

Els sondeigs consisteixen en la mesura de les variacions de la resistivitat del terreny sota la vertical d'un punt. Les calicates elèctriques mesuren les variacions laterals de la resistivitat del terreny a una fondària pràcticament constant. La utilització conjunta d'ambdues tècniques ens ajudarà a realitzar una interpretació final més acurada.

En la prospecció elèctrica s'injecta un corrent en el subsòl per mitjà de dos elèctrodes (elèctrodes de corrent), amb la qual cosa es crea una diferència de potencial elèctric en el terra, que es mesura per mitjà de dos altres elèctrodes, anomenats elèctrodes de potencial. Llavors aquesta mesura s'expressa com una resistivitat aparent. Aquesta resistivitat depèn del corrent injectat, de la diferència de potencial detectat i de la posició relativa dels elèctrodes injectors i detectors.

El corrent que s'injecta al subsòl pot ser continu o altern. Nosaltres utilitzarem una tensió alterna d'amplitud compresa entre 20 V i 100 V i una freqüència de 1 kHz, per tal d'evitar el potencial de contacte dels elèctrodes i millorar la relació senyal a soroll (SNR) en la detecció. La utilització de freqüències menors podria també provocar errors en la interpretació de les dades provinents d'objectes conductors immersos en un medi electrolític (Guptasarma, 1983).

Hi ha diferents agrupacions d'elèctrodes, cadascuna amb els seus avantatges i inconvenients: Wenner, Schlumberger, pol dipol, doble dipol, etc. Un dels nostres objectius és estudiar diverses configuracions electròniques que ens donguin una bona resolució de l'anomalia que pretenem detectar, la qual es trobarà a 4 m de profunditat com a màxim.

(*) En aquest treball denominem anomalia a l'objecte o fuita que es vol detectar.

1.1. Antecedents

En els darrers anys s'han realitzat diversos estudis sobre la detecció de contaminants en el subsòl, així com d'humitat. La detecció i control de fuites de productes derivats del petroli és un dels aspectes més interessants des del punt de vista del medi ambient que es realitza en les zones d'emmagatzemament de productes petrolers. La detecció de fuites d'aigua té cada cop més interès, doncs hi ha major consciència que l'aigua és un bé escàs. Entre els organismes que estan intentant donar una solució a aquest problema cal destacar l'EPA (Environmental Protection Agency), als EEUU i el BGS (British Geological Survey) a la Gran Bretanya.

L'any 1988 l'EPA (Raisanen, 1989) va suggerir que les instal·lacions petroleres instal·lessin mesures de protecció per evitar els riscos de contaminació. El sistema que es va utilitzar rep el nom de Soil Sentry i el seu objectiu és la detecció de fuites de combustible dels dipòsits d'emmagatzemament fins el nivell freàtic. El sistema consisteix en una sèrie de pous (*vadose zone vapor wells*) connectats a un sistema de bombeig central i a un sistema de sensors. Tres cops al dia s'aspiren vapors d'hidrocarburs de les mostres del subsòl que són detectats per un sensor MOS i un microprocessador s'encarrega d'obtenir la concentració en parts per milió. Aquest sistema bàsic pot detectar emissions de vapor de gasolina (butans i pentans) a un nivell de 50 parts/milió. El sistema també permet detectar fuites de diesel, tot i que la seva sensibilitat és un quart de la de gasolina. La capacitat que té l'instrument de detectar una fuga depèn de la volatilitat de la substància i de la sensibilitat que té el sensor a cada tipus de vapor.

Una altra tècnica és el Ground Penetrating Radar (GPR) (Peters et al., 1994), (Richard et al., 1991). Aquest sistema utilitza ones electromagnètiques d'alta freqüència per determinar la presència d'objectes i estructures enterrades. És un tipus de RADAR, les propietats del qual (freqüència, ample de banda, etc) depenen de l'anomalia que es vol detectar. Els estudis de GPR daten de fa uns 20 anys, en contraposició als 50 anys que fa que existeix la tecnologia RADAR. El seu origen fou per aplicacions militars. Lenner va obtenir-ne una patent l'any 1974 (Peters et al., 1994). La seva aplicació fou la detecció de túnels i mines enterrades, tot i que també es pot aplicar a la detecció de canonades i línies de distribució elèctrica.

El GPR és considerat una tecnologia imperfecta (Peters et al., 1994), però malgrat tot s'estan fent estudis per tal de millorar els seus resultats. Encara que les seves aplicacions fonamentals s'orienten a la detecció d'interfícies en el subsòl, també és d'interès el seguiment de fuites de petroli o altre fonts de contaminació. La profunditat de penetració de qualsevol GPR és força específica del lloc d'aplicació i depèn de diversos factors: tipus de sòls (els granulars donen els millors resultats), condicions d'humitat (com més sec millor) i la freqüència de l'antena (com més baixa és la freqüència, major és la profunditat de penetració).

Cal dir que els GPR són molt sensibles a les interferències i que la forma més usual de presentar els resultats és en forma d'imatges.

Moltes de les tècniques proposades per a la detecció de contaminants requereixen la perforació (Penetrometer) (Andrew et al., 1991), ús d'un sensor òptic (Jeffrey et al., 1991) o l'obtenció de mostres d'aigua en diversos pous que es troben al voltant de la zona d'estudi. Altres tècniques, com el GPR, no permeten una vigilància continuada estàtica sinó que requereixen el desplaçament de l'equip de detecció.

Altres estudis es basen en l'anàlisi de la resistivitat del sòl. La detecció d'una resistivitat diferent a la del cas homogeni ens indicarà la presència d'una anomalia. Alguns factors que afecten a la resistivitat d'un determinat sòl són: els minerals que constitueixen el sòl, el seu grau d'humitat, la seva porositat, la temperatura, etc.

Una tècnica que aprofita el coneixement de la resistivitat del subsòl és un sistema desenvolupat pel BGS, anomenat RESCAN, l'objectiu del qual és obtenir imatges del moviment de l'aigua subterrània i els seus possibles contaminants. Aquesta tècnica permet detectar canvis de resistivitat i visualitzar-los. Utilitza una xarxa d'elèctrodes que es situen a la superfície de la zona d'estudi per mitjà dels quals s'injecten uns corrents i es detecten uns potencials, que permeten reconstruir la resistivitat del subsòl, seguint tècniques no descrites.

La física del moviment de fluids en el subsòl és complexa, doncs intervien moltes variables. Per aquesta raó a l'hora d'estudiar una possible fuga de combustible, es suposa que aquesta pren una forma esfèrica, amb la part superior en contacte amb el punt d'inici de la fuga. La dispersió horitzontal del líquid es veu alterada per l'estratificació del subsòl.

D'altra banda, al Departament d'Enginyeria Electrònica de la UPC hi ha una llarga experiència en tomografia d'impedància elèctrica mèdica, que es pot aplicar a la nostra situació (cas geotècnic). La tomografia d'impedància elèctrica fou proposada a mitjans dels anys 70 i va començar a ser desenvolupada durant la dècada dels 80 com a possible tècnica complementària dels mètodes ja implantats en tomografia mèdica (raigs X, RM, etc). Destaca l'estudi teòric sobre els límits de la resolució de tomografia elèctrica mèdica fet per Seagar et al. (1987). Pel seu caràcter no invasiu aquestes tècniques han despertat també interès en l'estudi de les distribucions i moviment de materials en processos químics i en transport en canonades.

La tomografia consisteix en disposar d'uns emissors i detectors al voltant del volum en qüestió, per poder obtenir així una imatge de la secció transversal de l'anomalia. En geotècnia s'utilitzen, a vegades, sondes introduïdes en el terreny amb diferents nivells de profunditat, disposades en dos o més pous de sondeig i es realitzen mesures creuades entre elles. En aquest sentit, Sasaki (1992) realitza la inversió de dades sintètiques per estudiar la resolució de la tomografia elèctrica resistiva en funció de diferents paràmetres: configuració electrònica,

grandària dels pixels reconstruïts i factor d'amortiment, per mitjà d'un algorisme que utilitza la inversió de la matriu Jacobiana, la qual és mal condicionada. Aquest mal condicionament és molt habitual en els problemes geofísics tal i com descriuen Tikhonov and Goncharsky (1987).

Nosaltres proposem fer les mesures únicament des de la superfície, sense pou. Pretenem utilitzar tècniques de resistivitat elèctrica. Alguns treballs recents en aquest camp, on es descriuen les configuracions d'elèctrodes i la forma d'interpretar les dades són els realitzats per Noel and Xu (1991), Xu and Noel (1996), Barker (1992) i Loke and Barker (1996).

Cal destacar també el treball de Powell et al. (1987), on s'obtenen imatges de dues esferes d'11 mm de diàmetre, separades 39 mm i submergides a una profunditat de 13 mm dins d'un dipòsit que conté una determinada dissolució. Aquestes imatges s'han obtingut a partir de les mesures realitzades per mitjà d'una agrupació d'elèctrodes lineal situada a la superfície. El mètode de reconstrucció ha estat el de retroprojecció.

Seguint aquesta línia destaca l' algorisme de Kotre, que després d'aplicar-lo inicialment a la reconstrucció de certes regions del cos humà (Kotre 1993), també l'ha aplicat recentment a la reconstrucció de plans horitzontals dels subsòl (Kotre, 1996a) per a la detecció d'objectes a poca profunditat, el qual es basa en el Teorema de la Sensibilitat de Geselowitz (1971).

1.2. Objectius

L'objectiu de la tesi és determinar la distribució de conductivitats a partir de les mesures realitzades en la superfície per a la detecció d'objectes soterrats. Especialment ens centrarem en la detecció, a poca profunditat, de canonades soterrades i les possibles fuites (anomalies extenses) que s'hi puguin produir.

La representació dels canvis de conductivitat o resistivitat que creïn les anomalies d'interès s'hauran de representar en forma d'imatges. Ens centrarem en anomalies situades a una profunditat inferior als 4 metres, ja que solen ser les profunditats màximes a les que se solen trobar les fonts que poden generar l'anomalia que es vol detectar (canonades d'aigua, d'hidrocarburs o d'altres substàncies, la humitat del subsòl, etc). Això permetrà obtenir un sistema de vigilància de baix cost.

L'objectiu principal es subdivideix en els següents objectius:

- Estudi electromagnètic per a la detecció d'anomalies de geometria definida: esfèrica i cilíndrica, immerses en un medi homogeni. Model de l'anomalia extensa.
- Estudi de diferents estratègies d'injecció-detecció, tant des del punt de vista teòric, com des del punt de vista experimental amb mesures de laboratori.
- Estudi de les corbes de resistivitat aparent per a la detecció d'objectes soterrats.
- Contribució al disseny d'un sistema de mesura per a la realització de mesures en el camp, el funcionament del qual s'haurà de validar primerament en la realització de mesures en el laboratori.
- Aplicació de diferents algorismes per reconstruir en forma d'imatges els canvis de conductivitat que permeten detectar les anomalies.
- Realització de mesures en el camp que validin la metodologia deduïda en les proves de laboratori.
- Estudi de les possibles aplicacions de la detecció d'anomalies extenses a la localització d'humitat i contaminants.

Capítol 2

MÈTODES GEOELÈCTRICS RESISTIUS

2.1. Introducció als mètodes de prospecció geofísica

La prospecció geofísica és una branca de la física aplicada consistent en un conjunt de tècniques físiques i matemàtiques, aplicades a l'exploració del subsòl per buscar i estudiar jaciments de substàncies útils (petroli, aigües subterrànies, minerals, carbó, etc), per mitjà d'observacions efectuades des de la superfície de la Terra. Els cossos o estructures buscades es poden detectar si discrepen dels que els envolten en alguna propietat física (Orellana, 1982).

La finalitat de les prospeccions geofísiques és detectar i localitzar cossos i estructures geològiques del subsòl i si és possible, determinar-ne les seves dimensions i alguna de les seves propietats físiques.

En general una prospecció geofísica consisteix en realitzar una sèrie de mesures sobre la superfície del terreny, o en l'aire, de forma paral·lela a la seva superfície, tot i que a vegades, aquestes mesures es realitzen a partir d'un sondeig. Les mesures consisteixen en determinar les variacions en l'espai o en el temps d'un o diversos camps de forces. El valor d'aquests camps ve determinat per la naturalesa de les estructures del subsòl i pel fet que les propietats físiques de les roques varien entre elles.

La interpretació dels camps mesurats a la superfície permet descriure l'estructura geològica del subsòl. Aquesta estarà millor definida quant més alt sigui el contrast de les seves propietats físiques. Molts cops aquest contrast no és el suficient per detectar l'anomalia d'interès i altres vegades, l'existència d'objectes propers a la superfície i de gran contrast, l'emascaren (Burger, 1992). Per tant, en general, l'elecció del mètode geofísic d'exploració es realitzarà de forma que es maximitzi aquest contrast. En aquest punt és molt important la interrelació entre dos professionals: el geòleg i el geofísic (Orellana, 1982). El geòleg utilitza el mínim instrumental i basa els seus raonaments en lleis preferentment qualitatives, mentre que el geofísic utilitza aparells costosos i complicats alhora que manipula lleis físiques d'expressió matemàtica complexa. A partir de la informació aportada pel geòleg, el geofísic ha de determinar quin

és el mètode geofísic més apropiat i les seves modalitats d'aplicació, per fixar detalladament les característiques del treball de camp.

En la fase final de la interpretació, quan s'ha de donar el significat geològic de la distribució subterrània de la magnitud física estudiada, és fonamental el treball conjunt del geòleg i el geofísic.

Les propietats de les roques més utilitzades en prospecció geofísica són: densitat, susceptibilitat magnètica, elasticitat i conductivitat elèctrica. Dintre de la gran diversitat de tècniques de prospecció geofísica destaquen quatre grups principals: gravimètric, magnètic, elèctric i sísmic.

Tota massa exerceix un efecte gravitatori, per aquesta raó els canvis en la densitat del subsòl produiran petites variacions de la gravetat mesurada a la superfície. Així mateix, moltes roques són lleugerament magnètiques, amb freqüència tenen una imanació remanent i una altra induïda pel camp magnètic terrestre, la qual cosa produeix un canvi en el camp magnètic terrestre que es pot mesurar a la superfície.

Tant el mètode gravimètric com el magnètic tenen una limitació força important: en teoria existeixen infinites estructures diferents, capaces de produir les mateixes variacions de camp observades a la superfície. A la pràctica, però, es disposa d'alguna informació geològica, que combinada amb les dades geofísiques, permet eliminar en part, la indeterminació de la solució.

Els mètodes de prospecció gravimètric i magnètic estudien camps de forces naturals. En canvi, els mètodes sísmics i elèctrics, que estudien les propietats elàstiques i elèctriques de les roques, requereixen la introducció d'energia en el subsòl. Com que en aquests mètodes s'ha de generar l'energia de forma artificial, és possible variar la distància entre l'emissor i el receptor, de forma que les mesures es poden interpretar d'una forma més detallada que en els mètodes de camp natural.

En els mètodes elèctrics, el corrent continu o de baixa freqüència s'introdueix al terreny per mitjà d'uns elèctrodes i per mitjà d'uns altres elèctrodes es detecta la diferència de potencial mesurada a la superfície, que depèn de la distribució de resistivitats del subsòl. L'energia elèctrica també es pot introduir al terreny per inducció, fent circular un corrent de freqüència més elevada (100 Hz a 100 kHz) a través d'una bobina que està connectada directament al terreny. Aquest mètode, anomenat electromagnètic, utilitza una bobina receptora i circuits auxiliars per detectar els canvis en l'amplitud, direcció o fase del senyal induït al terreny.

El GPR és una tècnica que visualitza l'estructura del subsòl a petites profunditats i amb una alta resolució. La propagació de les ones RADAR depèn de les propietats elèctriques a altes freqüències dels materials que componen el subsòl. Les freqüències de treball estan compreses entre 10 MHz i 1 GHz. La propagació dels polsos emesos és controlada per la constant dielèctrica i la

conductivitat del subsòl. La penetració de les ones emeses pel GPR és de l'ordre de 20 m, però es pot augmentar fins els 50 m quan la conductivitat del terreny sigui baixa (Kearey and Brooks, 1996). La resolució vertical i la profunditat de penetració de les ones depèn de la freqüència utilitzada.

Cal dir que el GPR és molt sensible a les interferències i que la forma més usual de presentar els resultats és en forma d'imatges. Entre els seus camps d'aplicació cal citar: estudi de túnels (Gamarro et al., 1998), (Granda and Cambero, 1998) (Chubinsky et al., 1998), detecció de tuberíes (Gòdde, 1998), detecció d'humitat (Vilas et al., 1998), etc. Un estudi detallat del sistema Georadar es pot trobar en el treball de Daniels (1996).

Els mètodes sísmics consisteixen en generar una ona elàstica, a la superfície del terreny (per mitjà d'una explosió, sofisticats sistemes de vibració (Wiederhold, 1998), etc), la qual després de reflexar-se i refractar-se en el subsòl, torna a la superfície, i a partir del coneixement del seu temps d'arribada a diferents geòfons, es pot obtenir una informació valiosa sobre l'estructura del subsòl. En zones de subsòl estratificat i a grans profunditats, els mètodes sísmics donen una informació més detallada que els altres mètodes. Però per treballs a petita escala i si les estructures són senzilles, és preferible l'ús dels mètodes elèctrics, que són més ràpids i econòmics.

Alguns cops un mateix problema s'estudia mitjançant més d'un mètode de prospecció. Així per exemple, en investigacions petroleres es solen realitzar estudis previs aeromagnètics (mesures magnètiques realitzades des de l'aire) i gravimètrics de la zona, per tal d'acotar les zones favorables que posteriorment s'estudiaran per mètodes sísmics. Al mateix temps, la combinació dels resultats de la interpretació de dos mètodes de prospecció diferents referents a una mateixa zona, permet disminuir el marge de variabilitat de les solucions. Així per exemple, per determinar el gruix d'un aquífer que es troba enmig d'una capa argilosa propera a la superfície i per sota té una capa de grava, és bo combinar el mètode resistiu (per determinar la primera interfície) i el mètode sísmic per determinar la segona, doncs els mètodes responen de forma diferent a les dues interfícies (Burger, 1992).

Un cop s'ha decidit el mètode o mètodes que s'utilitzaran, s'elegeix l'equip convenient pel treball. És molt important decidir el número de dades que s'ha de prendre per tal de realitzar posteriorment una interpretació correcta. El número mínim de mesures que s'ha de realitzar ve determinat per l'objecte a detectar i pel pressupost econòmic que es disposi. Un altre aspecte fonamental que s'ha de considerar és el dels errors i del soroll. Generalment el soroll geològic (variacions locals del subsòl) predomina sobre el soroll instrumental i per tant és el que determina la detectabilitat d'una determinada estructura. Quan aquest soroll no és despreciable, l'espaiat entre les diferents estacions de mesura ha de ser més petit (Griffiths and King, 1972).

Quan l'estructura geològica del subsòl és senzilla semblaria que seria possible realitzar una interpretació exacta i inequívoca de les mesures geofísiques, però

això no es compleix a la realitat. Per exemple, la determinació per mètodes elèctrics de la profunditat d'una roca sota un recubriment de materials no consolidats, sembla reduir-se a determinar la posició de la interfície que separa dos medis de diferent conductivitat elèctrica. Malgrat tot, el problema pot tenir una gran dificultat en la seva solució, a causa de la falta d'homogeneïtat del recubriment, de la grandària dels grans i de la humitat, doncs, es tracta d'uns factors que poden alterar considerablement la conductivitat.

Els recubriments no solen ser homogenis, però tots els mètodes interpretatius tenen validesa si la falta d'homogeneïtat no és molt gran.

De fet, l'exploració geofísica és rentable, quan es tracta de buscar minerals útils. Això succeeix, per exemple, en la prospecció petrolera per mètodes sísmics, en les que es busquen estructures situades a gran profunditat, on no és viable fer l'estudi per mitjà de perforacions.

La tria es fa més difícil quan la geofísica s'aplica a la resolució de problemes miners o d'enginyeria a poca profunditat. En aquest tipus de problemes no es pot eliminar la possibilitat de realitzar perforacions, que encara que són més costoses que els mètodes geofísics, subministren dades més segures i exactes.

La geologia del subsòl s'acostuma a visualitzar com un conjunt de capes de gruix constant i perfectament acoblades, que donen lloc a diferents models estratificats (Orellana, 1982).

2.2. Limitacions dels mètodes geofísics

Una limitació molt comuna dels mètodes geofísics és la falta de contrast de les propietats físiques de l'anomalia que es vol detectar. Una segona limitació també molt comuna és la no unicitat de les interpretacions. En geofísica existeixen dues formes de modelar la realitat: el problema directe i l'invers.

En la modelització directa es descriu una equació que explica l'efecte d'una determinada propietat física que s'està estudiant. Variant certs paràmetres de l'equació, es pot comprendre el comportament d'aquesta propietat física. La modelització inversa és més difícil i més ambigua, doncs es tracta de trobar un model que validi les observacions. Aquesta ambigüitat s'observa, per exemple, en els mètodes elèctrics, on una mateixa corba de resistivitat aparent, pot ser deguda a diferents estratificacions del subsòl.

Una altra limitació és la resolució. Per exemple, les ones sísmiques tenen una longitud d'ona de l'ordre de metres, que limita el gruix de la capa estratificada més prima que es pot detectar.

Finalment, cal destacar el soroll, ja que quasibé totes les dades geofísiques contenen soroll. La majoria del soroll no és degut a la instrumentació sinó a la diferència del terreny real i el model utilitzat per interpretar-lo.

2.3. Els mètodes resistius

En els mètodes elèctrics resistius s'injecta un corrent continu o de baixa freqüència al subsòl per mitjà de dos elèctrodes, i es detecta la tensió per mitjà de dos altres elèctrodes. Quan el corrent injectat es commuta a zero, la diferència de potencial mesurada no passa a valer zero de forma immediata. El mètode de la *polarització induïda* (IP) consisteix en mesurar el decreixement d'aquest voltatge mesurat un cop s'ha suprimit el corrent injectat (Sumer, 1995).

Un tercer mètode, anomenat electromagnètic, aplica un corrent altern al subsòl per mitjà d'una bobina i es detecten els camps electromagnètics secundaris, per mitjà d'una altra bobina. En aquests casos que no hi ha contacte directe entre el transmissor i la superfície terrestre es parla de mètodes inductius (Nabighian, 1989).

El fluxe de partícules carregades provinents de la ionoesfera, causades per les emissions solars, són responsables del fluxe de corrents alterns a les parts superiors de la Terra. Aquests corrents naturals s'anomenen tel·lúrics i es veuen alterats per la diferent conductivitat de la Terra. El mètode tel·lúric permet detectar aquestes diferències de potencial des de la superfície de la Terra i fer-ne una interpretació. El mètode *magnetotel·lúric*, a més de detectar el camp elèctric detecta el camp magnètic.

El mètode del *potencial espontani* aprofita l'activitat electroquímica de les roques, que es tradueix en uns potencials mesurables des de la superfície. Els potencials naturals prenen valors de l'ordre de milivolts, obtenint-se els valors màxims en zones que contenen metal·litzacions de sulfurs i grafit. La mesura del potencial espontani es pot realitzar de forma molt senzilla per mitjà d'un voltímetre d'una elevada impedància d'entrada (Parasnis, 1970).

Els inicis de la prospecció geoelectrica daten del 1815, quan Robert W Fox va descobrir el fenomen de la polarització espontània, que consisteix en que els jaciments de certs minerals produeixen corrents elèctrics dèbils, apreciables des de la superfície. Brown va patentar el 1883 un sistema de prospecció elèctrica de dos elèctrodes. Uns 20 anys més tard Daft i Williams van obtenir una altra patent, basada en l'ús de corrents de baixa freqüència. Un any després, el rus E.S. Ragozin publica la seva monografia "Aplicació de l'electricitat a la búsqueda de jaciments miners".

No és fins els inicis de la segona dècada del segle actual que els mètodes elèctrics de camp artificial aconseguen uns resultats força acceptables. Conrad Schlumberger a França i Frank Wenner als Estats Units de forma independent, inventen el dispositiu tetraelectròdic. Fou l'origen del *direct-current resistivity method*. A partir dels anys 30 es va produir un progrés important en l'estudi dels mètodes elèctrics i l'establiment de les seves bases teòriques. Es millorà molt la instrumentació i la interpretació dels resultats.

Els mètodes resistius són probablement els més usats en les exploracions a poca profunditat i per a la detecció de les aigües subterrànies (Burger, 1992). Entre els treballs recents de l'aplicació del mètodes resistius a la detecció de la contaminació de les aigües subterrànies podem citar el de Rühlow et al. (1998).

2.3.1. Propietats electromagnètiques de les roques

L'aplicació dels mètodes geoelectrics exigeix el coneixement de les propietats electromagnètiques de les roques i dels minerals que les constitueixen. Aquestes propietats s'expressen fonamentalment per mitjà de tres magnituds físiques: la resistivitat (o la seva inversa, conductivitat elèctrica), la permitivitat o constant dielèctrica i la permeabilitat magnètica.

El comportament físic de les roques depèn de les propietats i mode d'agregació dels seus minerals i de la forma, volum i ompliment dels seus porus (aigua o aire). També cal tenir en compte l'efecte que té la pressió i la temperatura a profunditats elevades.

L'estudi de les propietats electromagnètiques de les roques és un camp extens i complex. Major informació es pot trobar en el treball de Collet and Katsube (1973).

La resistivitat elèctrica és una magnitud física que pot prendre un ampli marge de valors ja que depèn de molts factors: tipus de material, temperatura, pressió, etc. En els metalls la resistivitat oscil·la entre 10 nΩm i 100 nΩm. Els minerals semiconductors són molts i de gran importància pràctica. La seva resistivitat depèn del contingut d'impureses, la presència d'estructura porosa, la manera de distribuir-se els grans, etc, i decreix amb la temperatura. Els minerals dielèctrics com el quars, el petroli, etc, presenten resistivitats molt elevades, de l'ordre de 10MΩm.

L'aigua pura és molt poc conductora. L'aigua destilada, per exemple, té una resistivitat de l'ordre de 100 kΩm, per la qual cosa es pot considerar com aïllant. Les aigües que es troben a la natura presenten, però, una apreciable conductivitat deguda a la presència de sals, com Na Cl. La quantitat i classe de les sals presents en l'aigua depèn de les roques amb les que hagi estat en contacte al llarg del seu recorregut, ja sigui superficial o subterrània. La taula 2.1 mostra el marge de variació de la resistivitat d'algunes aigües naturals.

Aigua de llacs i torrents d'alta muntanya	10^3 a $3 \cdot 10^3$ Ω·m
Aigües dolces superficials	10 a 10^3 Ω·m
Aigües salobres superficials	2 a 10 Ω·m
Aigües de llacs salats	0,1 a 1 Ω·m
Aigües marines	~0,2 Ω·m
Aigües d'impregnació de roques	0,03 a 10 Ω·m

Taula 2.1: Resistivitat de diferents tipus d'aigües.

Si la resistivitat de les roques depengués exclusivament dels minerals constituents, la majoria de casos haurien de considerar-se aïllants, ja que el quars, els silicats, etc, ho són. En realitat totes les roques tenen porus en major o menor proporció, els quals acostumen a estar ocupats per electròlits, la qual cosa comporta que la majoria de roques es comportin com conductors iònics, amb un ampli ventall de valors de resistivitat.

Per estudiar l'efecte del grau de porositat en les roques, descrivim breument un material de resistivitat ρ_2 en el qual hi ha una sèrie de porus de resistivitat ρ_1 (figura 2.1).

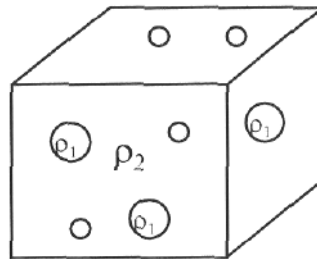


Figura 2.1: Medi homogeni amb inclusions esfèriques distribuïdes aleatòriament.

Maxwell va estudiar el cas en el que els porus de resistivitat ρ_1 prenguin la forma esfèrica i va obtenir la següent expressió per la resistivitat del conjunt.

$$\rho_{12} = \frac{2 \rho' + 1 + p (\rho' - 1)}{2 \rho' + 1 - 2p (\rho' - 1)} \rho_2 \tag{2.1}$$

on p és la porositat del volum (fracció de volum ocupat per les esferes) i $\rho' = \rho_1 / \rho_2$.

La taula 2.2 mostra el marge de porositats corresponents a diferents materials.

Argiles	20-50%	Llots	80-85%
Sorres gruixudes	25-60%	Dolomies	3-20%
Sorres fines	30-60%	Grava	20-40%
Sorres de dunes	40%	Laves	20-80%
Sorres de platja	80-85%	Margues	4-60%
Arenisca	20-35%	Roques ignies	0.3-5%
Calisa	1.5-20%	Vulcanites clàstiques	5-60%

Taula 2.2: Porositats de diferents sòls.

La figura 2.2 mostra la variació de la resistivitat del volum en funció del grau de porositat i per diferents relacions ρ' . Podem observar que a l'augmentar la porositat de la roca, aquesta tendeix a ser més o menys conductora, en funció de la conductivitat del l'electròlit que ompli els porus.

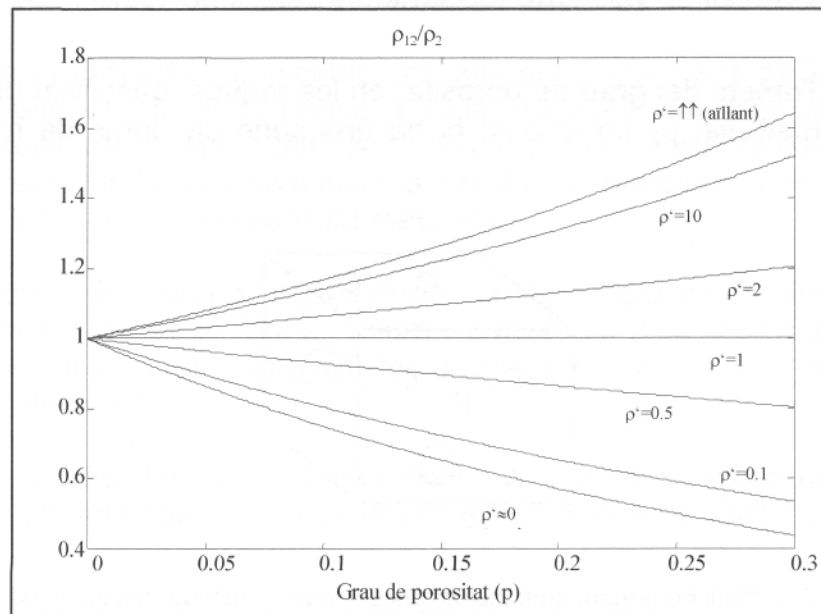


Figura 2.3: Variació de la resistivitat (ρ_{12}/ρ_2) en funció de la porositat (p) per diverses relacions de conductivitat ($\rho' = \rho_1/\rho_2$).

La resistivitat del medi heterogeni disminueix notablement si les inclusions conductores es troben en contacte, ja que en aquest cas s'estableix un camí conductor en el qual tindrà lloc pràcticament la totalitat de la conducció. En aquest cas únicament ens interessa conèixer la conductivitat dels porus (ρ_i). Si el medi matriu és aïllant i suposem que tota la conducció es realitza per mitjà dels porus, la resistivitat de la roca es pot calcular a partir de l'expressió següent (Orellana, 1982).

$$\rho_{12} = \frac{T^2}{p} \rho_1 \quad (2.2)$$

On T és la tortuositat, que quantifica la relació entre la longitud mitja dels conductes de porus i la longitud de la roca, i p és la porositat de la roca.

2.3.2. Prospecció elèctrica per corrent continu

Els corrents elèctrics que s'injecten al sòl circulen en un medi tridimensional. Per tal de simplificar el problema des d'un punt de vista matemàtic, suposarem que el sòl és un semiespai infinit de resistivitat homogènia ρ . La figura 2.3 descriu les línies equipotencials i de corrent creades per un elèctrode puntual de corrent situat a la superfície d'un terreny homogeni i isotròpic. L'elèctrode que actua com a drenador de corrent se suposa que es troba a l'infinit. El corrent únicament flueix en el subsòl, doncs suposem que l'aire té una resistivitat infinita. Resolent l'equació de Laplace en coordenades esfèriques trobarem l'expressió del potencial en qualsevol punt del semiespai infinit,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.3)$$

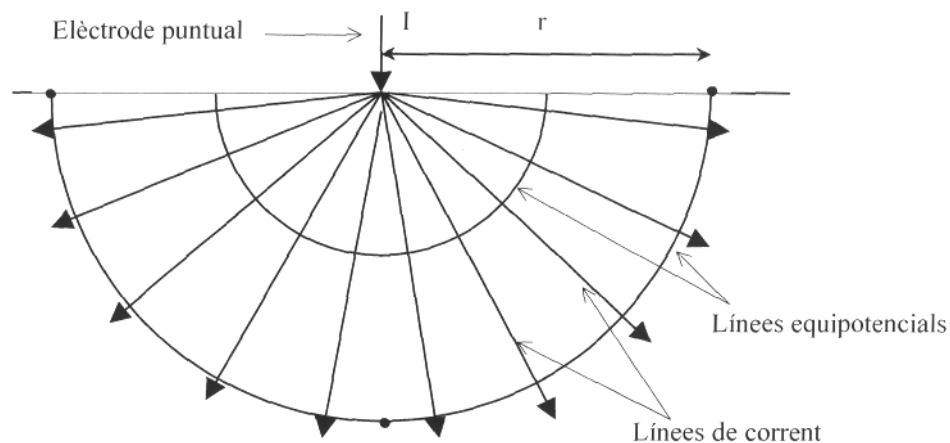


Figura 2.3: Línies equipotencials i de corrent creades per una font de corrent puntual en un semiespai homogeni i isotròpic.

El potencial creat per la font de corrent puntual en qualsevol punt del semiespai infinit pren la següent expressió (Cantos, 1987)

$$V = \frac{\rho I}{2 \pi r} \quad (2.4)$$

En realitat l'elèctrode que drena el corrent no es troba a l'infinit, tal i com s'observa a la figura 2.4. Per mitjà d'aquesta figura es pot determinar en funció de la geometria del problema, fins a quina profunditat fluirà la major part del corrent injectat al subsòl.

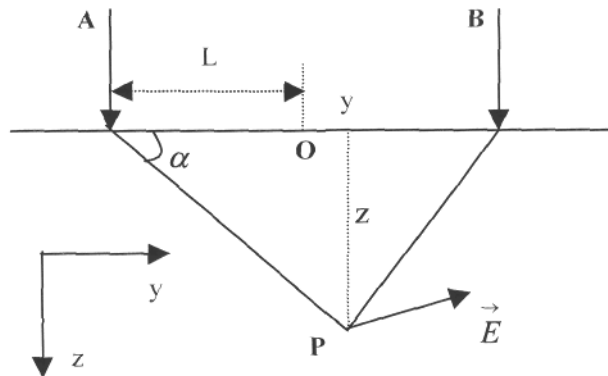


Figura 2.4: Representació del camp elèctric produït en el punt P, desplaçat una distància y, respecte al centre dels elèctrodes injectors A i B.

La densitat de corrent (J) en funció de la profunditat és (Orellana, 1982).

$$J = \frac{I}{\pi} \frac{1}{L^2 \left(1 + \frac{z^2 + y^2}{L^2}\right)^{3/2}} \quad (2.5)$$

Es pot observar com en un medi homogeni la densitat de corrent disminueix amb la profunditat.

La fracció de corrent (F) que circula per sobre una determinada profunditat h és

$$F = \frac{1}{\pi L^2} \int_0^h \int_{-\infty}^{\infty} J \, dx dy = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h}{L} \quad (2.6)$$

La figura 2.5 mostra la fracció de corrent que circula a una profunditat determinada en funció de la separació electròdica.

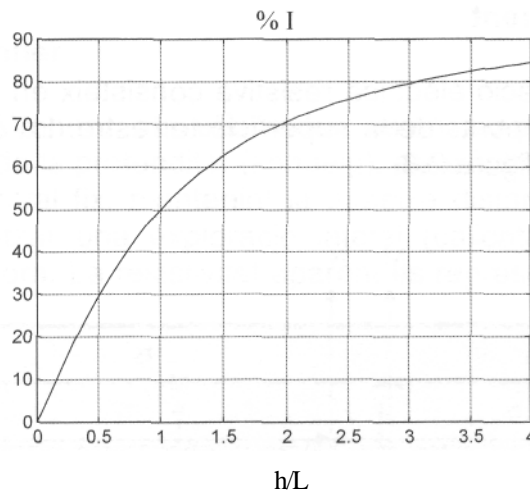


Figura 2.5: Proporció del corrent que penetra a una determinada profunditat (h), en funció de la separació dels elèctrodes de corrent.

El 50 % del corrent es concentra sobre el pla horitzontal situat a la meitat de la distància dels elèctrodes de corrent. El 70 % del corrent es concentra sobre el pla situat a una profunditat igual a la separació elèctròdica. S'observa, doncs, que a mesura que se separen els elèctrodes injectors de corrent, aquest pot circular a major profunditat (Burger, 1992). Lògicament les zones més fondes influiran menys en el potencial observat a la superfície, al ser menor la densitat de corrent que hi circula.

La resistència que ofereix el terreny a l'entrada del corrent (figura 2.3), depèn de la impedància de l'elèctrode. Si el corrent injectat és continu es pot aproximar per una resistència d'elèctrode de valor (Iakuboskii and Liakhov, 1980).

$$R_e = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{2l}{a} \quad (2.7)$$

on:

l : Longitud de la part de l'elèctrode introduïda en el terreny.

a : Radi de l'elèctrode.

ρ : Resistivitat del terreny.

La resistència de contacte dels elèctrodes és el factor que limita en la pràctica el valor de la intensitat introduïda al subsòl. La forma d'augmentar-la és disminuir les resistències dels elèctrodes injectors a partir de:

- Clavar més profundament els elèctrodes.
- Disminuir la resistència del terreny en contacte amb els elèctrodes, regant-los amb aigua salada.

2.3.3. Resistivitat aparent

L'objectiu d'una exploració elèctrica resistiva consisteix en mesurar la diferència de potencial entre dos punts de la superfície terrestre. La distribució electròdica general s'observa a la figura 2.6.

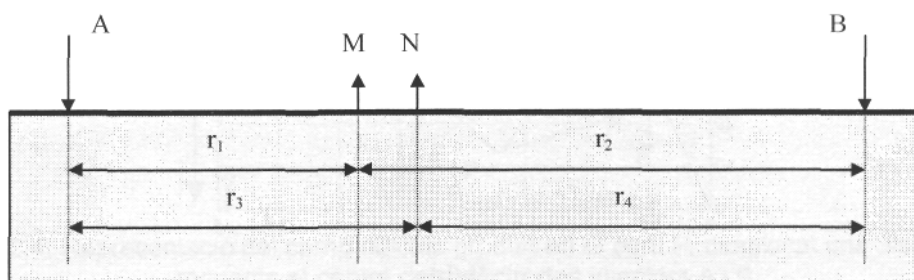


Figura 2.6: Distribució electròdica bàsica.

La diferència de potencial entre els elèctrodes M i N és

$$\Delta V = \frac{I\rho}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right] \quad (2.7)$$

A partir de (2.7) es pot aïllar la resistivitat, donant lloc al paràmetre **resistivitat aparent** (Telford et al., 1991):

$$\rho = \frac{2\pi\Delta V}{I} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right]^{-1} = \frac{2\pi\Delta V}{I} p \quad (2.8)$$

on el paràmetre p està relacionat amb la geometria de la configuració d'elèctrodes. La resistivitat aparent és un concepte formal i bastant artificiós, que no representa la resistivitat amittjanada del terreny doncs, per exemple, pot prendre valors negatius. Per valorar aquesta magnitud correctament s'ha de tenir en compte la configuració electròdica utilitzada (Parasnis, 1970). Si el terreny és homogeni i isotròpic, el valor de la resistivitat aparent concideix amb la del medi. En el cas que el terreny no sigui homogeni la resistivitat aparent ens donarà informació de l'anomalia present en el subsòl.

Pel teorema de reciprocitat de Helmholtz de la teoria de circuits elèctrics la resistivitat aparent no varia si s'intercanvia la posició dels elèctrodes de corrent i els de potencial, independentment de la configuració utilitzada, la qual cosa es compleix encara que el terreny sigui homogeni (Parasnis, 1970).

A la pràctica els elèctrodes es troben disposats en línia, la qual cosa facilita la interpretació dels resultats i les mesures de camp. En funció de la posició relativa entre els elèctrodes injectors i detectors existeixen una sèrie de configuracions força conegudes que describim breument a continuació.

a) Configuració Wenner

En la configuració Wenner els elèctrodes estan equiespaiats. Per fer una exploració en funció de la profunditat (sondeig), els elèctrodes es van distanciant respecte un punt central fix, mantenint la mateixa distància entre els diferents elèctrodes. Per realitzar una exploració lateral (calicata) es van movent els quatre elèctrodes alhora. La resistivitat aparent es representa respecte el centre de l'agrupació.

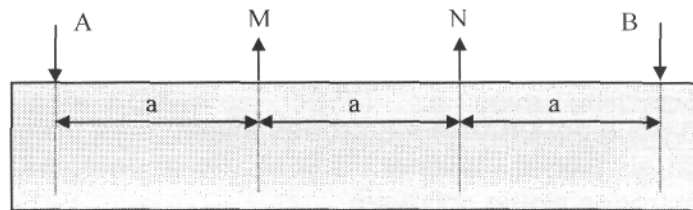


Figura 2.7: Configuració electròdica Wenner.

La resistivitat aparent que s'obté és

$$\rho_a = 2\pi a \frac{\Delta V}{I} \tag{2.9}$$

b) Configuració Schlumberger

En la configuració Schlumberger els elèctrodes de corrent estan molt més distanciat que els de potencial.

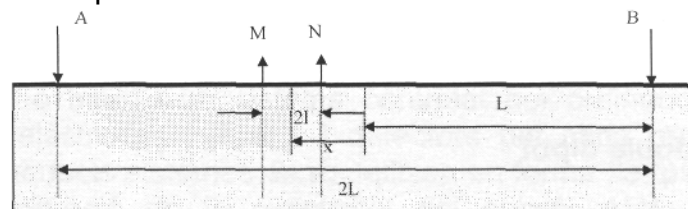


Figura 2.8: Configuració electròdica Schlumberger.

La resistivitat aparent que s'obté quan $(L - x) \gg l$ respon a l'expressió (2.10), la qual és més vàlida quant més allunyats es trobin els elèctrodes de potencial respecte els elèctrodes de corrent.

$$\rho_a = \frac{\pi (L^2 - x^2)^2}{2l (L^2 + x^2)} \frac{\Delta V}{I} = \pi \frac{E (L^2 - x^2)^2}{I (L^2 + x^2)} \tag{2.10}$$

Per realitzar mesures en profunditat els elèctrodes detectors es mantenen fixes en $x = 0$ i es van allunyant els elèctrodes injectors del centre de l'agrupació de forma simètrica. Aquest procediment és més avantatjós que la utilització de la

configuració Wenner ja que únicament s'han de moure dos elèctrodes. En la realització d'un sondeig vertical, però, els nivells de tensió detectats a partir de la configuració Schlumberger són inferiors als obtinguts mitjançant la configuració Wenner, per un mateix corrent injectat, ja que en el configuració Wenner al realitzar una exploració a major profunditat també s'incrementa la separació dels elèctrodes de potencial, la qual cosa compensa la major separació dels elèctrodes de corrent (Beck, 1981).

Per realitzar una exploració lateral mantenint els elèctrodes injectors fixes, el que es fa és moure els elèctrodes de potencial.

c) Configuració pol dipol

En la configuració pol dipol un dels elèctrodes injectors es troba a una distància molt gran respecte als altres, idealment infinita. En aquest cas no és necessari que els quatre elèctrodes siguin colineals.

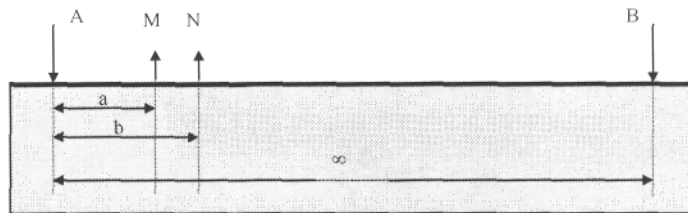


Figura 2.10: Configuració electròdica pol dipol.

La resistivitat aparent mesurada equival a

$$\rho_a = \frac{2\pi ab}{b-a} \frac{\Delta V}{I} \quad (2.11)$$

d) Configuració doble dipol

En la configuració doble dipol els elèctrodes injectors es troben propers entre si i allunyats dels elèctrodes detectors.

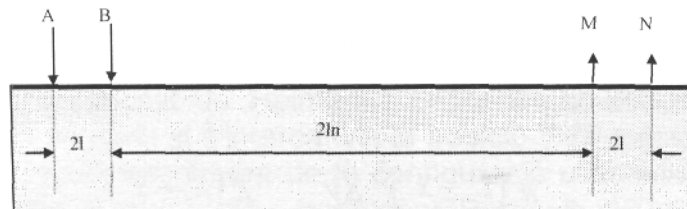


Figura 2.10: Configuració electròdica doble dipol.

La resistivitat aparent és

$$\rho_a = 2\pi n(n+1)(n+2)l \frac{\Delta V}{I} \quad (2.12)$$

La tensió detectada per mitjà d'aquesta configuració és inferior a la detectada per les altres configuracions per una mateixa profunditat d'exploració, però té l'avantatge d'evitar l'acoblament entre els cables injectors i detectors (Milsom, 1989).

La configuració doble dipol se sol aplicar per explorar profunditats grans, la qual cosa s'aconsegueix a l'augmentar la distància entre els elèctrodes injectors i els elèctrodes detectors (Edwards, 1977). La seva utilització té avantatges pràctiques, ja que per una mateixa profunditat de penetració necessita menys longitud de cable que les configuracions Wenner i Schlumberger. Les tensions mesurades, però, són inferiors, ja que el camp elèctric generat per un dipol de corrent decreix segons r^3 i el generat per un elèctrode de corrent decreix segons r^2 (Koefoed, 1988).

2.3.4 Configuracions utilitzades en tomografia d'impedància elèctrica

En tomografia d'impedància elèctrica s'intenta realitzar un gran nombre de mesures linealment independents per tal de poder obtenir imatges de la distribució de la resistivitat del subsòl.

Les exploracions per tomografia elèctrica s'utilitzen per visualitzar àrees del subsòl que tenen unes característiques geològiques complexes i on els mètodes tradicionals (sondeig elèctric vertical i calicates elèctriques) no tenen bons resultats. Aquestes exploracions normalment utilitzen un nombre elevat d'elèctrodes (25 o més) i un sistema controlat per ordinador s'encarrega de seleccionar els elèctrodes injectors i detectors per cada mesura. Les dades obtingudes per aquests sistemes es visualitzen en forma de "pseudosecció", que dona una aproximació de la resistivitat del subsòl. Mètodes més recents realitzen la inversió de les mesures per obtenir un model més acurat de la resistivitat del subsòl (Loke and Barker, 1996).

Per una agrupació de N elèctrodes, el nombre màxim de mesures linealment independents sense mesurar en els elèctrodes injectors és $(N - 3)N/2$ (Noel and Xu, 1991). Xu and Noel (1993) estudien diferents configuracions electròniques lineals des del punt de vista de la independència de les mesures i de la seva relació senyal a soroll.

Les configuracions electròniques que hem utilitzarem en la reconstrucció de dades analítiques i experimentals (capítols 7, 8 i 9) apareixen a la figura 2.12, les quals deriven de les configuracions doble dipol i Schlumberger.

La configuració **doble dipol amb extrems** consisteix en injectar corrent per mitjà de dos elèctrodes adjacents i realitzar la mesura pels altres elèctrodes adjacents de forma consecutiva fins arribar al final de l'agrupació. A continuació es mouen una posició els elèctrodes injectors i es torna a realitzar el mateix procediment fins que els elèctrodes injectors arriben al final de l'agrupació restant separats per una parella d'elèctrodes de potencial. Finalment s'afegeix la injecció entre els elèctrodes extrems i es realitza la detecció entre els elèctrodes interiors adjacents. El número de mesures linealment independents que es poden aconseguir a partir de N elèctrodes és de $N(N - 3)/2$ mesures. Kotre (1996a) aplica aquesta configuració en la reconstrucció de seccions horitzontals paral·leles a la superfície del subsòl.

Sasaki (1992) afirma que quan l'exactitud de la instrumentació és gran, la configuració doble dipol és més apropiada per detectar estructures complexes que la pol dipol, tot i que aquesta permet tenir uns nivells de tensió superiors, d'on es desprèn el compromís entre una bona resolució i uns nivells de tensió grans.

La configuració que hem anomenat **Schlumberger** (per similitud a la configuració Schlumberger que hem explicat anteriorment) consisteix en realitzar diferents calicates Schlumberger, on s'injecta pels elèctrodes exteriors i es realitzen les mesures interiors a partir d'elèctrodes de potencial adjacents. Un cop s'ha realitzat una calicata Schlumberger, s'acosta una posició un elèctrode injector a l'altre i es repeteix el procés fins que els dos elèctrodes injectors es troben separats per 2 elèctrodes detectors. El número de mesures linealment independents és de $(N - 2)(N - 3)/2$, menor que en la configuració doble dipol amb extrems.

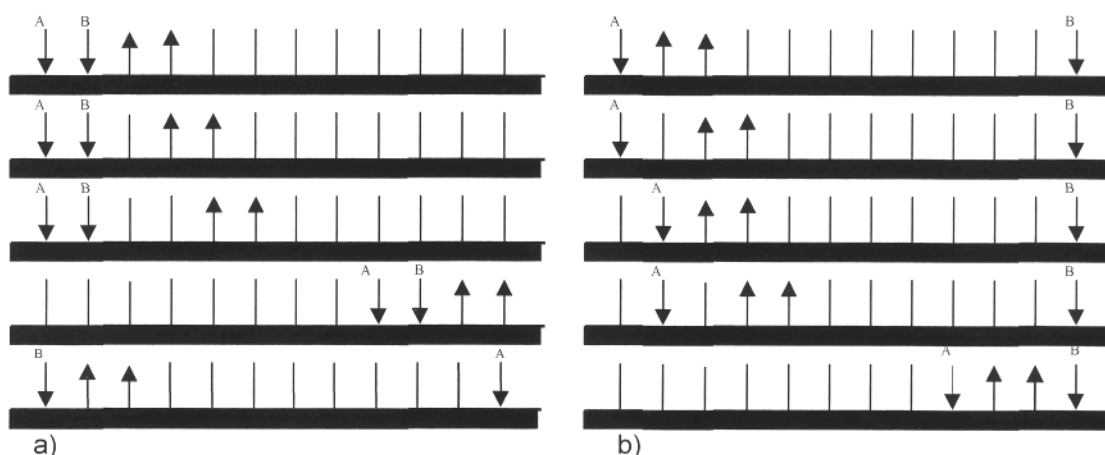


Figura 2.11: Descripció de les configuracions electròniques bàsiques utilitzades en la reconstrucció d'anomalies per mitjà d'imatges de la distribució de resistivitat elèctrica, a) Configuració doble dipol amb extrems, b) Configuració Schlumberger.

Aquestes configuracions electròniques s'apliquen en els capítols 7, 8 i 9 on es realitza la reconstrucció de dades analítiques, dades experimentals de laboratori i dades experimentals de camp, respectivament.

El nombre d'elèctrodes que disposa l'agrupació electròdica determina el màxim nombre de mesures linealment independents que es poden realitzar. Nosaltres realitzarem reconstruccions per mitjà de 8 elèctrodes i 16 elèctrodes. Per aquesta raó les configuracions electròdiques que utilitzarem les anomenarem abreviadament: dd-20, dd-104, Sch-15 i Sch-91, on el nombre indica el número de mesures linealment independents que es poden realitzar amb cada configuració.

2.3.5. Terreny estratificat

El problema de la determinació de la conductivitat a a l'interior del subsòl, quan es coneix el potencial a la seva superfície, produït per un elèctrode de corrent, consisteix en resoldre el problema invers, donat per l'equació

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla V) = 0 \quad (2.13)$$

Si la conductivitat únicament depèn de la profunditat, l'equació (2.13) té solució única. La seva determinació, però, no resol el problema geològic, ja que hi ha diferents tipus de roques i formacions geològiques que els correspon la mateixa conductivitat.

La interpretació quantitativa de les corbes de resistivitat aparent és difícil ja que és molt complicat desenvolupar expressions teòriques per estructures geològiques complexes que es puguin assimilar a les reals. Per aquesta raó els models que s'han desenvolupat es basen en l'estratificació de la Terra. Consisteixen en un conjunt de capes paral·leles entre si i a la superfície del terreny, cadascuna de les quals té un valor de resistivitat homogènia diferent. La preferència donada a aquest tipus d'estructures prové de que representa talls geològics molt freqüents a la naturalesa (Orellana, 1974). Aquest model és de gran importància en la prospecció d'aigua subterrània (Parasnis, 1970).

La figura 2.12 mostra el cas més senzill de terreny estratificat el qual consta de dues capes de diferent resistivitat ρ_1 i ρ_2 .

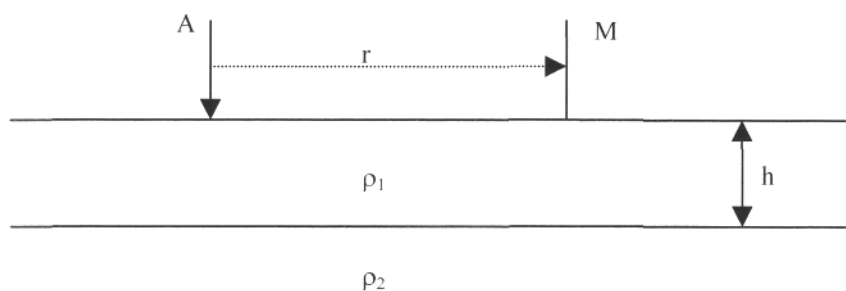


Figura 2.12: Model de terreny estratificat de dues capes.

El potencial mesurat en el punt M a causa de la injecció de corrent I, per mitjà de l'elèctrode A, té la següent expressió (Orellana, 1982)

$$V_M = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{(r^2 + 4n^2 h^2)^{1/2}} \right) \quad (2.14)$$

on

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

El problema es pot estendre a l'estudi de n capes, però l'expressió del potencial mesurat a la superfície es complica doncs té l'expressió

$$V_M = \frac{I \rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} N_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.15)$$

on N_n és una funció dels gruixos i resistivitats de les capes del tall.

A partir del coneixement del potencial mesurat a la superfície es pot calcular la resistivitat aparent corresponent a una determinada configuració electròdica. Inicialment es creia que l'estudi dels màxims i mínims i punts d'inflexió de les corbes de resistivitat aparent eren de gran importància ja que a partir d'ells es podria obtenir els gruixos i resistivitats de les diferents capes geoelectriques del terreny estratificat. Estudis més detallats han demostrat que l'estudi dels punts característics de les corbes de resistivitat aparent no permeten determinar valors únics de gruixos i resistivitats (Orellana, 1974).

L'anàlisi de les corbes de resistivitat aparent és un mètode usual en la interpretació de l'estructura geològica del subsòl. Durant els anys 70 es van desenvolupar diferents algorismes per interpretar el sondeig elèctric vertical. Quan es modifica el model estratificat amb la inclusió de noves restriccions sobre els gruixos i resistivitats del model estratificat es solen utilitzar les funcions de DarZarrouk (Orellana, 1982), (Zohdy, 1989).

2.4. Aplicació dels mètodes geoelectrics a la detecció de contaminants

Una de les principals classes de contaminació del medi ambient és la contaminació del subsòl amb petroli i altres fluids orgànics, que pot provenir de les emissions que es produeixen al medi ambient com a causa del trencament de tuberïes, fuites de dipòsits en refineries, plantes químiques, estacions de servei, aeroports, etc. (Rapoport, 1998).

Alguns dels principals èxits dels mètodes resistius es basen en la detecció de la contaminació de les aigües subterrànies, produïda per la filtració de diferents materials contaminants (Vogelsang, 1995)(Taula 2.3) o per la intrusió d'aigua salada. En aquests casos les aigües contaminades solen presentar una resistivitat inferior que la corresponent en ausència de contaminació, la qual pot ser detectada per mitjà d'una prospecció elèctrica resistiva. Per realitzar l'exploració és necessari poder disposar de mesures en absència de contaminació.

En els últims anys l'exploració elèctrica resistiva (DC) ha progressat ràpidament des de la visualització de corbes de resistivitat aparent corresponents a un model estratificat fins a obtenir imatges 2D i 3D del subsòl. Aquest avenç ha estat gràcies a l'aplicació de tècniques tomogràfiques elèctriques provinents d'altres camps de la ciència com és la medicina. La visualització per imatges és especialment interessant en l'estudi d'àrees de gran complexitat geològica, detecció d'aigües subterrànies i altres problemes a poca profunditat (Copertino et al. 1998).

Materials dipositats	Resistivitat [$\Omega\cdot m$]
Escombraries domèstiques	12-30
Dejeccions i sòls abocats	200-350
Llots industrials	40-200
Ferralla	1-12
Fragments de vidre i porcellana trencats	100-550
Sorra tova remoguda	400-1600
Restes de paper (humides)	70-180
Veta contaminada d'escombraries	1-10
Oli usat	150-700
Quitrà	300-1200
Roba i materials de neteja	30-200
Laques i pintures usades	200-1000

Taula 2.3: Resistivitat d'alguns elements contaminants.

Donada la dificultat de determinar la presència de contaminants en el subsòl de forma controlada, intentarem detectar fuites d'aigua en canonades soterrades. Inicialment s'haurà de detectar el tub per després poder-ne realitzar una monitorització i poder detectar la presència de la fuga.

La majoria de canalitzacions es realitza amb canonades comercials de diferent tipus, en funció de l'aplicació a la que van destinades. Entre els principals materials de fabricació cal destacar: el formigó, l'acer i el PVC. En l'apèndix A es realitza una descripció de la contaminació del subsòl i dels mètodes actuals per detectar-la. Es fa especial èmfasi a la contaminació produïda en dipòsits i tuberíes soterrades i es descriuen els resultats d'alguns treballs que utilitzen els mètodes geoelectrics.

Capítol 3

EL PROBLEMA DIRECTE. ANÀLISI TEÒRICA

Per una determinada canalització soterrada o dipòsit soterrat és interessant conèixer el perfil de tensions o la resistivitat aparent que s'obtindrà a la superfície, quan s'injecta un corrent al subsòl per mitjà de dos elèctrodes injectors A i B, doncs això permet conèixer la magnitud de les tensions obtingudes, el marge dinàmic necessari per a la instrumentació i en definitiva si es podrà detectar l'estructura enterrada. És el que s'anomena "resoldre el problema directe", el qual ha estat àmpliament analitzat en els estudis relatius a tomografia d'impedància elèctrica i per tant la seva metodologia pot ser aplicada, amb les modificacions oportunes, per a l'exploració del subsòl (Webster 1990).

Per resoldre aquest problema s'ha de conèixer el corrent que s'injecta al sòl, la resistivitat del medi homogeni i la de l'objecte que es vol detectar, així com la seva grandària i la profunditat a la que es troba situada ja que el problema directe consisteix en predir una sèrie de mesures a partir d'un model determinat (Menke 1989).

Moltes canalitzacions estan soterrades seguint unes determinades normes que s'han de respectar: diàmetre, profunditat del tub, grandària de la xanbra on es troba localitzada la canonada, etc (Rubio 1979). A través d'una determinada agrupació d'elèctrodes hem de ser capaços de poder detectar una possible fuga, a partir dels conceptes en els que es fonamenta la prospecció elèctrica resistiva.

En aquest capítol descriurem el model que ens permetrà estudiar, d'una manera simplificada, la presència d'una fuga en una canonada cilíndrica o dipòsit esfèric, els diferents paràmetres involucrats i la metodologia per determinar les seves dimensions, a partir de les mesures de resistivitat aparent, realitzades en la superfície del terreny.

3.1. Distribució de potencial en presència d'anomalies cilíndriques i esfèriques

Aquest apartat mostra la solució d'una sèrie de problemes electroestàtics. L'objectiu és determinar el potencial a l'exterior d'anomalies cilíndriques concèntriques i esfèriques concèntriques, quan estan sotmeses a l'acció d'un o més elèctrodes puntuals de corrent. Aquesta forma de modelitzar una fuita en canonades i dipòsits soterrats pot ser d'utilitat en la resolució de problemes amb geometria similar en altres camps de la ciència i l'enginyeria.

3.1.1. Anomalies cilíndriques concèntriques properes a un elèctrode puntual de corrent

Considerem una sèrie de cilindres concèntrics de radis a_1, a_2, \dots, a_{N+1} i conductivitats $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N+1}$ (o resistivitats $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N+1}$), immersos en un medi homogeni de conductivitat σ_{N+2} (o resistivitat ρ_{N+2}). La figura 3.1 mostra la geometria del problema, on I representa l'elèctrode injector de corrent i M és el punt on es mesura el potencial.

A partir de l'estudi realitzat per Parra et al. (1986) i per mitjà de l'aplicació de les condicions de contorn entre les diferents corones cilíndriques (continuïtat del potencial i de la densitat de corrent radial a cada interfície), hem arribat a obtenir una expressió força compacta pel potencial mesurat en un punt M, a l'exterior de l'anomalia, el qual satisfà l'equació de Laplace.

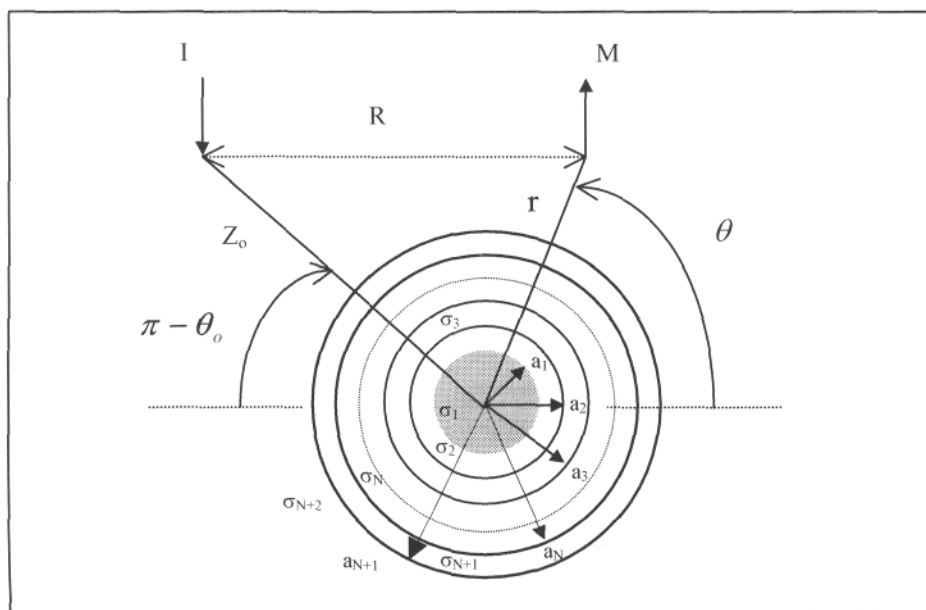


Figura 3.1: Anomalies cilíndriques concèntriques properes a un elèctrode puntual de corrent.

L'Apèndix B mostra que l'expressió del potencial mesurat en un punt M arbitrari té la forma

$$V = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m a_m(\lambda) k_m(\lambda\rho) \cos m(\theta - \theta_o) d\lambda \quad (3.1)$$

on

$$a_m(\lambda) = \frac{\gamma_{N+1}}{\alpha_{N+1} + \mu_{N+1} \beta_{N+1}} \left(\mu_{N+1} \frac{I_m(\lambda a_{N+1})}{k_m(\lambda a_{N+1})} + 1 \right) - \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{k_m(\lambda z_o) I_m(\lambda a_{N+1})}{k_m(\lambda a_{N+1})} \quad (3.2)$$

és el coeficient que caracteritza l'anomalia, i és funció dels següents paràmetres

$$\gamma_{N+1} = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} k_m(\lambda z_o) \left(\frac{I_m(\lambda a_{N+1})}{k_m(\lambda a_{N+1})} - \frac{I'_m(\lambda a_{N+1})}{k'_m(\lambda a_{N+1})} \right)$$

$$\alpha_{N+1} = 1 - \frac{\rho_{N+2}}{\rho_{N+1}}, \quad \beta_{N+1} = \frac{I_m(\lambda a_{N+1})}{k_m(\lambda a_{N+1})} - \frac{\rho_{N+2}}{\rho_{N+1}} \frac{I'_m(\lambda a_{N+1})}{k'_m(\lambda a_{N+1})}$$

L'especial geometria del sistema fa que el paràmetre μ_{N+1} , respongui a la següent fórmula de recurrència

$$\mu_{N+1} = \frac{\left(\frac{\rho_N}{\rho_{N+1}} - 1 \right) \frac{k_m(\lambda a_N)}{I_m(\lambda a_N)} \frac{k'_m(\lambda a_N)}{I'_m(\lambda a_N)} + \left(\frac{\rho_N}{\rho_{N+1}} \frac{k'_m(\lambda a_N)}{I'_m(\lambda a_N)} - \frac{k_m(\lambda a_N)}{I_m(\lambda a_N)} \right) \mu_N}{\frac{k'_m(\lambda a_N)}{I'_m(\lambda a_N)} - \frac{\rho_N}{\rho_{N+1}} \frac{k_m(\lambda a_N)}{I_m(\lambda a_N)} + \left(1 - \frac{\rho_N}{\rho_{N+1}} \right) \mu_N} \quad (3.3)$$

En el cas de considerar únicament dos cilindres concèntrics, μ_{N+1} queda reduït a

$$\mu_2 = \frac{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{k'_m(\lambda a_1)}{I'_m(\lambda a_1)} - \frac{k_m(\lambda a_1)}{I_m(\lambda a_1)}}{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}} \quad (3.3b)$$

Podem observar com el potencial a l'exterior de l'anomalia depèn de les funcions de Bessel modificades $k_m(\lambda)$, $I_m(\lambda)$ i les seves respectives derivades $k'_m(\lambda)$, $I'_m(\lambda)$ (Ramo, 1974).

Si a la figura 3.1 s'afegeix un nou elèctrode de corrent (- /), es redueix l'espai infinit a un semiespai infinit (on la línia divisora representi la superfície del sòl) i

es realitzen mesures de potencial en ella, ja estem en condicions de realitzar la detecció de l'anomalia des de la superfície.

El càlcul mitjançant un programa de les tensions mesurades a la superfície del terreny, per diferents configuracions electròdiques, ens permetrà disposar de dades analítiques que podran ser utilitzades per l'algorisme de reconstrucció (Aldridge and Oldenburg, 1989).

3.1.2. Anomalies cilíndriques concèntriques en un camp uniforme

Malgrat la gran utilitat de les expressions anteriors, són força complexes de manipular analíticament. Per aquesta raó, pot ser interessant simplificar el problema i suposar que els elèctrodes injectors de corrent estan separats una distància infinita.

La figura 3.2 modela el problema que pretenem resoldre: hi ha $N + 1$ cilindres concèntrics de longitud infinita i radis $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N, a_{N+1}$ i conductivitats $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_N$ i σ_{N+1} respectivament, soterrats a una profunditat h en un medi de conductivitat σ_{N+2} .

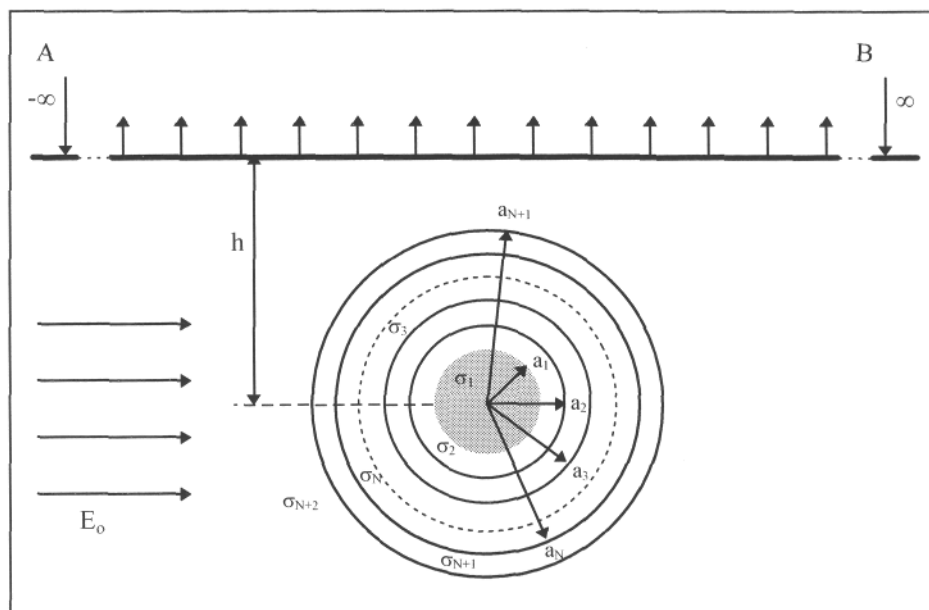


Figura 3.2: Secció transversal de $N+1$ cilindres concèntrics en presència d'un camp uniforme.

Si els elèctrodes injectors (A i B) estan separats una distància infinita, l'anomalia estarà sotmesa a l'acció d'un camp elèctric uniforme E_0 .

L'expressió del potencial mesurat a la superfície és (Telford et al., 1990)

$$V = -E_o r \cos \theta - 2 \chi_{c_{N+1}} E_o \frac{a_{N+1}^2}{r} \cos \theta \quad (3.4)$$

El primer terme és el potencial mesurat sense l'anomalia i el segon té en compte el seu efecte. Hem fet l'aproximació de doblar aquest potencial a causa de la presència de la interfície terra-aire, que és més correcta quant més enfonsada estigui l'anomalia. De fet es troben solucions força acurades per $h > 1,3 a_{N+1}$ (Aldridge and Oldenburg, 1989).

L'expressió del moment dipolar normalitzat $\chi_{c_{N+1}}$ (Wait 1985) respon a una llei recurrent (Jordana i Pallàs-Areny, 1997 i Apèndix C), que s'obté com a resultat d'aplicar condicions de contorn a les interfícies entre regions homogènies de diferent conductivitat, tal i com apareix a l'equació 3.5.

$$\chi_{c_{i+1}} = \frac{(1 - \beta_{i+1}) + (1 + \beta_{i+1}) \chi_{c_i} z_{i+1}^2}{(1 + \beta_{i+1}) + (1 - \beta_{i+1}) \chi_{c_i} z_{i+1}^2}, \text{ per } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

on $\chi_{c_1} = \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}$, $z_{i+1} = a_i/a_{i+1}$ i $\beta_{i+1} = \sigma_{i+1}/\sigma_{i+2}$, sent σ_i la conductivitat de la ièsima corona cilíndrica.

Aquest paràmetre caracteritza perfectament l'anomalia i conté informació del contrast de conductivitats (β_i) i de la relació de radis (z_i) entre les diferents corones cilíndriques.

Seagar et al. (1985) en un estudi sobre tomografia d'impedància elèctrica també determinen el comportament d'estructures de conductivitat simètrica tal i com la que es mostra a la figura 3.2. En el seu cas, però, la injecció de corrent i la detecció de tensió es realitzen en la perifèria de la corona cilíndrica més externa i es dedueix una expressió pel potencial en cada corona que depèn d'un paràmetre que respon a una fórmula de recurrència similar a (3.5), la qual cosa demostra el paral·lelisme de les anàlisis teòriques, destinades com a objectiu final a determinar la distribució de conductivitats de l'estructura cilíndrica, a partir de la mesura de tensions.

3.1.3. Anomalies esfèriques concèntriques properes a un elèctrode puntual de corrent

Un model molt utilitzat per representar les inhomogeneïtats en el subsòl és l'esfera (Van Nostrand, 1953). En aquest cas també es pot obtenir de forma similar a les anomalies cilíndriques, el potencial en un punt M de l'espai (exterior a l'anomalia), quan un elèctrode puntual de corrent es troba a una distància finita Z_o del centre de $N+1$ esferes concèntriques (figura 3.3).

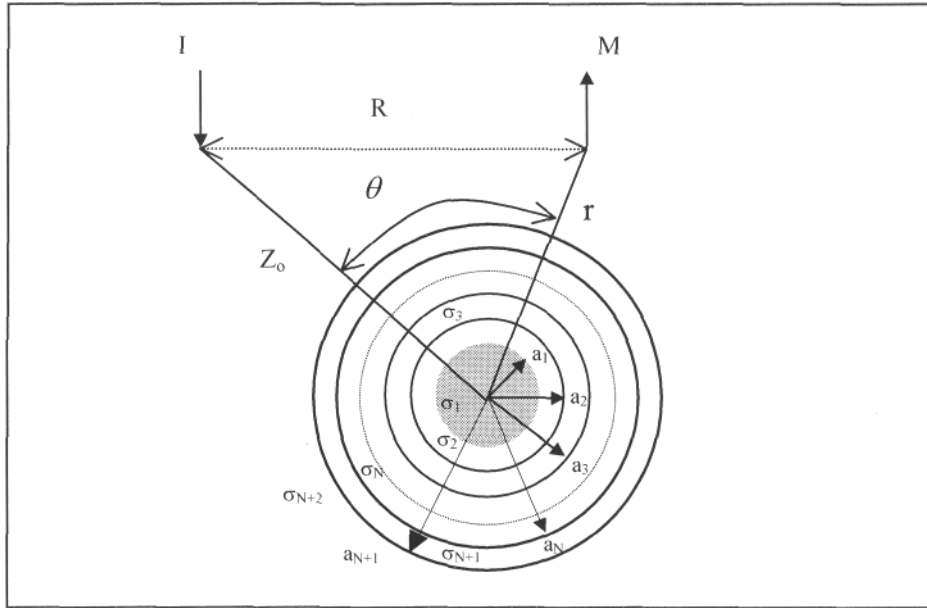


Figura 3.3: Geometria corresponent a N+1 esferes concèntriques sotmeses a la influència d'un elèctrode puntual de corrent I.

A partir de l'estudi realitzat per Wait (1982) i aplicant les condicions de contorn entre les diferents corones esfèriques, l'Apèndix D mostra com obtenir la següent expressió compacta pel potencial mesurat en un punt M, a l'exterior de l'anomalia.

$$V = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi R} + \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (3.6)$$

Si $1/R$ també s'expressa en funció dels polinomis de Legendre $P_n(\cos\theta)$, el potencial a l'exterior de l'anomalia pren la forma següent:

$$V = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{1}{z_o} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z_o}\right)^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad (3.7)$$

El coeficient A_n caracteritza perfectament l'anomalia. La seva expressió, que es mostra a continuació, s'obté aplicant adequadament les condicions de contorn a cada interfície (continuïtat del potencial i de la densitat de corrent radial).

$$A_n = \frac{\gamma_{N+1}}{\alpha_{N+1} + \beta_{N+1} \mu_{N+1}} (\mu_{N+1} + a_{N+1}^{2n+1}) - \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{a_{N+1}^{2n+1}}{z_o^{n+1}} \quad (3.8)$$

que depèn dels següents factors:

$$\alpha_{N+1} = \left(1 + \frac{\rho_{N+2}}{\rho_{N+1}} \frac{n}{n+1}\right) a_{N+1}^{2n+1}, \quad \beta_{N+1} = \left(1 - \frac{\rho_{N+2}}{\rho_{N+1}}\right), \quad \gamma_{N+1} = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{a_{N+1}^{2n+1}}{z_o^{n+1}} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

A l'igual que en el cas dels $N+1$ cilindres concèntrics apareix un paràmetre que hem anomenat μ_{N+1} i que respon a la següent fórmula de recurrència:

$$\mu_{N+1} = \frac{\left(1 + \frac{\rho_N}{\rho_{N+1}} \frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{\mu_N}{a_N^{2n+1}} + 1\right) \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) - 1}{1 - \left(1 - \frac{\rho_N}{\rho_{N+1}}\right) \left(\frac{\mu_N}{a_N^{2n+1}} + 1\right) \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)} a_N^{2n+1} \quad \text{per } N = 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

En el cas de considerar únicament dues esferes concèntriques, μ_{N+1} queda reduït a:

$$\mu_2 = \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)}{1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{n+1}{n}\right)} a_1^{2n+1} \quad (3.9b)$$

3.1.4. Anomalies esfèriques concèntriques soterrades sota la influència de dos elèctrodes puntuals de corrent

Estem també interessats en obtenir l'expressió del potencial en qualsevol punt de la superfície del terreny quan injectem corrent per mitjà de 2 elèctrodes ($/$ i $-/$), tal i com es mostra a la figura 3.4.

En aquest cas el potencial mesurat a la superfície ha de comptabilitzar tan l'efecte de l'elèctrode $/$ com del $-/$ i a més a més al reduir-se tot l'espai a un semiespai farem l'aproximació de duplicar l'efecte de l'anomalia. Aquesta aproximació és força exacta a partir de $h > 1,3 a_{N+1}$ (Telford et al., 1990).

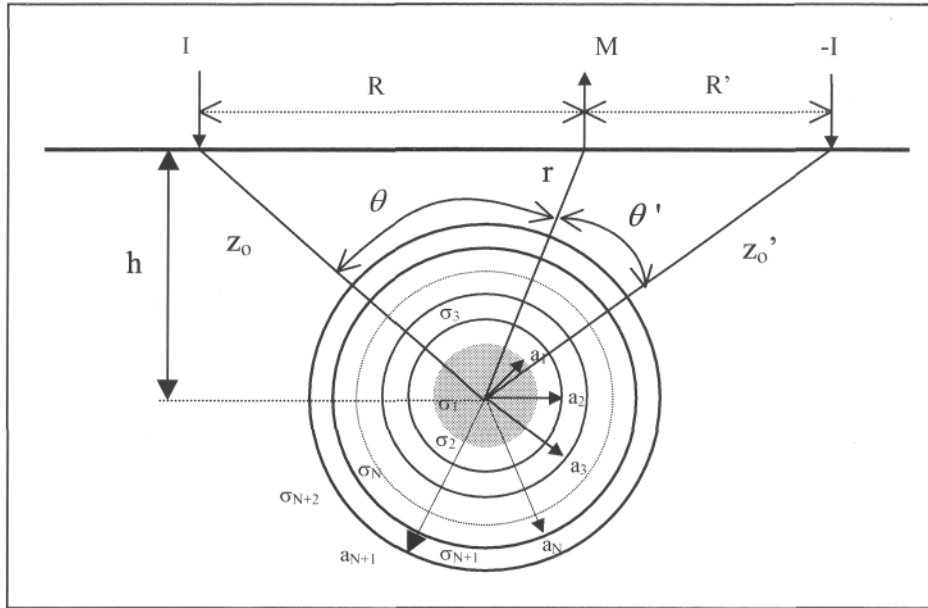


Figura 3.4: Anomalies esfèriques concèntriques soterrades a una profunditat h i sotmeses a l'acció de dos elèctrodes de corrent.

Així, doncs, el potencial mesurat a la superfície prendrà la següent expressió:

$$V = \frac{I\rho_{N+2}}{2\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) + \sum_{n=0}^{n=\infty} 2 A_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{n=\infty} 2 A_n' \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta') \quad (3.10)$$

on

$$A_n' = \frac{\gamma'_{N+1}}{\alpha_{N+1} + \beta_{N+1} \mu_{N+1}} (\mu_{N+1} + a_{N+1}^{2n+1}) - \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{a_{N+1}^{2n+1}}{z_o'^{n+1}}, \quad (3.11)$$

$$i \gamma'_{N+1} = \frac{-I\rho_{N+2}}{4\pi} \frac{a_{N+1}^{2n+1}}{z_o'^{n+1}} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)$$

Els altres coeficients A_n , α_{N+1} , β_{N+1} , μ_{N+1} responen a les mateixes expressions de l'apartat 3.1.3.

Aproximació de camp uniforme

Si en la figura 3.3, $\frac{a_{N+1}}{z_o} \ll 1$ es pot considerar que l'anomalia es troba sota la influència d'un camp elèctric uniforme (E_0), generat per l'elèctrode de corrent I. En aquest cas el potencial mesurat en un punt M, exterior a l'anomalia, tindrà únicament en compte el primer terme dels sumatoris de (3.7)

$$V = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi R} + A_1 \frac{1}{r^2} \cos\theta = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi z_o^2} r \cos\theta + \frac{A_1}{r^3} r \cos\theta \quad (3.12)$$

Operant aquestes expressions s'arriba a:

$$V(x) = -E'_o \left(1 + \chi_{s_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{r} \right)^3 \right) x, \text{ on } x = r \cos\theta \quad (3.13)$$

on $E'_o = \frac{I\rho_{N+2}}{4\pi z_o^2}$ és el camp uniforme en la direcció x

$$\text{on } \chi_{s_{N+1}} = \frac{\frac{3}{2} (\mu_{N+1} + a_{N+1}^3) - \alpha_{N+1} - \beta_{N+1} \mu_{N+1}}{\alpha_{N+1} + \beta_{N+1} \mu_{N+1}} \quad (3.14)$$

Substituint i operant s'arriba a obtenir la següent fórmula de recurrència, similar al cas dels N+1 cilindres concèntrics.

$$\chi_{s_{i+1}} = \frac{(1 - \beta_{i+1}) + (1 + 2\beta_{i+1})\chi_{s_i} z_{i+1}^3}{(2 + \beta_{i+1}) + 2(1 - \beta_{i+1})\chi_{s_i} z_{i+1}^3} \text{ per } i = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

on $\chi_{s_1} = \frac{1 - \beta_1}{2 + \beta_1}$, $z_{i+1} = a_i/a_{i+1}$ i $\beta_{i+1} = \sigma_{i+1}/\sigma_{i+2}$, sent σ_i la conductivitat de la ièsima corona esfèrica.

El moment dipolar normalitzat $\chi_{s_{N+1}}$ (Wait, 1985) caracteritza perfectament l'anomalia esfèrica, igual que en el cas de l'anomalia cilíndrica.

Si es fa l'estudi en un semiespai (presència de la interfície terra-aire) i es considera la presència d'un segon elèctrode de corrent (- I), el camp uniforme passa a valer

$$E'_o = E_o = \frac{I\rho_{N+2}}{\pi z_o^2} \quad (3.15b)$$

A més a més realitzem l'aproximació de doblar l'efecte de l'anomalia, a causa de la presència de la interfície terra-aire.

Una altra forma d'estudiar les anomalies esfèriques concèntriques en un camp elèctric uniforme és per mitjà d'una anàlisi similar a la que s'ha realitzat pel cas dels cilindres en l'apartat 3.1.2. El seu desenvolupament apareix a l'apèndix E i els seus resultats concorden amb els que hem obtingut en aquest apartat.

3.1.5. Anomalies concèntriques sotmeses a un camp elèctric uniforme

Les aproximacions de camp uniforme, fetes en els apartats anteriors, mostren que les anomalies concèntriques queden caracteritzades pel moment dipolar normalitzat χ_{N+1} . Una altra alternativa és caracteritzar-les a partir de la conductivitat equivalent o a partir d'un model circuital.

3.1.5.1. Conductivitat equivalent de l'anomalia

Una forma de simplificar l'estudi de les anomalies concèntriques (cilíndriques o esfèriques) és a partir del concepte de conductivitat equivalent de l'anomalia. Es tracta de buscar un model consistent en un sol cilindre o una sola esfera de radi a_{N+1} i conductivitat σ_{eN+1} que es comporti de forma equivalent a les anomalies concèntriques, immerses en un medi infinit de conductivitat σ_{eN+2} sota la influència d'un camp elèctric uniforme.

Segons Wait (1985), la conductivitat equivalent de dues esferes concèntriques, està relacionada amb el seu moment dipolar normalitzat. Nosaltres hem extès aquesta deducció a $N+1$ cilindres concèntrics i a $N+1$ esferes concèntriques, i hem obtingut unes fórmules de recurrència per cada cas.

a) Anomalies cilíndriques concèntriques

La relació entre la conductivitat equivalent de $N+1$ cilindres concèntrics i el seu paràmetre χ_{cN+1} és

$$\sigma_{e_{i+1}} = \frac{1 - \chi_{c_{i+1}}}{1 + \chi_{c_{i+1}}} \sigma_{i+2} \quad \text{per } i=1, \dots, N \quad (3.16)$$

A partir de les operacions oportunes obtenim la següent fórmula de recurrència per la conductivitat equivalent.

$$\sigma_{e_{i+1}} = \frac{\sigma_{i+1} (1 - z_{i+1}^2) + \sigma_{e_i} (1 + z_{i+1}^2)}{\sigma_{i+1} (1 + z_{i+1}^2) + \sigma_{e_i} (1 - z_{i+1}^2)} \sigma_{i+1} \quad \text{per } i=2, 3, \dots, N \quad (3.17)$$

on

$$\sigma_{e_2} = \frac{1-G}{1+G} \sigma_2, \quad G = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2.$$

σ_{e_2} és la conductivitat equivalent de dos cilindres concèntrics de conductivitats σ_1 i σ_2 i de radis a_1 i a_2

b) Anomalies esfèriques concèntriques

La relació entre la conductivitat equivalent de $N+1$ esfèriques concèntriques i el seu paràmetre $\chi_{s_{N+1}}$ és

$$\sigma_{e_{i+1}} = \frac{1-2\chi_{s_{i+1}}}{1+\chi_{s_{i+1}}} \sigma_{i+2} \quad \text{per } i=1, \dots, N \quad (3.18)$$

La fórmula de recurrència per la conductivitat equivalent és ara

$$\sigma_{e_{i+1}} = \frac{2\sigma_{i+1} (1-z_{i+1}^3) + \sigma_{e_i} (1+2z_{i+1}^3)}{\sigma_{i+1} (2+z_{i+1}^3) + \sigma_{e_i} (1-z_{i+1}^3)} \sigma_{i+1} \quad i=2, 3, \dots, N \quad (3.19)$$

on $\sigma_{e_2} = \frac{1-2G}{1+G} \sigma_2$ i $G = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_2 + \sigma_1} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^3.$

Aquesta anàlisi mostra que el problema invers no tindrà una solució única, doncs hi pot haver una gran varietat de relacions de contrastes que per unes determinades dimensions donguin la mateixa conductivitat equivalent.

3.1.5.2. Model circuital de l'anomalia

Una anàlisi teòrica interessant és la que permet modelar $N+1$ anomalies concèntriques (figura 3.2) com un circuit elèctric, en el cas que la corona circular més externa de radi (a_{N+1}) sigui totalment conductora ($\sigma_{N+1} \rightarrow \infty$) o perfectament aïllant ($\sigma_{N+1} \rightarrow 0$) i ($a_{N+1} - a_N \ll a_N$). És l'aproximació de capa prima conductora

o aïllant de gran importància en els camps de la geofísica i la biologia (Wait 1985).

Per trobar el circuit equivalent utilitzarem la possibilitat de modelar N corones cilíndriques o esfèriques com una sola de conductivitat equivalent σ_{eN} i radi a_N . D'aquesta forma el model que hem d'estudiar és el que apareix a la figura 3.5, on no es té en compte la interfície terra-aire.

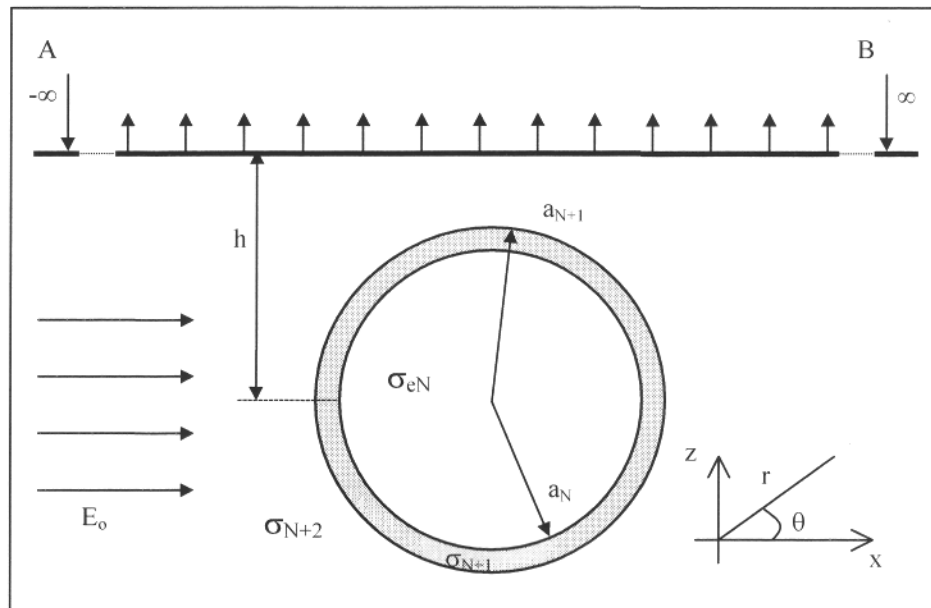


Figura 3.5: Model de la capa prima

Es defineix la impedància d'entrada de la capa prima de l'anomalia com (Wait 1985), (Parra, 1986):

$$Z = - \frac{1}{r^2} \frac{V}{J_r} \Big|_{r=a_{N+1}} \quad (3.20)$$

V és el potencial mesurat a l'exterior de l'anomalia i J_r és la densitat de corrent radial.

a) Anomalies cilíndriques concèntriques

En aquest cas la densitat de corrent radial a l'exterior de l'anomalia serà:

$$J_r = -\sigma_{N+2} \frac{\partial V}{\partial r} = \sigma_{N+2} E_0 \cos\theta [1 - \chi_{c_2}] \quad (3.20b)$$

La impedància d'entrada serà

$$Z = \frac{1}{a_{N+1} \sigma_{N+1}} \frac{1 + \chi_{c_2}}{1 - \chi_{c_2}} \quad (3.21)$$

Si es coneix el paràmetre χ_{c_2} que és la particularització de (3.5) a dos cilindres concèntrics, es podrà obtenir l'expressió de Z . El desenvolupament matemàtic és a l'Apèndix F.

Capa prima totalment conductora

El paràmetre χ_{c_2} és

$$\chi_{c_2} \approx \frac{\delta-1}{\delta+1}, \tag{3.21b}$$

on $\delta = \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{N+2} + \frac{y}{a_N}}$ i $y = \sigma_{N+1} (a_{N+1} - a_N)$, on y és l'admitància de la capa conductora.

Al substituir χ_{c_2} a (3.21) s'obté

$$\frac{1}{Z} = a_{N+1} \sigma_{eN} + y \tag{3.22}$$

que correspon al senzill model circuital de la figura 3.6a:

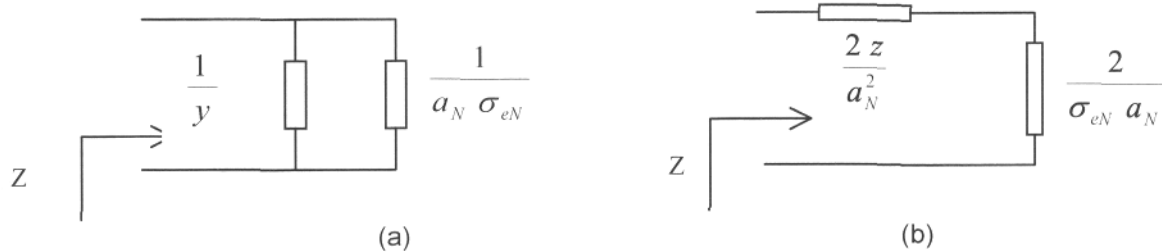


Figura 3.6: Circuits equivalents, a) Capa prima conductora, b) Capa prima aïllant.

Capa prima totalment aïllant

S'obté una expressió similar per χ_{c_2}

$$\chi_{c_2} \approx \frac{\delta-1}{\delta+1} \tag{3.22b}$$

on $\delta = \frac{\sigma_{N+2} z}{a_N} + \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN}}$ i $z = \frac{a_{N+1} - a_N}{\sigma_{N+1}}$, on z és la impedància de la capa prima aïllant.

La impedància d'entrada és

$$Z = \frac{2z}{a_{N+1}^2} + \frac{2}{\sigma_{eN} a_{N+1}} \quad (3.23)$$

El circuit equivalent apareix a la figura 3.6b.

Amb aquest model circuital ja no cal resoldre l'equació de Laplace dins de la capa prima. S'han de desenvolupar les condicions de contorn adequades per relacionar els camps en la interfície de la capa. Se simplifica l'àlgebra però les condicions de contorn es compliquen.

Aquest model permet parlar de tensió o diferència de potencial a través de la capa prima aïllant. Segons la llei d'Ohm $V=Z J_r$ on J_r és la densitat de corrent radial que és contínua a través de la capa prima.

$$\left(V - z \sigma_{N+2} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_N^+} = V \Big|_{r=a_N^-} \quad (3.23b)$$

Com a conseqüència de la continuïtat de la densitat de corrent normal a la capa prima, també tenim la següent condició de contorn:

$$\left(\sigma_{N+2} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_N^+} = \left(\sigma_{eN} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_N^-} \quad (3.23c)$$

Per mitjà d'aquestes condicions de contorn també es pot obtenir el paràmetre χ_{c_2} .

b) Anomalies esfèriques concèntriques

Seguim el mateix procediment que en el cas d'anomalies cilíndriques i arribem als mateixos resultats que Wait (1985).

$$J_r = -\sigma_{N+2} \frac{\partial V}{\partial r} = \sigma_{N+2} E_o \cos\theta [1 - 2\chi_{s_2}] \quad (3.24)$$

La impedància d'entrada serà

$$Z = \frac{1}{a_{N+1} \sigma_{N+1}} \frac{1 + \chi_{s_2}}{1 - \chi_{s_2}} \quad (3.25)$$

Capa prima conductora

$\chi_{s_2} = \frac{\delta - 1}{1 + 2\delta}$ on $\delta = \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN} + \frac{y}{a_N}}$ i on $y = \sigma_{N+1} (a_{N+1} - a_N)$ és l'admitància de la capa prima perfectament conductora.

Fent les substitucions oportunes, la impedància d'entrada de l'anomalia és:

$$Z = \frac{1}{a_N \sigma_{eN} + 2y} \tag{3.26}$$

El circuit equivalent és el de la figura 3.7a

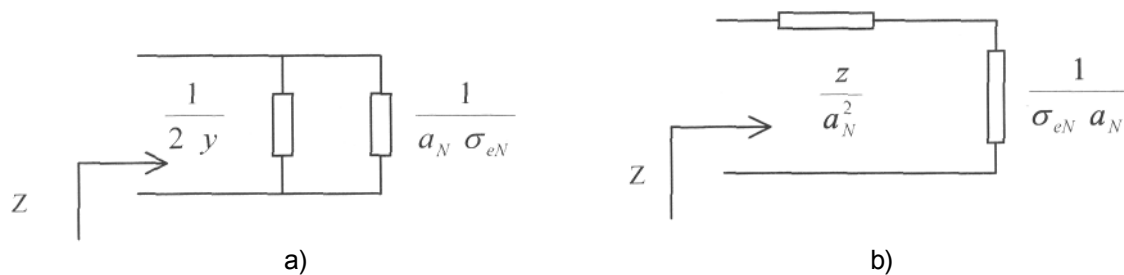


Figura 3.7: Circuits equivalents, a) Capa prima conductora, b) Capa prima aïllant.

Capa prima aïllant

En aquest cas

$\chi_{s_2} = \frac{1 - \delta}{1 + 2\delta}$, on $\delta = \frac{\sigma_{N+2}}{\sigma_{eN}} + \frac{z \sigma_{N+2}}{a_N}$, essent $z = \frac{a_{N+1} - a_N}{\sigma_{N+1}}$ la impedància de la capa prima aïllant.

Substituint s'obté la impedància d'entrada de l'anomalia:

$$Z = \frac{z}{a_N^2} + \frac{1}{\sigma_{eN} a_N} \tag{3.27}$$

El circuit equivalent és a la figura 3.7b. El desenvolupament matemàtic de les diferents expressions és a l'Apèndix G.

3.2. Resistivitat aparent. Configuració Schlumberger

Tal i com s'ha indicat al Capítol 2, hi ha diferents configuracions electròdiques per explorar elèctricament el subsòl (Apparao, 1997).

Després d'analitzar els seus avantatges i inconvenients hem optat en primera instància d'aplicar la configuració Schlumberger, ja que té una resolució superior

a la Wenner (Scurtu 1972) i els nivells de tensió que s'obtenen a la superfície són superiors que en el cas de la configuració doble dipol (on el soroll emmascara el senyal que es desitja mesurar). A més a més, emprar la configuració pol-dipol al laboratori seria molt difícil ja que el model físic (*phantom*) hauria de ser molt gran.

Un altre aspecte a favor de la configuració Schlumberger és que les expressions analítiques de la resistivitat aparent són molt simples i se'n poden extreure els principals paràmetres de l'anomalia (Schulz, 1985).

La configuració Schlumberger s'ha descrit al Capítol 2 on es mostra que la resistivitat aparent mesurada a la superfície és proporcional al camp elèctric. Si els elèctrodes injectors estan prou separats com per considerar que l'anomalia està sotmesa a un camp elèctric uniforme, les expressions per la resistivitat aparent són força senzilles.

La resistivitat aparent que es mesurarà a la superfície, corresponent a cilindres concèntrics soterrats, pren la forma (Jordana i Pallàs-Areny, 1997 i Apèndix H):

$$\rho_a(x) = \rho_{N+2} \left[1 + 2\chi_{c_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^2 \frac{1 - \left(\frac{x}{h} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right]^2} \right] \quad (3.28)$$

La resistivitat aparent que es mesurarà a la superfície, corresponent a esferes concèntriques soterrades, pren la forma

$$\rho_a(x) = \rho_{N+2} \left[1 + 2\chi_{s_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^3 \frac{1 - 2\left(\frac{x}{h} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right]^{5/2}} \right] \quad (3.29)$$

3.2.1. Resistivitat aparent normalitzada i visibilitat

En tomografia d'impedància elèctrica (Seagar 1987) es defineixen una sèrie de paràmetres que ajuden a realitzar interpretacions qualitatives i quantitatives respecte la detecció d'una regió circular conductora envoltada per una altra regió circular conductora, quan es realitzen mesures al contorn d'aquesta última. En l'exploració del subsòl, es poden definir dos paràmetres per fer un plantejament similar: la resistivitat aparent normalitzada (Q) i la visibilitat de l'anomalia (Q_0).

La resistivitat aparent normalitzada es defineix com

$$Q(x) = \frac{\rho_a(x) - \rho_{N+2}}{\rho_{N+2}} \quad (3.30)$$

De fet, $Q(x)$ aporta la mateixa informació que la resistivitat aparent, però permet comparar entre si resistivitats aparents obtingudes en medis matrius de diferent conductivitat (Reina 1997) gràcies al seu efecte normalitzador. La figura 3.8 representa $Q(x)$ per anomalies cilíndriques i esfèriques concèntriques, per diferents valors del paràmetre χ_{N+1} .

La visibilitat de l'anomalia (Q_o) la definim com el valor màxim del valor absolut de la resistivitat aparent normalitzada.

$$Q_o = \max(|Q(x)|) \quad (3.31)$$

En el cas del model dels cilindres concèntrics, la visibilitat de l'anomalia és

$$Q_o = 2\chi_{c_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^2 \quad (3.32)$$

En el cas del model de les esferes concèntriques, la visibilitat de l'anomalia és

$$Q_o = 2\chi_{s_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^3 \quad (3.33)$$

Es pot observar que Q_o depèn de tres paràmetres principals: el radi més extern (a_{N+1}), la profunditat a la que es troba situada l'anomalia (h) i χ_{N+1} .

La visibilitat serà un indicador de la mínima relació senyal a soroll (SNR) necessària a la instrumentació per poder detectar una determinada anomalia. S'observa que quan la resistivitat aparent mesurada equival a la resistivitat del medi homogeni, la visibilitat de l'anomalia és nul·la, ja que χ_{N+1} s'anul·la.

La figura 3.9 descriu la visibilitat respecte el radi normalitzat $\frac{a_{N+1}}{h}$ per diferents valors de $\chi_{c_{N+1}}$ i $\chi_{s_{N+1}}$. Els resultats són similars als obtinguts en l'estudi de Basarab-Horwath et al. (1995) d'un model d'elements finits d'un *phantom* aplicat a tomografia d'impedància elèctrica (EIT). Aquest sistema utilitzava la injecció-detecció adjacents (doble dipol). La grandària i conductivitat de l'anomalia es variaven per tal d'observar el canvi en la tensió mesurada respecte el radi normalitzat.

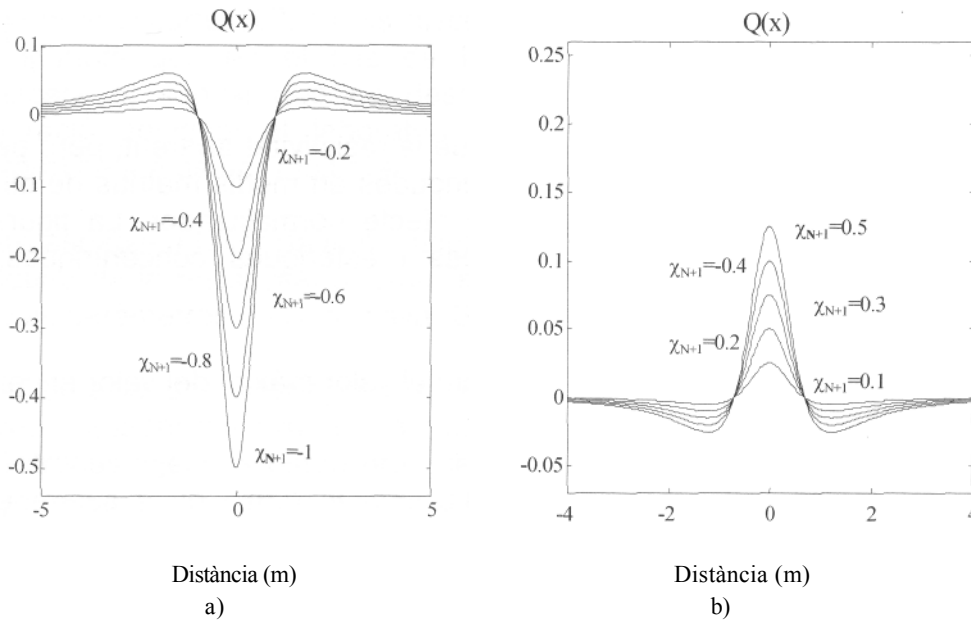


Figura 3.8: Resistivitat aparent normalitzada per diferents valors de χ_{N+1} ($a_{N+1} = 0,5$ m, $h = 1$ m).
a) Anomalia cilíndrica conductora, b) Anomalia esfèrica aïllant.

Observant la figura 3.9 es poden deduir les següents conclusions:

- 1- L'anomalia és més visible quant més a prop es trobi de la superfície i quant més extrem sigui el contrast de conductivitats respecte el mitjà que l'envolta.
- 2- Les anomalies cilíndriques conductores i anomalies aïllants respecte el medi matriu tenen un comportament simètric.
- 3- Les anomalies esfèriques, en canvi, presenten un comportament asimètric, doncs les conductores són més fàcils de detectar.

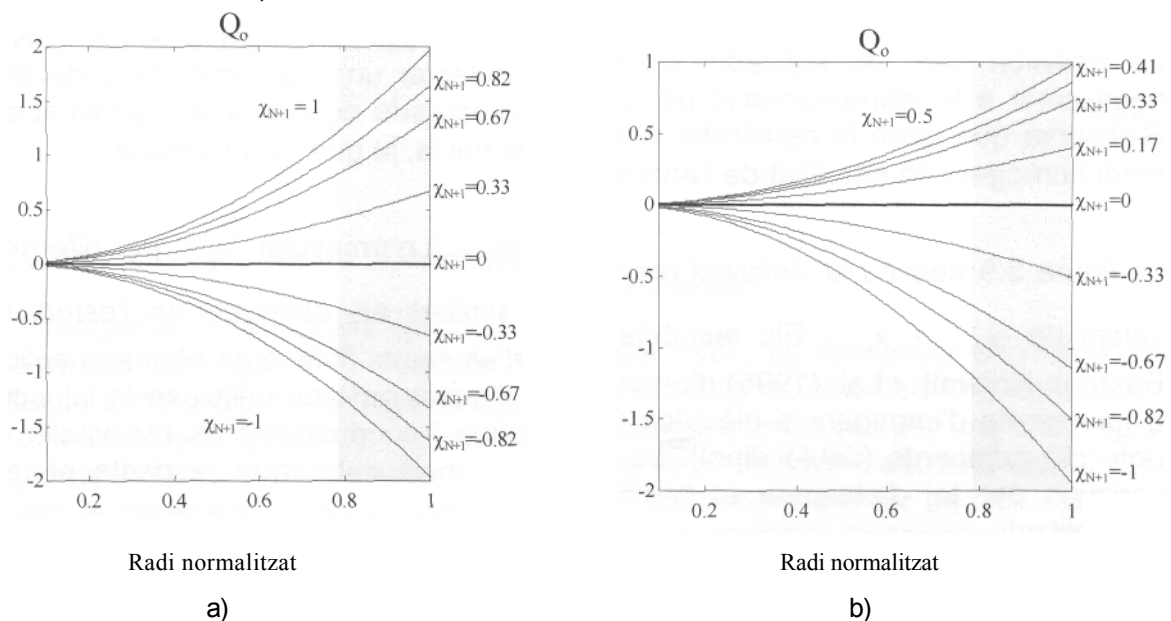


Figura 3.9: Visibilitat de l'anomalia en funció del radi normalitzat, a) Anomalies cilíndriques.
b) Anomalies esfèriques.

3.2.2. Efecte de la separació interelectròdica

La mesura de la resistivitat aparent a partir de la determinació del gradient de potencial és teòricament el camí ideal per obtenir-la, ja que aquest mètode té una gran resolució (Griffiths and King, 1972). La figura 3.10 mostra l'efecte de la separació interelectròdica entre els elèctrodes de potencial (M i N), a l'hora de determinar la resistivitat aparent produïda per dos objectes de dimensions reduïdes (S_1 i S_2), aïllants respecte el medi homogeni i propers entre si.

El corrent s'introdueix en el terreny per mitjà de dos elèctrodes suficientment allunyats entre si, i el gradient de potencial es mesura amb els elèctrodes de potencial M i N, molt propers. D'aquesta manera s'arriben a distingir els dos objectes. En canvi, si s'incrementa la separació interelectròdica, els dos objectes ja no es poden distingir, doncs la resolució de la mesura ha disminuït. Malgrat tot, hi ha una separació mínima real dels elèctrodes de potencial, determinada per l'exactitud en les mesures de tensió.

També és molt important que els elèctrodes de potencial i els de corrent no estiguin massa propers uns dels altres, doncs en les proximitats dels elèctrodes de corrent hi ha gradients de potencial molt elevats. Això implica que qualsevol mesura de la diferència de potencial presa en aquesta zona es veuria molt afectada per qualsevol inhomogeneïtat de la resistivitat del subsòl.

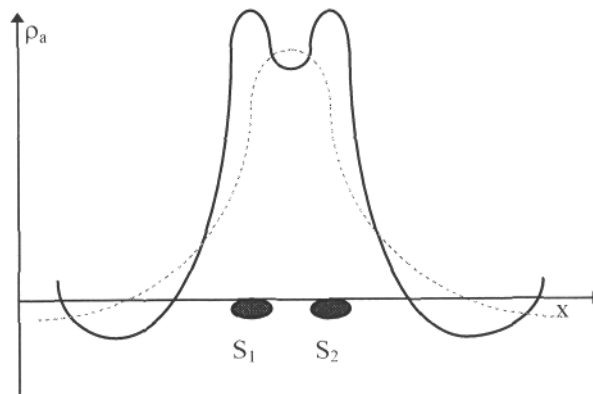


Figura 3.10: Efecte de la separació dels elèctrodes de potencial sobre la resistivitat aparent mesurada

Per tal de considerar l'efecte de la distància entre els elèctrodes de potencial en la resistivitat aparent, s'ha de calcular el potencial en dos punts de la superfície. El seu increment, dividit per la distància de separació dels elèctrodes donarà un valor aproximat del camp elèctric que s'associarà al punt mig dels elèctrodes de mesura.

L'Apèndix H mostra les operacions que pel cas d'anomalies cilíndriques concèntriques porten finalment a

$$\rho_a = \rho_{N+2} \left[1 + 2\chi_{c_{N+1}} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1 - \frac{x^2 - d^2/4}{h^2}}{\left(1 + \left(\frac{x+d/2}{h} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{x-d/2}{h} \right)^2 \right)} \right] \quad (3.34)$$

De manera semblant, la resistivitat aparent corresponent a anomalies esfèriques concèntriques és

$$\rho_a = \rho_{N+2} \left[1 + 2\chi_{s_{N+1}} \left(\frac{a_{N+1}}{h} \right)^3 \left(\frac{x/d + 1/2}{\left(1 + \left(\frac{x+d/2}{h} \right)^2 \right)^{3/2}} - \frac{x/d - 1/2}{\left(1 + \left(\frac{x-d/2}{h} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) \right] \quad (3.35)$$

El distanciament dels elèctrodes de potencial redueix la visibilitat (figura 3.11). La figura 3.11a correspon a anomalies cilíndriques que es comporten com un conductor perfecte ($\chi_{c_{N+1}} = -1$), on el radi exterior $a_{N+1} = 0,2$ m i estan soterrades a una profunditat de 0,5 m. La figura 3.11b correspon a anomalies esfèriques de les mateixes característiques.

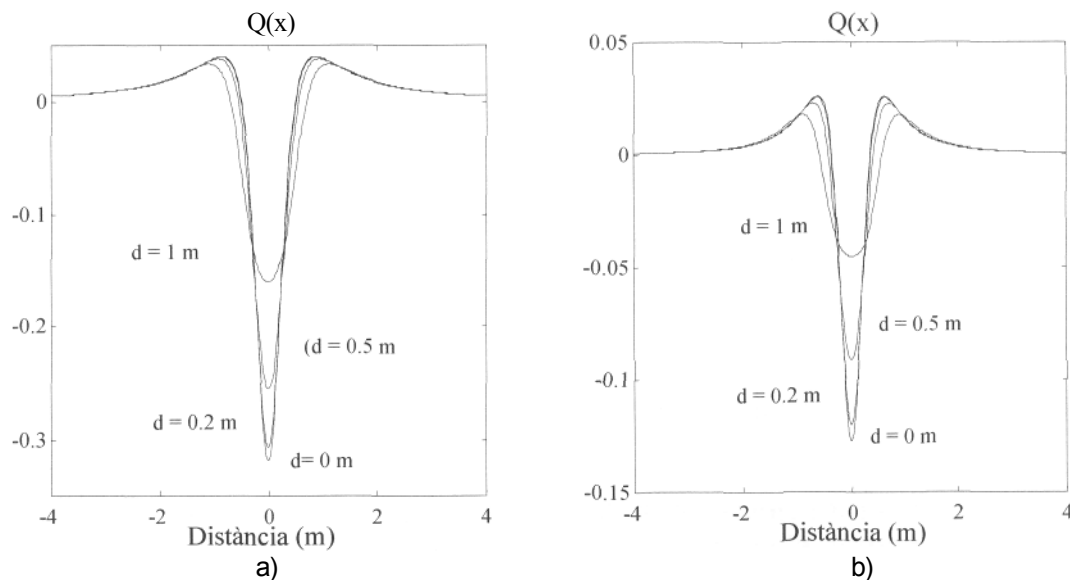


Figura 3.11: Resistivitat aparent normalitzada per diferents valors de l'espaiat interelectròdic d. a) Anomalies cilíndriques b) Anomalies esfèriques.

D'aquestes corbes es dedueix que la configuració Schlumberger és més sensible que la configuració Wenner, doncs en aquest cas els elèctrodes de potencial estan més separats (Lowry i Shive, 1990).

3.2.3. Determinació de la profunditat i del radi d'esferes i cilindres soterrats

L'estructura geoelectrica de l'interior de la terra s'estudia sovint amb mètodes resistius, sobretot en investigacions que es realitzen a poca profunditat (Burger, 1992).

La localització d'estructures cilíndriques i esfèriques soterrades no és un tema nou. Habberjam (1969) aplica la configuració Wenner de forma experimental en el laboratori, per trobar el radi i la profunditat d'esferes aïllants. Parasnis (1964) va obtenir una solució per la distribució de potencial elèctric causat per un cilindre horitzontal infinit, que es troba en un semiespai infinit en el que s'injecta corrent per mitjà de dos elèctrodes de corrent de longitud infinita i paral·lels a l'eix del cilindre. Un estudi d'Aldridge i Oldenburg (1989) mostra la solució del potencial generat per un elèctrode puntual de corrent sobre una esfera soterrada.

Aquestes expressions analítiques són complexes i per aquesta raó proposem semblantment com a l'estudi de Shulz (1985), determinar la profunditat i grandària de les anomalies amb la configuració Schlumberger emprant les expressions matemàtiques de la resistivitat aparent obtingudes en els apartats anteriors. El moment dipolar normalitzat quedarà simplificat a una sola corona cilíndrica o esfèrica, χ_{c_1} i χ_{s_1} , respectivament.

3.2.3.1. Detecció amb distància interelectròdica nul·la

Per determinar la profunditat i grandària dels objectes cilíndrics i esfèrics partirem de la resistivitat aparent normalitzada $Q(x)$ corresponent a les expressions (3.28) i (3.29), on s'ha suposat que els elèctrodes de potencial estan separats una distància infinitesimal. Els talls per zero de $Q(x)$ permeten obtenir la profunditat de l'anomalia. En el cas d'un cilindre això succeix per

$$x = \pm h \text{ i en el cas d'una esfera per } x = \pm \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Els altres punts característics de $Q(x)$ són els seus màxims i mínims, que es mostren a la taula 3.1. Es pot observar que a partir de Q_0 és possible calcular la grandària de les anomalies si es coneix el seu contrast i la seva profunditat.

CILINDRE	$Q(x)$
$x = 0$	$Q_0 = 2\chi_c \left(\frac{R}{h}\right)^2$
$x = \pm\sqrt{3}h$	$Q(\pm\sqrt{3}h) = -\frac{1}{4}\chi_c \left(\frac{R}{h}\right)^2$
ESFERA	
$x=0$	$Q_0 = 2\chi_s \left(\frac{R}{h}\right)^3$
$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}h$	$Q(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}h) = -0,4\chi_s \left(\frac{R}{h}\right)^3$

Taula 3.1: Màxims i mínims de $Q(x)$.

La figura 3.12 mostra els punts característics de $Q(x)/Q_0$ per un cilindre totalment conductor ($\chi_{cl} = -1$) i per una esfera totalment aïllant ($\chi_{sl} = 1/2$).

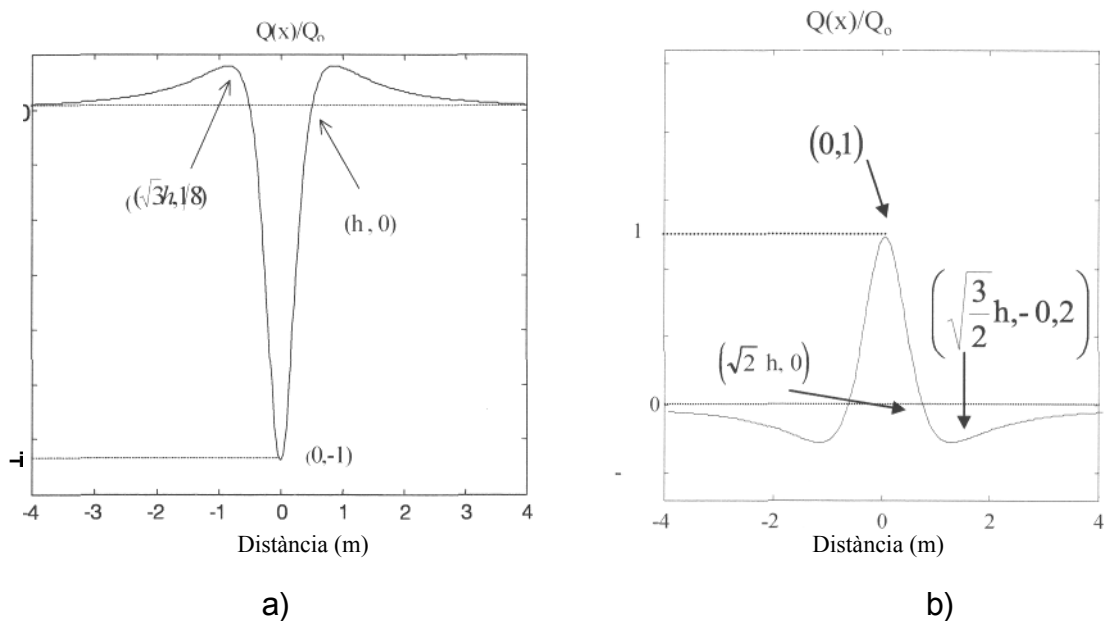


Figura 3.12: $Q(x)/Q_0$ i els seus punts característics per una anomalia cilíndrica perfectament conductora (a) i una anomalia esfèrica perfectament aïllant (b).

3.2.3.2. Detecció amb distància interelectròdica no nul·la

A la pràctica els elèctrodes de potencial estaran separats una distància finita (d). Per determinar la profunditat i radi de les esferes i cilindres soterrats, hem de

partir també de la resistivitat aparent normalitzada $Q(x)$, que es dedueix de les expressions (3.34) i (3.35).

Per una anomalia cilíndrica el seu pas per zero és $x = \pm \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}$ i la seva visibilitat és $Q_o = \frac{2 \chi_c \left(\frac{a}{h}\right)^2}{1 + \left(\frac{d}{2h}\right)^2}$.

Per una anomalia esfèrica no es pot obtenir una expressió senzilla dels seus punts característics, ja que les equacions $Q(x)=0$ i $dQ(x)/dx = 0$, són complexes d'operar algebràicament i per tant s'han de resoldre numèricament (Llamazares, 1999) o per mètodes gràfics.

Per obtenir la profunditat de l'esfera per diferents equiespaiats interelectròdics es pot utilitzar l'àbac de corbes que apareix en el treball de Reina (1997). A partir del coneixement dels talls per zero de $Q(x)$ i del coneixement de la separació interelectròdica, es podrà determinar h . Es pot observar que a mesura que s'enfonsa l'anomalia totes les corbes tendeixen a l'asíptota $x = \sqrt{2} h$, ja que com més fonda està l'esfera, menys afecta la separació interelectròdica.

3.2.4. Determinació de la grandària de la fuga

Els models dels cilindres concèntrics i les esferes concèntriques sotmesos a un camp elèctric uniforme E_o han de permetre determinar la grandària d'una fuga cilíndrica o esfèrica. En aquest cas, haurem de particularitzar el paràmetre χ_{N+1} a dues corones concèntriques (χ_2). La corona interna correspon al tub cilíndric o dipòsit esfèric i l'externa a la fuga. Ja que el més habitual és disposar de canonades i dipòsits totalment conductors o totalment aïllants, el seu interior es veurà apantallat i per tant no cal considerar-lo. Si no es complís aquesta condició, s'hauria d'analitzar el paràmetre χ_3 , corresponent a 3 corones concèntriques.

3.2.4.1. Estudi del paràmetre χ_2

Per una canonada cilíndrica amb fuga concèntrica, el paràmetre d'estudi és

$$\chi_{c_2} = \frac{(1 - \beta_2) + (1 + \beta_2) \chi_{c_1} z_2^2}{(1 + \beta_2) + (1 - \beta_2) \chi_{c_1} z_2^2} \quad (3.36)$$

on $\chi_{c_1} = \frac{(1 - \beta_1)}{(1 + \beta_1)}$; $\beta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$; $\beta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$, σ_1 representa la conductivitat del tub (i el seu interior apantallat), σ_2 és la conductivitat del fluid combinada amb la del terreny que té una conductivitat σ_3 .

Per un dipòsit esfèric amb fuga esfèrica el paràmetre que descriu les dues anelles és

$$\chi_{s_2} = \frac{(1 - \beta_2) + (1 + 2\beta_2)\chi_{s_1}z_2^3}{(2 + \beta_2) + 2(1 - \beta_2)\chi_{s_1}z_2^3} \quad (3.37)$$

on $\chi_{s_1} = \frac{(1 - \beta_1)}{(2 + \beta_1)}$; $\beta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$; $\beta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$.

En les mesures reals, la porositat del terreny determinarà la infiltració del fluid en el seu interior, per la qual cosa σ_2 correspondrà a la conductivitat del conjunt terreny-fluid. El canvi de resistivitat del terreny ve donat per l'expressió (2.1).

La figura 3.14 representa una anàlisi de χ_{c_2} en funció de β_2 per diversos valors de β_1 i a_2 (Jordana i Pallàs-Areny, 1997).

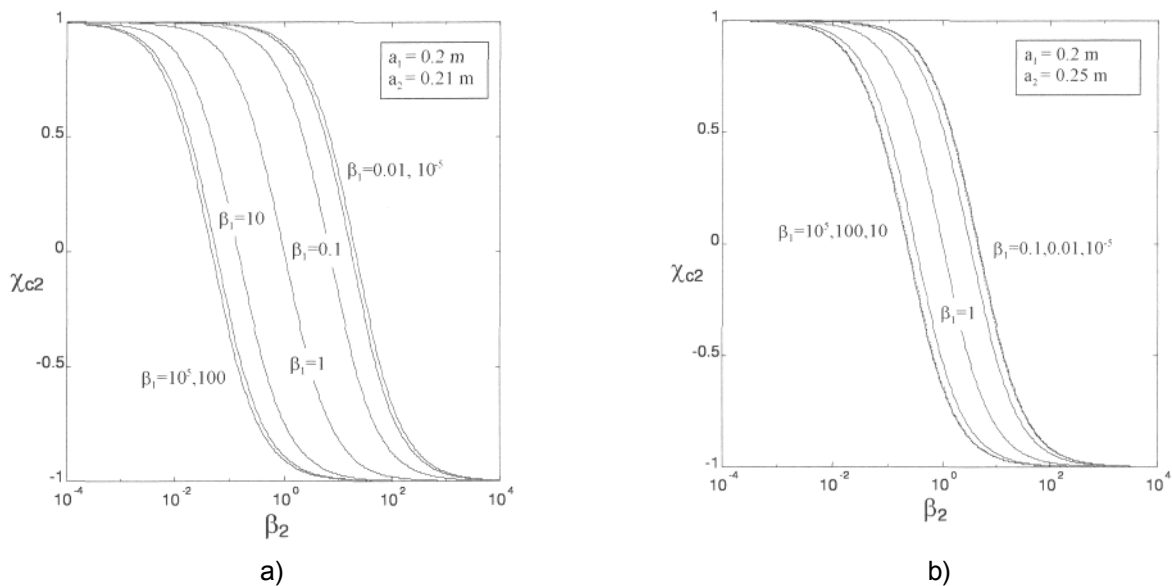


Figura 3.14: Evolució de χ_{c_2} en funció de β_2 per diversos valors de β_1 i a_2 , per dues anomalies cilíndriques de radi interior $a_1 = 0,2$ m. a) $a_2 = 0,21$ m. b) $a_2 = 0,25$ m.

Es pot observar que independentment del contrast de conductivitats β_1 i de la relació de radis (a_1/a_2), si la fuga és totalment aïllant o totalment conductora, χ_{c_2} tendeix a 1 o -1, respectivament, comportant-se tota l'anomalia com la fuga. També es pot observar que com més gran és la fuga, el paràmetre β_1 afecta menys a χ_{c_2} .

En el cas d'anomalies esfèriques, el comportament és similar, tret que el marge de valors de χ_{s_2} és $[-1, 1/2]$.

La figura 3.15a mostra l'evolució de χ_{c2} en funció de la relació de radis del tub i la fuga cilíndrica i la figura 3.15b representa el mateix paràmetre per una anomalia esfèrica. Pot observar-se que a mesura que augmenta el radi de la fuga, l'anomalia global es comporta com aquesta.

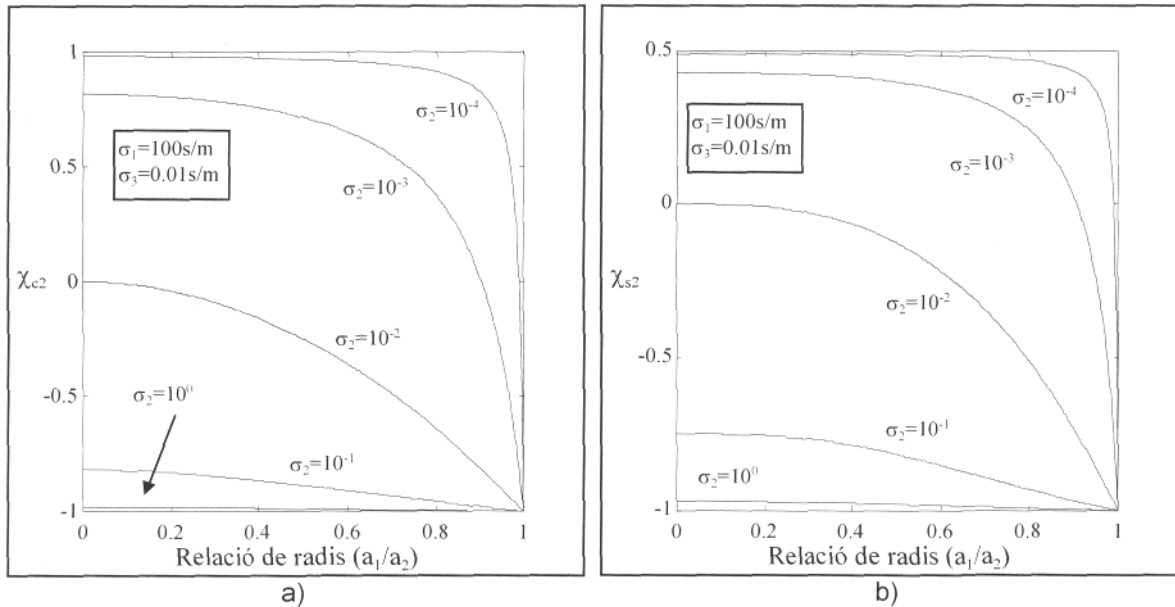


Figura 3.15: Evolució de χ_{c2} en funció de la relació de radis, per diferents conductivitats de la fuga. a) Anomalia cilíndrica, b) Anomalia esfèrica.

3.2.4.2. Obtenció del radi de la fuga

El radi de la fuga concèntrica es pot determinar a partir de les resistivitats aparents normalitzades, corresponents al cas d'haver-hi fuga (Q_L) i de no haver-hi (Q_P). A partir de la relació de les visibilitats de les dues corbes definim el

paràmetre
$$r = \frac{Q_{ol}}{Q_{op}}$$

Per anomalies cilíndriques concèntriques la relació de visibilitats r_c és:

$$r_c = \frac{\chi_{c2} a_2^2}{\chi_{1P} a_1^2} \tag{3.38}$$

Substituint χ_{c2} per (3.36) s'obté el radi de la fuga (Reina, 1997).

El radi d'una fuga cilíndrica es pot calcular a partir de

$$a_2 = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}} \tag{3.39}$$

$$\text{on } b = \frac{(1 + \beta_2)(\chi_{1P}r - \chi_{1L})a_1^2}{(1 - \beta_2)}, \quad c = \chi_{1P}\chi_{1L}a_1^4r, \quad \chi_{1L} = (1 - \sigma_1/\sigma_2)/(1 + \sigma_1/\sigma_2) \text{ i}$$

$$\chi_{1P} = (1 - \sigma_1/\sigma_3)/(1 + \sigma_1/\sigma_3)$$

Per una fuita esfèrica es pot seguir el mateix procediment i el seu radi és

$$a_2 = \sqrt[3]{\frac{b_s + \sqrt{b_s^2 + 4c_s}}{2}} \quad (3.40)$$

$$\text{on } b_s = \frac{a_1^3[(2 + \beta_2)\chi_{1P}r - (1 + 2\beta_2)\chi_{1L}]}{(1 - \beta_2)} \text{ on } c_s = \chi_{1P}\chi_{1L}a_1^6r, \quad \chi_{1L} = (1 - \sigma_1/\sigma_2)/(1 + \sigma_1/\sigma_2) \text{ i}$$

$$\chi_{1P} = (1 - \sigma_1/\sigma_3)/(1 + \sigma_1/\sigma_3).$$

La relació entre les dues corbes de visibilitat és ara

$$r_s = \frac{\chi_2 a_2^3}{\chi_{1P} a_1^3} \quad (3.41)$$

Segons aquestes expressions, per determinar la grandària de la fuita cal conèixer el radi de la canonada o el dipòsit i la relació de visibilitats (r) i de conductivitats. Aquest darrer factor és el més difícil de conèixer amb exactitud.

El procediment anterior també es pot aplicar al càlcul del radi de la corona $N+1$. El resultat també és independent de la distància interelectròdica sempre i quan aquesta sigui la mateixa en totes les mesures.

3.2.4.3. Relació senyal a soroll

Els requeriments instrumentals per detectar una anomalia dependran de la seva visibilitat. Definim la mínima relació senyal soroll (en decibels) que permet detectar una anomalia de visibilitat Q_0 com

$$SNR = 20 \log \left| \frac{1}{Q_0} \right| \quad (3.42)$$

La figura 3.16 mostra la SNR que es necessita per detectar 2 cilindre concèntrics en funció de diferents paràmetres: profunditat, contrast i distància interelectròdica.

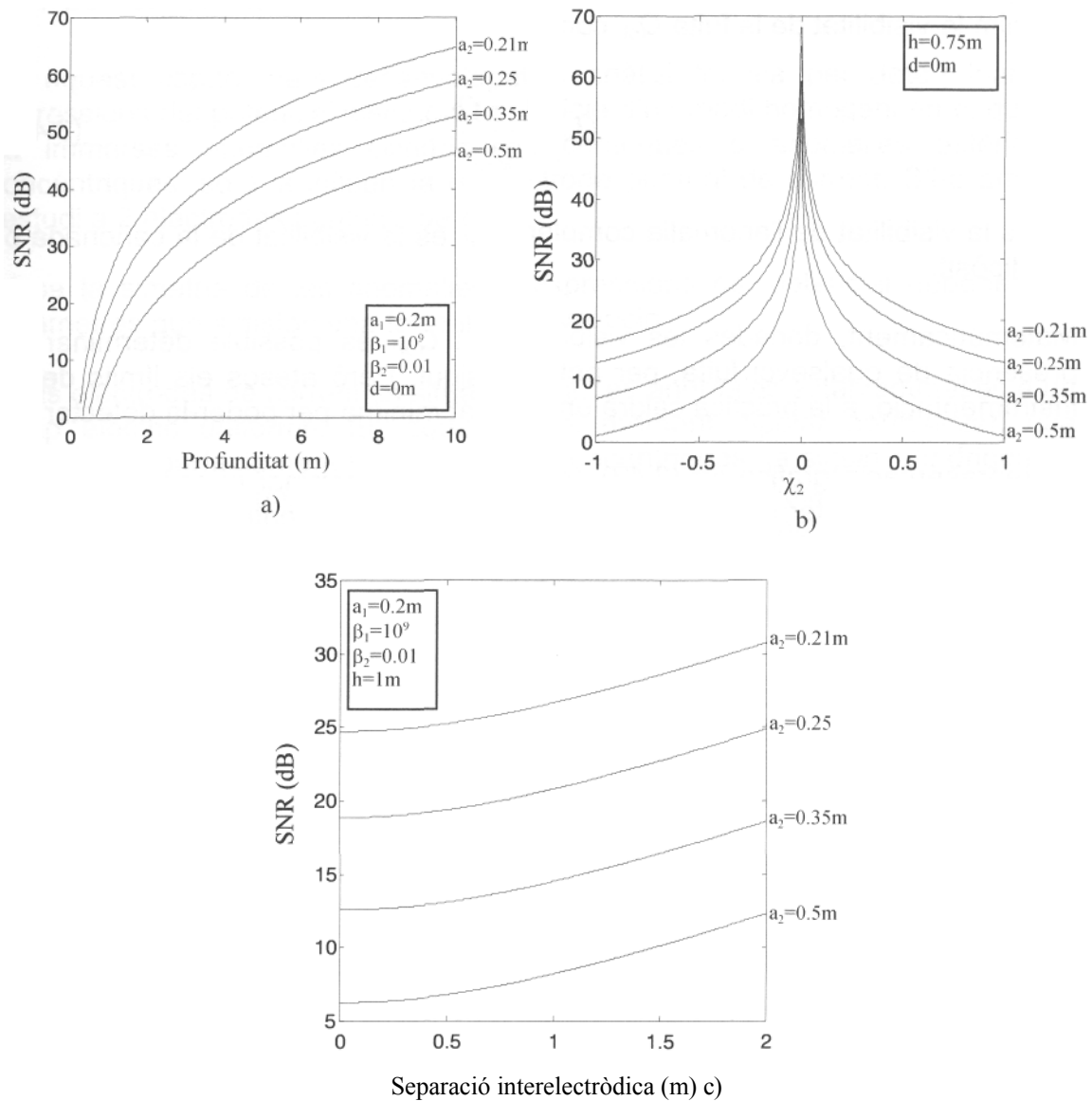


Figura 3.16: Relació senyal-soroll (SNR) necessària de la instrumentació, a) En funció de la profunditat per a diversos valors del radi de la fuga, b) En funció del contrast (χ_2) per a diversos valors del radi de la fuga, c) En funció de la separació interelectròdica per diversos valors del radi de la fuga

En el cas d'anomalies esfèriques s'obtenen unes corbes similars, però la SNR necessària per la seva detecció és superior que per anomalies cilíndriques de les mateixes dimensions i soterrades a la mateixa profunditat.

3.2.4.4. Límit en la detecció de fuites

La visibilitat Q_0 , emprada fins ara està associada a tota l'anomalia (la qual pot tenir en compte diverses corones concèntriques). A l'hora de detectar fuites,

però, cal definir un nou paràmetre que tingui en compte únicament la fuga. Definim la visibilitat de la fuga Q_{OL} com

$$Q_{ol} = \left| \frac{Q_o - Q_{op}}{Q_{op}} \right| \quad (3.43)$$

Q_o és la visibilitat de l'anomalia completa i Q_{op} és la visibilitat de la canonada o del dipòsit.

Matemàticament, donades les visibilitats Q_o i Q_{op} és possible determinar la presència de qualsevol fuga, per petita que sigui. Però atesos els límits de la instrumentació, a la pràctica caldrà una visibilitat mínima per poder-la detectar.

La representació gràfica de (3.42) pot ser útil per determinar el contrast mínim entre la fuga i el terreny i la relació de radis (z) mínima entre el tub i la fuga necessaris per poder-la detectar. En el cas d'una fuga cilíndrica i suposant una visibilitat mínima $Q_{OL} = 0,1$ s'obtenen els gràfics de la figura 3.17 (Reina, 1997).

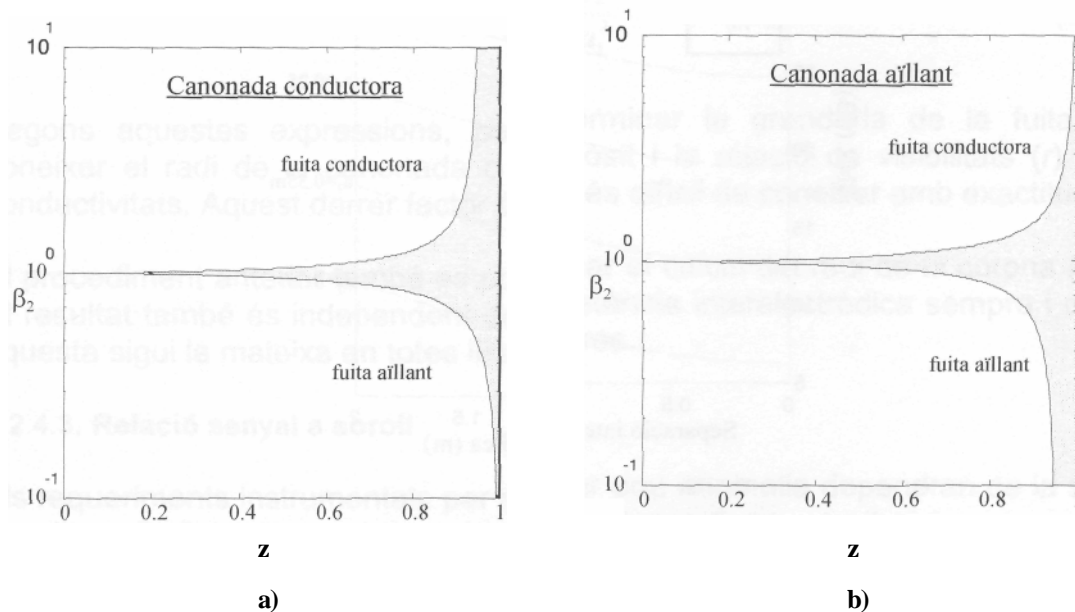


Figura 3.17: Relació mínima entre el contrast de conductivitats (β_2) i la relació de radis ($z_2 = a_1/a_2$) per detectar la fuga, a) canonada conductora, b) canonada aïllant.

La figura 3.17a correspon a una canonada perfectament conductora i la figura 3.17b a una canonada perfectament aïllant. La zona ombrejada correspon a punts de contrast (β_2) i relació de radis (z_2) que no permetrien detectar la fuga. La detecció de la fuga serà més fàcil quan la conductivitat de la fuga i dels dipòsit o la canonada siguin oposats, ja que es necessita molt poc radi de la fuga per aconseguir una variació del 10 % en la Q_o . Per fuites esfèriques s'obtenen corbes similars.

3.3. Conclusions

En aquest capítol hem desenvolupat una anàlisi teòrica per determinar les expressions del potencial elèctric a la superfície d'un medi homogeni en el qual hi ha immerses anomalies cilíndriques concèntriques o anomalies esfèriques concèntriques, sota la influència d'un elèctrode puntual de corrent. S'ha ampliat l'estudi a 2 elèctrodes puntuals de corrent.

Atesa la simetria de les anomalies, les expressions del potencial depenen de paràmetres que satisfan una fórmula de recurrència.

Si els elèctrodes de corrent es situen a l'infinit, les anòmales estan sotmeses a un camp elèctric uniforme. En aquest cas, el moment dipolar normalitzat, que caracteritza perfectament les $N+1$ corones concèntriques, ja siguin cilíndriques o esfèriques, satisfà una fórmula de recurrència molt compacta que depèn de la relació de radis i de les diferents conductivitats de cada corona.

Quan les anomalies cilíndriques concèntriques i esfèriques concèntriques es troben immerses sota la influència d'un camp elèctric uniforme es poden caracteritzar per una conductivitat equivalent, la qual també satisfà una fórmula de recurrència.

Si la corona més externa de $N+1$ corones concèntriques és molt prima i les N corones interiors es caracteritzen per mitjà de la seva conductivitat equivalent, es pot trobar un model circuital corresponent a una capa prima conductora i una capa prima aïllant a partir del paràmetre impedància d'entrada de la capa prima.

S'ha definit la resistivitat aparent normalitzada i la visibilitat de les anomalies concèntriques corresponent a la configuració Schlumberger.

S'ha deduït l'expressió de la resistivitat aparent Schlumberger de $N + 1$ cilindres concèntric i $N+1$ esferes concèntriques immerses en un medi homogeni, que depèn del paràmetre moment dipolar normalitzat. S'ha generalitzat l'estudi en el cas que la distància entre els elèctrodes de potencial no sigui infinitesimal observant-se el decreixement en la visibilitat de les anomalies a mesura que la distància interelectròdica augmenta.

L'anàlisi dels punts característics de la resistivitat aparent normalitzada permet obtenir el radi de la corona més externa i la profunditat de les anomalies concèntriques.

S'ha particularitzat l'estudi general de $N+1$ corones concèntriques a únicament dues corones per modelar una possible fuga (corona més externa) que es produeix en un dipòsit esfèric soterrat o en una canonada cilíndrica soterrada, la qual cosa pot donar lloc a una anomalia extensa.

El quocient entre la visibilitat de les dues corones concèntriques i la corresponent a la corona més interna permet obtenir el radi de la corona externa cancel·lant els possibles errors multiplicatius que es puguin produir a les mesures reals.

Capítol 4

INSTRUMENTACIÓ UTILITZADA EN LA REALITZACIÓ DE LES MESURES

Els elements bàsics que es requereixen per realitzar les mesures en una prospecció geolèctrica resistiva són: la font d'injecció de corrent, el sistema detector, els cables i els elèctrodes (Iakubovskii and Liajov, 1980). Entre les diferents exigències que han de satisfer els equips de mesura destaca: la robustesa, lleugeresa, portabilitat i facilitat d'ús.

La tomografia d'impedància elèctrica requereix de gran quantitat de mesures per tal de poder obtenir imatges del subsòl (Noel and Xu, 1991). Per aquesta raó és útil poder disposar de sistemes que automatitzin les mesures (Griffiths et al., 1990), (Griffiths and Turnbull, 1985).

La majoria de prospeccions elèctriques resistives utilitzen corrent continu o de molt baixa freqüència per realitzar les mesures. Això presenta certs inconvenients com és la impossibilitat d'eliminar el potencial de contacte dels elèctrodes present en les mesures. Aquest problema es pot evitar mitjançant l'ús d'un corrent altern, el qual té l'avantatge de disminuir la impedància d'elèctrode, i tot i l'augment en la complexitat del sistema de detecció, es pot realitzar un filtrat de les components freqüencials indesitjades. La possibilitat d'amplificar els senyals detectats permet reduir la potència de la font d'injecció.

En aquest capítol descriurem els dos sistemes de mesura que s'han utilitzat, els quals permeten la injecció de senyal sinusoidal i quadrat. El primer, anomenat Sistema PROGEO, s'ha utilitzat per realitzar les mesures de laboratori i el segon anomenat Sistema Portàtil, ha servit per realitzar les mesures de camp. Una comparació dels dos sistemes de mesura es pot trobar en el treball de Gasulla et al. (1998c).

4.1. Sistema PROGEO

En la figura 4.1 es mostra l'estructura global del sistema PROGEO (Prospecció Geoelectrica) de mesura d'impedància elèctrica per a la realització de mesures en el laboratori, basat en el control d'instrumentació convencional per mitjà del bus GPIB (Alberto, 1997). El sistema consta bàsicament de tres blocs: l'injector de corrent, el detector de tensió i el sistema de commutació de relès.

Per mitjà del generador de funcions (HP3245A) s'injecta un senyal sinusoidal als elèctrodes injectors A i B i la seva sortida de sincronisme TTL s'utilitza per activar el dispar de l'oscil·loscopi TDS420, que actua com a detector. Per augmentar la impedància diferencial d'entrada del canal 2 de l'oscil·loscopi s'hi connecta la sonda diferencial (ADA400).

L'oscil·loscopi TDS420 es un oscil·loscopi digital amb mostreig simultani (detecció coherent) dels senyals presents a la seva entrada. Aquest instrument disposa d'un sistema de guanyos programables (sensibilitat vertical) i un CAD per cada entrada, la freqüència de mostreig del qual està governada per la base de temps.

L'objectiu de l'etapa de detecció és condicionar i adquirir els senyals presents en els elèctrodes detectors i sobre la resistència de referència (R_o) en sèrie amb el circuit d'injecció. Aquesta etapa és diferencial per poder eliminar les interferències presents en el senyal mesurat.

L'adquisició és governada pel senyal de sincronisme que ofereix el generador de funcions. Finalment, en aquesta etapa es realitza la conversió analògica-digital que permet realitzar posteriorment la detecció numèrica coherent la qual presenta bones prestacions des del punt de vista de la SNR.

L'acoblament de la sonda es realitza en AC per tal de bloquejar la possible tensió contínua, la qual pot provenir del potencial de contacte dels elèctrodes.

El sistema de mesura també disposa d'una etapa de commutació que té com a objectiu dirigir el senyal provinent del generador de funcions cap als elèctrodes de corrent A i B i encaminar el senyal present en els elèctrodes detectors M i N cap al detector. S'han utilitzat 4 targetes de relès SPST, per mitjà de les quals es pot realitzar qualsevol configuració electrònica de 16 elèctrodes.

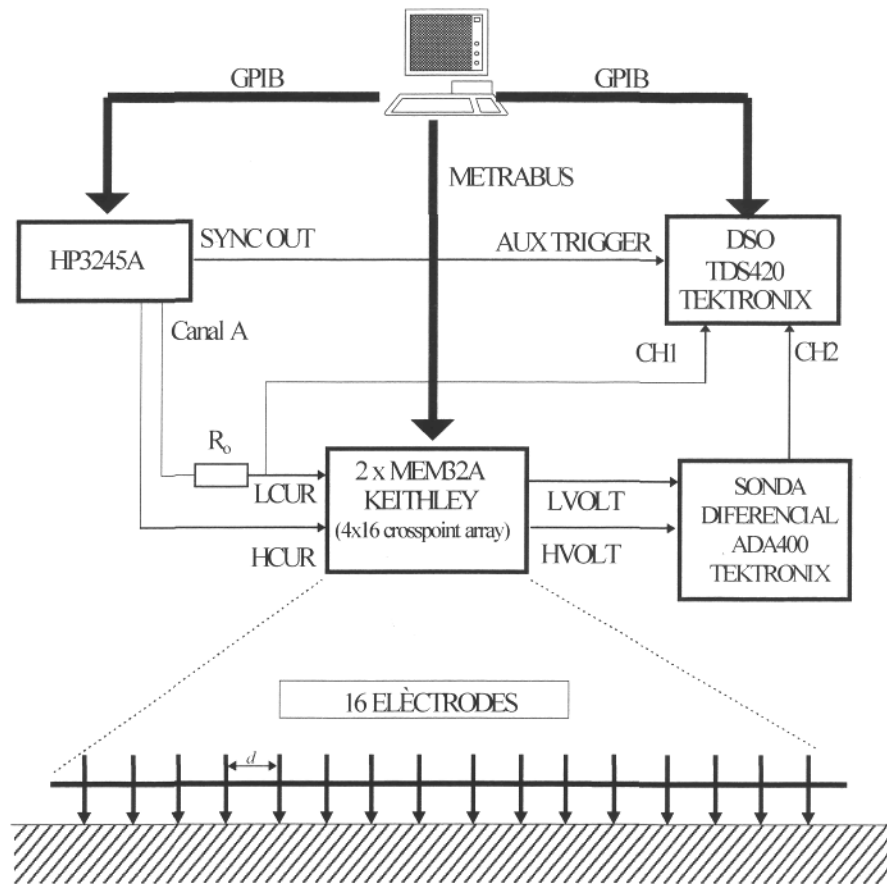


Figura 4.1: Sistema de mesura PROGEO.

Les especificacions del sistema són:

Generador

- Forma d'ona : sinusoidal i quadrada.
- Marges de tensió: 1,2,5, 10, 15 i 20 V pic a pic.
- Corrent màxim: 20 mA (limitat per software).
- Freqüència: 10, 100, 500, 1000, 5000 i 10000 Hz.

Detector

- Marge dinàmic: 60 dB.
- Freqüència de mostreig: 5, 10, 20 i 50 cops la freqüència del senyal.
- Temps d'integració: 10 ms, 20 ms, 40 ms, 100 ms, 200 ms, 400 ms, 1 s i 2s.
- Número de mesures repetides (amitjanats): 2 a 100.

Sistema de comunicació:

- Bus GPIB pels instruments.
- Bus METRABUS de Keithley pel sistema de commutació.

Una descripció més detallada d'aquest sistema de mesura es pot trobar en el treball de Alberto (1997).

4.2. Sistema Portàtil

La figura 4.2 mostra el diagrama de blocs del sistema instrumental utilitzat en la realització de les mesures de camp (capítol 9). Per validar el seu correcte funcionament també s'han realitzat mesures en el laboratori (Capítol 8).

Per mitjà d'un generador de funcions HP3245A injectem un senyal quadrat de 1 kHz i de 20 V de pic a pic al subsòl. Gasulla et al. (1998a) demostren l'avantatge de l'ús del senyal quadrat i mostreig síncron en la zona plana del senyal detectat per tal de disminuir les interferències a les mesures.

L'adquisició del senyal es realitza per mitjà d'un detector (García, 1998) que realitza la desmodulació síncrona basada en la tècnica del condensador flotant (Gasulla et al., 1996), (Gasulla et al., 1998b). Aquest detector és controlat per mitjà del port sèrie (EIA232) de l'ordinador portàtil. La tensió desmodulada és un senyal continu el qual és captat per la targeta d'adquisició Daqbook-120 (lotech).

L'ordinador portàtil també controla quatre targetes de 8 relès cada una, que permeten realitzar qualsevol configuració electrònica amb 8 elèctrodes (Llorens, 1998).

A continuació passem a descriure els aspectes més rellevants de cada bloc que forma part del sistema de mesura.

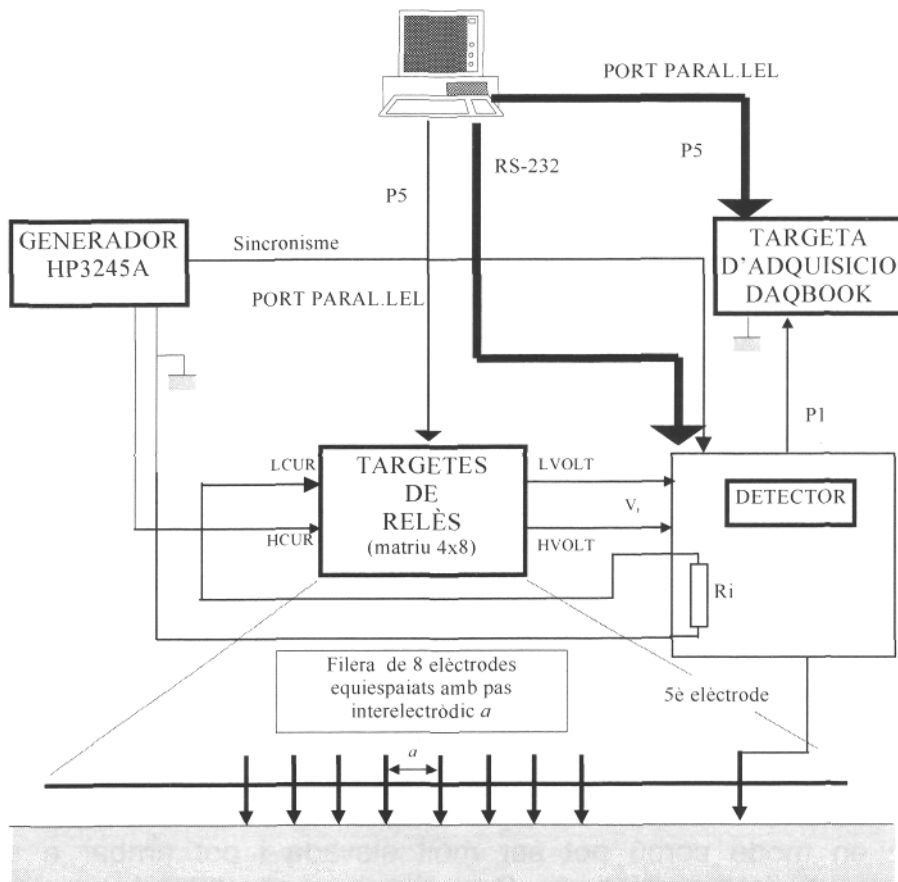


Figura 4.2: Estructura del sistema de mesura portàtil.

4.2.1. Detector

L'estructura del sistema de mesura consta bàsicament de dos blocs: el generador de senyal que injecta el corrent al subsòl i el sistema detector de la tensió mesurada en els elèctrodes detectors. La figura 4.3 mostra el diagrama de blocs del sistema detector (García, 1998).

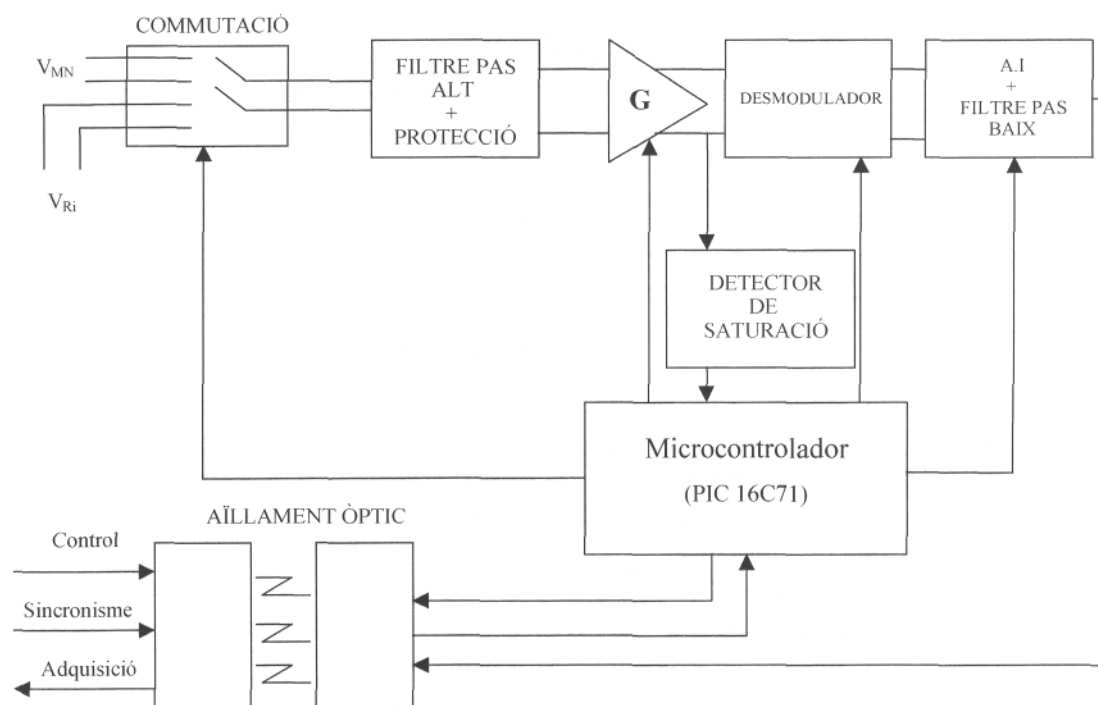


Figura 4.3: Diagrama de blocs del sistema detector.

La tensió en mode comú pot ser molt elevada i pot arribar a saturar els amplificadors de l'etapa d'entrada. Per evitar aquesta situació, les alimentacions de l'injector i del detector estan aïllades, de forma que les masses dels dos circuits són diferents. L'estructura de la mesura correspon a la figura 4.4.

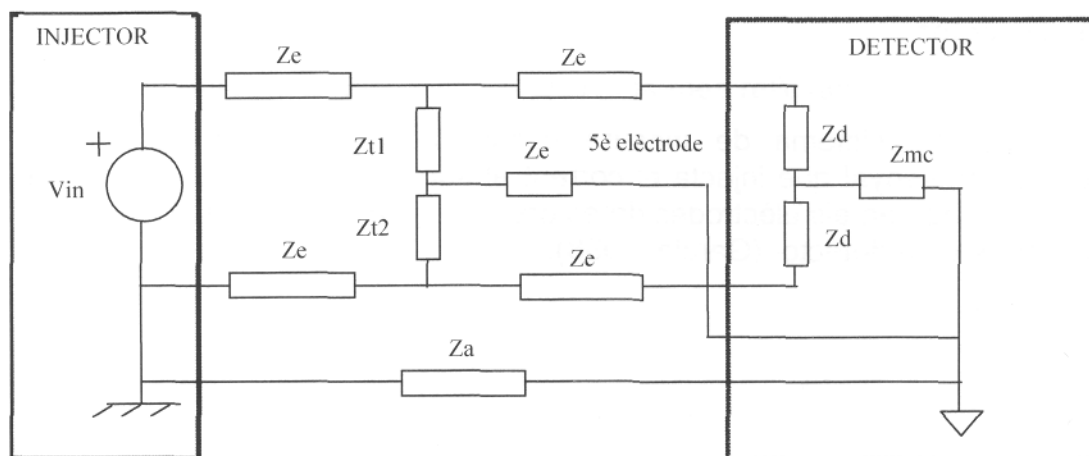


Figura 4.4: Injector i detector amb masses separades.

La figura 4.4 mostra la interconnexió de l'injector amb el detector, on s'han representat les diferents impedàncies existents. Z_e és la impedància d'elèctrode. Z_{t1} i Z_{t2} representen les impedàncies del terreny. Z_d és la impedància en mode diferencial del detector i Z_{mc} és la impedància en mode comú del detector.

L'aïllament entre les masses de l'injector i del detector ve caracteritzada per la impedància d'aïllament (Z_a). Hi ha un cinquè elèctrode que permet col·locar la massa del detector a un potencial intermig dels dos elèctrodes detectors. Si per alguna raó la impedància d'aïllament fos comparable a Z_d o Z_{mc} , d'aquesta manera se seguiria disminuint la tensió en mode comú a l'entrada del detector (Brescolí, 1995). L'avantatge d'aquest sistema és que no és necessari que la impedància d'aïllament sigui molt més gran que la impedància d'entrada del detector.

Una forma d'aconseguir que Z_a sigui elevada és alimentant el detector per mitjà de bateries. La transmissió dels senyals de control, de sincronisme i de la sortida del detector es realitza per mitjà d'optoacobladors, per garantir una elevada impedància d'aïllament.

Per tal de mesurar la impedància del terreny (Z_t), es realitzen dues mesures seqüencials. Primerament es mesura la caiguda de tensió en la resistència (R_i) (figura 4.2) que serveix per conèixer el corrent que circula pel terreny i seguidament es mesura la caiguda de tensió en els elèctrodes detectors de tensió (M i N). La impedància del terreny, suposada resistiva, equivaldrà a

$$Z_t = \frac{V_{MN}}{I} \quad (4.1)$$

L'etapa de commutació és l'encarregada de realitzar aquestes mesures. Consta del relè G6Ak-434 P OMRON. És un relè de quatre pols i dos contactes (4PDT) amb enclavament, la qual cosa significa que per commutar d'un contacte a un altre, requereix un petit instant de temps perquè passi corrent pel solenoide. Després, el relè ja queda enclavat, sense consumir més corrent. L'esquema del sistema de commutació apareix a la figura 4.5.

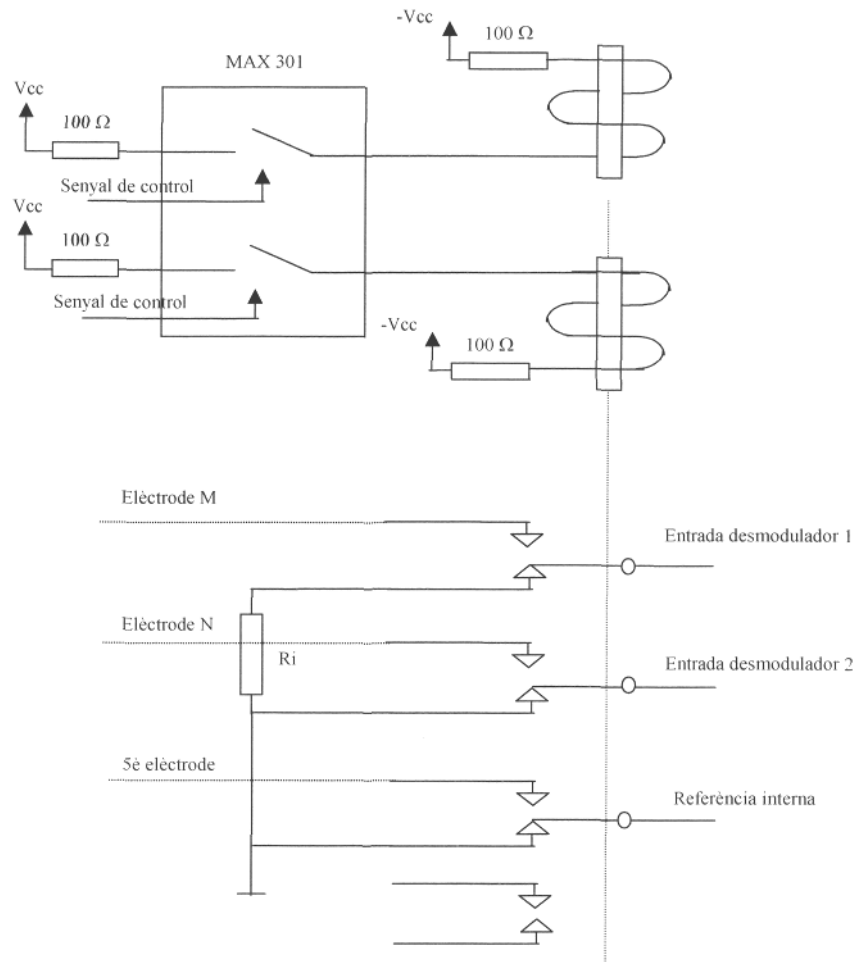


Figura 4.5: Sistema de commutació d'entrada, per seleccionar la tensió en els elèctrodes detectors i en la resistència sèrie.

El pas del corrent per les bobines està controlat per un interruptor doble MAX 301. Cada interruptor, activat per un senyal TTL provinent del microcontrolador, controla una bobina. El temps d'activació de cada interruptor és de 20 ms.

a) Etapa d'entrada del desmodulador

L'etapa d'entrada és aquella que es troba entre el dispositiu de commutació i el desmodulador. Consta de tres etapes: circuit de protecció, filtre d'entrada i amplificador de guany programable.

Per evitar possibles sobretensions a l'entrada del desmodulador, és convenient limitar la tensió d'entrada a la d'alimentació del circuit i limitar el corrent d'entrada. La figura 4.6 mostra el circuit de protecció utilitzat.

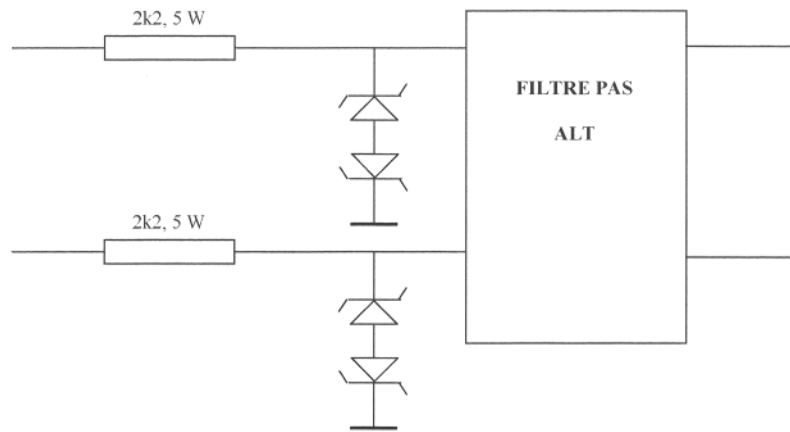


Figura 4.6: Etapa de protecció.

Els zeners utilitzats són BZX55-C6V8, que vénen caracteritzats per una tensió inversa de 6,8 V i una tensió directa de 0,7 V. Entre totes dues no superen la tensió d'alimentació (8,4 V).

Filtre d'entrada

Per eliminar la possible tensió contínua a l'entrada del desmodulador, la qual pot provenir del potencial de contacte dels elèctrodes, s'ha col·locat un filtre pas alt a l'entrada (figura 4.7).

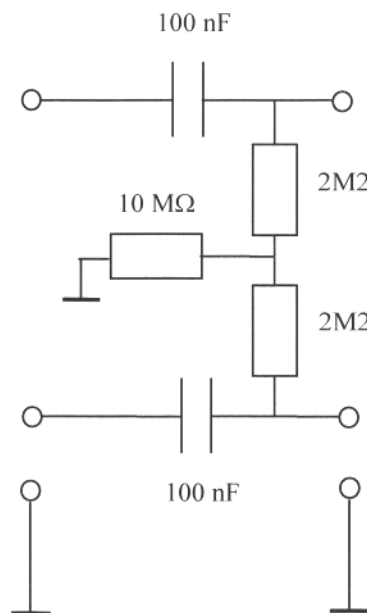


Figura 4.7: Filtre pas alt diferencial acoblat.

Si volem que l'etapa d'entrada no empitjori el CMRR de les etapes posteriors a 1 kHz, i sabent que l'amplificador d'instrumentació de sortida té un CMRR de 100 dB (Casas i Pallàs-Areny, 1996), si les resistències tenen una tolerància de 5 % i els condensadors tenen una tolerància del 10%, la freqüència de tall és 0,7 Hz.

L'anàlisi ha estat feta per senyals sinusoidal, però dona una aproximació per senyals quadrats.

Amplificador de guany programable

Com veurem més endavant en l'estudi del desmodulador, la seva característica principal és que realitza el pas de senyal diferencial a unipolar després de la desmodulació. Aquesta desmodulació d'amplitud fa que no sigui necessari un amplificador d'instrumentació a la seva entrada, la qual cosa podria disminuir el CMRR (Pallàs-Areny i Casas, 1996). Una estructura típica d'amplificador diferencial de guany programable és la que apareix a la figura 4.8.

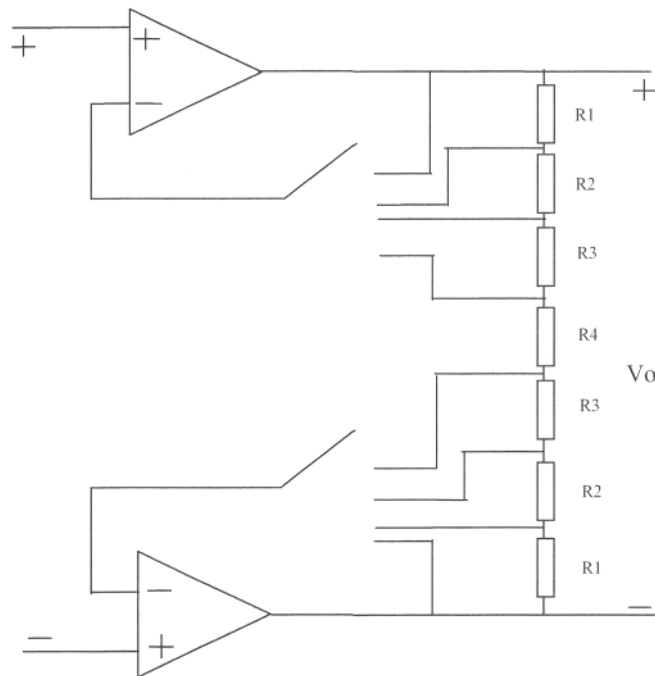


Figura 4.8: Amplificador diferencial de guany programable.

En funció de la posició dels commutadors es poden obtenir 4 guanys diferents.

$$G_1 = 1$$

$$G_2 = 1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3 + R_4/2}$$

$$G_3 = 1 + \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4/2}$$

$$G_4 = 1 + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_4/2}$$

El sistema té un guany màxim de 80, repartit entre l'amplificador diferencial d'entrada i un amplificador d'instrumentació de sortida. Els guanys d'entrada són: 1, 2, 5 i 10. El valor de les resistències escollides és: $R1 = 4,9 \text{ k}\Omega$, $R2 = 3 \text{ k}\Omega$, $R3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R4 = 2 \text{ k}\Omega$.

Per detectar la saturació que es pugui produir en algun dels amplificadors d'entrada, el sistema disposa d'un detector de saturació, el qual s'activa quan la tensió de sortida supera el 75 % de la tensió d'alimentació.

b) Desmodulador síncron diferencial

La solució adoptada deriva de l'estudi fet per Gasulla et al. (1996). Es tracta d'un desmodulador síncron diferencial de condensador commutat totalment diferencial (figura 4.9). Com a interruptors s'ha elegit el circuit integrat MAX-301, pel seu ampli marge de tensions d'alimentació $\pm 4 \text{ V}$ a $\pm 20 \text{ V}$, la compatibilitat TTL dels senyals de control i el baix valor de la seva injecció de càrrega. El senyal d'activació dels interruptors és generat per un microcontrolador. El condensador de mostreig és d'1 (μF). Les proves realitzades mostren que el CMRR d'aquesta etapa és superior a 105 dB en tot el marge freqüencial d'interès (100 Hz a 10 kHz).

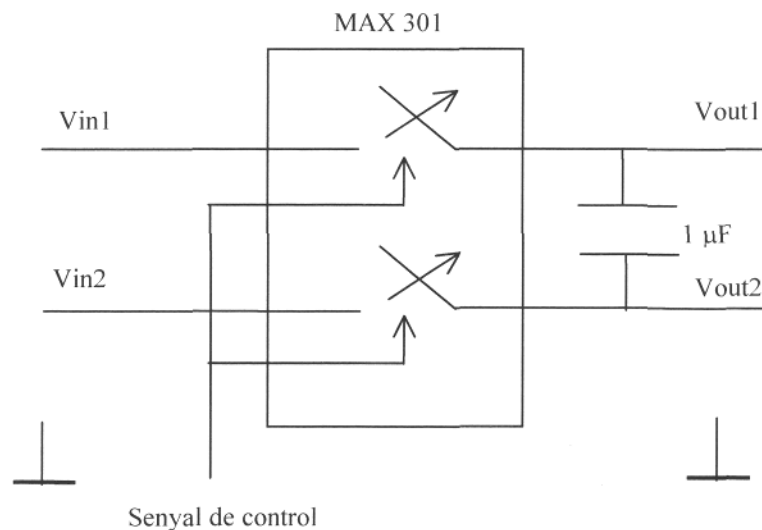


Figura 4.9: Desmodulador síncron diferencial.

c) Etapa de sortida

L'etapa de sortida s'encarrega de tractar el senyal desmodulat (DC). S'ha d'amplificar el senyal i convertir-lo de diferencial a unipolar. S'ha elegit l'amplificador d'instrumentació PGA 205, que té un guany programable 1, 2, 4 i 8 i un CMRR $> 94 \text{ dB}$. El guany és seleccionable per mitjà de dues entrades

compatibles TTL i CMOS, que es podran unir directament a les dues sortides del microcontrolador.

Entre l'etapa d'entrada i la de sortida es disposa dels guanys: $G1 = 1$, $G2 = 2$, $G3 = 5$, $G4 = 10$, $G5 = 20$, $G6 = 40$ i $G7 = 80$. Per tal de millorar el CMRR s'amplifica més a l'etapa d'entrada que a la de sortida. Per aquesta raó els guanys $G4$, $G5$, $G6$ i $G7$ s'obtenen amb un guany d'entrada $G_{in} = 10$.

d) Alimentació

El sistema dissenyat ha de poder adquirir senyals amb valors de pic compresos entre 5 V i -5V. Tenint en compte les característiques dels amplificadors operacionals, haurà d'estar al voltant de 8 V. L'alimentació del sistema amb una font d'alimentació convencional pot portar problemes de corrents de fuites i un aïllament pobre (Pallàs-Areny i Rosell, 1995). Per això es decideix que l'alimentació es realitzi amb piles, aconseguint-se un sistema més portàtil. L'alimentació del PIC 16C71 obliga a disposar d'una tensió de 5 V.

e) Sistema de control

El sistema de control, basat en el microcontrolador PIC16C71, té quatre objectius principals:

- Establir un diàleg de comunicació amb el PC, per tal de poder rebre i enviar informació.
- Seleccionar els guanys de les estapes d'entrada i de sortida a partir d'aquestes ordres.
- Controlar el sistema de commutació d'entrada.
- Generar l'ordre de tancament dels interruptors de mostreig del desmodulador síncron diferencial, a partir del senyal de sincronisme del generador de funcions.

4.2.2. Sistema de commutació i d'adquisició

Per poder obtenir qualsevol configuració electrònica es requereix poder dirigir el senyal que es vol injectar al subsòl als elèctrodes pertinents i poder detectar la tensió de qualsevol parella d'elèctrodes. Per aquesta raó es disposa d'un mòdul anomenat DBK10, el qual té capacitat per a les targetes de relès i per a la targeta d'adquisició.

a) Targetes de relès

Es disposa de 4 targetes de relès (DBK25) que són les encarregades de realitzar la commutació dels diferents elèctrodes per generar qualsevol configuració electrònica. Cada targeta consta de 8 relès, la qual cosa limita el nombre d'elèctrodes de la configuració electrònica a 8. Això no és cap inconvenient greu, doncs les mesures de laboratori (Capítol 8) ens garanteixen la possibilitat de poder reconstruir imatges amb únicament 8 elèctrodes.

Les especificacions de les targetes de relès són:

- Els relès no requereixen d'una aportació contínua de corrent per estar tancats.
- Consum de 1 mA a 5 V.
- El direccionament de cada una de les targetes de relès es fa mitjançant el port P2 un cop el Daqbook ha rebut l'ordre per part de l'ordinador, a través del port P5 (figura 4.2).

En el treball de Llorens (1998) es descriu el cablejat entre les diferents targetes de relès.

b) Targeta d'adquisició

La targeta d'adquisició que s'utilitza per tractar les tensions provinents del detector i llavors poder-les processar per mitjà de l'ordinador portàtil, és la Daqbook-120, de la casa lotech. Les seves característiques principals són:

- Disposa de 16 canals unipolars o 8 canals bipolars. La tria entre bipolar o unipolar es realitza per mitjà d'un interruptor.
- Com a connector d'entrada disposa del DB-37.
- Resolució de 12 bits.
- Marge de funcionament: 0 V-10 V o 0 V - 5 V. En el cas bipolar el marge de tensions d'entrada permeses és de -5 V a 5 V.
- Màxim sobrevoltatge permès: 30 V de tensió contínua.
- Impedància d'entrada : $> 100 \text{ M}\Omega$ en paral·lel amb 150 pF.
- Error de linealitat: 1 bit.
- Corrent d'entrada: 250 pA.

La targeta d'adquisició permet variar per software la freqüència de mostreig i el número de mostres que volem. Aquestes mostres es dipositen en un buffer del Daqbook i poden ser adquirides pel programa de control a través del port paral·lel de l'ordinador.

Per adquirir la tensió provinent del detector, únicament utilitzem un canal d'entrada (CH0 Hi, pin 37) i el Power Ground (pin 7), els quals són accessibles pel port P1. Com que les tensions de sortida del desmodulador poden ser positives o negatives, el canal d'entrada ha estat configurat com a bipolar.

4.2.3. Programa de control

El software de control està escrit en Visual Basic 3, el qual permet crear aplicacions gràfiques de forma senzilla. Per realitzar les comunicacions per mitjà del port sèrie s'utilitza una DLL, escrita en el llenguatge de programació C, la qual possibilita la realització d'operacions a nivell de bit, donada la dificultat de fer-ho amb Visual Basic 3.

La implementació d'una determinada configuració electrònica s'inicia amb la mesura de la tensió d'offset, mesurada en l'elèctrode central de la configuració, la qual es descompta en les posteriors mesures.

Per cada injecció-detecció corresponent a una configuració electrònica, primerament es mesura la caiguda de tensió en la resistència R_i (figura 4.2) la qual permet obtenir el valor del corrent injectat. A continuació es passa a mesurar la tensió V_{MN} , i seguidament es passa a una nova injecció i detecció. El cicle de mesura es pot observar a la figura 4.10. En funció del valor de la tensió mesurada amb guany unitari es realitza la programació dels guanys del detector, tant per la mesura del corrent com per la mesura V_{MN} . Internament el programa realitza el càlcul de la resistivitat aparent.

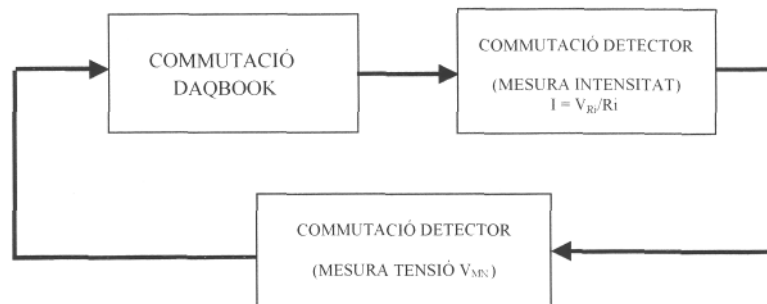


Figura 4.10: Cicle de mesura corresponent a una injecció-detecció, per una determinada configuració electrònica.

La freqüència de mostreig utilitzada és de 1 kHz i en cada adquisició es capturen 100 mostres de la tensió provinent del detector. El temps aproximat en realitzar una mesura és d'uns 40 segons.

En els treballs de Gasulla et al. (1999) i Jordana et al. (1999) s'han reconstruït tensions de camp obtingudes a partir d'aquest sistema de mesura portàtil per obtenir imatges d'un tub soterrat, on s'ha pogut comprovar el bon funcionament del sistema de mesura.

Capítol 5

EL PROBLEMA INVERS

L'objectiu de la tomografia d'impedància elèctrica (EIT) és reconstruir imatges de la distribució d'impedància elèctrica d'una secció d'un cos tridimensional, a partir de les mesures realitzades en la seva superfície. Aquesta tècnica s'aplica sobretot en processos industrials tot i que va començar en el camp de la medicina, però també s'està desenvolupant en el camp de la geofísica (Dines and Lytle, 1981).

La característica dels problemes inversos geofísics és que les mesures són molt poc sensibles als paràmetres de l'objecte que s'està investigant. Això significa que els problemes inversos geofísics no són estables, ja que dos objectes diferents poden produir observacions similars. Per tant s'ha de determinar una solució aproximada propera a la real. Això s'aconsegueix mitjançant les eines de regularització. L'eficiència de la prospecció geofísica pot millorar a partir de l'aplicació de mètodes més eficients a l'hora de processar i interpretar les dades, més que no pas desenvolupant una instrumentació més precisa (Tikhonov and Goncharky, 1987). Els models més usats en prospecció elèctrica resistiva són els estratificats, ja que molts talls geològics es poden assimilar a capes homogènies d'una determinada resistivitat i d'un gruix determinat (Orellana, 1982).

Les mesures obtingudes a partir de qualsevol sistema tomogràfic han de ser processades mitjançant un algorisme de reconstrucció d'imatges. Segons el principi físic en què es basa el sistema sensor, la imatge reconstruïda tindrà informació del paràmetre mesurat. En el nostre cas, pertanyent a la tomografia d'impedància elèctrica (EIT), el paràmetre que es visualitzarà serà la distribució de conductivitat o resistivitat normalitzada d'una secció del subsòl, ja sigui en un pla transversal (perpendicular a la superfície) o en un pla horitzontal, paral·lel a la superfície.

Aquest capítol descriu els algorismes de reconstrucció que s'han dissenyat per obtenir imatges d'una secció del subsòl, així com els conceptes bàsics en què es basen. S'ha optat pels algorismes no iteratius, basats en el teorema de la sensibilitat, ja que no requereixen de molt temps de computació i els resultats

són força acceptables tot i el mal condicionament de la matriu de sensibilitat. Aquest mal condicionament s'evita si l'algorisme no es basa en el càlcul matricial, com descriu Wexler (1988), però treballar amb algorismes iteratius incrementa molt el temps de computació.

5.1. Expressió matricial del problema invers

La teoria del problema invers consisteix en un conjunt de tècniques matemàtiques per obtenir informació sobre un fenomen físic a partir d'una sèrie d'observacions, mesures (o dades). A partir d'aquestes observacions s'han d'obtenir els paràmetres del model que les puguin reproduir (Menke, 1989).

Aquests problemes apareixen en diferents branques de les ciències: tomografia mèdica, restauració d'imatges, ajust de corbes, determinació de terratrèmols, determinació de l'estructura de la terra a partir de dades geofísiques, navegació per satèl·lit, etc.

Una formulació senzilla dels problemes inversos discrets és la matricial

$$G m = d \quad (5.1)$$

on $d = [d_1, d_2, \dots, d_M]^T$, és el vector de dades $m = [m_1, m_2, \dots, m_P]^T$ és el vector de paràmetres i G és la matriu Jacobiana (Lines and Treitel, 1984) o data Kernel, d'ordre $M \times P$.

La inversió de dades geofísiques requereix l'estimació dels paràmetres d'un model de la terra a partir d'un conjunt d'observacions. La inversió geofísica és un intent d'ajustar la resposta d'un model de subsòl a un nombre finit d'observacions. La inversió no sol ser única. Per tant, més d'una solució satisfarà les observacions amb un determinat marge d'error.

En geofísica es solen utilitzar molt els models estratificats del subsòl per determinar la naturalesa geològica de diferents capes o estrats del terreny. Aquest estudi ha donat lloc a una gran varietat de tècniques d'inversió, consistent en ajustar corbes de resistivitat aparent mesurades, a corbes de resistivitat aparent teòriques, a partir de les quals es pot esbrinar la resistivitat i gruix de cada una de les capes (Orellana, 1982).

Els mètodes més senzills per resoldre problemes inversos lineals és basen en mesures de la grandària o longitud dels paràmetres estimats del model (m^{est}) i de les dades predides (d^{pred}) (Menke, 1989). Per observar la importància de les mesures de longitud en la solució de problemes inversos podem considerar el problema d'ajustar una recta a un conjunt de dades (figura 5.1).

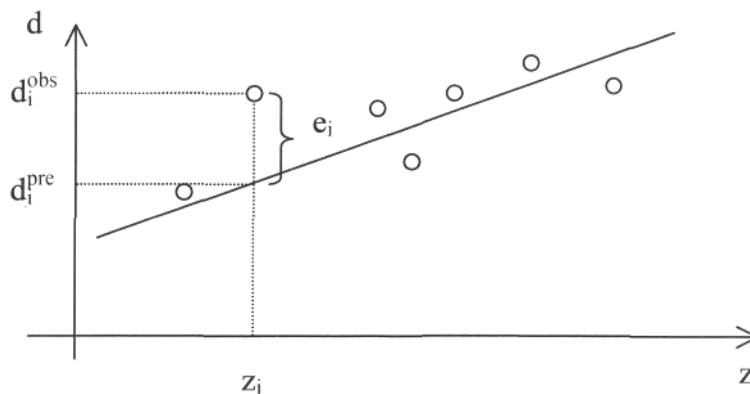


Figura 5.1: Problema invers lineal. Ajust d'un núvol de punts per una recta.

D'entre els molts mètodes d'inversió uns dels més utilitzats és el de l'ajust per mínims quadrats (*least-squares*). Aquest mètode consisteix en minimitzar l'error quadràtic mig entre la resposta del model (d^{pre}) i les observacions (d^{obs}). Es tracta que les dades predides s'acostin el màxim possible a les dades observades. Per cada observació es defineix un error de predicció $e_i = d_i^{obs} - d_i^{pre}$. La millor solució per mínims quadrats és la que minimitza la següent expressió,

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^M e_i^2} . \tag{5.2}$$

A partir d'aquest criteri, la solució estimada del problema invers (5.1) és

$$m^{est} = (G^T G)^{-1} G^T d \tag{5.3}$$

que és la solució Gauss-Newton (Lines and Treitel, 1984), la qual és apropiada per sistemes d'equacions sobredeterminats, en els que el número d'observacions és superior al número de paràmetres del model ($M > P$). Pels sistemes indeterminats es requereix afegir informació a priori per tal que el mètode per mínims quadrats doni una solució adequada (Menke, 1989). La dificultat d'aquest mètode d'inversió apareix quan $G^T G$ és una matriu singular.

Malauradament la matriu G és mal condicionada. Per tant, petites variacions en les mesures afectaran negativament a la reconstrucció. És a dir, en el cas d'afegir soroll a les observacions, apareixerà una pertorbació en els paràmetres del model, que ve donada per l'equació següent

$$G(m + \Delta m) = d + \Delta d \tag{5.4}$$

La variació relativa dels paràmetres del model està relacionada amb la variació relativa de les observacions, a partir del condicionament (*condition number*) de la matriu G ($cond(G)$), tal i com es mostra a continuació (Kahaner et al., 1989).

$$\frac{|\Delta m|}{|m|} \leq \text{cond}(G) \frac{|\Delta d|}{|d|} \quad (5.5)$$

on $\text{cond}(G) = \frac{\mu_1}{\mu_N}$, essent μ_1 , el major valor propi de G , i μ_N el més petit.

Per tant, es pot observar que com més gran sigui $\text{cond}(G)$, si les dades observades posseïxen un cert soroll, aquest es traduirà en una major incertesa en els paràmetres del model. Lascaux i Theodor (1986) estudien detalladament diferents aspectes relacionats amb el condicionament de les matrius, així com la solució de diferents problemes per mínims quadrats.

Per tal de reduir les dificultats d'inversió de $G^T G$ hem de resoldre un problema alternatiu per mínims quadrats. La majoria de problemes inversos no solen ser ni completament determinats ni completament indeterminats. En aquest cas la solució es pot expressar de la forma (Menke, 1989)

$$m^{est} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T d \quad (5.6)$$

El factor d'amortiment λ atenua la part indeterminada de la solució.

Amb aquest mètode, anomenat Marquardt-Levenberg (Lines and Treitel, 1984), es redueixen les dificultats d'inversió de $G^T G$, ja que per mitjà del factor d'amortiment, s'eviten les seves singularitats, doncs s'afegeix un nivell de contínua a la diagonal de $G^T G$, de forma que cap valor propi és nul.

Si es disposa d'informació a priori dels paràmetres del model es podrà obtenir una solució més propera a la real. Si algun paràmetre del model és nul, es pot eliminar del sistema d'equacions així com les columnes de G associades a aquests paràmetres que són nuls. D'aquesta manera el problema invers es redueix a:

$$G' m' = d \quad (5.7)$$

on G' és d'ordre $M \times (P - N)$, sent N el número de paràmetres del model que són nuls, i m' conté únicament els paràmetres no nuls del model i és d'ordre $(P - N) \times 1$.

D'aquesta manera la solució dels paràmetres del model serà menys sensible a les pertorbacions de les dades, ja que $\text{cond}(G') \leq \text{cond}(G)$ Lawson and Hanson, 1974).

5.2. Mètodes de regularització

Els mètodes de regularització serveixen per calcular solucions estables, corresponents a problemes mal condicionats. La teoria dels problemes mal

condicionats està força desenvolupada en la literatura científico-tècnica (Tikhonov and Goncharsky, 1987).

Les principals dificultats associades als problemes mal condicionats apareixen il·lustrades en el següent exemple (Hansen, 1993). Es vol resoldre el sistema (5.1) pel mètode dels mínims quadrats, de forma que la solució minimitzi la norma següent:

$$\|Gm - d\| \quad (5.8)$$

on G està formada pels vectors columna: $c_1 = [0,16, 0,17, 2,02]$ i $c_2 = [0,1, 0,11,1,29]$.

El terme independent és el vector columna $d = [0,26, 0,28, 3,31]$. Pot observar-se que la solució exacta del sistema és el vector columna $m_{\text{ext}} = [1, 1]$.

Si per qualsevol raó les dades tenen superposades un cert soroll i prenen el valor $d_{\text{obs}} = [0,27, 0,25, 3,33]$, les solucions d'aquest sistema sobredeterminat poden diferir molt de la solució real. Això és així perquè la matriu G està mal condicionada. Els seus valors singulars són 2,4127 i 0,0022 que donen lloc a un condicionament de la matriu elevat, de valor 1097. Per aquesta raó, la solució del sistema és molt sensible a les pertorbacions de les dades.

El fet que G sigui mal condicionada vol dir que les seves columnes són gairebé dependents. Per tant, podríem suposar que G ve representada únicament pel vector columna c_1 . En aquest cas la solució que s'obté per mínims quadrats és $m = [1,65, 0]$, que no té res a veure amb la solució exacta tot i que la norma residual és de valor petit.

La principal dificultat de la solució per mínims quadrats que la norma de la solució obtinguda és superior a la norma de la solució exacta. Una forma de resoldre aquest problema és afegir la condició que la norma de la solució ha de ser menor que un cert valor α . La solució obtinguda depèn de forma no lineal d'aquest paràmetre, el valor adient del qual no és obvi.

Aquest petit exemple demostra les tres principals dificultats dels problemes mal condicionats, que es resumeixen a continuació:

- 1- El condicionament (*condition number*) de G és gran.
- 2- La substitució de la matriu G per una de millor condicionada no garanteix que la solució sigui útil.
- 3- La imposició de restriccions a la solució s'ha de fer de forma apropiada.

El propòsit de la teoria de regularització numèrica és subministrar mètodes eficients i estables numèricament, juntament amb les restriccions adequades per obtenir solucions estables i útils, de forma que la solució regularitzada sigui una bona aproximació a la solució desitjada. Aquest és l'objectiu de les rutines de

regularització (Hansen, 1993) que s'han emprat en el present treball per resoldre el problema invers, ja que la matriu (basada en el teorema de la sensibilitat) és mal condicionada.

Hi ha moltes formes d'afegir informació addicional a la solució m del problema invers. Sens dubte, la tècnica de regularització que s'aplica més àmpliament és la que minimitza la norma de la solució juntament amb la norma del residu. Per tant, la solució regularitzada és

$$m_{reg} = \arg \min \left\| \|G m - d\|_2 + \lambda^2 \|d - d_{est}\|_2 \right\| \quad (5.9)$$

on λ és el paràmetre de regularització. Es pot observar com un valor λ gran afavoreix una solució amb norma petita, però amb un residu gran, mentre que un valor petit té l'efecte contrari. Aquest paràmetre controla la sensibilitat de la solució regularitzada a possibles pertorbacions que puguin aparèixer en G i d . Per tant, el paràmetre λ és una quantitat important que controla les propietats de la solució regularitzada. Existeixen diferents mètodes per obtenir aquest paràmetre, tot i que sol dependre del problema en qüestió i de l'experiència. Per exemple, en el treball de restauració d'imatges de Galatsanos i Katsaggelos (1992) es descriuen diferents mètodes per determinar el paràmetre de regularització, el qual està relacionat amb la variança de soroll de la imatge restaurada. Un aspecte interessant que es desprèn d'aquest treball és que el factor de regularització és inversament proporcional a la SNR de la imatge restaurada.

Existeixen moltes i variades tècniques de regularització (Hansen, 1993). Nosaltres, però, ens centrarem en les més àmpliament utilitzades, les quals es basen en la descomposició en valors singulars (SVD) de la matriu que caracteritza el problema invers i el compliment de la condició de Picard. En el treball de Varah (1979), pot veure's l'estudi d'alguns d'aquests mètodes. També descriurem el criteri de la corba L (L -curve) (Hansen, 1993) que és un criteri força utilitzat per determinar el paràmetre de regularització òptim.

5.2.1. Descomposició en valors singulars (SVD)

El mètode SVD (*Singular Value Decomposition*) o descomposició espectral (Menke, 1989) és el més utilitzat per resoldre la majoria de problemes per mínims quadrats.

$$m^{est} = (G^T G)^{-1} G^T d \quad (5.10)$$

Si G és una matriu rectangular d'ordre $M \times P$, essent $M \geq P$, llavors, la seva SVD és de la forma

$$G = U \sum_{i=1}^P V^T = \sum_{i=1}^P u_i \sigma_i v_i^T \quad (5.11)$$

on $U = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ i $V = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ són matrius amb els vectors columna ortonormals, és a dir que compleixen $U^T U = V^T V = I_p$.

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ és una matriu diagonal que conté l'arrel quadrada dels valors propis de $G^T G$ (anomenats valors singulars) (Golub and Reinch, 1970), els quals compleixen la relació següent

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0 \quad (5.12)$$

La SVD també es pot portar a terme quan $M < P$. En aquest cas, els valors singulars σ_i són zero per $i = M+1, \dots, P$, a l'igual que les columnes associades de la matriu U .

Si G és una matriu quadrada, la seva inversa és

$$G^{-1} = V \left[\text{diag} \frac{1}{\sigma_i} \right] U^T \quad (5.13)$$

En el cas que G no sigui quadrada, no es parla de matriu inversa, sinó de pseudoinversa G^+ (Eldén, 1982).

Si algun valor propi de Σ és nul, la matriu G és singular. En aquest cas, el seu *condition number* és infinit.

El mètode SVD construeix bases ortonormals pel nucli de G ($\ker(G)$). Així doncs, les columnes de V que tenen associats valors propis nuls, formen una base ortonormal del $\ker(G)$. Per tant, la solució del problema invers es pot escriure de la forma següent

$$m = m_{part} + \lambda_i V_i \quad (5.14)$$

la qual està formada per la solució particular de norma mínima obtinguda a partir de la SVD més una combinació lineal dels vectors de la base del $\ker(G)$. Es pot observar, doncs, que la solució de norma mínima no conté vectors del $\ker(G)$ (Menke, 1989).

Golub and Reinsch (1970) estudien en detall la descomposició en valors singulars (SVD). Estudis de tomografia d'impedància elèctrica mèdica (Avis and Barber, 1994 i 1995) també han usat aquesta tècnica per realitzar la inversió de les matrius involucrades en el problema de reconstrucció, les quals també són mal condicionades.

5.2.2. La condició discreta de Picard

Per mitjà del mètode SVD, es pot demostrar que la solució del problema invers presenta la següent forma (Hansen, 1993)

$$m = \sum_{i=1}^p \frac{u_i^T d}{\sigma_i} v_i \quad (5.15)$$

Si els coeficients de Fourier $|u_i^T d|$ corresponents als valors propis més petits no decreixen més ràpidament que els σ_i llavors la solució per mínims quadrats queda caracteritzada pels termes corresponents als σ_i més petits. Com a conseqüència d'això, la solució té molts canvis de signe i passa a tenir una forma totalment aleatòria.

A partir d'aquesta anàlisi es pot observar com el propòsit dels mètodes de regularització és amortir o filtrar les contribucions dels valors propis petits a la solució. D'aquesta manera, la solució regularitzada es pot escriure com

$$m_{reg} = \sum_{i=1}^p f_i \frac{u_i^T d}{\sigma_i} v_i \quad (5.16)$$

on f_i , són els factors que actuen de filtre per cada mètode de regularització en particular. La diferència entre els diferents mètodes de regularització consisteix en la selecció d'aquests coeficients f_i . La propietat d'aquests valors és que si σ_i , decreixen, els f_i associats tendeixen a 0, de forma que la contribució d'aquests valors propis petits s'elimina.

Per tant, per tal que una solució regularitzada compleixi la condició de Picard, els coeficients de Fourier han de decreixen més ràpidament que els seus valors propis associats (Hansen, 1990).

5.2.3. Regularització per Tikhonov i Truncated Singular Value Decomposition (TSVD)

Per mitjà del mètode SVD, podem expressar la solució corresponent a la regularització per Tikhonov, de la manera següent (Hansen, 1987)

$$m_{tik} = G_{\lambda}^+ d \quad (5.17)$$

on G_{λ}^+ és la inversa regularitzada d'ordre $(P \times M)$ definida per

$$G_{\lambda}^+ = (G^T G + \lambda I_p)^{-1} G^T \quad (5.18)$$

Si es realitza la SVD de G_λ^+ tenim

$$G_\lambda^+ = V \Sigma_\lambda^+ U^T \quad (5.19)$$

on $\Sigma_\lambda^+ = \text{diag} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \lambda}, \dots, \frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \lambda} \right]$ és una matriu $M \times P$.

El paràmetre λ s'utilitza per eliminar els valors propis inferiors a aquest paràmetre (Damping Factor), (Menke, 1989).

L'altre mètode de regularització, molt similar al de Tikhonov, és el Truncated Singular Value Decomposition (TSVD). La idea bàsica d'aquest mètode (Hansen, 1987), com els altres mètodes de regularització, és definir un nou problema ben condicionat, que sigui poc sensible a les pertorbacions de les dades i de la pròpia matriu.

$$G = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^p u_i \sigma_i v_i^T \quad (5.20)$$

Els valors propis de G estan ordenats en ordre decreixent: $0, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$ on r és el rang de la matriu G .

En aquest cas s'aproxima la matriu G per la matriu G_k , definida per

$$G_k = U \Sigma_k V^T \quad (5.21)$$

on $\Sigma_k = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$, sent $k < r$, i s'han substituït els $P - k$ valors singulars per zeros. D'aquesta manera s'haurà reduït el condition number (σ_1/σ_k) de la matriu, millorant-se el seu mal condicionament.

La solució TSVD serà

$$m_k = G_k^+ d \quad (5.22)$$

essent G_k^+ la pseudoinversa de G_k , que respon a la següent expressió

$$G_k^+ = V \Sigma_k^+ U^T \quad (5.23)$$

on $\Sigma_k^+ = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_k^{-1}, 0, \dots, 0)$, és una matriu d'ordre $M \times P$.

Poden observar-se les semblances entre la regularització per Tikhonov i per TSVD. Els dos mètodes tendeixen a filtrar l'efecte dels valors singulars més petits.

Per TSVD aquest filtre té la forma

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{per } \sigma_i \geq \sigma_k \\ 0 & \text{per } \sigma_i < \sigma_k \end{cases} \quad (5.24)$$

Es tracta d'un filtre que elimina les últimes $P - k$ components. La regularització per Tikhonov té els següents factors que realitzen el filtratge.

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \quad \text{per } i=1,2,\dots,P. \quad (5.25)$$

És un filtre més suau que l'anterior i atenua els valors propis inferiors a λ . Quan es tria k de forma que $\lambda = \sigma_k$, el filtre abrupte de la tècnica TSVD s'aproxima al de Tikhonov. D'aquesta manera es pot observar com les dues solucions poden ser similars.

Aquestes tècniques de regularització han estat aplicades en la reconstrucció d'imatges per tomografia mèdica (Paulson et al., 1990), (Avis and Barber, 1994). En aquest darrer treball, per exemple, s'observa que el truncament de la matriu millora el seu *condition number* i disminueix el seu *rang*, essent més insensible a possibles pertorbacions en les dades, però es degrada la resolució de la imatge.

5.2.4. Criteri de la corba L

Un mètode força utilitzat per obtenir el paràmetre de regularització òptim és la corba L, tot i que no sempre dóna bons resultats (Kolehmainen et al. 1997).

La corba L visualitza el compromís entre minimitzar la norma de la solució $\|m_{reg}\|_2$

i la norma residual $\|Gm_{reg} - d\|_2$, que és la base de qualsevol mètode de regularització (Hansen, 1993). Lawson and Hanson (1974) donen diversos exemples de l'ús de la corba L.

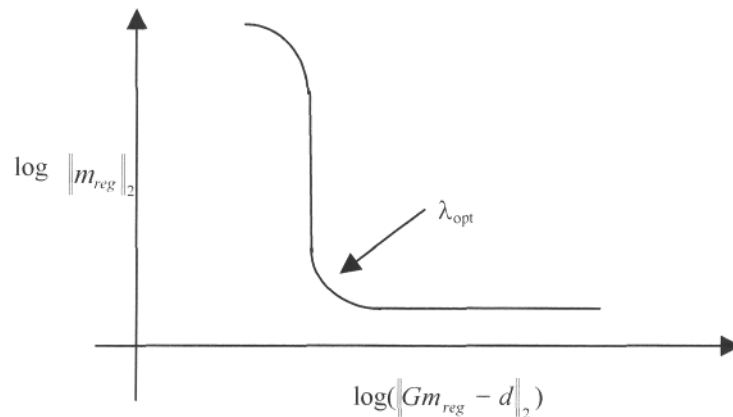


Figura 5.2: Diagrama de la corba L.

La part vertical de la corba L correspon a solucions on $\|m_{reg}\|_2$ és molt sensible a canvis en el paràmetre de regularització i la part horitzontal on ho és $\|Gm_{reg} - d\|_2$ (figura 5.2). Com a paràmetre de regularització s'elegeix aquell que busca un compromís entre la minimització de $\log(\|Gm_{reg} - d\|_2)$ i $\log(\|m_{reg}\|_2)$, és a dir, el punt de colze de la corba.

La utilització de la corba L com a criteri per elegir el paràmetre de regularització té l'avantatge de ser ràpid i de ser independent de la imatge que es vol reconstruir. És a dir, no es necessita informació a priori de la situació, ni de les característiques de l'anomalia que es vol detectar.

En aquest treball s'ha utilitzat la funció L-curve de Matlab (Hansen, 1993), i la funció L-comer, que localitza el paràmetre que correspon al colze de la L-curve, o en el cas de no obtenir-se una L, localitza el punt de màxima corbatura.

5.2.5. Afegiment d'informació a priori

L'afegiment d'informació a priori tendeix a millorar la reconstrucció del problema invers independentment del camp d'aplicació. Els treballs d'Avis et al. (1995) i Ellis and Oldenburg (1994) sobre tomografia d'impedància elèctrica mèdica i geologia, respectivament, en són un exemple.

Quan es coneix el valor de certs paràmetres del model, el problema invers es pot completar amb el sistema d'equacions següent

$$Fm = h \quad (5.26)$$

on F és una matriu identitat d'ordre $P \times P$, m són els paràmetres del model ($P \times 1$) i h és el valor conegut a priori dels paràmetres del model, d'ordre ($P \times 1$).

Per tant, el problema invers consisteix en resoldre el següent sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} G m = d \\ F m = h \end{array} \right\} \quad (5.27)$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és

$$m = [A^T W A + \lambda I]^{-1} A^T W b \quad (5.28)$$

Els ordres de les matrius involucrades en la solució del problema invers per mínims quadrats, ponderat (*weighted-least-squares*), (Menke, 1989) són:

$G: (M \times P)$	$F: (P \times P)$	$I: (M+P) \times (M+P)$
$m: (P \times 1)$	$h: (P \times 1)$	$W: (M+P) \times (M+P)$
$d: (M \times 1)$	$b: (M+P) \times 1$	$A: (M+P) \times P$

La matriu A consta de la matriu G més una submatriu diagonal identitat d'ordre $(P \times P)$. La matriu de pes W és una matriu diagonal que pondera per un determinat pes aquells paràmetres que són coneguts. El seu disseny és bàsic per obtenir una inversió acceptable (Ellis and Oldenburg, 1994). D'aquesta forma es millora la inversió dels paràmetres desconeguts, doncs el fet d'afegir informació a priori és una manera de regularitzar el problema mal condicionat.

El condicionament de la nova matriu A es redueix considerablement respecte el de G , amb la qual cosa el soroll de les mesures afecta menys a la reconstrucció dels paràmetres del model.

La forma d'aplicar les condicions a priori depèn de cada problema en qüestió. En problemes d'inversió geològics, per exemple, es pot introduir en l'algorisme de reconstrucció el coneixement de la situació aproximada de l'anomalia que es vol reconstruir, la resistivitat del medi que l'envolta, etc. (Ellis and Oldenburg, 1994). En treballs de tomografia d'impedància elèctrica mèdica (Avis et al., 1995) l'escalat de les tensions obtingudes al voltant de l'objecte d'interès, també es considera com una forma d'informació a priori.

5.3. Algorismes de reconstrucció basats en el teorema de la sensibilitat

Els mètodes que utilitzarem per obtenir imatges del subsòl són semblants als aplicats en tomografia d'impedància elèctrica mèdica (Kotre, 1996a). Per poder descriure mitjançant imatges la distribució d'impedància elèctrica del subsòl, es requereix disposar d'una sèrie d'elèctrodes a la seva superfície, per realitzar les oportunes injeccions de corrent i deteccions de tensió. Un cop l'algorisme de reconstrucció hagi processat les dades es visualitzarà una secció vertical o horitzontal del subsòl.

A la figura 5.3 es pot observar la disposició dels elèctrodes a la superfície del sòl, juntament amb una parella d'injectors de corrent (m) i una parella de detectors de tensió (n). Es mostren també diverses seccions verticals del subsòl.

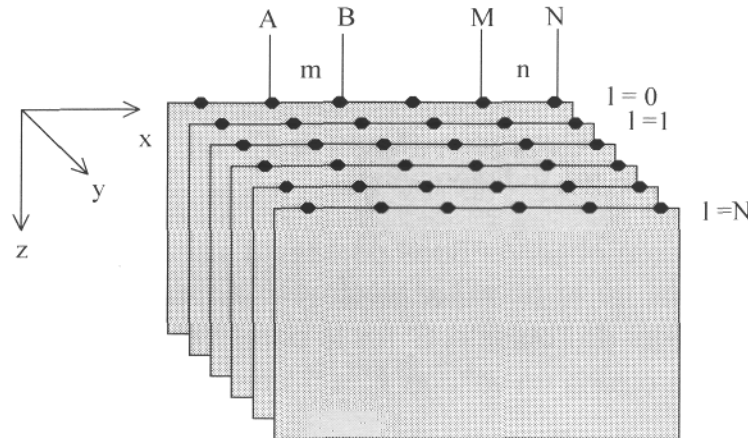


Figura 5.3: Disposició dels elèctrodes a la superfície del sòl.

El parell d'elèctrodes m injecta un corrent $I_{l,m}$ al sòl i el parell d'elèctrodes n de la mateixa fila l , realitza la detecció de tensió.

Els algorismes de reconstrucció que s'han dissenyat per resoldre el problema invers es basen en els següents aspectes:

- Es reconstrueix la part real de la impedància a baixa freqüència. Per tant les imatges obtingudes respondran a la distribució de conductivitat o resistivitat del subsòl.
- En cada agrupació d'elèctrodes, aquests estan equiespaiats.
- Es suposa que la distribució de conductivitat inicial és uniforme (medi homogeni).
- Els canvis de conductivitat respecte el cas homogeni són petits. Tot i això els algorismes poden detectar objectes de gran contrast respecte el medi que els envolta.
- La regió visualitzada és bidimensional.

Encara que aquestes condicions no es compleixin del tot, també s'obtenen imatges força acceptables (Barber, 1990). Per exemple, en aplicacions d'imatges mèdiques, la conductivitat inicial no sol ser uniforme, i en canvi això no impedeix l'obtenció d'imatges pràctiques (Kotre, 1993).

Com veurem en els capítols 8 i 9, els objectes que s'han utilitzat per realitzar les mesures experimentals tenen un gran contrast respecte el medi que els envolta. Això no suposa cap impediment per detectar fuites al voltant d'una determinada tuberia soterrada, doncs els algorismes detecten el canvi d'impedància, encara que no la quantifiquin correctament.

La tomografia d'impedància elèctrica relaciona la distribució de conductivitat (o resistivitat) a l'interior d'un objecte conductor (en aquest cas el sòl), amb les tensions mesurades a la seva superfície, quan flueix un corrent en el seu interior. Quan un objecte conductor és travessat per un corrent elèctric, apareix una distribució de voltatge a la seva superfície. Aquesta distribució de voltatge depèn de la forma de l'objecte i de la seva distribució de resistivitat interna.

Per facilitar d'anàlisi particularitzem l'estudi a objectes bidimensionals, envoltats per un nombre finit d'elèctrodes (figura 5.4), tot i que les conclusions són generalitzables a objectes tridimensionals.

A la figura 5.4 podem observar dues parelles d'elèctrodes, A i B. Si s'injecta un corrent I_A a través de la parella d'elèctrodes A, apareixerà una distribució de voltatge ϕ_A a l'interior de l'objecte. Si fos la parella d'elèctrodes B, la que injectés un corrent I_B , apareixeria un voltage ϕ_B a l'interior de l'objecte.

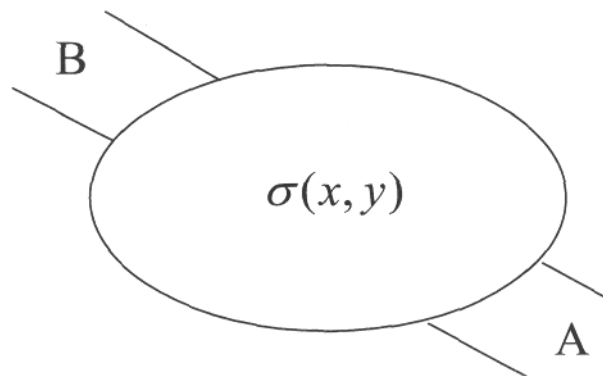


Figura 5.4: Injecció de corrent (A) i detecció de tensió (B) al voltant d'un cos bidimensional conductor.

La tensió mesurada en B quan en A s'injecta un corrent unitari és (Barber, 1990)

$$V_{AB} = \int_S \sigma(x, y) \nabla \phi_A \nabla \phi_B dS \quad (5.29)$$

La integració es realitza sobre l'àrea de l'objecte i $\sigma(x, y)$ és la distribució de conductivitat. $\nabla \phi_A$ i $\nabla \phi_B$ són els gradients de la distribució de voltatge en el punt (x, y) . Per reciprocitat, el mateix voltatge apareixeria en A si s'injectés el mateix corrent en B. El problema és no lineal perquè $\nabla \phi_A$ i $\nabla \phi_B$ són funcions de $\sigma(x, y)$, però en el cas que es realitzi un petit canvi de conductivitat respecte el medi homogeni, el problema es pot linealitzar. Per aquesta raó no es reconstruïxen imatges d'impedància absoluta sinó imatges dinàmiques. És a dir es realitza una mesura de referència, corresponent a un medi homogeni, i es visualitzen els canvis d'impedància que s'hagin produït (Kotre, 1996b).

Si es realitza un petit canvi de conductivitat: $\Delta\sigma(x, y)$, apareixerà un increment de tensió, donat per l'expressió

$$\Delta V_{AB} = - \int_S \Delta \sigma(x,y) \nabla \phi_A \nabla \phi_B dS \quad (5.30)$$

on $\nabla \phi_A$ i $\nabla \phi_B$ representen ser els camps elèctrics a cada punt de l'interior de l'objecte abans d'aparèixer el canvi de conductivitat.

Si la distribució de conductivitat $\sigma(x,y)$ es discretitza en píxels tindrem

$$V_{AB} = \sum_i \sigma_i \int_{\text{pixel } i} \nabla \phi_A \nabla \phi_B dS \quad (5.31)$$

on es realitza la integració sobre l'àrea de cada pixel. Per

petits canvis de conductivitat es pot escriure

$$\Delta V_{AB} = - \sum_i \Delta \sigma_i \int_{\text{pixel } i} \nabla \phi_A \nabla \phi_B dS \quad (5.32)$$

El subíndex (AB) no és necessari ja que cada injecció detecció és única i per tant es pot associar a una sola lletra (j)

L'equació (5.31) es pot escriure com

$$V_j = - \sum_i S_{ji} \sigma_i \quad (5.33)$$

on S_{ji} són els coeficients de sensibilitat del pixel i , respecte la mesura j , definits per Geselowitz (1971), que responen a la següent expressió

$$S_{ji} = - \int_{\text{pixel } i} \nabla \phi_A \nabla \phi_B dS \quad (5.34)$$

L'equació (5.33) es pot escriure de forma matricial com

$$V = S \sigma \quad (5.35)$$

S és la matriu de sensibilitat d'ordre ($M \times P$), σ és el vector de conductivitats (paràmetres del model), d'ordre $P \times 1$ i V és el vector de tensions (mesures o observacions) d'ordre $M \times 1$.

Seguint aquest mateix procés la solució del problema invers que apareix a l'equació (5.10) es pot resoldre a partir de la inversió de S , tal i com es mostra a continuació

$$\Delta \sigma = S^{-1} \Delta V \quad (5.36)$$

A partir del teorema de sensibilitat de Geselowitz (1971) s'ha pogut formular una relació lineal entre el canvi de conductivitat i el canvi de la distribució de potencial al voltant de l'objecte. A partir d'aquesta aproximació no cal utilitzar mètodes iteratius per realitzar la reconstrucció, amb la qual cosa es disminueix el temps de computació considerablement. Exemples d'algorismes d'un pas (*one-step*) els podem trobar en els treballs de Powell (1987), Barber (1990), Kotre (1993), Avis and Barber (1994), Kolehmanen et al. (1997).

5.3.1. Càlcul dels coeficients de sensibilitat

Per calcular els coeficients de sensibilitat s'ha de conèixer el potencial a cada punt en què s'ha discretitzat la zona que es vol reconstruir (de forma bidimensional o tridimensional).

Es parteix d'un semiespai infinit de resistivitat homogènia ρ . En aquest cas, el potencial generat per una parella (m) d'elèctrodes / i -/ en un punt P (figura 5.3), ve donat per

$$V_p = \frac{I \rho}{2 \pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (5.37)$$

on $a = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ i $b = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_d)^2}$, són

les distàncies de cada elèctrode al punt d'interès (x, y, z) . (x_i, y_i, z_i) són les coordenades de l'elèctrode injector de corrent i (x_d, y_d, z_d) són les coordenades de l'elèctrode drenador de corrent.

Derivant l'expressió (5.37) respecte cada cordenada cartesiana s'obté el camp elèctric generat per la parella d'elèctrodes (m)

$$E_m = -\nabla \phi_m = -(E_{ix}, E_{iy}, E_{iz}) \quad (5.38)$$

Les expressions dels components del camp elèctric corresponent a la parella electròica m són:

$$E_{ix} = -\frac{\partial V_p}{\partial x} = k \left[\frac{x - x_i}{w_i} - \frac{x - x_d}{w_d} \right] \quad (5.39)$$

$$E_{iy} = -\frac{\partial V_p}{\partial y} = k \left[\frac{y - y_i}{w_i} - \frac{y - y_d}{w_d} \right]$$

$$E_{iz} = -\frac{\partial V_p}{\partial z} = k \left[\frac{z - z_i}{w_i} - \frac{z - z_d}{w_d} \right]$$

$$\text{on } w_i = \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right)^{3/2}, \quad w_d = \left((x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_d)^2 \right)^{3/2}$$

$$\text{i } k = \frac{I \rho}{2 \pi}$$

De forma similar es calcula el gradient de potencial per la segona parella electròdica (n), $\nabla \phi_n$.

Els coeficients de sensibilitat associats a cada pixel es calculen a partir del producte escalar dels dos gradients de potencial i multiplicat per la seva àrea o volum, segons fem una reconstrucció 2D o 3D. Per tant, una aproximació del coeficient de sensibilitat associat al pixel i , corresponent a la mesura j és (Noel and Xu, 1991)

$$S_{ji} = \nabla \phi_m \cdot \nabla \phi_n A_i \quad (5.40)$$

L'anterior expressió és una aproximació 2D del coeficient de sensibilitat, de la mesura j , corresponent al pixel i , on s'ha suposat que el valor del coeficient de sensibilitat és constant en tot el volum de l'element (x,y,z) . Una mesura més exacta del seu valor s'obté a partir de la integració del producte escalar dels dos camps elèctrics en cada pixel. En els algorismes dissenyats, però, hem aplicat l'aproximació (5.40) i en les reconstruccions tridimensionals, en lloc de multiplicar per l'area del pixel hem multiplicat pel seu volum.

A partir dels coeficients de sensibilitat, calculats en un medi homogeni, es genera la matriu S , que els conté. El seu ordre és $M \times P$, on M és el número de mesures i P el número de pixels (paràmetres del model) en què s'ha discretitzat el subsòl.

5.3.2 Models analítics

Per investigar les propietats dels algorismes de reconstrucció d'imatges i independitzar-los del procés de mesura (i dels seus errors inherents), s'ha implementat una sèrie de models analítics del problema directe, l'estudi teòric dels qual és descrit en el Capítol 3.

La simulació d'aquests models està destinada a la detecció d'objectes esfèrics i cilíndrics soterrats en el subsòl i també ens permeten observar l'efecte que crea una corona cilíndrica o esfèrica de diferent conductivitat, la qual simula l'efecte d'una possible fuga. Els avantatges d'aquests models analítics són: permeten realitzar qualsevol configuració electròdica, es pot variar amb facilitat la profunditat i grandària dels objectes soterrats, així com el seu contrast amb el medi que els envolta, i permeten simular fuites cilíndriques i esfèriques concèntriques.

Tot i que les fórmules analítiques són aproximades i són més exactes com més allunyat estigui l'objecte de la superfície del terreny, els seus resultats són molt

útils per comprovar la fidelitat dels algorismes. A més a més, el temps de càlcul no és gaire elevat, sobretot en el cas de les anomalies esfèriques. A partir dels algorismes de simulació disposem d'un conjunt de dades analítiques (tensions), corresponents a diferents configuracions electròdiques per poder introduir als algorismes de reconstrucció dissenyats i es poden estudiar diferents aspectes que poden influir en les imatges reconstruïdes, com poden ser: els posicionament dels elèctrodes, el soroll en les mesures, la resolució de l'algorisme, etc.

La figura 5.5 representa una secció transversal (2D) i vertical del sòl, on hi apareixen 16 elèctrodes de mesura a la seva superfície i l'anomalia cilíndrica o esfèrica amb la possible corona, que simula una fuga concèntrica. També es pot observar la discretització en pixels de la zona que es vol reconstruir. En aquest cas la resolució és d'un pixel, que coincideix amb la separació interelectròdica.

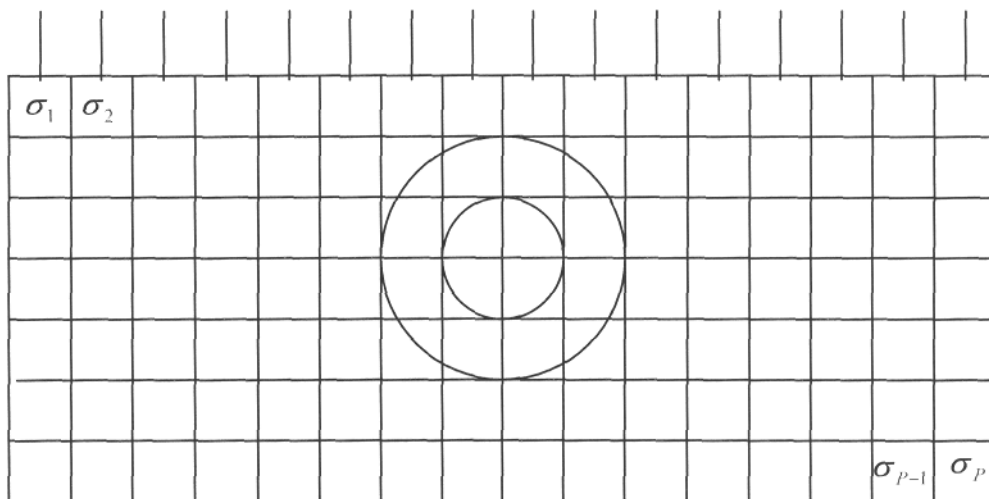


Figura 5.5: Discretització en pixels d'una secció vertical del subsòl.

5.4. Algorismes desenvolupats

Els algorismes estudiats en aquest treball (2D i 3D) es basen en el concepte de la matriu de sensibilitat i en el càlcul dels coeficients de sensibilitat associats. Totes les reconstruccions són dinàmiques, és a dir, es tracta de distribucions de canvis de resistivitat, respecte a una mesura de referència. A més a més són algorismes no iteratius ("*single pass*"), ja que els camps elèctrics que permeten trobar els coeficients de sensibilitat no es recalculen amb la nova distribució de resistivitat reconstruïda.

5.4.1. Inversió Marquardt-Levenberg amb tensions diferència

El canvi en la impedància mútua, ΔZ causat per un canvi de conductivitat $\Delta \sigma$ en una determinada regió d'un volum conductor ve donat per l'expressió (Geselowitz, 1971)

$$\Delta Z = - \Delta \sigma \int_V \nabla \phi_A \cdot \nabla \phi_B dV \quad (5.41)$$

on ϕ_A i ϕ_B són els camps elèctrics associats als ports A i B (figura 5.4). La integració és realitzada a la regió on s'ha produït el canvi de conductivitat.

Es defineix la impedància mútua com el quocient entre la tensió mesurada en un port dividida pel corrent injectat a l'altre port, complint-se el teorema de reciprocitat

$$Z = \frac{V_A}{I_B} = \frac{V_B}{I_A} \quad (5.42)$$

Si suposem corrents unitaris, podem expressar (5.41) de forma matricial

$$\Delta V = S \Delta \sigma \quad (5.43)$$

i per tant la solució del problema invers és

$$\sigma - \sigma_h = S^{-1} (V - V_h) \quad (5.44)$$

El subíndex h es refereix a la mesura del cas homogeni o de referència.

Atesa la geometria del problema, la matriu S és molt mal condicionada, per la qual cosa la seva inversió requerirà d'una determinada regularització. Aplicarem en aquest algorisme la tècnica del *Damping Factor*, de forma que l'algorisme es pot expressar de la forma següent

$$\sigma - \sigma_h = (S^T S + \lambda I)^{-1} S^T (V - V_h) \quad (5.44)$$

A les tensions diferència ($V - V_h$) els correspon un canvi de conductivitat. Aquest canvi de conductivitat dels pixels reconstruïts, respecte el medi homogeni, permetrà detectar una possible anomalia en el subsòl.

5.4.2. Inversió Marquardt-Levenberg amb tensions normalitzades

La matriu S és molt sensible al contorn de l'objecte i a la posició dels elèctrodes. Per evitar aquest efecte, en lloc de treballar amb diferències de tensió i diferències de conductivitat es pot treballar amb tensions normalitzades (V_{nor}) i conductivitats normalitzades σ_{nor} . Les seves expressions són

$$V_{nor} = \frac{V - V_h}{V_h} = \frac{\Delta V}{V_h} \quad (5.46)$$

$$\sigma_{nor} = \frac{\sigma - \sigma_h}{\sigma_h} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_h} = - \frac{\Delta\rho}{\rho_h} \quad (5.47)$$

El subíndex h es refereix al medi homogeni σ_h , respecte el qual es realitzen les mesures de referència V_h .

En aquestes condicions, la matriu S de coeficients de sensibilitat s'ha de normalitzar, donant lloc a la matriu normalitzada S_f . Per tant, el problema invers es pot escriure com

$$S_f \sigma_{nor} = V_{nor} \quad (5.48)$$

La matriu S_f (Barber and Brown, 1990) es calcula com

$$S_f = G^{-1} S \quad (5.49)$$

on G és una matriu diagonal, els elements de la qual s'han obtingut sumant els valors de cada fila de S . El seu ordre és $M \times M$,

A partir de la inversió de S_f obtindrem els paràmetres del model (distribució de conductivitats normalitzades).

$$\sigma_{nor} = S_f^{-1} V_{nor} \quad (5.50)$$

La matriu S_f també és mal condicionada, però és menys sensible a canvis de la posició dels elèctrodes i a la forma de l'objecte. La dimensió de S_f és $M \times P$, sent M el número de mesures i P el número de pixels (paràmetres del model) per reconstruir. σ_{nor} és un vector columna de dimensió $P \times 1$ que conté el valor dels pixels. V_{nor} és un vector columna que conté les mesures de tensió i és de dimensió $M \times 1$.

La inversió de la nova matriu també es pot realitzar per mitjà de la tècnica Marquardt-Levenberg, de forma que l'algorisme passa a tenir l'expressió següent

$$\frac{\sigma - \sigma_h}{\sigma_h} = (S_f^T S_f + \lambda I)^{-1} S_f^T \begin{pmatrix} V - V_h \\ V_h \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

5.4.3. Retroprojecció ponderada

La implementació d'un algorisme de reconstrucció d'imatges per tomografia d'impedància elèctrica requereix un compromís entre l'especificació de

l'algorisme i l'esforç de computació per executar-lo. L'algorisme que presentem i que està descrit en el treball de Kotre (1996a), té com a característica principal la seva rapidesa en l'obtenció de la imatge reconstruïda, doncs no requereix de cap paràmetre de regularització.

Segons Kotre (1993), les tensions normalitzades corresponents a una injecció (m - n), quan es produeix un canvi en la resistivitat normalitzada, en funció dels coeficients de sensibilitat, prenen la forma següent

$$\left(\frac{V - V_h}{V_h} \right)_{m,n} = \frac{\sum_x \sum_y \sum_z S_{m,n,x,y,z} \left(\frac{\rho - \rho_h}{\rho_h} \right)_{(x,y,z)}}{\sum_x \sum_y \sum_z S_{m,n,x,y,z}} \quad (5.52)$$

Aquesta expressió representa de forma explícita un conjunt d'equacions que relacionen petits canvis de resistivitat (en aquest cas normalitzats), amb els canvis de potencial mesurats a la superfície.

L'algorisme que permet obtenir la resistivitat normalitzada és:

$$P(x, y, z) = \frac{\sum_m \sum_n S_{m,n,x,y,z} \left(\frac{V - V_h}{V_h} \right)_{(m,n)}}{\sum_m \sum_n S_{m,n,x,y,z}} \quad (5.53)$$

Aquest mètode de reconstrucció aproxima la inversa de la matriu de sensibilitat, per la seva transposada, on el valor dels pixels reconstruïts correspon a:

$$P(x, y, z) = \ln(\rho(x, y, z)) - \ln(\rho_h) \quad (5.54)$$

ρ_h és la resistivitat de referència (medi homogeni) i $\rho(x, y, z)$ és la distribució de resistivitat, que difereix en petites pertorbacions respecte el cas uniforme (Kotre, 1996a).

Aquestes suposicions no es compleixen amb els objectes utilitzats en les mesures experimentals (Capítols 8 i 9), doncs tenen un contrast extrem amb el medi que els envolta, però tot i així, l'algorisme permet detectar anomalies de contrast elevat.

Inicialment l'algorisme es va concebre per a la reconstrucció d'imatges de tomografia mèdica, on els elèctrodes es situaven al voltant d'un objecte de secció circular (Kotre, 1994). L'estudi es va ampliar per la seva possible aplicació en el camp de la geologia. Una aplicació interessant de l'algorisme i que hem adaptat a la detecció de fuites en canonades soterrades és la reconstrucció de seccions horitzontals paral·leles a la superfície del terreny (Kotre, 1996a). El gran avantatge del mètode és la rapidesa en la reconstrucció

d'imatges 3D, on el número de píxels és considerable, sent molt més ràpid que altres mètodes de reconstrucció basats en paràmetres de regularització, que requereixen de la inversió de la matriu de sensibilitat.

La reconstrucció per mitjà d'aquest algorisme dona lloc a imatges borroses (*blurred*), les quals es poden restaurar per mitjà d'un filtratge freqüencial espacial, a partir de l'estudi de la *point-spread-function* (PSF) de l'algorisme.

La *point spread function* és la resposta impulsional de l'algorisme de reconstrucció. Ens proporciona informació de la resposta conjunta algorisme-configuració electròdica per obtenir imatges d'impedància elèctrica.

És interessant conèixer la PSF de l'algorisme, per tal d'invertir-la i aplicar-la a la imatge que es vol restaurar, en forma de filtre freqüencial espacial. Kotre (1996a), utilitza el filtre de Wiener per realitzar el filtratge, el qual disposa d'un paràmetre x , que permet optimitzar la restauració de la imatge de forma flexible. Aquest grau de llibertat actua com a paràmetre de regularització i controla la freqüència de tall del filtre.

Aquest algorisme és equivalent a la formulació de l'operador matricial de mínims quadrats de l'algorisme de retroprojecció filtrada que s'aplica en la tomografia computeritzada de raigs x (Older and Johns, 1993). Kotre (1996c) ha aplicat aquests algorisme per visualitzar regions del tòrax del cos humà mitjançant l'ús d'agrupacions electròdiques quadrades de 8×8 elèctrodes.

Capítol 6

RESULTATS ANALÍTICS I EXPERIMENTALS DEL PROBLEMA DIRECTE

En aquest capítol s'obté la profunditat i el radi d'anomalies esfèriques i cilíndriques a partir de la configuració Schlumberger suposant que les anomalies es troben sota la influència d'un camp elèctric uniforme. La utilització de mesures comparatives demostra uns resultats força acceptables en la determinació del radi de la corona més externa corresponent a dues esferes concèntriques i dos cilindres concèntrics, la qual pot ser intepretada com una fuga provinent d'un dipòsit o una canonada soterrats. S'estudia l'efecte del número d'elèctrodes i la relació entre la longitud de l'agrupació electròdica i la profunditat de l'anomalia en l'exactitud dels resultats. Es comparen els resultats analítics i experimentals de laboratori.

6.1. Resultats analítics

En aquest apartat s'exposaran els resultats dels algorismes que s'han dissenyat per solucionar el problema directe d'una esfera i un cilindre soterrats en un semiespai infinit homogeni, corresponents a la configuració Schlumberger. També es considera la possibilitat que al voltant de l'esfera i el cilindre hi hagi una corona concèntrica, que simula l'efecte d'una possible fuga.

Les expressions teòriques en què s'han basat els algorismes dissenyats són les descrites en el Capítol 3. Les solucions analítiques permetran preveure i justificar els resultats que s'obtindran amb les mesures de laboratori i de camp i determinar la validesa de la instrumentació dissenyada.

Les dades sintètiques obtingudes a partir d'aquests algorismes permetran reproduir les condicions de laboratori on es submergiran objectes esfèrics i cilíndrics en una cubeta plena d'aigua. Analíticament, doncs, es poden obtenir dades d'un forma ràpida i flexible, com si es fessin proves en el laboratori, però exemptes d'errors.

Ens centrarem en la configuració Schlumberger, que és de les més usades (Koefoed, 1989). Com ja s'ha dit en el Capítol 3, aquesta configuració permet obtenir la profunditat i el radi de les anomalies d'una forma senzilla, així com el radi de la possible fuga concèntrica (Jordana i Pallàs-Areny, 1998).

6.1.1. Estudi de la resistivitat aparent corresponent a la configuració Schlumberger

La figura 6.1a mostra l'evolució de la resistivitat aparent normalitzada $Q(x)$, corresponent a una esfera aïllant de 2 cm de radi, soterrada a 4 cm en funció del quocient L/h , on L és la longitud de l'agrupació electròdica i h és la profunditat de l'anomalia. Es pot observar que a mesura que L/h , augmenta, les corbes s'assemblen cada cop més entre elles i tendeixen a aproximar-se a la corba ideal, la qual s'obté quan els elèctrodes injectors de corrent estan separats una distància infinita (figura 6.1c).

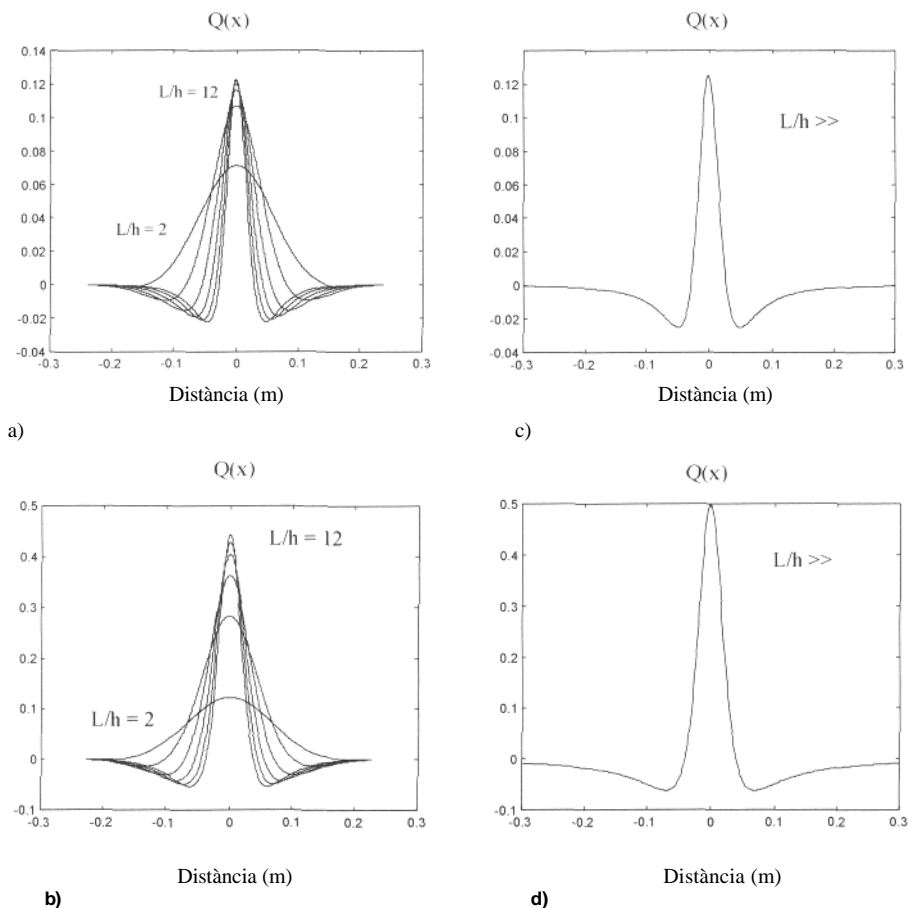


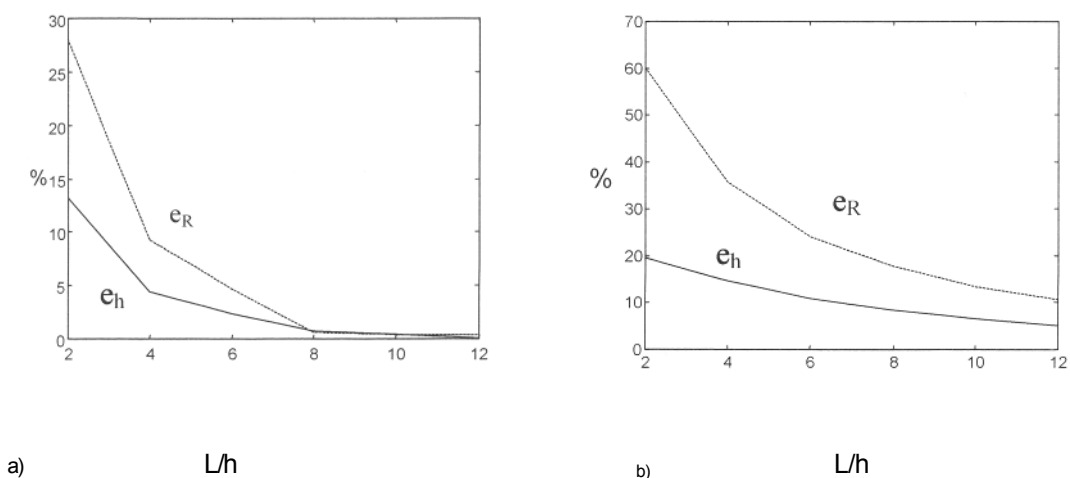
Figura 6.1: Comportament de la resistivitat aparent normalitzada per anomalies aïllants esfèriques i cilíndriques de 2 cm de radi, situades a una profunditat de 4 cm. a) Esfera per diferents valors de L/h de 2 a 12 en increments de 2. b) Cilindre per diferents valors de L/h de 2 a 12 en increments de 2. c) Esfera en condicions de camp elèctric uniforme, d) Cilindre en condicions de camp elèctric uniforme.

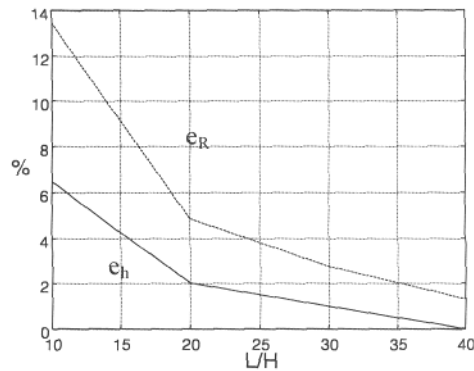
En la figura 6.1b s'observa com evoluciona la $Q(x)$ per un cilindre aïllant de longitud infinita i radi 2 cm i soterrat a una profunditat de 4 cm, en funció de L/h . L'evolució de la resistivitat aparent normalitzada és similar al cas de l'esfera. A mesura que el cilindre tendeix a estar sotmès a la influència d'un camp elèctric uniforme, les diferents corbes s'acosten cada cop més a la ideal (figura 6.1 d). Cal dir però que en el cas del cilindre la relació L/h ha de ser bastant més gran que en el cas de l'esfera per tal de garantir les condicions de camp elèctric uniforme, tal i com es dedueix a la figura 6.2b, on s'observa que els errors en la determinació de R i h corresponent a un cilindre són molt superiors, que en l'esfera.

Les figures 6.2c i 6.2d mostren la millora en l'obtenció de R i h , pel cas d'una anomalia cilíndrica, quan s'incrementa la relació L/h .

En el capítol 3 apareixen els punts característics de $Q(x)$, que ens permeten obtenir la profunditat i la grandària (radi) de les anomalies. En el cas ideal ($L/h = \infty$), l'obtenció d'aquests dos paràmetres seria exacta, però a la realitat no és possible situar els elèctrodes injectors de corrent separats una distància infinita. L'error que es cometrà en l'obtenció de R i h disminuirà a mesura que augmenti la relació L/h , sempre i quan el número de punts on es calculi la $Q(x)$ sigui suficient.

La figura 6.2 mostra l'evolució de l'error relatiu en R i h corresponent a l'esfera i al cilindre de la figura 6.1, on s'han calculat el seu radi i la seva profunditat a partir del màxim absolut i pas per zero de $Q(x)$, en funció de la relació L/h . En el cas d'una esfera s'observa com els errors en R i h són inferiors al 2% a partir de $L/h = 10$. En el cas del cilindre això succeeix a partir de $L/h = 40$. Si s'hagués utilitzat qualsevol altra combinació dels punts característics de $Q(x)$, els errors serien superiors, doncs els punts més propers a la vertical de l'anomalia veuen abans l'efecte de camp uniforme, a l'estar més allunyats dels elèctrodes injectors de corrent (Llamazares, 1999).



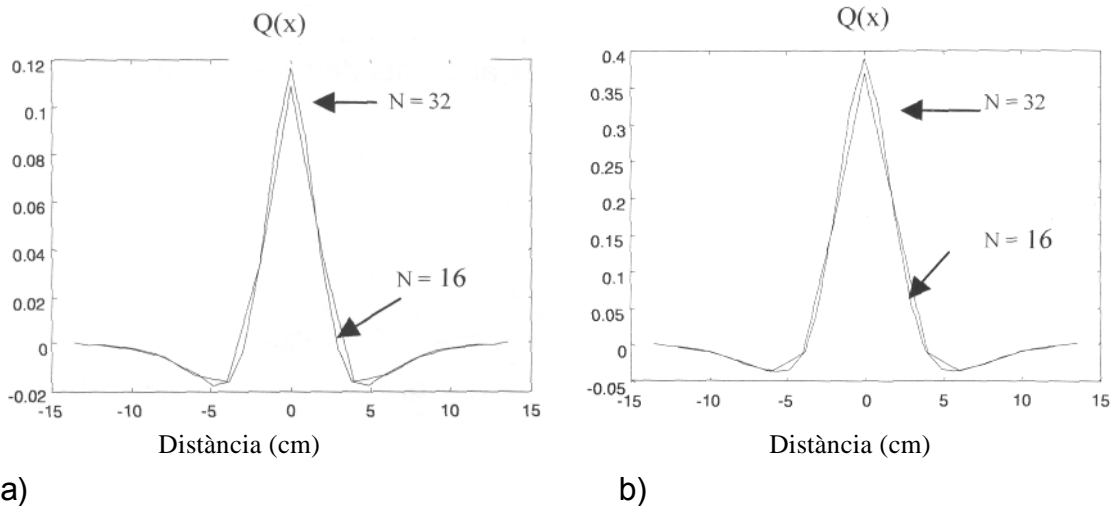


c)

Figura 6.2: Errors relatius en l'obtenció de la profunditat (h) i de la grandària R , en funció de L/h . a) Esfera aïllant de radi 2 cm soterrada 4 cm. b) i c) Cilindre aïllant de radi 2 cm, soterrat 4 cm.

Per tal de poder mesurar el camp elèctric a la superfície del terreny cal que els elèctrodes de potencial estiguin separats una distància infinitesimal, la qual cosa no és possible a la realitat, doncs els elèctrodes de potencial estan separats una distància d , no nul·la.

Així per exemple, en el laboratori disposem d'una cubeta plena d'aigua, on l'agrupació electròdica consta de 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm (apartat 8.1.1). En aquestes condicions, la resistivitat aparent normalitzada que caldria esperar, pels exemples de l'esfera i el cilindre de la figura 6.1, és la que es mostra a la figura 6.3, on també s'ha representat l'hipotètic cas de disposar de 32 elèctrodes equiespaiats.



a)

b)

Figura 6.3: Efecte del nombre d'elèctrodes en la determinació de $Q(x)$. a) Esfera aïllant ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm, $L = 30$ cm), b) Cilindre aïllant ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm, $L = 30$ cm).

Si en lloc de disposar de 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm, en disposéssim de 32, equiespaiats aproximadament 1 cm, es pot veure com augmenta la visibilitat

Q_0 i es redueix l'amplada de $Q(x)$, de forma que es disminuiria l'error en la determinació de R i h (sempre i quan estiguem en condicions de camp elèctric uniforme). D'aquestes corbes es dedueix que per mitjà de l'increment del número d'elèctrodes, sota la imposició que L/h sigui gran, les corbes de la figura 6.3 tendrien a les corbes ideals (figures 6.1c i 6.1 d).

Incrementar el número d'elèctrodes suposa encarir el hardware de control del sistema de commutació, que ha de permetre la realització de qualsevol configuració electròdica (Capítol 4). Una alternativa per millorar la resolució de l'agrupació seria utilitzar únicament 16 elèctrodes equiespaiats 1 cm. D'aquesta manera, però, la longitud de l'agrupació electròdica es redueix a la meitat, amb la qual cosa apareix la possibilitat que no es compleixin les condicions de camp elèctric uniforme, que poden afectar a l'obtenció de R i h . La figura 6.4 compara el fet d'utilitzar 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm i equiespaiats 1 cm, en la detecció d'una esfera aïllant de 2 cm de radi, situada a 4 cm i a 6 cm de profunditat.

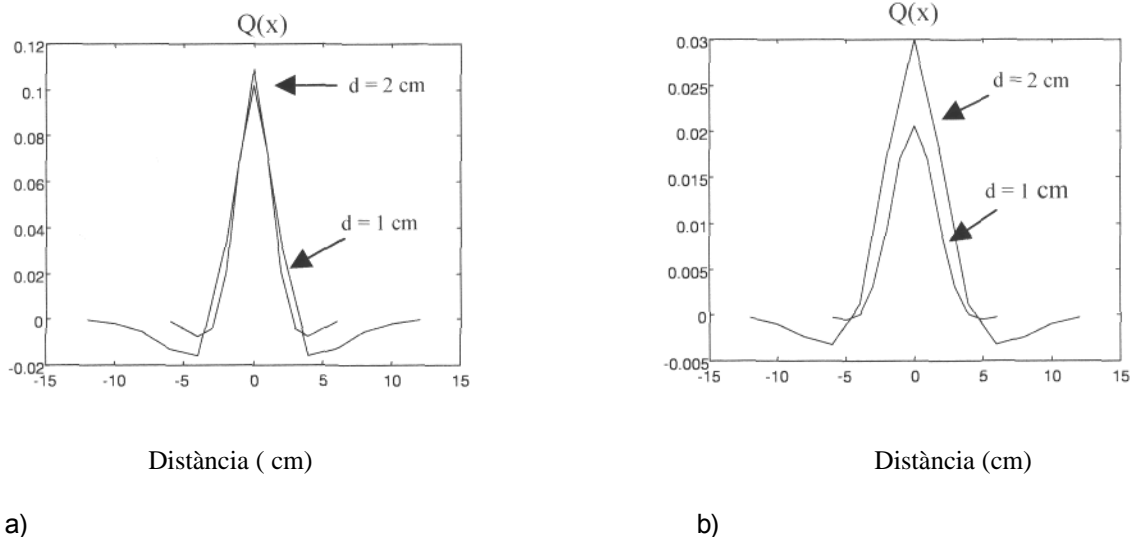


Figura 6.4: Determinació de $Q(x)$ per a una esfera aïllant ($R = 2$ cm) per mitjà de 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm i 1 cm. a) $h = 4$ cm. b) $h = 6$ cm.

La figura 6.4a mostra com la disminució de la distància interelectròdica tot i disminuir la longitud de l'agrupació a la meitat, no altera gaire la posició dels punts característics per determinar R i h . A l'incrementar-se la profunditat de l'esfera a 6 cm (figura 6.4b), en canvi, influeix més la disminució de la relació L/h , la qual cosa fa que disminueixi força l'amplitud de $Q(x)$, comparada amb la que s'obté amb els 16 elèctrodes espaiats 2 cm, incrementant-se l'error en la determinació de R i h . Veiem, doncs, que si fixem el número d'elèctrodes existeix un compromís entre la resolució i la longitud de l'agrupació, que vindrà determinada per la grandària i la profunditat a la que es trobi l'anomalia que volem detectar.

6.1.2. Ajust de corbes de resistivitat aparent normalitzada per mitjà del mètode de mínims quadrats

A l'apartat anterior hem introduït una metodologia per determinar la profunditat i la grandària d'una anomalia esfèrica i cilíndrica, aprofitant el fet que quan s'incrementa la relació L/h , les corbes de $Q(x)$ tendeixen a complir les expressions teòriques ideals, que faciliten la determinació de R i h (Schulz, 1985).

Si es disposa de pocs punts experimentals per determinar la $Q(x)$, és necessari realitzar-ne una interpolació, de forma que en funció del mètode emprat, variarà l'error comès en la determinació de R i h .

Una alternativa consisteix en ajustar diferents corbes de resistivitat aparent normalitzada als punts mesurats, de forma que es minimitzi l'error quadràtic. S'imposa la condició que totes les corbes de $Q(x)$ passin pel màxim absolut (anomalia aïllant) o pel mínim absolut (anomalia conductora), doncs són els punts que presenten una millor SNR (Reina, 1997).

L'ajust de corbes teòriques sobre dades experimentals és una tècnica àmpliament extesa. Així per exemple, en un estudi de Mohamed and Mahmoud (1997), s'aplica a la determinació de la profunditat de cilindres horitzontals i esferes, a partir de la tècnica geoelectrica basada en els autopotencials.

Per validar aquesta tècnica, l'aplicarem a dades sintètiques, on els elèctrodes injectors de corrent no es troben separats una distància infinita de l'anomalia. Les expressions teòriques que utilitzarem per fer aquest ajust són les presentades a l'apartat 3.2.2. Aquestes expressions suposen que els elèctrodes injectors de corrent estan separats una distància infinita i a més es té en compte la distància interelectròdica dels elèctrodes detectors de potencial.

La figura 6.5 mostra l'ajust per mínims quadrats de la resistivitat aparent normalitzada corresponent a una esfera aïllant i a un cilindre conductor de 2 cm de radi soterrats 4 cm, per mitjà de l'ús d'una agrupació linial de 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm.

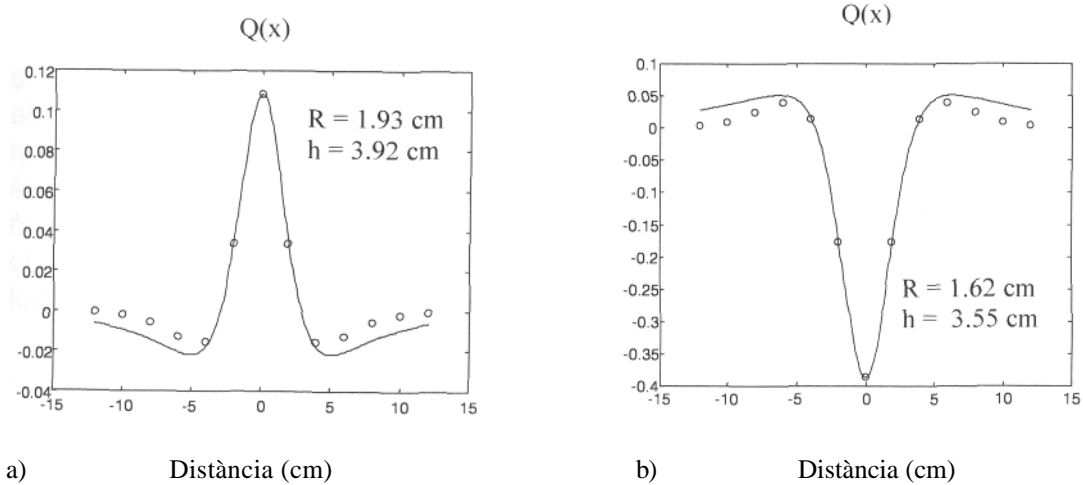


Figura 6.5: Ajust de corbes teòriques $Q(x)$ per mitjà de la tècnica de mínims quadrats a dades sintètiques, a) Esfera aïllant ($R = 2 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, $L = 30 \text{ cm}$), b) Cilindre conductor ($R = 2 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, $L = 30 \text{ cm}$).

Pot observar-se com l'obtenció de R i h és força acurada en el cas de l'esfera, amb un error màxim del 3,5 % en la determinació del radi. En el cas del cilindre, els errors són superiors perquè la relació L/h emprada no correspon a camp elèctric uniforme. Com més s'acostin els punts mesurats a les condicions de camp uniforme, aquests errors seran menors. Així per exemple, la figura 6.6 mostra la $Q(x)$ corresponent a una esfera i a un cilindre de 2 cm de radi, soterrats 4 cm, quan la longitud de l'agrupació lineal s'ha duplicat ($L/h = 15$), i on s'han utilitzat 32 elèctrodes per mantenir l'equiespaiat interelectròdic com en el primer cas (2 cm aproximadament).

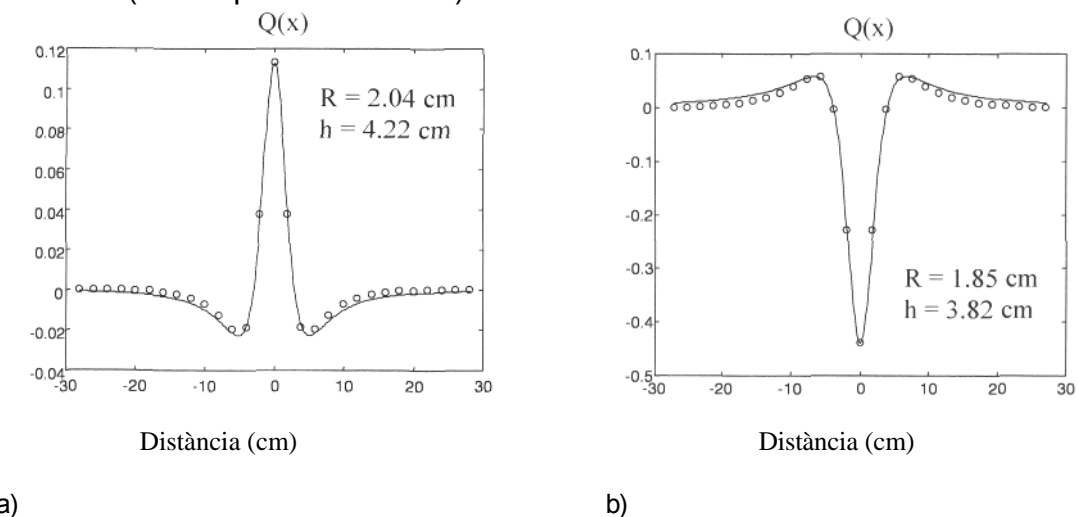


Figura 6.6: Ajust de corbes de resistivitat aparent normalitzada pel mètode dels mínims quadrats. a) Esfera aïllant ($R = 2 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, $L/h = 15$). b) Cilindre conductor ($R = 2 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, $L/h = 15$). Ús de 32 elèctrodes.

Es pot observar com l'ajust per mínims quadrats aproxima força bé els punts del lòbul central de $Q(x)$, que és on l'objecte està sotmès a un camp elèctric més

uniforme. Els altres punts es troben per sobre de la corba teòrica (esfera aïllant) i per sota (cilindre conductor), ja que els elèctrodes injectors no es troben a l'infinit. Pot observar-se com l'increment de la relació L/h ha millorat més la determinació dels paràmetres R i h , en el cas del cilindre que en el cas de l'esfera, doncs en la figura 6.6a, l'esfera ja es trobava en condicions de camp elèctric uniforme. Com més punts es tingui de la part central, millor serà l'aproximació. La figura 6.7 mostra els mateixos resultats que la figura 6.6, però utilitzant 64 elèctrodes en lloc de 32, a l'hora de realitzar les mesures de potencial. Es pot observar que es disposa de més mesures corresponent al lòbul central, la qual cosa millora l'obtenció del radi i de la profunditat.

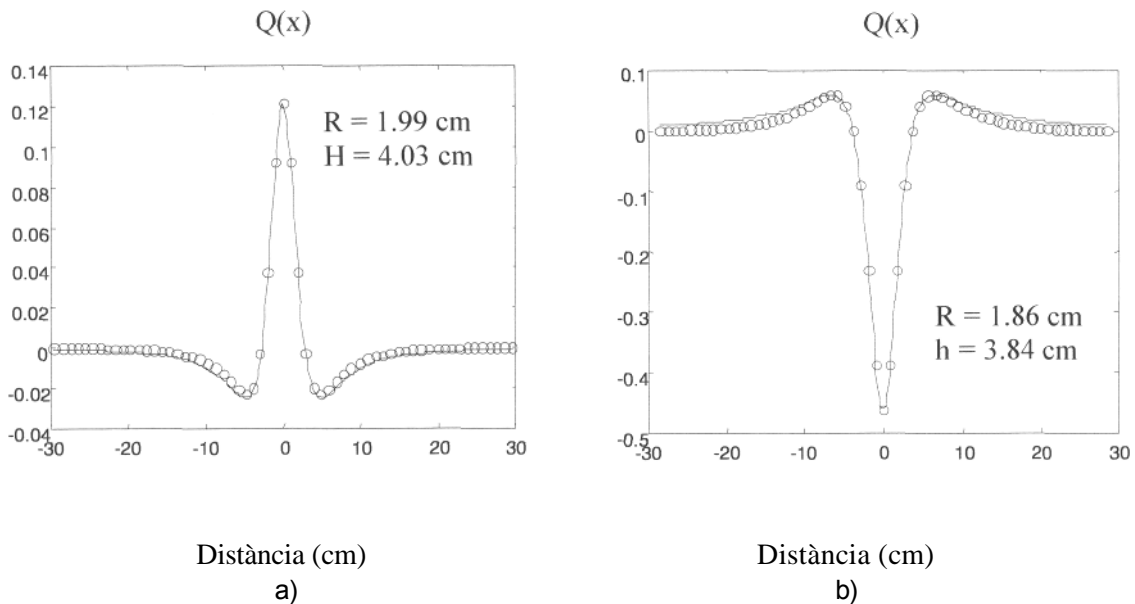


Figura 6.7: L'augment de mesures disponibles, corresponents al lòbul central, millora l'obtenció de la profunditat i del radi de les anomalies, a) Esfera aïllant ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm, $L = 60$ cm), b) Cilindre conductor ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm, $L = 60$ cm).

En el cas del cilindre (figura 6.7b) es pot observar que la millora en l'obtenció del radi i la profunditat, és molt poca. Això és degut a que el cilindre no es troba encara ben bé en condicions de camp elèctric uniforme. La figura 6.8 mostra aquesta millora, on $L/h = 30$ i també s'han utilitzat 64 elèctrodes per fer les mesures.

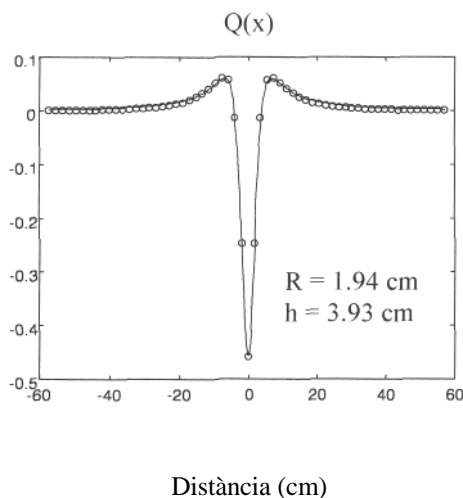


Figura 6.8: Resistivitat aparent normalitzada per a un cilindre conductor ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm) en condicions de gairebé camp elèctric uniforme ($L/h = 30$). S'han utilitzat 64 elèctrodes per realitzar les mesures.

Com a resum podem dir que per tal de determinar R i h de forma acurada, les anomalies han de trobar-se pròximes a les condicions de camp elèctric uniforme i com més mesures es disposi del lòbul central, millor serà l'exactitud de les mateixes quan s'utilitzi la tècnica de l'ajust per mínims quadrats que hem exposat. Si l'anomalia no es troba perfectament en camp elèctric uniforme, pot succeir que amb una determinada distància interelectròdica, pròxima al radi de l'anomalia s'obtinguin bons resultats i en canvi si es disminueix aquesta distància interelectròdica, augmentin els errors en la determinació de R i h , doncs es produeix una compensació entre la variació de l'amplitud del màxim absolut de $Q(x)$ i la variació de la posició dels talls per zero.

6.1.3. Errors en la determinació de la profunditat i el radi d'anomalies esfèriques i cilíndriques

En aquest apartat calcularem els errors que es cometien en la determinació de R i h per anomalies esfèriques i cilíndriques, intentant reproduir les condicions de les mesures fetes al laboratori. La longitud de l'agrupació electròdica és de 30 cm i es disposem de 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm. Compararem els resultats obtinguts a partir de 3 mètodes. El primer mètode consisteix en suposar que les mesures obtingudes corresponen al cas de mesurar camp elèctric. En el segon cas ja es té en compte la distància interelectròdica dels elèctrodes de potencial i en el tercer cas es realitza l'ajust per mínims quadrats dels punts experimentals, per mitjà de corbes teòriques de resistivitat aparent normalitzada.

6.1.3.1. Anomalies esfèriques

La taula 6.1 mostra els resultats pel cas d'una esfera aïllant de 2 cm de radi, on l'agrupació electròdica té una longitud de 30 cm, i on s'ha anat variant la

profunditat de l'anomalia. Les mesures s'han realitzat amb 16 i 32 elèctrodes, i s'ha calculat R i h a partir de les expressions que suposen que s'està mesurant camp elèctric.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	4,47 (3,98)	11,75 (0,5)	2,13 (1,95)	6,50 (2,50)
5	5,17 (4,96)	3,40 (0,80)	1,96 (1,91)	2,00 (4,50)
6	6,02 (5,92)	0,33 (1,33)	1,87 (1,86)	6,50 (7,00)
7	7,08 (6,90)	1,14 (1,43)	1,85 (1,81)	7,50 (9,5)
8	8,02 (7,89)	0,25 (1,38)	1,78 (1,77)	11,00 (11,50)
9	8,91 (8,87)	1,00 (1,44)	1,71 (1,72)	14,5 (14,00)
10	9,96 (9,85)	0,40 (1,50)	1,67 (1,66)	16,50 (17,00)

Taula 6.1: Errors en la determinació de R i h , per una esfera aïllant de 2 cm de radi, en funció de la seva profunditat. S'ha analitzat la visibilitat i els passos per zero de $Q(x)$. Els valors entre parèntesi corresponen a mesures amb 32 elèctrodes i els altres corresponen a mesures amb 16 elèctrodes.

A la taula 6.2 es mostren els resultats equivalents als de la taula 6.1, en els que s'ha tingut en compte la distància interelectròdica a l'hora de calcular els paràmetres de l'anomalia.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	4,29 (3,94)	7,25 (1,50)	2,10 (1,94)	5,00 (3,00)
5	5,02 (4,92)	0,40 (2,00)	1,94 (1,90)	3,00 (5,00)
6	5,88 (5,89)	2,00 (1,83)	1,85 (1,86)	7,50 (7,00)
7	6,97 (6,87)	0,43 (1,86)	1,83 (1,81)	8,50 (9,50)
8	7,92 (7,87)	1,00 (1,63)	1,78 (1,77)	11,00 (11,50)
9	8,82 (8,85)	2,00 (1,67)	1,71 (1,72)	14,50 (14,00)
10	9,88 (9,84)	1,20 (1,60)	1,67 (1,66)	16,50 (17,00)

Taula 6.2: Errors en la determinació de R i h , per una esfera aïllant de 2 cm de radi, en funció de la seva profunditat. S'ha analitzat la visibilitat i els passos per zero de $Q(x)$ i s'ha tingut en compte la distància interelectròdica. Els valors entre parèntesi corresponen a mesures amb 32 elèctrodes i els altres corresponen a mesures amb 16 elèctrodes.

La taula 6.3 mostra els resultats obtinguts per mitjà de l'ajust per mínims quadrats dels punts mesurats a les corbes de resistivitat aparent normalitzada, teòriques. S'ha considerat que els elèctrodes injectors de corrent es troben a l'infinit i s'ha tingut en compte la distància interelectròdica entre els elèctrodes de potencial. Amb 16 elèctrodes es comptabilitzen 5 punts del lòbul central i amb 32 elèctrodes es comptabilitzen 11 punts del lòbul central. Si es tenen en compte els punts allunyats de la zona de camp elèctric uniforme, l'error en la determinació de R i h augmenta.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	3,92 (3,92)	2,00 (2,00)	1,93 (1,93)	3,50 (3,50)
5	4,86 (4,87)	2,80 (2,60)	1,88 (1,88)	6,00 (6,00)
6	5,72 (5,77)	4,67 (3,83)	1,80 (1,82)	10,00 (9,00)
7	6,54 (6,60)	6,57 (5,71)	1,73 (1,74)	13,50 (13,00)
8	7,32 (7,39)	8,50 (7,63)	1,64 (1,66)	18,00 (17,00)
9	8,05 (8,13)	10,56 (9,67)	1,56 (1,58)	22,00 (21,00)
10	8,73 (8,82)	12,70 (12,00)	1,48 (1,49)	26,00 (25,50)

Taula 6.3: : Errors en la determinació de R i h , per una esfera aïllant de 2 cm de radi, en funció de la seva profunditat. S'ha realitzat l'ajust per mínims quadrats de $Q(x)$. Els valors entre parèntesi corresponen a mesures amb 32 elèctrodes i els altres corresponen a mesures amb 16 elèctrodes.

Si comparem els resultats de la taula 6.1, que s'obtenen amb les mesures que utilitzen 16 elèctrodes i les que n'utilitzen 32, podem observar que l'augment del número d'elèctrodes millora considerablement la detecció de R i h , en el cas en que $h = 4$ cm, doncs correspon al cas on la relació L/h és major i s'estan complint millor les condicions de camp uniforme. En els altres casos es veu que els errors en l'obtenció de R i h van creixent a mesura que la profunditat de l'anomalia augmenta, de forma similar, tant per 16 elèctrodes com per 32 elèctrodes.

Els resultats obtesos si es té en compte la distància interelectròdica (taula 6.2), són molt semblants als de la taula 6.1, sobretot a l'incrementar-se la profunditat de l'anomalia, doncs en aquest cas la distància interelectròdica influeix menys en la determinació de R i h .

Si observem la taula 6.3 podem veure que l'ajust per mínims quadrats dona resultats pitjors que els que apareixen a les taules 6.1 i 6.2, sobretot quan la relació L/h disminueix. Amb aquest algorisme, l'augment del número d'elèctrodes millora la detecció de R i h sempre i quan es mostregin forces punts del lòbul central, i a l'hora de fer l'ajust es comptabilitzin únicament aquests punts i no els del voltant, doncs aquests compleixen en menor grau la condició de camp elèctric uniforme. Si tots els punts mesurats complissin les condicions de camp elèctric uniforme, l'ajust per mínims quadrats donaria uns resultats de R i h exactes.

6.1.3.2. Anomalies cilíndriques

En aquests apartat mostrarem els resultats dels algorismes que permeten trobar el radi i la profunditat d'anomalies cilíndriques seguint el mateix procés que s'ha vist en l'apartat 6.1.3.1 pel cas d'anomalies esfèriques.

La taula 6.4 mostra els resultats pel cas d'un cilindre aïllant de 2 cm de radi, on l'agrupació electròdica té una longitud de 1,2 m i on s'ha anat variant la profunditat de l'anomalia. Les mesures s'ha realitzat amb 32 i 64 elèctrodes, i s'ha calculat R i h a partir de les expressions que suposen que s'està mesurant camp elèctric.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	4,53 (4,01)	13,25 (0,25)	2,00 (1,92)	0,02 (4,00)
5	5,71 (4,99)	14,2 (0,20)	2,08 (1,92)	3,90 (4,00)
6	6,51 (5,86)	8,50 (2,33)	2,00 (1,87)	0,40 (6,50)
7	7,15 (6,79)	2,14 (3,00)	1,90 (1,86)	5,00 (7,00)
8	7,83 (7,67)	2,13 (4,13)	1,82 (1,82)	9,00 (9,00)
9	8,71 (8,57)	3,22 (4,78)	1,80 (1,80)	10,00 (10,00)
10	9,65 (9,45)	3,50 (5,55)	1,79 (1,77)	10,50 (10,00)

Taula 6.4: Errors en la determinació de R i h , per una cilindre aïllant de 2 cm de radi, en funció de la seva profunditat. S'ha analitzat la visibilitat i els passos per zero de $Q(x)$. Els valors entre parèntesi corresponen a mesures amb 64 elèctrodes i els altres corresponen a mesures amb 32 elèctrodes.

A la taula 6.5 es mostren els resultats equivalents als de la taula 6.4, en els que s'ha tingut en compte la distància interelectròdica a l'hora de calcular els paràmetres de l'anomalia.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	4,09 (3,90)	2,25 (2,50)	2,00 (1,92)	0,02 (4,00)
5	5,37 (4,91)	7,40 (1,80)	2,08 (1,92)	3,90 (4,00)
6	6,21 (5,79)	3,50 (3,50)	2,00 (1,87)	0,40 (6,50)
7	6,88 (6,72)	1,71 (4,00)	1,90 (1,86)	5,00 (7,00)
8	7,59 (7,62)	5,13 (4,80)	1,82 (1,82)	9,00 (9,00)
9	8,49 (8,52)	5,67 (5,33)	1,80 (1,80)	10,00 (10,00)
10	9,46 (9,40)	5,40 (6,00)	1,79 (1,77)	10,50 (10,00)

Taula 6.5: : Errors en la determinació de R i h , per un cilindre aïllant de 2 cm de radi, en funció de la seva profunditat. S'ha analitzat la visibilitat i els passos per zero de $Q(x)$ i s'ha tingut en compte la distància interelectròdica. Els valors entre parèntesi corresponen a mesures amb 64 elèctrodes i els altres corresponen a mesures amb 32 elèctrodes.

La taula 6.6 mostra els resultats obtinguts per mitjà de l'ajust per mínims quadrats dels punts mesurats a les corbes de resistivitat aparent normalitzada, teòriques. S'ha considerat que els elèctrodes injectors de corrent es troben a l'infinit i s'ha tingut en compte la distància interelectròdica entre els elèctrodes de

potencial. Per realitzar la interpolació s'han tingut en compte únicament els punts pertanyents al lòbul central de la corba de resistivitat aparent normalitzada.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	3,92 (3,94)	2,00 (1,50)	1,93 (1,94)	3,50 (3,00)
5	4,87 (4,91)	2,60 (1,80)	1,90 (1,92)	4,50 (4,00)
6	5,82 (5,86)	3,00 (2,30)	1,89 (1,90)	5,50 (5,00)
7	6,75 (6,81)	3,57 (2,70)	1,86 (1,88)	7,00 (6,00)
8	7,68 (7,76)	4,00 (3,00)	1,84 (1,86)	8,00 (7,00)
9	8,59 (8,69)	4,50 (3,40)	1,82 (1,84)	9,00 (8,00)
10	9,50 (9,61)	5,00 (3,90)	1,79 (1,81)	10,50 (9,50)

Taula 6.6: : Errors en la determinació de R i h , per un cilindre aïllant de 2 cm de radi, en funció de la seva profunditat. S'ha realitzat l'ajust per mínims quadrats de $Q(x)$. Els valors entre parèntesi corresponen a mesures amb 64 elèctrodes i els altres corresponen a mesures amb 32 elèctrodes.

Si comparem els resultats de la figura 6.4 corresponents a les mesures amb 32 elèctrodes i 64 elèctrodes, podem observar que l'augment del número d'elèctrodes millora considerablement la detecció de R i h , en el cas que $h = 4$ cm, doncs correspon a la major realció L/h i per tant s'estan complint millor les condicions de camp elèctric uniforme.

A mesura que la profunditat de l'anomalia augmenta, els resultats obtinguts a la taula 6.5 on es té en compte la distància interelectròdica són semblants als obtinguts en la taula 6.4 on es suposa que es mesura camp elèctric.

Els resultats corresponents a l'ajust pel mètode dels mínims quadrats de corbes teòriques als punts analítics (taula 6.6) empitjoren amb la profunditat i milloren a l'augmentar el número d'elèctrodes.

6.1.4. Determinació del radi d'una corona esfèrica i cilíndrica

Un mètode per detectar el radi d'una corona esfèrica o cilíndrica, consisteix en fer el quocient entre les visibilitats de les resistivitats aparents normalitzades corresponents a l'anomalia amb corona i sense corona, eliminant-se d'aquesta manera els possibles errors multiplicatius en les $Q(x)$ mesurades (Jordana et al, 1998). A més a més, es pot obtenir el radi de la corona amb independència de la distància interelectròdica dels elèctrodes de potencial i de la profunditat de l'anomalia, com ja s'ha descrit en el Capítol 3.

La detecció del radi d'una corona esfèrica es mostra a la figura 6.9. En el cas que l'anomalia es trobi quasibé en presència de camp elèctric uniforme, quants més elèctrodes s'utilitzin en la detecció de la diferència de potencial, millor serà l'obtenció de R i h . Aquest fet es reflecteix al comparar els resultats obtinguts a la figura 6.9a amb els de la figura 6.9b.

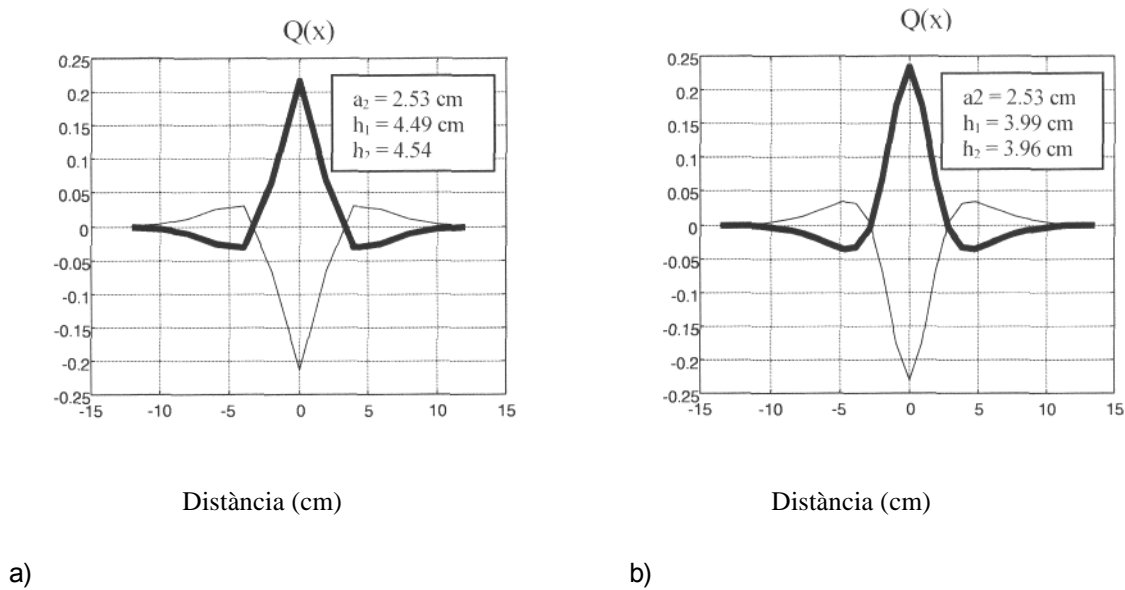


Figura 6.9: Determinació del radi de la corona aïllant externa, corresponent a una esfera conductora ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm), a) Utilització de 16 elèctrodes, b) Utilització de 32 elèctrodes.

Tant amb 16 elèctrodes (figura 6.9a) com amb 32 elèctrodes (figura 6.9b) es detecta el radi de la corona externa (2,5 cm) amb gran precisió (1,2 % d'error), tot i que en el primer cas l'error en la determinació de la profunditat és més gran que en el segon cas. Per tant, les avantatges d'aquest mètode en la determinació de a_2 són que s'eliminen els possibles errors multiplicatius (en mesures experimentals, Capítol 8) en la mesura de la $Q(x)$ de l'esfera i de la mesura de la $Q(x)$ de l'esfera amb corona concèntrica i s'independitza l'obtenció del radi de la corona de l'obtenció de la profunditat de l'anomalia. Així, doncs, a l'utilitzar un mètode comparatiu entre dues mesures, possibles errors en la determinació de h , no afectaran a l'obtenció del radi exterior. A la figura 6.10 es representen uns resultats similars pel cas d'un cilindre conductor envoltat per una capa concèntrica aïllant. És una aproximació a la determinació del radi d'una fuita concèntrica corresponents a una canonada soterrada.

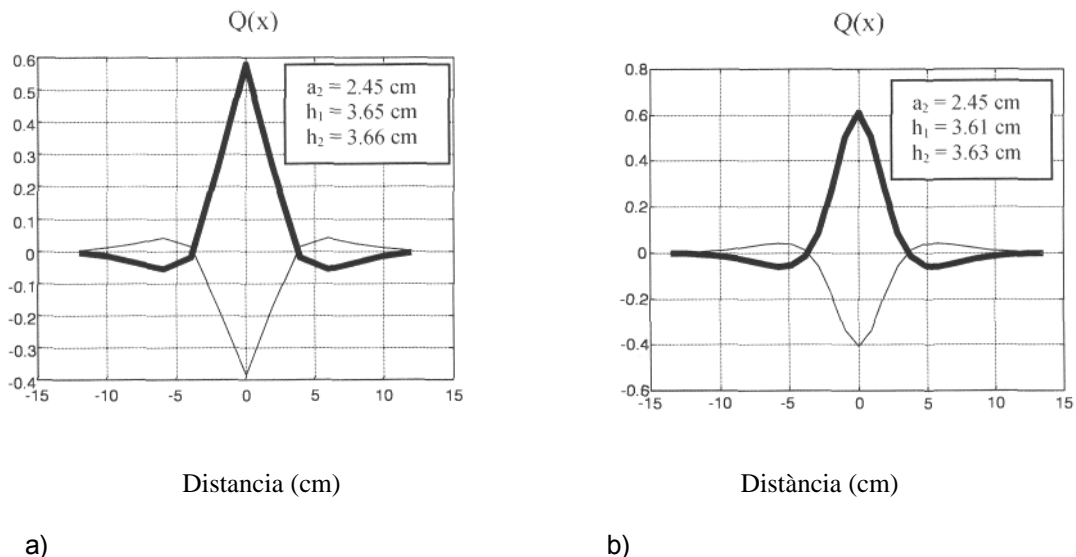


Figura 6.10: Determinació del radi de la corona conductora externa, corresponent a un cilindre conductor ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm), a) Utilització de 16 elèctrodes, b) Utilització de 32 elèctrodes.

En aquest exemple, com que el cilindre no es troba en condicions de camp elèctric uniforme, l'increment d'elèctrodes no millora la detecció de h . Tot i això es detecta el radi de la corona externa amb un error del 2%.

L'increment de la profunditat de l'anomalia incrementa força l'error amb què s'obté el seu radi, tal i com hem pogut comprovar a la taula 6.1. El fet d'utilitzar mesures comparatives per determinar el radi exterior de l'anomalia, disminueix aquest error, tal i com es pot comprovar a la figura 6.11, on únicament s'han realitzat mesures amb 16 elèctrodes, doncs l'anomalia ja es troba allunyada de la superfície (8 cm) i per tant, per una relació $L/h = 3,75$, n'hi ha prou per determinar amb poc error el seu radi exterior.

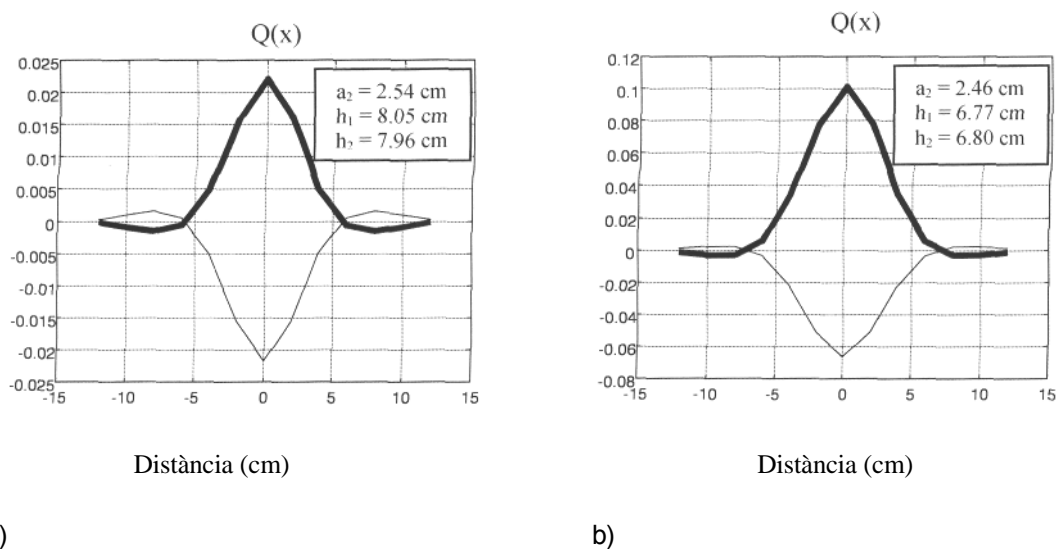


Figura 6.11: Determinació del radi exterior de la corona aïllant, quan l'anomalia es troba a 8 cm de la superfície. S'han utilitzat 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm. a) Esfera, b) Cilindre.

A la vista d'aquests resultats, podem observar que es pot determinar, amb gran exactitud, el radi exterior d'una corona concèntrica per mitjà de la realització d'una mesura prèvia, doncs els errors són comuns a les dues mesures. En aquest cas, l'error principal és el no compliment de les condicions de camp elèctric uniforme en les dues $Q(x)$, però es compensa al fer el quocient de les respectives visibilitats.

6.2. Resultats experimentals

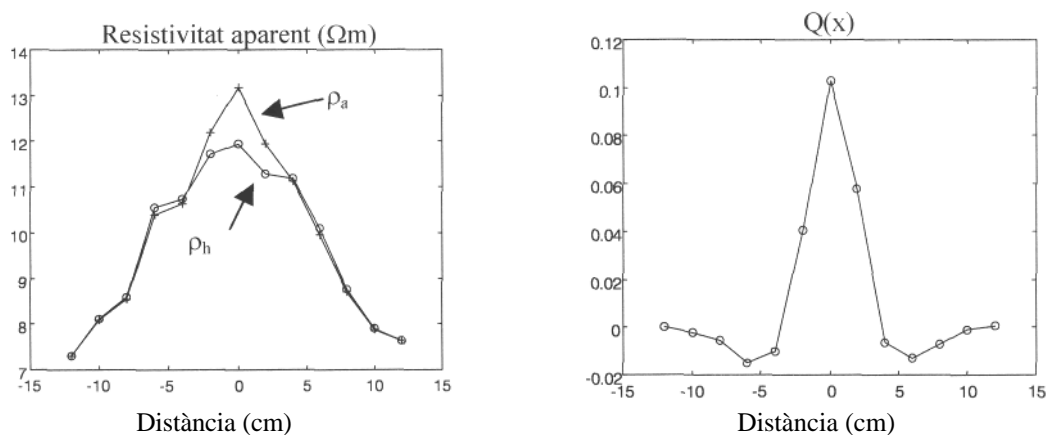
Els resultats experimentals que presentarem a continuació han estat realitzats en el laboratori per mitjà del sistema de mesura PROGEO, els detalls tècnics del qual són explicats en el capítol 4. La freqüència de treball és de 1 kHz, la qual és suficientment elevada per evitar errors en la interpretació de les corbes de resistivitat aparent, corresponents a anomalies conductores en un medi

electrolític, doncs en funció de la freqüència injectada, aquestes es podrien detectar com aïllants (Guptasarma, 1983).

S'han realitzat mesures per mitjà de la configuració Schlumberger, amb 16 elèctrodes equiespaiats 2 cm, sobre anomalies esfèriques i cilíndriques, situades al centre de l'agrupació electròdica.

La cubeta de plàstic, plena d'aigua, en la que s'han submergit els diferents objectes té unes dimensions reduïdes 40 cm x 30 cm x 25 cm, la qual cosa fa que l'experiment s'allunyi de les condicions ideals, en les que s'han desenvolupat els diferents raonaments teòrics, on s'ha suposat que els objectes es troben immersos en un semiespai homogeni i infinit. Tot i això, al treballar amb la resistivitat aparent normalitzada, es poden cancel·lar els possibles errors que introdueix les dimensions finites de la cubeta, de forma que es poden aplicar els resultats teòrics vistos fins ara.

La figura 6.12 mostra la resistivitat aparent mesurada quan la cubeta conté una esfera aïllant de 2 cm de radi submergida a 4 cm de profunditat (ρ_a), i quan es troba sense cap objecte en el seu interior (ρ_h).



a)

b)

Figura 6.12: a) Resistivitats aparents mesurades en presència d'una esfera aïllant ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm) ρ_a , i sense esfera (mesura de referència), ρ_h . b) Resistivitat aparent normalitzada.

Podem observar el caràcter aïllant de la resistivitat aparent ρ_h en ausència d'anomalia, causat per la capa aïllant del fons de la cubeta. Teòricament hauria de ser una línia constant de valor igual al de la resistivitat de l'aigua. La resistivitat aparent en presència de l'anomalia té afegida aquesta pertorbació. Per compensar aquest efecte, utilitzem el paràmetre $Q(x)$ (resistivitat aparent normalitzada), definit en el capítol 3, que en aquest exemple es tradueix en la corba que apareix en la figura 6.12b, la qual ja té força similitud amb les corbes teòriques descrites anteriorment.

Aquesta aproximació serà més exacta com més allunyada es trobi l'anomalia de les parets aïllants de la cubeta.

La figura 6.13, mostra els resultats corresponents a dades sintètiques, on es poden veure les diferències amb els resultats experimentals de la figura 6.12.

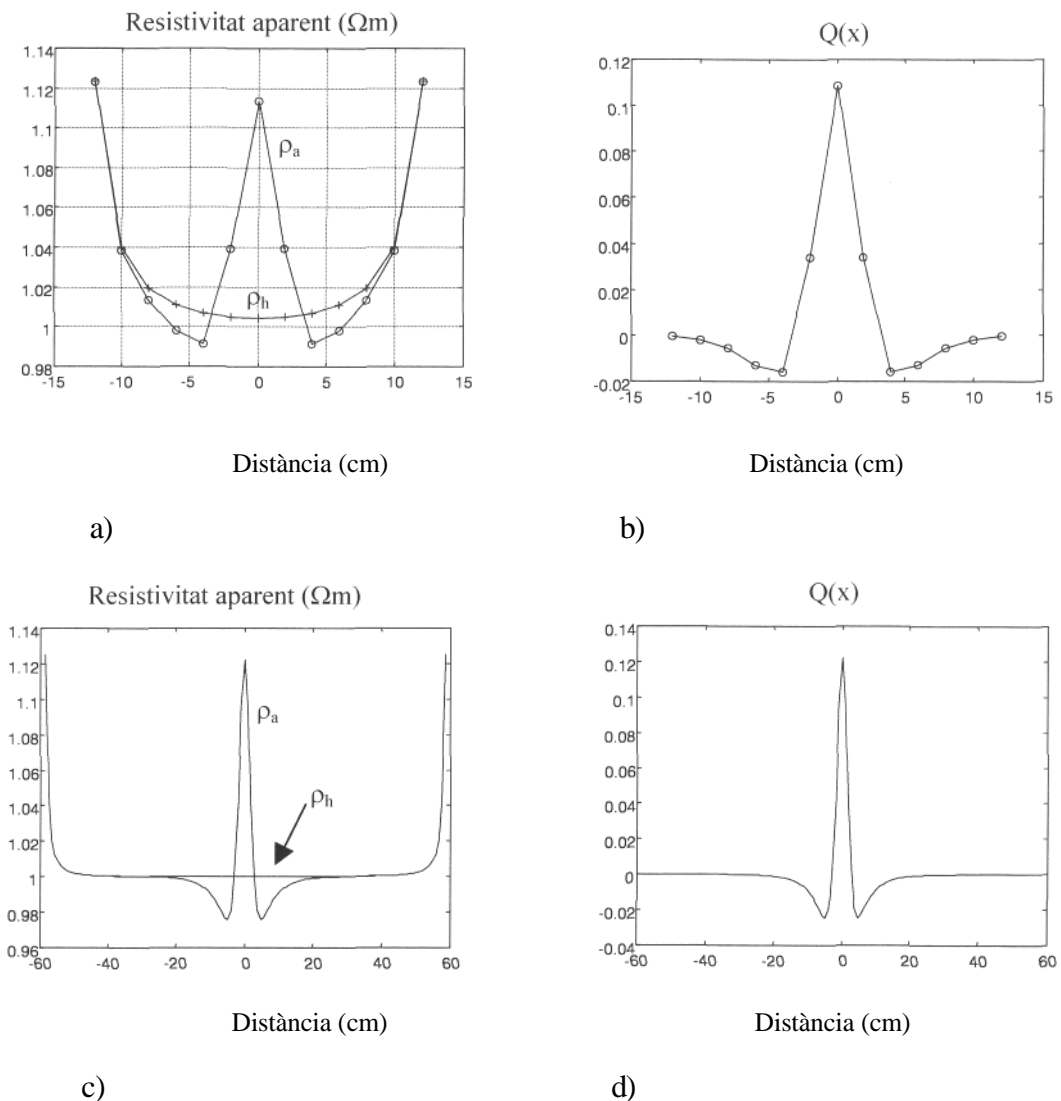


Figura 6.13: a) Resistivitats aparents corresponents al medi homogeni ρ_h i a la presència d'una esfera ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm, $L = 30$ cm i 16 elèctrodes), b) Resistivitat aparent normalitzada, c) Resistivitats aparents mesurades corresponents al medi homogeni i a la presència d'una esfera ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm, $L = 120$ cm i 128 elèctrodes), d) Resistivitat aparent normalitzada.

Es pot observar el pronunciament de la resistivitat aparent a prop dels elèctrodes injectors de corrent, que s'elimina al fer la normalització (figura 6.13b). Com més allunyat es troba l'objecte dels elèctrodes injectors de corrent, millor s'aproxima la corba de resistivitat aparent a la teòrica ideal (figura 6.13c). En aquest cas es pot observar com la resistivitat aparent en ausència d'anomalia és aproximadament igual a la resistivitat del medi homogeni, que en aquest cas és $1 \Omega m$, i no té el caràcter convex de la figura 6.12, ja que no existeix la influència

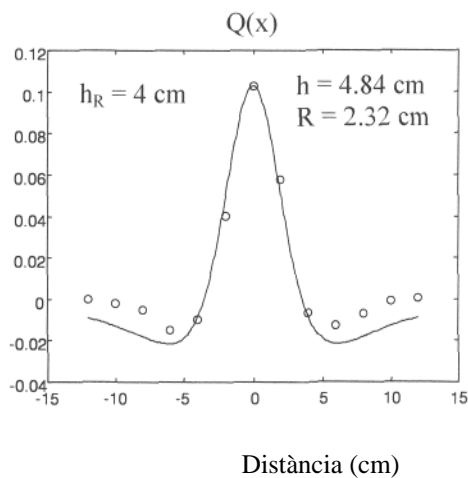
de la capa aïllant del fons de la cubeta, doncs s'està simulant un semiespai homogeni i infinit.

Tot i la gran diferència entre les mesures de laboratori (figura 6.12a) i les analítiques (figura 6.13a), s'obté una gran semblança entre les resistivitats aparents normalitzades (figures 6.12b i 6.13b), la qual cosa permetrà poder aplicar els resultats teòrics del Capítol 3 i els desenvolupats en l'apartat 6.1.

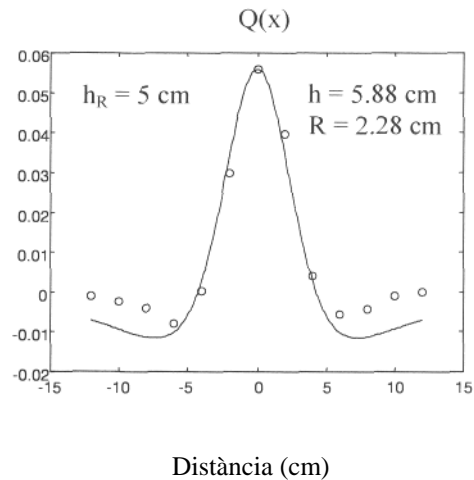
6.2.1. Determinació del radi i profunditat d'una anomalia esfèrica

En aquest apartat hem enfonsat una esfera aïllant de 2 cm de radi a diferents profunditats i per mitjà dels algorismes descrits a l'apartat 6.1.3 obtenim el seu radi i profunditat.

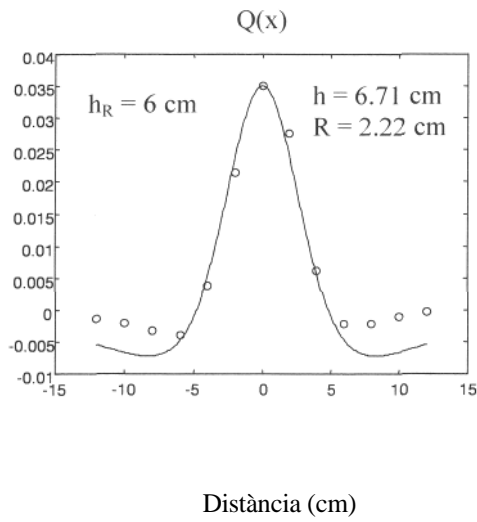
A la figura 6.14 apareixen en cercles els valors experimentals i en línia contínua la corba teòrica que s'ajusta millor pel mètode dels mínims quadrats als 5 punts centrals del lòbul principal, que són els que compleixen millor les condicions de camp elèctric uniforme.



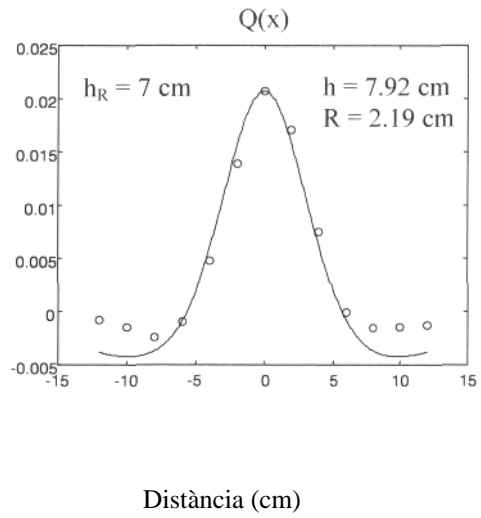
a)



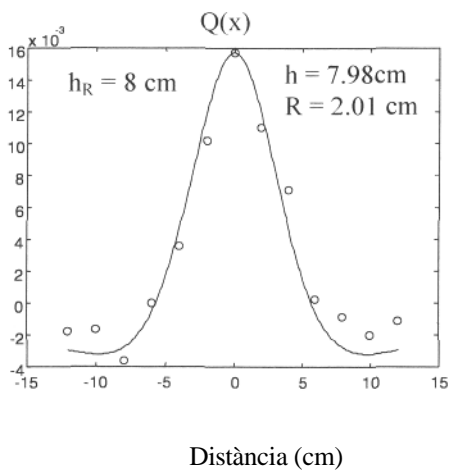
b)



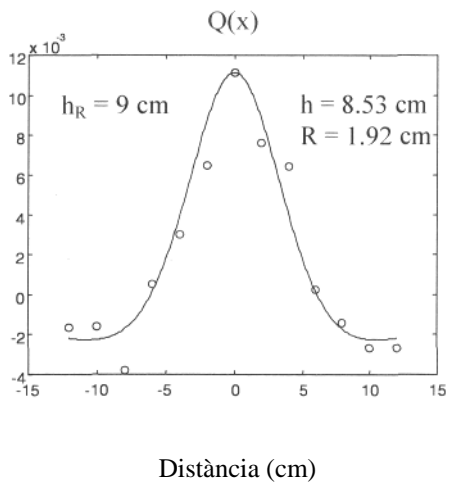
c)



d)



e)



f)

Figura 6.14: Ajust pel mètode dels mínims quadrats de punts experimentals per a una esfera aïllant de 2 cm de radi immersa a diferents profunditats, a) $h = 4$ cm. b) $h = 5$ cm. c) $h = 6$ cm. d) $h = 7$ cm. e) $h = 8$ cm. f) $h = 9$ cm.

La taula 6.7 mostra els resultats obtinguts juntament amb els errors relatius corresponents a R i a h .

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	4,84	21,00	2,32	16,00
5	5,88	17,60	2,28	14,00
6	6,71	11,83	2,22	11,00
7	7,92	13,14	2,19	9,50
8	7,98	0,25	2,01	0,50
9	8,53	5,22	1,92	4,00
10	8,22	17,80	1,65	17,50

Taula 6.7: Errors relatius en la determinació de R i h per mitjà de l'ajust per mínims quadrats per una esfera aïllant de 2 cm de radi.

També hem obtingut la profunditat i el radi de l'anomalia a partir dels punts característics de $Q(x)$, un cop feta la interpolació lineal dels 13 punts. S'han obtingut els paràmetres de l'anomalia, tenint en compte la distància interelectròdica i sense tenir-la en compte. Els resultats apareixen a la taula 6.8.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	5,06 (4,91)	26,50 (22,75)	2,37 (2,35)	18,50 (17,50)
5	5,97 (5,83)	19,40 (16,60)	2,28 (2,27)	14,00 (13,50)
6	6,97 (6,86)	16,17 (14,33)	2,28 (2,27)	14,00 (13,50)
7	8,14 (8,04)	16,29 (14,86)	2,24 (2,23)	12,00 (11,50)
8	8,57 (8,49)	7,13 (6,13)	2,14 (2,14)	7,00 (7,00)
9	8,75 (8,65)	2,78 (3,89)	1,95 (1,94)	2,50 (3,00)
10	8,64 (8,54)	13,60 (14,60)	1,76 (1,76)	12,00 (12,00)

Taula 6.8: Errors relatius en l'obtenció de R i h per a una anomalia esfèrica aïllant ($R = 2$ cm). Entre parèntesi apareixen els resultats en els que s'ha tingut en compte la distància interelectròdica.

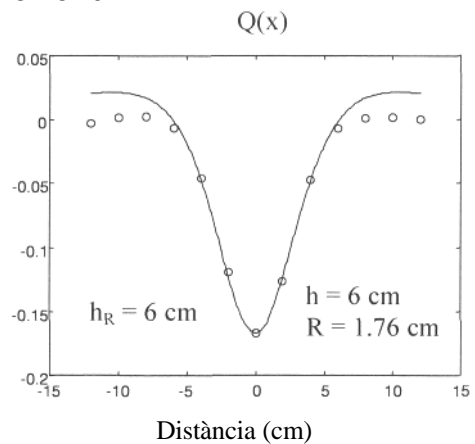
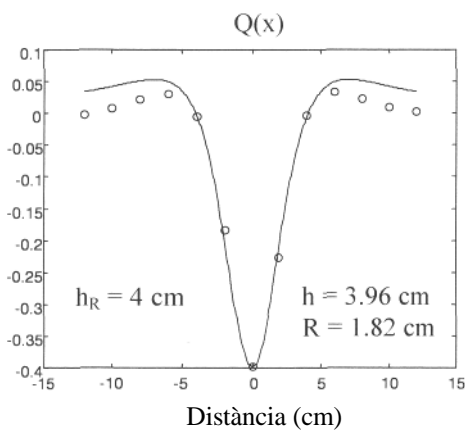
Tot i la senzillesa del mètode, s'obtenen resultats aproximats als reals. Cal dir que per cada mesura disposem únicament de 13 punts i són únicament els 5 centrals del lòbul principal els que hem utilitzat en cada un dels tres mètodes per determinar R i h . Algun error en l'obtenció d'aquests punts afectarà considerablement els resultats. Entre aquests factors que poden influir en la bondat de les mesures es troba l'exactitud en el posicionament dels objectes

dins la cubeta d'aigua, doncs es realitza de forma manual. Errors en el posicionament dels elèctrodes també influeixen a les mesures.

6.2.2. Determinació del radi i profunditat d'una anomalia cilíndrica

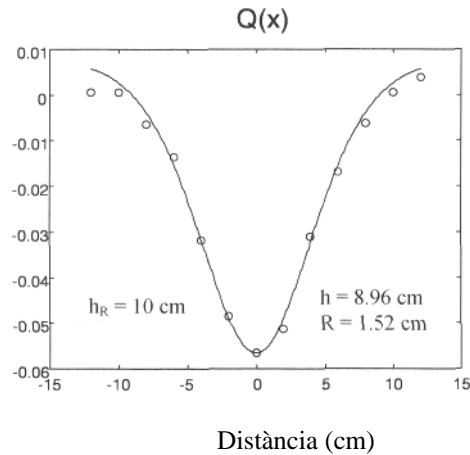
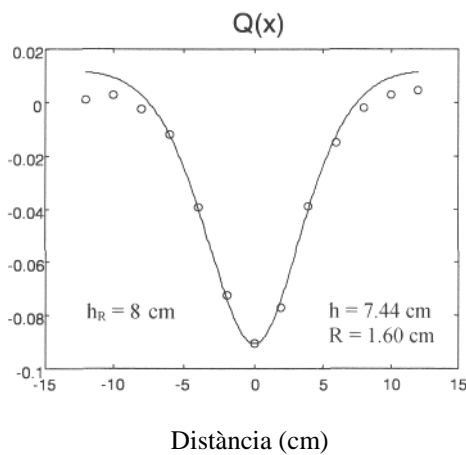
Disposem d'un cilindre d'acer inoxidable de 2 cm de radi i 25 cm de longitud que hem enfonsat a 4 profunditats diferents. Per mitjà de les mateixes tècniques exposades en 6.2.1, hem obtingut el seu radi i la seva profunditat. Hem recobert el cilindre per mitjà d'una coberta de goma aïllant d'1 cm de gruix i hem repetit el procés.

A la figura 6.15 i taula 6.9 apareixen els resultats corresponents al cilindre conductor, de l'ajust per mínims quadrats dels punts experimentals a les corbes $Q(x)$ teòriques. En la figura 6.16 i taula 6.10 apareixen els resultats corresponents al cilindre recobert per la corona aïllant.



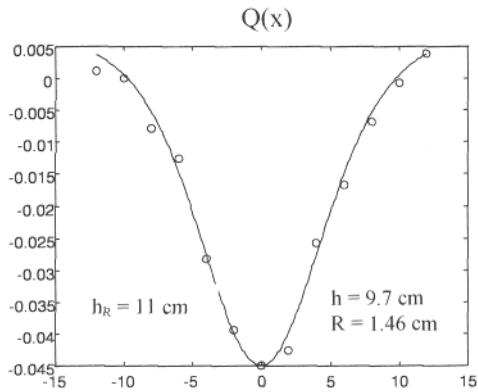
a)

b)



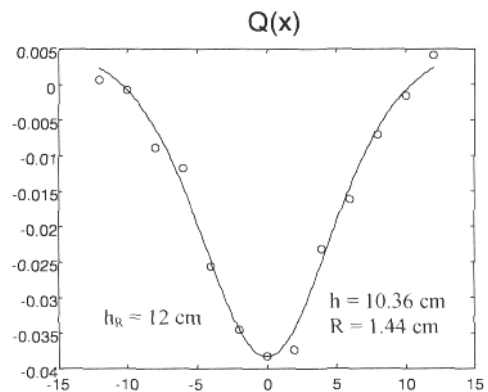
c)

d)



Distància (cm)

e)



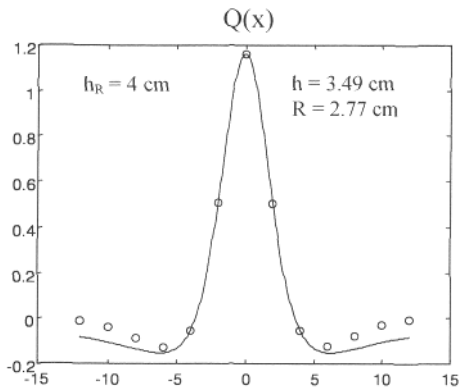
Distància (cm)

f)

Figura 6.15: Ajust pel mètode dels mínims quadrats de punts analítics per a un cilindre conductor de 2 cm de radi, immers a diferents profunditats, a) $h = 4$ cm. b) $h = 6$ cm. c) $h = 8$ cm. d) $h = 10$ cm. e) $h = 11$ cm. f) $h = 12$ cm.

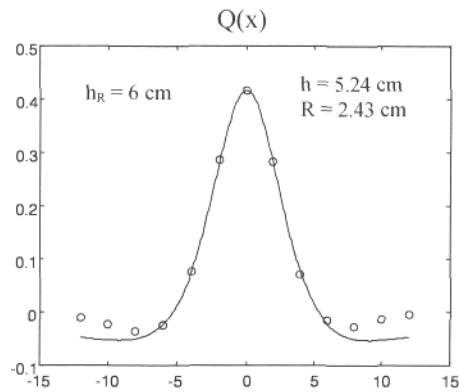
Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	3,96	1,00	1,82	9,00
6	6,00	0,00	1,76	12,00
8	7,44	7,00	1,60	20,00
10	8,96	10,40	1,52	24,00
11	9,70	11,82	1,46	27,00
12	10,36	13,67	1,44	28,00

Taula 6.9: Errors relatius en l'obtenció de R i h per a un cilindre conductor ($R = 2$ cm), on s'ha fet l'ajust per mínims quadrats dels seus punts analítics.



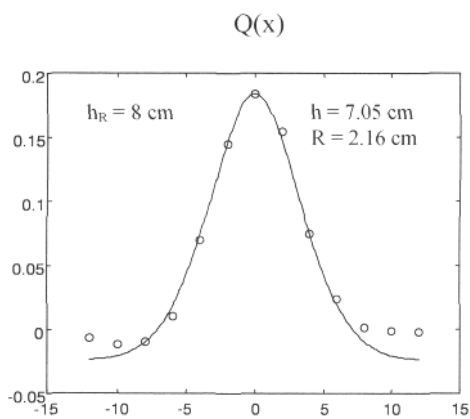
Distància (cm)

a)



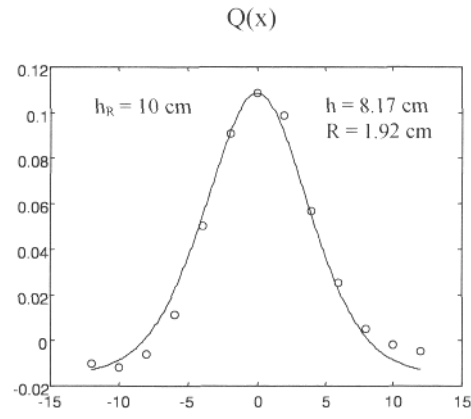
Distància (cm)

b)



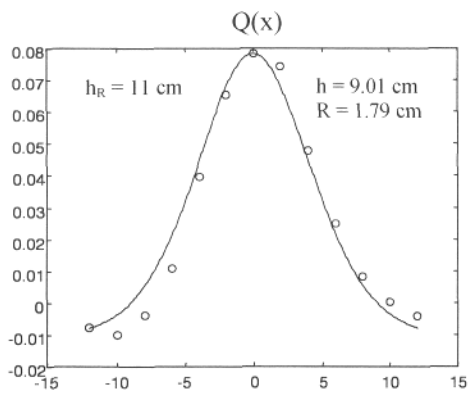
Distància (cm)

c)



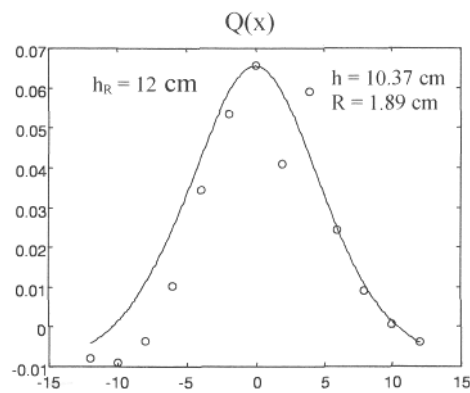
Distància (cm)

d)



Distància (cm)

e)



Distància (cm)

f)

Figura 6.16: Ajust pel mètode dels mínims quadrats de punts analítics per a un cilindre conductor de 2 cm de radi, envoltat per una capa aïllant d'1 cm de gruix, immers a diferents profunditats, a) $h = 4$ cm. b) $h = 6$ cm. c) $h = 8$ cm. d) $h = 10$ cm. e) $h = 11$ cm. f) $h = 12$ cm.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	3,49	12,75	2,77	7,67
6	5,24	12,67	2,43	19,00
8	7,05	11,88	2,16	28,00
10	8,17	18,30	1,92	36,00
11	9,01	18,09	1,79	40,00
12	10,37	13,58	1,89	37,00

Taula 6.10: Errors relatiu en l'obtenció de R i h per a un cilindre conductor ($R = 2$ cm) envoltat per una capa aïllant d'1 cm de gruix, on s'ha fet l'ajust per mínims quadrats dels seus punts analítics.

A la taula 6.11 queden recollits els resultats corresponents a l'obtenció de R i h , utilitzant els punts característics de $Q(x)$ pel cilindre conductor. Pot observar-se com la determinació del radi, dóna el mateix tant si es té en compte la distància interelectròdica som si no es té en compte a l'igual que succeïa amb les dades analítiques.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	4,08 (3,95)	2,00 (1,25)	1,82 (1,82)	9,00
6	7,10 (7,03)	18,33 (17,17)	2,05 (2,05)	2,50
8	8,68 (8,62)	8,50 (7,75)	1,85 (1,85)	7,50
10	9,75 (9,70)	2,50 (3,00)	1,64 (1,64)	18,00
11	10,13 (10,07)	7,91 (8,45)	1,52 (1,52)	24,00
12	10,50 (10,45)	12,50 (12,92)	1,47 (1,47)	26,50

Taula 6.11: : Errors relatiu en l'obtenció de R i h per a un cilindre conductor ($R = 2$ cm), a partir dels punts característics de $Q(x)$. Entre parèntesi apareixen els valors que tenen en compte la distància interelectròdica entre els elèctrodes de potencial ($d = 2$ cm).

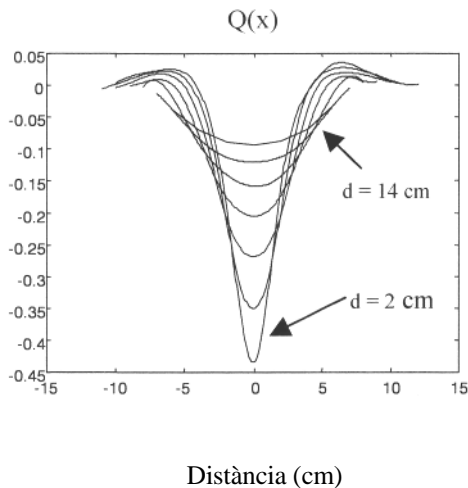
A la taula 6.12 queden recollits els resultats corresponents a l'obtenció de R i h , utilitzant els punts característics de $Q(x)$ pel cilindre conductor amb la capa aïllant.

Profunditat (cm)	h	e_h (%)	R	e_R (%)
4	3,70 (3,57)	7,50 (10,75)	2,82 (2,82)	7,67
6	5,36 (5,27)	10,67 (12,17)	2,45 (2,45)	18,33
8	7,43 (7,36)	7,13 (8,00)	2,25 (2,25)	25,00
10	8,12 (8,06)	18,80 (19,40)	1,90 (1,90)	36,67
11	8,71 (8,66)	20,82 (21,27)	1,73 (1,73)	42,33
12	8,74 (8,68)	27,17 (27,67)	1,58 (1,58)	47,33

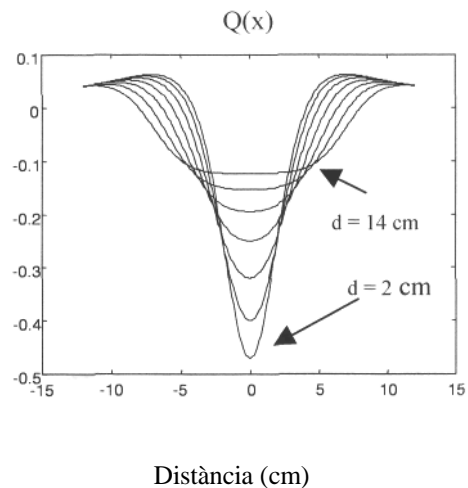
Taula 6.12: : Errors relatius en l'obtenció de R i h per a un cilindre conductor ($R = 2$ cm) envoltat per una capa aïllant d'1cm de gruix, a partir dels punts característics de $Q(x)$. Entre parèntesi apareixen els valors que tenen en compte la distància interelectròdica.

6.2.3. Influència de la distància interelectròdica en la resistivitat aparent normalitzada

Fins ara, les resistivitats aparents normalitzades s'han obtingut amb una distància interelectròdica de 2 cm. Per veure la influència de la distància interelectròdica en l'obtenció de $Q(x)$, la figura 6.17a mostra els resultats corresponents a un cilindre d'acer inoxidable de 2 cm de radi, situat a 4 cm de profunditat, en funció de la distància interelectròdica. La figura 6.17c mostra els resultats corresponents al mateix cilindre sobre el qual s'hi ha afegit una coberta aïllant d'1 cm de gruix. Les corbes han estat interpolades per mitjà de la funció Spline de Matlab i s'han comparat amb les corresponents teòriques. Les distàncies interelectròdiques estan compreses entre 2 cm i 14 cm, a intervals de 2 cm.



a)



b)

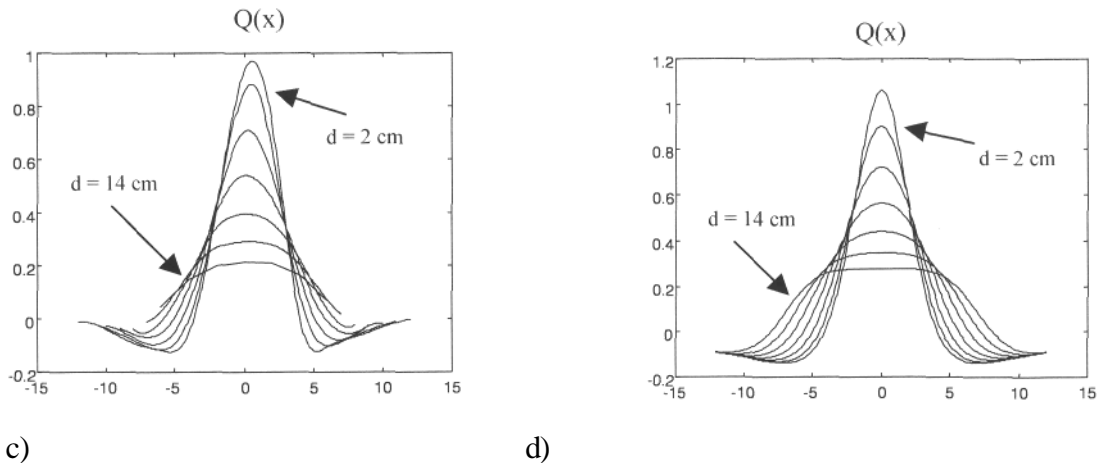
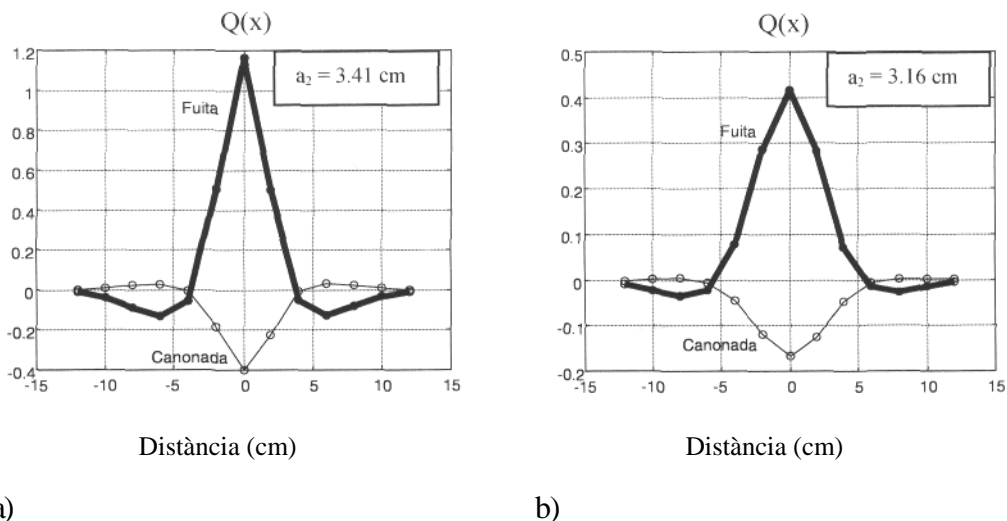


Figura 6.17: Efecte de la distància interelectròdica dels elèctrodes de potencial en la determinació de $Q(x)$. a) Cilindre conductor ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm) b) Cilindre conductor teòric ($R = 2$ cm, $h = 4$ cm), c) Cilindre conductor amb coberta aïllant, d) Cilindre conductor amb coberta aïllant, teòric.

Pot observar-se que a mesura que s'incrementa la distància interelectròdica, disminueix l'amplitud de $Q(x)$ i s'eixamplen els seus passos per zero, reduint-se la resolució de l'agrupació electròdica. Els resultats s'aproximen força bé als obtinguts teòricament. En el cas que l'anomalia sigui una esfera, els resultats segueixen el mateix comportament (Reina, 1997).

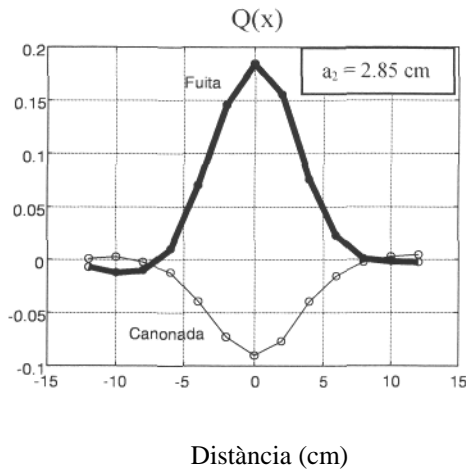
6.2.4. Determinació del radi d'una fuita cilíndrica concèntrica

En aquest apartat mostrarem els resultats obtinguts en la determinació del radi d'una capa aïllant d'1 cm de gruix, al voltant d'un cilindre d'acer inoxidable de 2 cm de radi, per mitjà del mètode descrit en 6.1.4. La figura 6.18 mostra els resultats per diferents profunditats de l'anomalia.

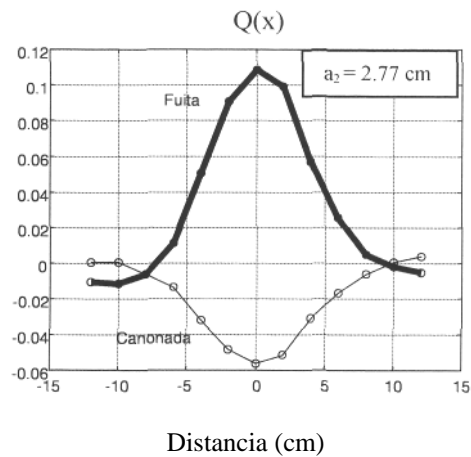


a)

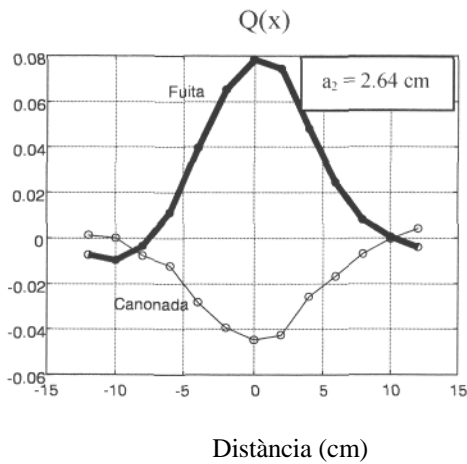
b)



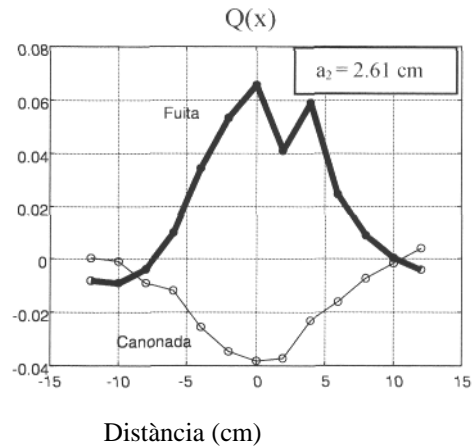
b)



d)



e)



f)

Figura 6.18: Determinació del radi d'una corona cilíndrica aïllant d'1 cm de gruix, al voltant d'un cilindre conductor de 2 cm de radi, per diferents profunditats, a) $h = 4$ cm. b) $h = 6$ cm. c) $h = 8$ cm. d) $h = 10$ cm. e) $h = 11$ cm. f) $h = 12$ cm.

Les profunditats corresponents als talls per zero de les diferents corbes de la figura 6.18, són els valors que apareixen a les taules 6.9 i 6.10.

Amb aquestes mesures podem observar la robustesa en l'obtenció de la grandària de la capa aïllant, a partir del quocient de les visibilitats del tub amb fuita i sense fuita. El màxim error comès correspon a la major profunditat (12 cm), on s'obté el radi de la fuita amb un error del 13 %.

Si observem la taula 6.12, on s'ha calculat el radi de la fuita a partir dels punts característics de la corba de resistivitat aparent normalitzada d'únicament el tub amb fuita, es pot observar que els errors en la determinació del radi exterior són superiors. Per tant podem concloure que per obtenir el radi d'una corona concèntrica és millor fer dues mesures: la mesura de referència, que correspon a la presència del tub i la mesura corresponent al tub amb fuita. Aproximadament els errors que s'hagin comès en la determinació de la primera resistivitat aparent normalitzada seran els mateixos que els comesos en la segona i es cancel·laran.

Cal dir que per calcular el radi exterior dels dos cilindres concèntrics, estem aplicant les fórmules teòriques que consideren que l'objecte està en presència de camp elèctric uniforme, la qual cosa en les mesures de laboratori amb cilindres no es compleix del tot. A l'utilitzar, però, dues mesures ($Q(x)$ corresponent al tub i $Q(x)$ corresponent al tub amb fuita) fetes en les mateixes condicions, permet obtenir amb força exactitud el radi de la corona externa, tot i que a l'enfonsar més l'anomalia, es compleixen menys les condicions de camp elèctric uniforme

6.3. Conclusions

S'ha estudiat la configuració Schlumberger, per mitjà de dades sintètiques i dades experimentals de laboratori i s'ha observat la possibilitat d'obtenir el radi i la profunditat d'anomalies esfèriques i cilíndriques immerses sota la influència d'un camp elèctric uniforme, a partir del paràmetre resistivitat aparent normalitzada.

Una esfera es pot considerar que es troba sota la influència d'un camp elèctric uniforme a partir de $L/h = 10$ i un cilindre de longitud infinita per $L/h = 40$, on L és la longitud de l'agrupació electròdica i h la profunditat de l'anomalia. Per tant la modelació teòrica de les mesures de laboratori, en una cubeta de dimensions finites, és més exacta en el cas de l'esfera que en el cas del cilindre.

Els mètodes d'obtenció de R i h s'han basat en la relació que compleixen els punts característics de la corba de resistivitat aparent normalitzada (visibilitat i passos per zero) i en l'ajust per mínims quadrats dels punts obtinguts analíticament o experimentalment a les corbes teòriques.

S'ha estudiat l'efecte de la distància interelectròdica, que equival a utilitzar més o menys elèctrodes per realitzar les mesures de potencial. S'ha observat que un augment de la distància interelectròdica redueix la visibilitat de l'anomalia.

La determinació de R i h a partir de dades analítiques segueix la tendència esperada. Com més s'apropen les mesures a les condicions de camp elèctric uniforme i quants més elèctrodes s'utilitzen, per una determinada longitud de l'agrupació electròdica, millor és l'exactitud en la determinació de R i h .

Els resultats experimentals en una cubeta d'aigua verifiquen la validesa dels mètodes en l'obtenció de R i h , corresponents a esferes i cilindres. En certs casos els errors han estat considerables. Això és degut a que les mesures experimentals no corresponen ben bé a una situació de camp elèctric uniforme. En les anàlisis teòriques s'ha suposat que els objectes es troben immersos en un semiespai homogeni i infinit, i en canvi en les mesures de laboratori hi ha l'efecte de les parets de la cubeta (de dimensions finites), que alteren els resultats, sobretot com més propera estigui l'objecte a alguna de les interfícies de la cubeta (aigua-plàstic, aigua-aire). Les mesures experimentals també estan afectades per la inexactitud en la posició real de l'objecte dins la cubeta, doncs aquest posicionament es realitza de forma manual.

Respecte els objectes cilíndrics, cal dir que una altra font d'error és el fet que les expressions teòriques consideren que el cilindre té una longitud infinita, i en canvi els cilindres utilitzats en el laboratori són de longitud finita, de l'ordre de la longitud de l'agrupació electròdica.

L'ajust per mínims quadrats de corbes teòriques de resistivitat aparent normalitzada, a punts experimentals, té l'avantatge que si els punts experimentals no defineixen a l'interpol·lar-los una corba que talla l'eix d'abscisses, el mètode també és vàlid per determinar R i h , la qual cosa no és certa en el cas d'utilitzar el mètode que es basa en els punts característics de $Q(x)$.

S'ha determinat amb força exactitud el radi d'una corona cilíndrica aïllant, concèntrica amb un tub conductor. Els resultats han estat força acurats, fins i tot per profunditats grans de l'anomalia, on les condicions de camp elèctric uniforme no es compleixen.

Finalment cal dir que tot i que la bondat dels resultats experimentals (numèrics) difereix de la dels analítics, el mètode per determinar les dimensions i la profunditat d'anomalies esfèriques i cilíndriques, tot i ser aproximat, pot servir com orientatit per altres mètodes més complexos i cars. És una alternativa a la solució del problema invers per objectes de simetria regular. Aquesta primera aproximació en la localització d'anomalies es pot complementar per mitjà de l'obtenció d'imatges tal i com s'exposa en els capítols 7, 8 i 9.