

Universitat Politècnica de Catalunya
Departament d'Enginyeria Elèctrica

TESIS DOCTORAL

**Efectos de los huecos de tensión en las
máquinas de inducción y en los trans-
formadores trifásicos**

Autor: **Luis Guasch Pesquer**
Director: **Felipe Córcoles López**

Barcelona, enero de 2006

A Maite, Marta, Luis y Carlos

Agradecimientos

En primer lugar a las personas que han participado directamente de este trabajo:

- A Felipe Córcoles López, por haber dirigido esta tesis.
- A Joaquim Pedra y Luis Sáinz por sus contribuciones y asesoramiento.

En segundo lugar a todas las personas con las que trabajo en la *Universitat Rovira i Virgili* y que se han interesado por el desarrollo de esta tesis. Mayoritariamente estas personas están vinculadas a los organismos siguientes:

- *Departament d'Enginyeria Electrònica, Elèctrica i Automàtica.*
- *Escola Tècnica Superior d'Enginyeria.*
- *Grup d'Automàtica i Electrònica Industrial.*

Por último, merecen una mención especial por su apoyo incondicional:

- Maite, Marta, Luis y Carlos.
- Pedro Santibáñez, José Antonio Barrado, Juan José Tena y Gloria Ciumbulea.
- Mis familiares y amigos.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	3
1.1. Antecedentes	3
1.1.1. Consumidores de energía eléctrica	5
1.1.2. Legislación y recomendaciones de organismos del ámbito eléctrico	6
1.1.3. Las compañías involucradas en la producción, transporte, distribución y comercialización de energía eléctrica	6
1.2. Objetivos de la tesis	7
1.3. Estructura de la tesis	7
2. HUECOS DE TENSIÓN	11
2.1. Introducción.....	11
2.2. Componentes simétricas	12
2.2.1. Modelo en componentes simétricas de un elemento trifásico activo de tres terminales.....	14
2.2.2. Modelo en componentes simétricas de un elemento trifásico pasivo de seis terminales.....	20
2.2.3. Conexión de dos elementos trifásicos.....	27
2.3. Modelo del hueco de tensión.....	31
2.4. Determinación de los huecos de tensión a partir de las faltas que los originan.....	31
2.4.1. Falta trifásica	31
2.4.2. Falta trifásica a tierra	34
2.4.3. Falta fase–tierra	35
2.4.4. Falta fase–fase	37
2.4.5. Falta fase–fase–tierra	40
2.4.6. Resumen	42
2.5. Determinación de los huecos de tensión para cargas conectadas en triángulo.....	43
2.5.1. Introducción.....	43
2.5.2. Huecos tipos B, C y E vistos por una carga conectada en triángulo.....	45
2.6. Influencia de las conexiones de los transformadores en la transferencia de los huecos a otros niveles de tensión.....	47
2.6.1. Tipos de transformadores	47
2.6.2. Transferencia de huecos tipo B	51
2.6.3. Transferencia de huecos tipo C	52
2.6.4. Transferencia de huecos tipo E.....	53
2.6.5. Transferencia de huecos de tensión a través de dos transformadores.....	53
2.7. Clasificación y caracterización	56
2.8. Punto de onda inicial.....	57
2.9. Duración.....	60

2.10. Efectos producidos.....	61
3. MODELO DE LA MÁQUINA DE INDUCCIÓN TRIFÁSICA	65
3.1. Introducción	65
3.2. Modelo dinámico de la máquina de inducción trifásica, de jaula sencilla o de rotor bobinado.....	65
3.2.1. Transformación de las ecuaciones de la máquina de inducción trifásica.....	68
3.2.2. Ecuaciones transformadas de Ku	69
3.2.3. Ecuaciones transformadas de Park.....	73
3.3. Modelo de régimen permanente	76
3.3.1. Par electromagnético.....	78
3.4. Ecuaciones de la máquina de inducción con p pares de polos.....	78
4. EFECTOS DE LOS HUECOS DE TENSIÓN EN LOS MOTORES DE INDUCCIÓN TRIFÁSICOS	83
4.1. Introducción	83
4.2. Efectos producidos por los huecos de tensión.....	83
4.2.1. Magnitudes de interés	88
4.3. Influencia del punto de onda inicial	89
4.4. Influencia de la duración del hueco de tensión.....	92
4.5. Simulación de rangos extensivos de huecos de tensión	101
4.6. Curvas de sensibilidad.....	106
4.7. Comparación de huecos.....	112
4.8. Curvas de sensibilidad utilizando la componente directa de la tensión	120
4.9. Conclusiones.....	128
5. MODELO DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO	131
5.1. Modelo del transformador trifásico de tres columnas.....	131
5.1.1. Modelo del circuito eléctrico	131
5.1.2. Modelo del circuito magnético	133
5.1.3. Curva de saturación	134
5.1.4. Eliminación del número de espiras	135
5.1.5. Estimación de los parámetros del transformador	136
5.2. Modelo del banco trifásico	137
5.2.1. Modelo del circuito magnético	137
5.3. Modelo del transformador de cinco columnas	138
5.3.1. Modelo del circuito magnético	138
6. EFECTOS DE LOS HUECOS DE TENSIÓN EN LOS TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS	143
6.1. Introducción	143

6.2. Efectos producidos por los huecos de tensión	143
6.3. Influencia del punto de onda inicial.....	148
6.4. Influencia de la parte fraccionaria de la duración, δt.....	152
6.4.1. Influencia de δt en los picos de intensidad para el punto de onda inicial crítico	153
6.4.2. Influencia de δt en los picos de intensidad para diferentes puntos de onda inicial.....	156
6.4.3. Conclusión.....	156
6.5. Influencia de la profundidad	159
6.6. Deducción analítica de los huecos de tensión más desfavorables	163
6.6.1. Determinación del pico de flujo	163
6.6.2. Determinación del pico de intensidad.....	167
6.6.3. Determinación del valor de duración crítica, $\Delta t_{crítica}$, y del punto de onda inicial crítico, $\psi_{i,crítico}$	169
6.7. Simulación de rangos extensivos de huecos de tensión.....	171
6.7.1. Picos de intensidad en función del punto de onda inicial	174
6.7.2. Picos de intensidad en función de δt para $\psi_{i,crítico}$	178
6.7.3. Picos de intensidad en función de δt para diferentes valores de ψ_i	179
6.7.4. Picos de intensidad en función de la profundidad	179
6.8. Conclusiones.....	186
7. CONCLUSIONES	191
7.1. Aportaciones	191
7.2. Futuras líneas de investigación.....	193
8. ÍNDICE DE FIGURAS	197
9. ÍNDICE DE TABLAS.....	207
10. REFERENCIAS.....	211
11. PUBLICACIONES MÁS SIGNIFICATIVAS	217
• Guasch, L.; Córcoles, F.; Pedra, J. Effects of Symmetrical and Unsymmetrical Voltage Sags on Induction Machines. <i>IEEE Transactions on Power Delivery</i> , abr. 2004, vol. 19, núm. 2, p. 774–782.....	209
• Guasch, L.; Córcoles, F.; Pedra, J.; Sáinz, L. Effects of Symmetrical Voltage Sags on Three-Phase Three-Legged Transformers. <i>IEEE Transactions on Power Delivery</i> , abr. 2004, vol. 19, núm. 2, p. 875–883.140	217
• Pedra, J.; Sainz, L.; Córcoles, F.; Guasch, L. Symmetrical and Unsymmetrical Voltage Sag Effects on Three-Phase Transformers. <i>IEEE Transactions on Power Delivery</i> , abr. 2005, vol. 20, núm. 2, p. 1683–1691.....	217

Capítulo 1

Introducción

1. Introducción

El título de la presente tesis es: *Efecto de los huecos de tensión en los transformadores y en los motores de inducción trifásicos*. Está realizada por Luis Guasch Pesquer y dirigida por el Dr. Felipe Córcoles López.

1.1. Antecedentes

El término *calidad del suministro*, *power quality* en inglés, (también traducido por *calidad de la energía*), se empezó a utilizar con asiduidad a finales de la década de los ochenta. Con anterioridad este concepto estaba relacionado básicamente con la ininterrumpibilidad del suministro. En estos últimos años se ha relacionado, además, con otras perturbaciones como: distorsión armónica, huecos de tensión, microcortes, etc [1].

A continuación se definen algunos de los aspectos relacionados con la calidad de suministro de los sistemas de corriente alterna, tal como aparecen en la IEEE Std. 1250-1995 [2]:

- **Armónico:** componente senoidal de una onda periódica, que presenta una frecuencia que es un múltiplo entero de la onda fundamental.
- **Carga lineal:** carga eléctrica que, en condiciones nominales, presenta una carga esencialmente constante durante un ciclo de la tensión aplicada.
- **Carga no lineal:** carga eléctrica que consume una corriente discontinua, o cuya impedancia varía durante un ciclo de la tensión alterna del suministro.
- **Distorsión en la tensión:** cualquier desviación de la onda senoidal nominal de la tensión de alimentación.
- **Flicker:** cambio perceptible en la intensidad del flujo luminoso, debido a una fluctuación en la tensión de alimentación.
- **Hueco de tensión:** reducción del valor eficaz de la tensión alterna, a la frecuencia del suministro, para duraciones entre medio ciclo y unos pocos segundos, (Fig. 1.1).
- **Impulso:** pico de tensión de polaridad unidireccional, por ejemplo, 1.2/50 μ s (Fig. 1.1).
- **Interrupción:** pérdida absoluta de la tensión durante un cierto tiempo. En función de la duración se pueden clasificar como:
 - **Instantánea:** entre 0.5 y 30 ciclos.
 - **Momentánea:** entre 30 ciclos y 2 s.
 - **Temporal:** entre 2 s y 2 min.
 - **Sostenida:** mayor de 2 min.

- **Notch:** reducción del valor eficaz de la tensión alterna, a la frecuencia del suministro, para duraciones menores a medio ciclo (Fig. 1.1).
- **Perturbación momentánea:** variación en el nivel de tensión respecto a las condiciones nominales debido a: picos, huecos, faltas, conmutaciones, o por la apertura o el cierre inadecuados de interruptores.

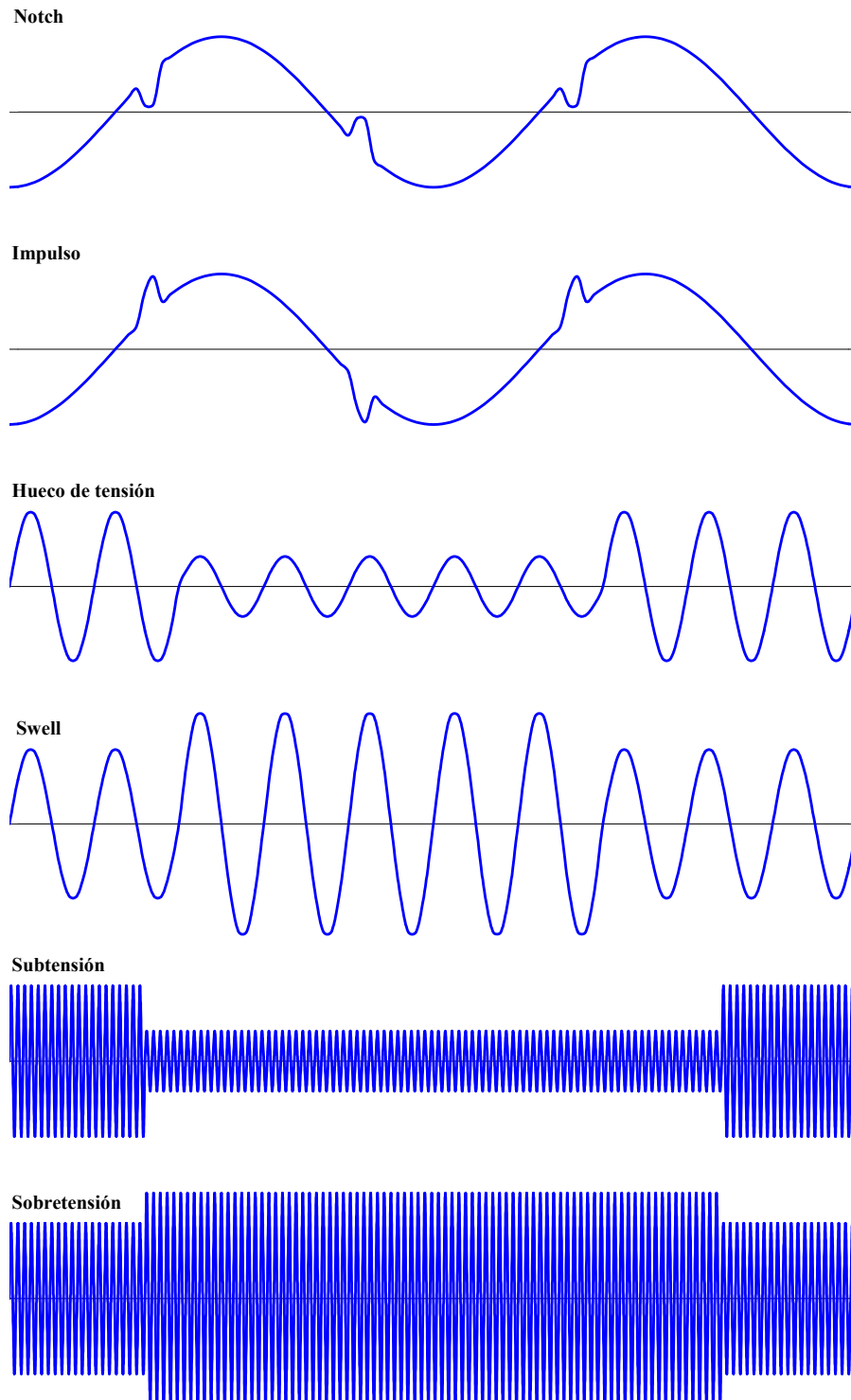


Fig. 1.1. Representación temporal de algunas de las perturbaciones que puede sufrir la tensión de suministro.

- **Ruido:** señales eléctricas no deseadas que producen efectos no deseados en los sistemas de control donde ocurren.
- **Sobretensión:** incremento en el valor eficaz de la tensión alterna, a la frecuencia del suministro, para duraciones mayores a unos pocos segundos (Fig. 1.1).
- **Subtensión:** decremento en el valor eficaz de tensión alterna, a la frecuencia del suministro, con duraciones superiores a unos pocos segundos (Fig. 1.1).
- **Surge:** transitorio en la onda de tensión, o de corriente.
- **Swell:** incremento en el valor eficaz de la tensión alterna, a la frecuencia del suministro, para duraciones comprendidas entre medio ciclo y unos pocos segundos (Fig. 1.1).
- **Transitorio:** cualquier distorsión con una duración inferior a unos pocos ciclos.

Aunque la aparición de la “cultura” de la *calidad del suministro* es muy reciente, destaca la gran profusión de artículos científicos y divulgativos que han aparecido en estos últimos quince años.

Los agentes que han determinado este cambio en el concepto de *calidad del suministro* son:

- los consumidores de energía eléctrica,
- la legislación y las recomendaciones de organismos del ámbito eléctrico,
- las compañías involucradas en la producción, transporte, distribución y comercialización de energía eléctrica.

1.1.1. Consumidores de energía eléctrica

Los consumidores de energía eléctrica juegan un doble papel en la *calidad del suministro*. Por un lado contribuyen a la polución de la red conectando las principales cargas no lineales: dispositivos electrónicos de potencia para accionar motores eléctricos o para acondicionar la alimentación a otros tipos de carga. Por el otro, son los primeros interesados en la calidad de suministro, puesto que ciertos tipos de cargas son sensibles a determinadas perturbaciones en la alimentación.

Existen ciertos tipos de consumidores donde los efectos de las perturbaciones en el suministro de energía eléctrica, conllevan, o pueden conllevar consecuencias graves, como por ejemplo:

- Consumidores industriales: en determinados procesos industriales las perturbaciones determinan fuertes pérdidas económicas.
- Servicios públicos: hospitales, alumbrado público, señalización vial, transporte ferroviario, transporte metropolitano, etc.

En el ámbito de los consumidores industriales cabe destacar que la empresa IBM ya realizó, entre 1969 y 1972, estudios sobre la calidad del suministro en instalaciones propias de procesamiento de datos. También AT&T llevó a cabo análisis de la calidad del suministro, entre 1977 y 1979, en centros de procesamiento de datos de la compañía Bell System. En [3] se comparan los resultados obtenidos en ambos casos con los obtenidos por el National Power Laboratory (NPL) entre 1990 y 1995.

En [4] se muestra un análisis de las perturbaciones en la tensión, en la empresa 3M Corporation, así como su posible mitigación. El trabajo es un ejemplo de cooperación entre dicha empresa y la compañía suministradora, Northern States Power (NSP). El procedimiento de traba-

jo consistió en que NSP buscaba y analizaba la causa de cada perturbación en la red de distribución mientras que 3M aportaba los datos registrados y los efectos observados como consecuencia de dicha perturbación. Como resultado, se obtuvo una gráfica de sensibilidad de la planta respecto a los huecos de tensión y una serie de procedimientos de trabajo que permitieron disminuir las perturbaciones.

1.1.2. Legislación y recomendaciones de organismos del ámbito eléctrico

En España, la Ley 54/1997 del Sector Eléctrico de 1997 [5] marca las bases para la liberalización del mercado eléctrico, y fija como triple objetivo garantizar el suministro eléctrico, garantizar la calidad de dicho suministro y garantizar que se realice al menor coste posible.

Para medir el grado de calidad, el Real Decreto 1995/2000 [6] fija unos índices, y los rangos entre los que pueden oscilar, para la continuidad del suministro (teniendo en cuenta el número y duración de las interrupciones) y por otro lado indica que se seguirán los criterios fijados en la norma UNE-EN 50160:2001 [7] respecto a las características de la tensión.

Según la Ley 54/1997 [5], las empresas distribuidoras y comercializadoras promoverán las tecnologías avanzadas en la medición para el control de la calidad del suministro eléctrico.

En este aspecto también destaca el trabajo realizado por T. Gómez y J. Rivier en [8] donde se comparan las acciones legislativas llevadas a cabo en Inglaterra y Gales, Argentina, Noruega, California y España. En todos los casos se contempla la penalización a las compañías que no cumplen con unos requisitos mínimos en la calidad del suministro, buscando tres requisitos comunes: continuidad en el suministro, calidad de la onda de tensión y servicio al cliente.

Otros organismos han publicado documentación relacionada con la calidad de suministro. Por ejemplo IEEE publicó en [2] una guía de servicio para cargas sensibles a distorsiones en la tensión de suministro.

1.1.3. Las compañías involucradas en la producción, transporte, distribución y comercialización de energía eléctrica

En los últimos años, y sobre todo a partir de la Ley 54/1997 en el ámbito estatal, las empresas involucradas en la producción, transporte, distribución y comercialización de la energía eléctrica han tomado conciencia de la importancia que tiene la calidad del suministro. Este aspecto se puede comprobar por las diferentes acciones llevadas a término, como son:

- Análisis del consumo de energía eléctrica, instalando equipos de medida capaces de registrar perturbaciones transitorias en la red.
- Publicaciones científicas sobre la calidad del suministro eléctrico.

Un estudio realizado por J. Amantegui [9] refleja que el Servicio de Asistencia Técnica al Consumidor de Iberdrola asesoró a sus clientes, durante el período 1990-1999, para disminuir los efectos que producían las perturbaciones en el sistema de alimentación. El estudio agrupa las perturbaciones en 6 grupos: huecos de tensión y microcortes, cambios de tensión, flicker (parpadeo en el alumbrado), armónicos, sobretensiones transitorias y protecciones. De todas las consultas recibidas, aproximadamente el 40% fueron sobre huecos de tensión y microcortes.

En [10] se describen las medidas llevadas a cabo por la compañía Electricité de France (EDF) para conseguir una buena calidad del suministro. También se pone de manifiesto que las compañías suministradoras europeas aplican diferentes criterios para intentar conseguir el mismo objetivo, por lo que sugiere que la Comunidad Europea podría ser un buen foro para confrontar nuevas ideas y caminos para solucionar el problema.

1.2. Objetivos de la tesis

El objetivo de la tesis es analizar los efectos que producen los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos y en los transformadores trifásicos.

Para ello, se caracterizan los huecos de tensión, se definen los modelos matemáticos utilizados para ambos tipos de máquinas y se calculan los mencionados efectos en función de las características del hueco.

1.3. Estructura de la tesis

El trabajo se ha estructurado de la siguiente forma:

- **Capítulo 2:** Se presentan las definiciones de hueco de tensión que aparecen en la norma UNE [7] y en la norma IEEE Std [11].

A continuación se describe el comportamiento de un sistema trifásico desequilibrado mediante componentes simétricas, el cual permite caracterizar los huecos de tensión a partir de las faltas que los originan, la conexión de la carga y su transmisión a otros niveles de tensión mediante transformadores.

Por último se presenta una clasificación y caracterización de los huecos de tensión, y se relacionan los efectos que produce en función del tipo de carga afectada.

- **Capítulo 3:** Se presenta el modelo de la máquina de inducción de jaula sencilla, o rotor bobinado, tanto en régimen dinámico como en régimen permanente.

- **Capítulo 4:** En la parte inicial del capítulo se presentan ejemplos de los picos de intensidad, picos de par y pérdidas de velocidad que sufren los motores de inducción, cuando se ven sometidos a huecos de tensión. En [12] este estudio se realizó para huecos de tensión simétricos.

En segundo lugar se analiza la influencia del punto de onda inicial, de la duración y de la tipología del hueco en dichos efectos.

En tercer lugar se simulan rangos extensivos de huecos de tensión que permiten la representación de los resultados mediante curvas tridimensionales y curvas de sensibilidad. También se comparan los efectos producidos por distintos tipos de huecos mediante el cálculo de la distancia Euclídea.

Por último se representan las curvas de sensibilidad con la componente directa de la tensión en el eje de ordenadas. En este tipo de representación destaca el hecho de que distintas tipologías de huecos presentan resultados prácticamente idénticos.

- **Capítulo 5:** Se presenta el modelo del transformador trifásico, basado en [13], que incluye la saturación del circuito magnético. Este modelo está definido mediante el circuito equivalente eléctrico, el circuito equivalente magnético, el cual incluye reluctancias saturadas que modelizan el comportamiento no lineal de cada una de las columnas.
- **Capítulo 6:** La estructuración de este capítulo es similar a la seguida en el capítulo 4. Inicialmente se presentan ejemplos de los picos de intensidad en el primario de un transformador trifásico sometido a un hueco de tensión.
En segundo lugar se analiza la influencia del punto de onda inicial, de la duración, de la profundidad y de la tipología del hueco de tensión en dichos efectos.
En tercer lugar se realiza la deducción analítica del valor de cresta del flujo que origina cada hueco de tensión.
Por último se realiza el cálculo analítico masivo de picos de intensidad, provocados por huecos de tensión, presentando los resultados en curvas tridimensionales y bidimensionales.
- **Capítulo 7:** En este capítulo se resumen las aportaciones de esta tesis.

Capítulo 2

Huecos de Tensión

2. Huecos de tensión

En este capítulo se describen y analizan los huecos de tensión, para poder estudiar en los capítulos 4 y 6 su efecto sobre los motores de inducción trifásicos y sobre los transformadores trifásicos respectivamente.

2.1. Introducción

En las publicaciones relacionadas con la Calidad del Suministro Eléctrico no existe una definición unívoca de hueco de tensión. A modo de ejemplo se indican las siguientes:

- La norma UNE-EN 50160 [7] define el hueco de tensión como: “disminución brusca de la tensión de alimentación a un valor situado entre el 90% y el 1% de la tensión declarada U_c , seguida del restablecimiento de la tensión después de un corto lapso de tiempo. Por convenio, un hueco de tensión dura de 10 ms a 1 min. La profundidad de un hueco de tensión es definida como la diferencia entre la tensión eficaz mínima durante el hueco de tensión y la tensión declarada. Las variaciones de tensión que no reducen la tensión de alimentación a un valor inferior al 90% de la tensión declarada U_c no son consideradas como huecos de tensión”.
- La norma IEEE Std 1159-1995 [11], define hueco como una disminución de la tensión o la intensidad, en valor eficaz, entre 0.1 y 0.9 pu a la frecuencia de la red, para duraciones comprendidas entre 0.5 ciclos y 1 minuto.

Coincidiendo con ambas normas un hueco de tensión queda caracterizado, en una primera aproximación¹, por una tensión residual referida a la tensión inicial, que en adelante se denominará *profundidad*, h , ($0 \leq h \leq 1$), y una duración, Δt de tal modo que la tensión puede estar representada por:

$$v(h, \Delta t) \quad (2.1)$$

También se puede utilizar esta notación para los efectos que producen los huecos en las cargas, por ejemplo los picos de intensidad en un motor de inducción, o en un transformador cuando se produce un hueco de tensión de profundidad h y duración Δt es:

$$i_{\text{pico}}(h, \Delta t) \quad (2.2)$$

¹ Más adelante, en el apartado 2.7, se añadirán dos parámetros más para caracterizar unívocamente el hueco de tensión.

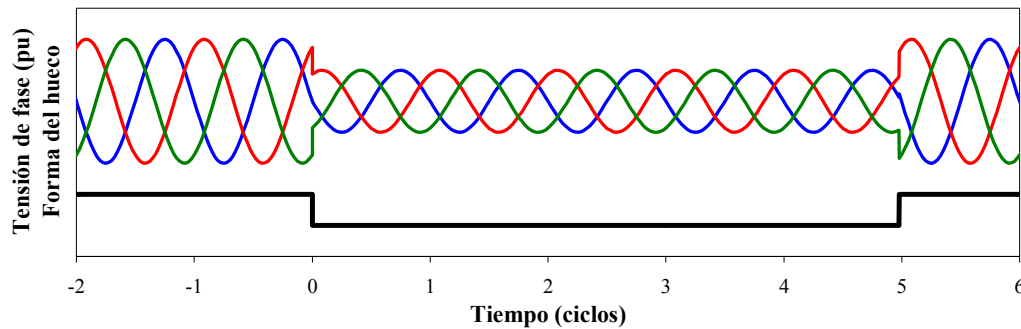


Fig. 2.1. Evolución de las tensiones de fase, y h (en la parte inferior), durante un hueco de tensión simétrico.

En cuanto a las causas y frecuencia de los huecos, la norma UNE-EN 50160 [7] indica que “los huecos de tensión son generalmente debidos a defectos que sobrevienen en las instalaciones de los clientes o en la red general. Estos sucesos fundamentalmente aleatorios son imprevisibles. Su frecuencia anual depende principalmente del tipo de red de distribución y del punto de observación. Además, su distribución en un año puede ser muy irregular”.

En concreto, los huecos pueden estar originados por faltas producidas en la red (originados por descargas atmosféricas, animales, accidentes u otros, así como por errores en la operación), o por sobrecargas (arranque de motores de potencia elevada, conexión de grandes cargas, conexión de transformadores o sobrecarga en general de la red) que provocan una caída de tensión excesiva. Los huecos más severos son los producidos por las faltas. La profundidad del hueco depende de la potencia de la red y de la proximidad de la falta (o del punto donde se origina la sobrecarga) al punto donde se está observando el hueco de tensión.

En la Fig. 2.1 se muestra un ejemplo de la evolución de las tensiones cuando se produce un hueco de tensión simétrico con una profundidad del 50% ($h = 0.5$) y una duración $\Delta t = 5$ ciclos, así como la evolución temporal de h ($h = 0.5$ durante el hueco y $h = 1$ antes y después del mismo).

Cuando se producen este tipo de fenómenos en la red, las cargas conectadas a la misma se ven afectadas de diferente modo, en función de su sensibilidad. Un efecto típico de los huecos de tensión es la aparición de picos de intensidad tras la recuperación de la tensión.

Los huecos de tensión pueden ser simétricos o asimétricos, en función del tipo de falta o del tipo de sobrecarga que los ha originado. Cuando el valor eficaz de la tensión de todas las fases disminuye en la misma proporción, y el desfase entre ellas se mantiene en 120° , se dice que el hueco es simétrico (como en el caso mostrado en la Fig. 2.1). Un cortocircuito trifásico, el arranque de un motor de potencia o la sobrecarga producida por cargas trifásicas, originan este tipo de hueco. Un hueco de tensión es asimétrico cuando la disminución del valor eficaz de la tensión no es igual para las tres fases y/o el desfase entre las mismas no es de 120° . En este caso faltas fase-tierra, fase-fase y fase-fase-tierra, así como la conexión de transformadores de potencia, o la sobrecarga por cargas monofásicas o no simétricas, originan este tipo de huecos.

2.2. Componentes simétricas

Tal como se describe en [14], Charles LeGeyt Fortescue, ingeniero de la empresa Westinghouse Electric & Manufacturing Company, desarrolló el método de las componentes simétricas

para facilitar el estudio de sistemas polifásicos desequilibrados mediante la transformación de éstos en el sumatorio de sistemas polifásicos equilibrados, en el artículo titulado “Method of symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks”, publicado en 1918.

La matriz de transformación de Fortescue en el caso de orden 3, y su inversa, se definen como:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F}^{-1} = 3 \cdot \mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde, $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$.

Algunas propiedades del operador a son:

$$a^2 = a^* ; \quad a^3 = 1 ; \quad 1 + a + a^2 = 0 \quad (2.4)$$

La transformación de Fortescue diagonaliza matrices circulantes. Una matriz \mathbf{C} es *circulante* cuando se cumple:

$$\mathbf{C} = \text{circ}(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Los elementos de cada fila de \mathbf{C} son idénticos a los de la fila anterior, pero desplazados una posición hacia la derecha. Es fácilmente comprobable que la suma de matrices circulantes es una nueva matriz circulante, lo mismo ocurre cuando se multiplica por un escalar.

Premultiplicando \mathbf{C} por la matriz \mathbf{F} y postmultiplicando por su inversa \mathbf{F}^{-1} :

$$\mathbf{C}_F = \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + a^2 \cdot c_2 + a \cdot c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + a \cdot c_2 + a^2 \cdot c_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Esta propiedad permite que un sistema trifásico con alimentación senoidal desequilibrada, cuya matriz de impedancias sea circulante, se pueda estudiar como tres sistemas trifásicos equilibrados, denominados de secuencia homopolar, de secuencia directa y de secuencia inversa.

Por ejemplo, sea un elemento pasivo trifásico de tres terminales cuya matriz de impedancias es circulante: $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$. Al diagonalizar dicha matriz \mathbf{Z} , el vector de tensiones \mathbf{U} y el de corrientes \mathbf{I} también quedan afectados, siendo $\mathbf{U}_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}$ e $\mathbf{I}_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{I}$. En general, un vector de tensiones, intensidades, flujos, ..., en variables de fase o variables ABC se transforma en variables de secuencia o variables 012:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{bmatrix} ; \quad \begin{cases} x_0 = (x_A + x_B + x_C)/3 \\ x_1 = (x_A + a \cdot x_B + a^2 \cdot x_C)/3 \\ x_2 = (x_A + a^2 \cdot x_B + a \cdot x_C)/3 \end{cases} \quad (2.7)$$

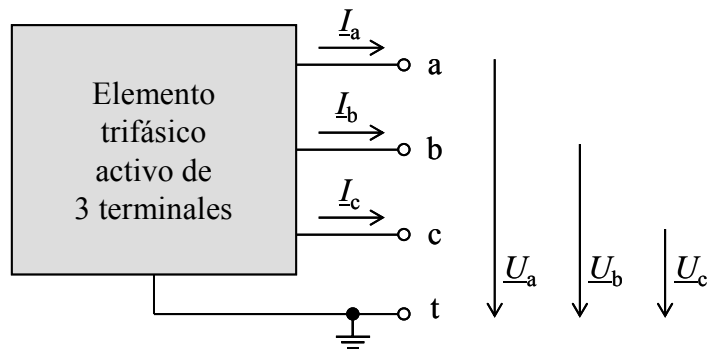


Fig. 2.2. Elemento trifásico activo de tres terminales con conexión a tierra sin impedancia de neutro.

2.2.1. Modelo en componentes simétricas de un elemento trifásico activo de tres terminales

La Fig. 2.2 representa un elemento trifásico activo de tres terminales con conexión a tierra.

Las ecuaciones en notación matricial de este elemento trifásico con alimentación senoidal y en régimen permanente son:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_a \\ \underline{V}_b \\ \underline{V}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} \\ \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_b & \underline{Z}_{bc} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Este sistema de ecuaciones se puede representar mediante el circuito equivalente de la Fig. 2.3, que está formado por una fuente de tensión trifásica, con conexión en estrella, e impedancias acopladas definidas por \mathbf{Z} . Si la matriz \mathbf{Z} es circulante tendrá la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} \\ \underline{Z}_{ac} & \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} \\ \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} & \underline{Z}_a \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Si la matriz \mathbf{Z} es circulante se puede diagonalizar a partir de la transformación de Fortescue:

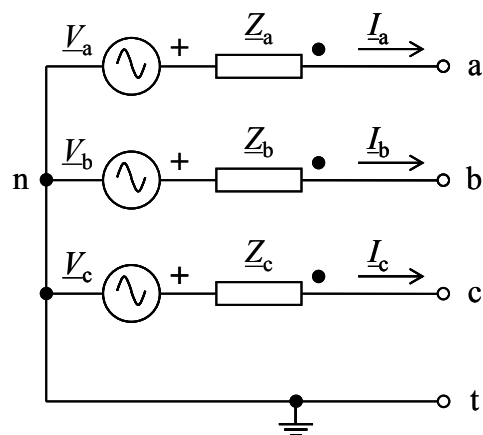


Fig. 2.3. Circuito equivalente de un elemento trifásico activo de tres terminales con conexión a tierra sin impedancia de neutro.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{Z} \cdot \{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}\} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} - \{\mathbf{F} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{F}^{-1}\} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{U}_F &= \mathbf{V}_F - \mathbf{Z}_F \cdot \mathbf{I}_F\end{aligned}\quad (2.10)$$

Que también se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}\quad (2.11)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c \\ \underline{U}_a + a \cdot \underline{U}_b + a^2 \cdot \underline{U}_c \\ \underline{U}_a + a^2 \cdot \underline{U}_b + a \cdot \underline{U}_c \end{bmatrix}\quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_a + \underline{V}_b + \underline{V}_c \\ \underline{V}_a + a \cdot \underline{V}_b + a^2 \cdot \underline{V}_c \\ \underline{V}_a + a^2 \cdot \underline{V}_b + a \cdot \underline{V}_c \end{bmatrix}\quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a + \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_a + a^2 \cdot \underline{Z}_{ab} + a \cdot \underline{Z}_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_a + a \cdot \underline{Z}_{ab} + a^2 \cdot \underline{Z}_{ac} \end{bmatrix}\quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c \\ \underline{I}_a + a \cdot \underline{I}_b + a^2 \cdot \underline{I}_c \\ \underline{I}_a + a^2 \cdot \underline{I}_b + a \cdot \underline{I}_c \end{bmatrix}\quad (2.15)$$

Si además la matriz \mathbf{Z} es simétrica²:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ab} \\ \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} \\ \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_a \end{bmatrix}\quad (2.16)$$

entonces las impedancias directa e inversa coinciden: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$. Como veremos a continuación, los elementos dinámicos dan lugar a matrices de impedancias circulantes pero no simétricas (por lo que las impedancias directa e inversa son diferentes), mientras que los elementos no dinámicos dan lugar a matrices de impedancias circulantes y simétricas, por lo que las impedancias directa e inversa coinciden.

Esta transformación da lugar a tres redes de secuencia desacopladas, representadas por sus circuitos equivalentes en la Fig. 2.4. En el caso de que la fuente de tensión sea simétrica y equilibrada, las tensiones homopolar e inversa son nulas ya que:

² Una matriz A es simétrica si se cumple que $A^t = A$. La matriz mostrada en (2.16) además de simétrica es circulante.

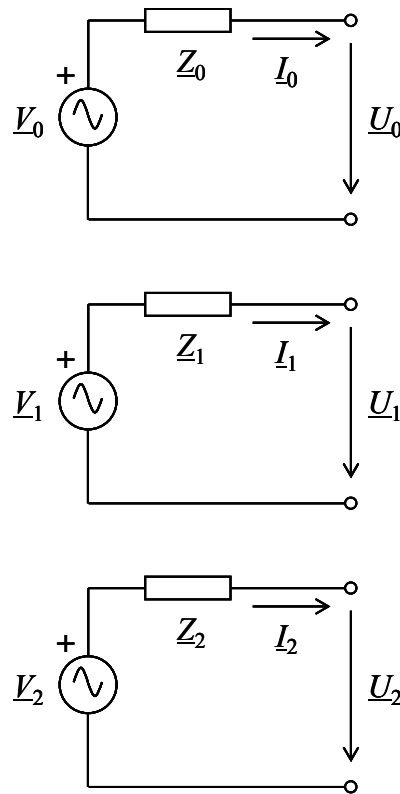


Fig. 2.4. Circuitos de secuencia de un elemento trifásico activo de tres terminales.

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_a &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \\ \underline{v}_b &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha - 2\pi/3) \\ \underline{v}_c &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha + 2\pi/3) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \underline{V}_a &= \underline{V} \\ \underline{V}_b &= a^2 \cdot \underline{V} \\ \underline{V}_c &= a \cdot \underline{V} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

y en componentes simétricas:

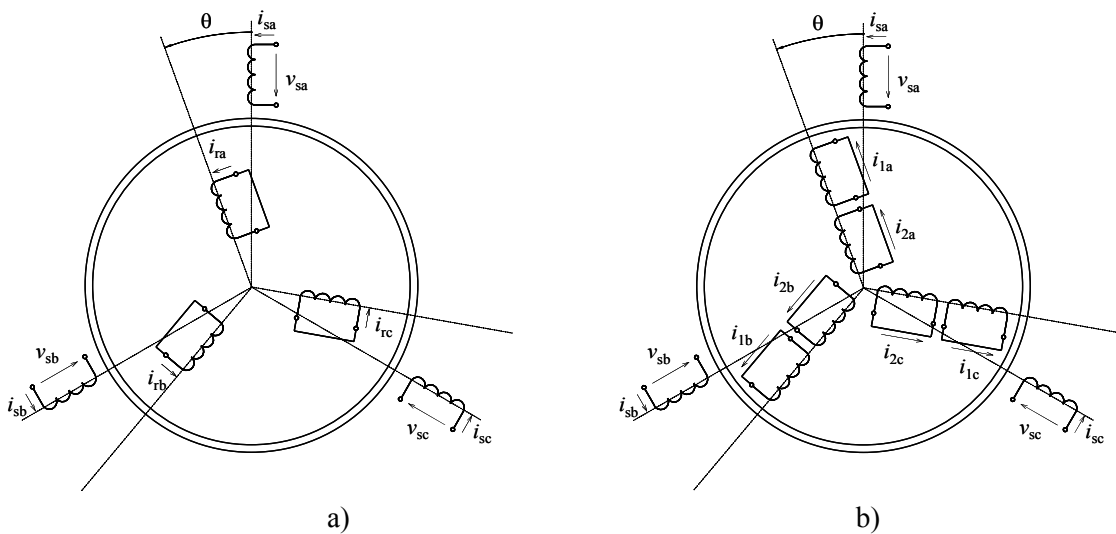


Fig. 2.5. Máquina de inducción trifásica: a) de jaula sencilla o de rotor bobinado en cortocircuito; b) de doble jaula.

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{V}_a + \underline{V}_b + \underline{V}_c) = 0 \\ \underline{V}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{V}_a + a \cdot \underline{V}_b + a^2 \cdot \underline{V}_c) = \underline{V} \\ \underline{V}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{V}_a + a^2 \cdot \underline{V}_b + a \cdot \underline{V}_c) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Como ejemplos de elementos trifásicos activos de tres terminales con matriz de impedancias circulante se pueden citar:

- **Máquina de inducción trifásica de rotor bobinado y de jaula sencilla** (representada en la Fig. 2.5a), cuya matriz de acoplamientos está formada por cuatro cajas de 3x3 que son circulantes y sólo son simétricas las dos de la diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} l_s & -\frac{m_s}{2} & -\frac{m_s}{2} & m \cdot \cos(\theta) & m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\frac{m_s}{2} & l_s & -\frac{m_s}{2} & m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos(\theta) & m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\frac{m_s}{2} & -\frac{m_s}{2} & l_s & m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos(\theta) \\ \hline m \cdot \cos(\theta) & m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & l_r & -\frac{m_r}{2} & -\frac{m_r}{2} \\ m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos(\theta) & m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{m_r}{2} & l_r & -\frac{m_r}{2} \\ m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos(\theta) & -\frac{m_r}{2} & -\frac{m_r}{2} & l_r \end{array} \right] \quad (2.19)$$

- **Máquina de inducción trifásica de doble jaula** (representada en la Fig. 2.5b), cuya matriz de acoplamientos es similar a la anterior, pero en este caso está formada por nueve cajas de 3x3 que son circulantes y sólo son simétricas las tres cajas de la diagonal principal.
- **Máquina síncrona trifásica de rotor liso e imán permanente** (representada en la Fig. 2.6a), cuya matriz de acoplamientos es circulante y simétrica:

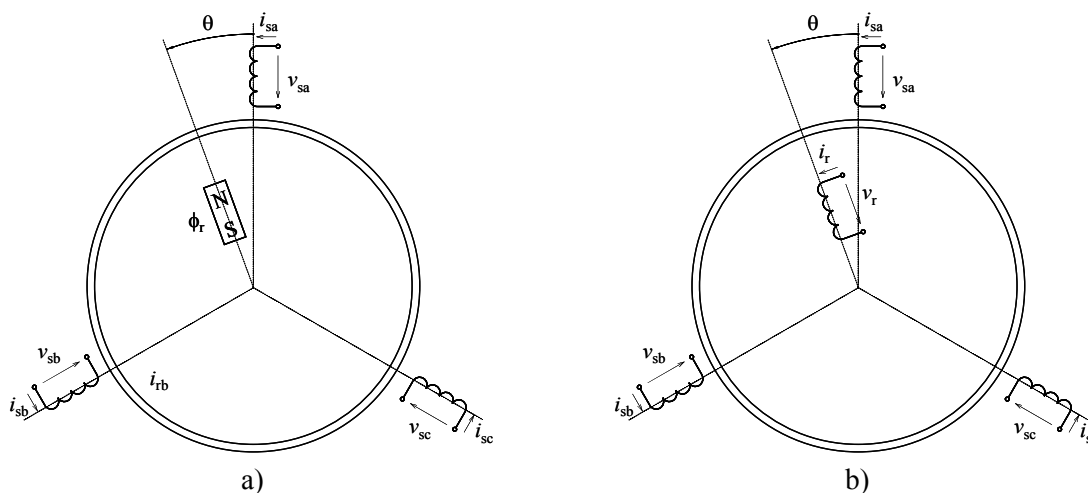


Fig. 2.6. Máquina síncrona trifásica de polos lisos: a) con imán permanente; b) con rotor bobinado.

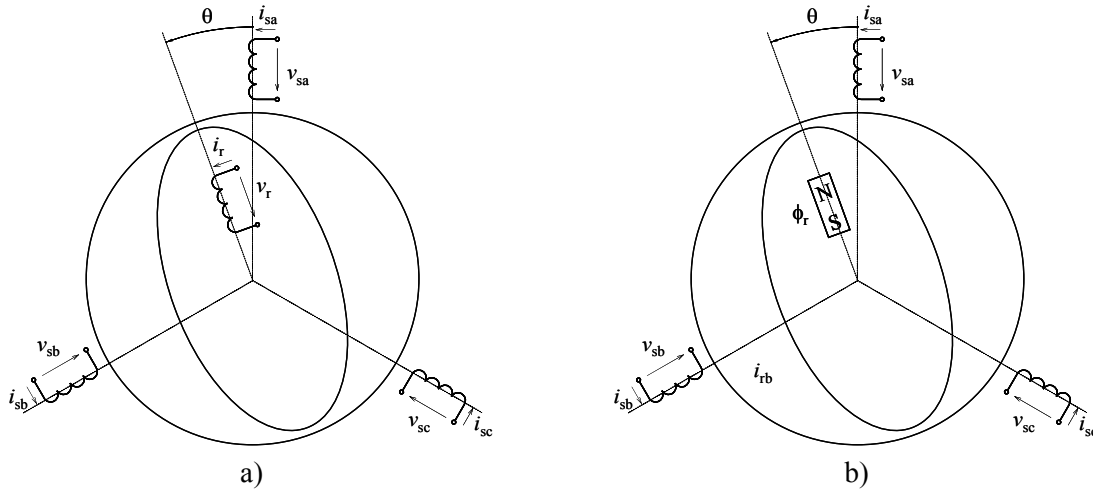


Fig. 2.7. Máquina síncrona trifásica de polos salientes: a) con imán permanente; b) con rotor bobinado.

$$\begin{bmatrix} l_{s0} & m_{s0} & m_{s0} \\ m_{s0} & l_{s0} & m_{s0} \\ m_{s0} & m_{s0} & l_{s0} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Por el contrario existen otros tipos de elementos trifásicos activos de tres terminales que presentan una matriz de impedancias no circulante:

- **Máquina síncrona trifásica de rotor liso** (Fig. 2.6b) únicamente es circulante (y simétrica) la caja de la matriz de acoplamientos que corresponde al estátor. El rotor no es geoméricamente simétrico (sólo tiene una bobina en el caso de rotor bobinado y en el caso de tener también devanados amortiguadores, no forman un rotor geoméricamente simétrico) por lo que la máquina no es geoméricamente simétrica.

$$\begin{bmatrix} l_{s0} & m_{s0} & m_{s0} & m_F \cdot \cos(\theta) \\ m_{s0} & l_{s0} & m_{s0} & m_F \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_{s0} & m_{s0} & l_{s0} & m_F \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \hline m_F \cdot \cos\theta & m_F \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m_F \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & l_F \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

- **Máquina síncrona trifásica de polos salientes y rotor bobinado** (Fig. 2.7a). En este caso ni tan siquiera la caja de la matriz de acoplamientos que corresponde al estátor es circulante:

$$\begin{bmatrix} l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos(2\cdot\theta) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2\cdot\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2\cdot\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_F \cdot \cos(\theta) \\ m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2\cdot\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) & l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2\cdot\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos(2\cdot\theta) & m_F \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2\cdot\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos(2\cdot\theta) & l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2\cdot\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_F \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \hline m_F \cdot \cos\theta & m_F \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m_F \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & l_F \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

- **Máquina síncrona trifásica de polos salientes e imán permanente** (Fig. 2.7b). Toda la matriz de acoplamiento corresponde al estator y no es circulante (al igual que en el caso anterior):

$$\begin{bmatrix} l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2 \cdot \left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2 \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2 \cdot \left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) & l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2 \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) \\ l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2 \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) & m_{s0} + l_{s2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) & l_{s0} + l_{s2} \cdot \cos\left(2 \cdot \left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

En el caso de la máquina de inducción, las cuatro cajas circulantes de la matriz de acoplamiento dan lugar a que la matriz de impedancias vistas desde el estator sea circulante, aunque no simétrica (debido a que las cajas que representan el acoplamiento entre el estator y el rotor no son simétricas). Por lo tanto, se puede aplicar la transformación de Fortescue y obtener las impedancias de secuencia, siendo diferentes la directa y la inversa porque la matriz de impedancias no es simétrica. La impedancia inversa es del orden de la impedancia de arranque de la máquina, es decir, entre 5 y 7 veces inferior a la impedancia directa.

Sin embargo, en la máquina síncrona de polos lisos e imán permanente, las impedancias directa e inversa son iguales porque la matriz de acoplamiento es circulante y simétrica. No obstante, se debe tener en cuenta que este modelo puede no ajustarse en todas las situaciones al funcionamiento real de esta máquina, ya que ante determinados transitorios se pueden inducir corrientes en el rotor macizo. En este caso, si el rotor es geoméricamente simétrico estas corrientes inducidas se podrán modelizar mediante dos devanados idénticos cortocircuitados en cuadratura (o tres, desfasados a 120°) y la máquina continuará siendo geoméricamente simétrica y, por lo tanto, se podrá aplicar la transformación de Fortescue, aunque en este caso las impedancias directa e inversa serán diferentes porque las cajas de la matriz de acoplamiento que no pertenecen a la diagonal principal no son simétricas, igual que en la máquina de inducción (2.19).

Por último, en las máquinas síncronas de polos lisos y rotor bobinado y en todas las de polos salientes, en rigor no se puede aplicar la transformación de Fortescue porque la máquina no es geoméricamente simétrica y la matriz de impedancias vista desde el estator no es circulante. En realidad no es que no se pueda aplicar la transformación, tan solo es que la matriz \mathbf{Z}_F que se obtiene no es diagonal sino que está llena. Sin embargo, tanto en estas máquinas como en otros elementos de la red que no son geoméricamente simétricos, a efectos prácticos se suele considerar que esta transformación es aplicable cuando los elementos de \mathbf{Z}_F que no están en la diagonal principal son suficientemente pequeños como para despreciarlos [15]. Con estas máquinas se realiza esta aproximación.

En el circuito de la Fig. 2.3 el neutro se ha conectado directamente a tierra (sin impedancia). Si se desea colocar una impedancia en el neutro (Fig. 2.8), ésta puede tener un valor arbitrario, \underline{Z}_n , y el nuevo valor de la matriz \mathbf{Z} será:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a + \underline{Z}_n & \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_n & \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_n \\ \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_n & \underline{Z}_a + \underline{Z}_n & \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_n \\ \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_n & \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_n & \underline{Z}_a + \underline{Z}_n \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Y las ecuaciones de secuencia serán:

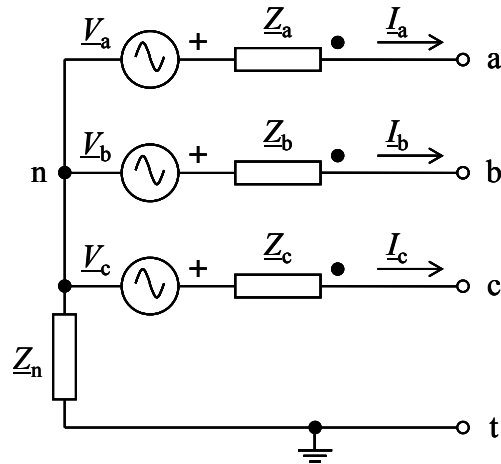


Fig. 2.8. Circuito equivalente de un elemento trifásico activo de tres terminales con conexión a tierra a través de una impedancia.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}_0 + 3 \cdot \underline{Z}_n & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Por lo tanto, en el caso de que se conozca la existencia de una impedancia en el neutro de valor \underline{Z}_n , se pueden utilizar las expresiones anteriores.

2.2.2. Modelo en componentes simétricas de un elemento trifásico pasivo de seis terminales

La Fig. 2.9 representa un elemento trifásico activo de seis terminales y conexión a tierra. Las ecuaciones en notación matricial de este elemento trifásico con alimentación senoidal y en régimen permanente se pueden escribir utilizando el equivalente de Thevenin (en el caso de que exista):

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} + \underline{V}_g \quad (2.26)$$

y utilizando el equivalente de Norton (en el caso de que exista):

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} + \underline{I}_g \quad (2.27)$$

donde:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{U}_{a'} \\ \underline{U}_{b'} \\ \underline{U}_{c'} \end{bmatrix}; \quad \underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \\ \underline{I}_{a'} \\ \underline{I}_{b'} \\ \underline{I}_{c'} \end{bmatrix}; \quad \underline{V}_g = \begin{bmatrix} \underline{V}_a \\ \underline{V}_b \\ \underline{V}_c \\ \underline{V}_{a'} \\ \underline{V}_{b'} \\ \underline{V}_{c'} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

y la matriz de impedancias:

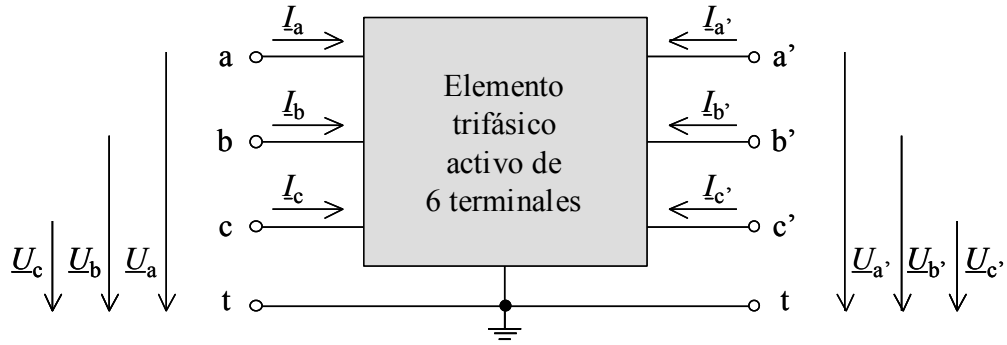


Fig. 2.9. Elemento trifásico activo de seis terminales con conexión a tierra.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} \\ \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} & \underline{Z}_{aa'} & \underline{Z}_{ab'} & \underline{Z}_{ac'} \\ \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_b & \underline{Z}_{bc} & \underline{Z}_{ba'} & \underline{Z}_{bb'} & \underline{Z}_{bc'} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_c & \underline{Z}_{ca'} & \underline{Z}_{cb'} & \underline{Z}_{cc'} \\ \hline \underline{Z}_{a'a} & \underline{Z}_{a'b} & \underline{Z}_{a'c} & \underline{Z}_{a'} & \underline{Z}_{a'b'} & \underline{Z}_{a'c'} \\ \underline{Z}_{b'a} & \underline{Z}_{b'b} & \underline{Z}_{b'c} & \underline{Z}_{b'a'} & \underline{Z}_{b'} & \underline{Z}_{b'c'} \\ \underline{Z}_{c'a} & \underline{Z}_{c'b} & \underline{Z}_{c'c} & \underline{Z}_{c'a'} & \underline{Z}_{c'b'} & \underline{Z}_{c'} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

y siendo $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ e $\mathbf{I}_g = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{V}_g$.

Si se cumple que:

- el elemento trifásico no presenta elementos activos ($\mathbf{V}_g = \mathbf{0}$),
- $\mathbf{Z}_{1,2} = [\mathbf{Z}_{2,1}]^t$.
- el elemento es geoméricamente simétrico, es decir, las impedancias $\mathbf{Z}_{1,1}$ y $\mathbf{Z}_{2,2}$ son simétricas y circulantes, mientras que $\mathbf{Z}_{1,2}$ y $\mathbf{Z}_{2,1}$ sólo son circulantes.

la expresión (2.26), correspondiente al equivalente de Thevenin, se simplifica a:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{U}_{a'} \\ \underline{U}_{b'} \\ \underline{U}_{c'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{aa'} & \underline{Z}_{ab'} & \underline{Z}_{ac'} \\ \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac'} & \underline{Z}_{aa'} & \underline{Z}_{ab'} \\ \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_a & \underline{Z}_{ab'} & \underline{Z}_{ac'} & \underline{Z}_{aa'} \\ \hline \underline{Z}_{aa'} & \underline{Z}_{ac'} & \underline{Z}_{ab'} & \underline{Z}_{a'} & \underline{Z}_{a'b'} & \underline{Z}_{a'b'} \\ \underline{Z}_{ab'} & \underline{Z}_{aa'} & \underline{Z}_{ac'} & \underline{Z}_{a'b'} & \underline{Z}_{a'} & \underline{Z}_{a'b'} \\ \underline{Z}_{ac'} & \underline{Z}_{ab'} & \underline{Z}_{aa'} & \underline{Z}_{a'b'} & \underline{Z}_{a'b'} & \underline{Z}_{a'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \\ \underline{I}_{a'} \\ \underline{I}_{b'} \\ \underline{I}_{c'} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

y la expresión (2.27), correspondiente al equivalente de Norton, se simplifica a:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \\ \underline{I}_{a'} \\ \underline{I}_{b'} \\ \underline{I}_{c'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_a & \underline{Y}_{ab} & \underline{Y}_{ab} & \underline{Y}_{aa'} & \underline{Y}_{ab'} & \underline{Y}_{ac'} \\ \underline{Y}_{ab} & \underline{Y}_a & \underline{Y}_{ab} & \underline{Y}_{ac'} & \underline{Y}_{aa'} & \underline{Y}_{ab'} \\ \underline{Y}_{ab} & \underline{Y}_{ab} & \underline{Y}_a & \underline{Y}_{ab'} & \underline{Y}_{ac'} & \underline{Y}_{aa'} \\ \hline \underline{Y}_{aa'} & \underline{Y}_{ac'} & \underline{Y}_{ab'} & \underline{Y}_{a'} & \underline{Y}_{a'b'} & \underline{Y}_{a'b'} \\ \underline{Y}_{ab'} & \underline{Y}_{aa'} & \underline{Y}_{ac'} & \underline{Y}_{a'b'} & \underline{Y}_{a'} & \underline{Y}_{a'b'} \\ \underline{Y}_{ac'} & \underline{Y}_{ab'} & \underline{Y}_{aa'} & \underline{Y}_{a'b'} & \underline{Y}_{a'b'} & \underline{Y}_{a'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{U}_{a'} \\ \underline{U}_{b'} \\ \underline{U}_{c'} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Realizando la transformación de Fortescue a la expresión (2.30):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_{0'} \\ \underline{U}_{1'} \\ \underline{U}_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_0^I & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_1^I & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{III} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_2^I & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{III} \\ \hline \underline{Z}_0^{IV} & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{II} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_1^{IV} & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_2^{IV} & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{0'} \\ \underline{I}_{1'} \\ \underline{I}_{2'} \end{bmatrix} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} \underline{Z}_2^I = \underline{Z}_1^I \\ \underline{Z}_2^{II} = \underline{Z}_1^{II} \\ \underline{Z}_0^{IV} = \underline{Z}_0^{III} \\ \underline{Z}_1^{IV} = \underline{Z}_2^{III} \\ \underline{Z}_2^{IV} = \underline{Z}_1^{III} \end{cases} \quad (2.32)$$

La matriz no es simétrica porque las cajas III y IV son diferentes. Por ello, se dice que el elemento trifásico no es recíproco.

Algo similar sucede en el caso de la matriz de admitancias de la expresión (2.31):

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{0'} \\ \underline{I}_{1'} \\ \underline{I}_{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_0^I & 0 & 0 & \underline{Y}_0^{III} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_1^I & 0 & 0 & \underline{Y}_1^{III} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_2^I & 0 & 0 & \underline{Y}_2^{III} \\ \hline \underline{Y}_0^{IV} & 0 & 0 & \underline{Y}_0^{II} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_1^{IV} & 0 & 0 & \underline{Y}_1^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_2^{IV} & 0 & 0 & \underline{Y}_2^{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_{0'} \\ \underline{U}_{1'} \\ \underline{U}_{2'} \end{bmatrix} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} \underline{Y}_2^I = \underline{Y}_1^I \\ \underline{Y}_2^{II} = \underline{Y}_1^{II} \\ \underline{Y}_0^{IV} = \underline{Y}_0^{III} \\ \underline{Y}_1^{IV} = \underline{Y}_2^{III} \\ \underline{Y}_2^{IV} = \underline{Y}_1^{III} \end{cases} \quad (2.33)$$

Para representar las ecuaciones de un elemento no recíproco se deber recurrir a fuentes dependientes o a transformadores ideales de relación de transformación compleja, como en el caso de la Fig. 2.10. Normalmente, la representación en T se prefiere para el modelo en impedancias, mientras que la representación en π se prefiere para el modelo en admitancias, aunque ambas representaciones son equivalentes y se puede pasar de la una a la otra.

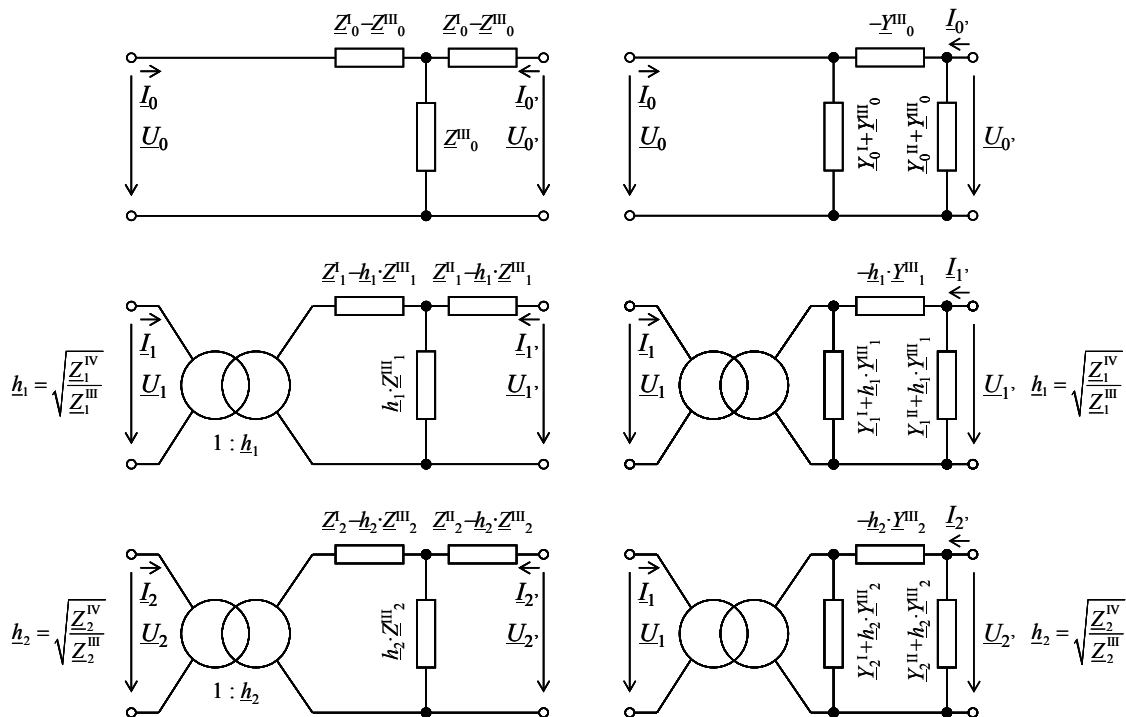


Fig. 2.10. Circuitos de secuencia de un elemento trifásico pasivo de seis terminales no recíproco utilizando transformadores ideales de relación de transformación compleja.

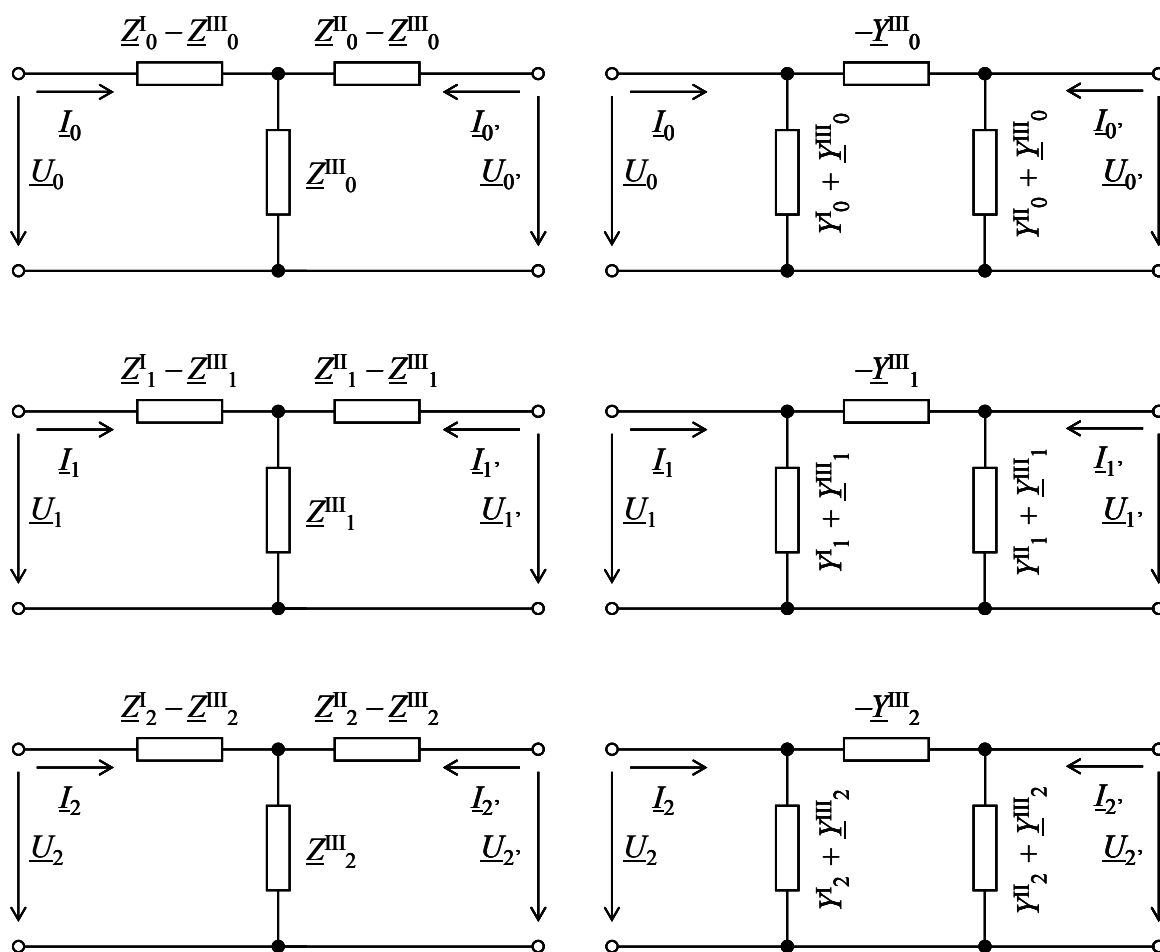


Fig. 2.11. Circuitos de secuencia de un elemento trifásico pasivo de seis terminales recíproco.

Si $\mathbf{Z}_{1,2} = [\mathbf{Z}_{2,1}]^t$ es simétrica, además de circulante, entonces $\underline{Z}_1^{III} = \underline{Z}_1^{IV} = \underline{Z}_2^{III} = \underline{Z}_2^{IV}$ e $\underline{Y}_1^{III} = \underline{Y}_1^{IV} = \underline{Y}_2^{III} = \underline{Y}_2^{IV}$ y tanto la matriz como el elemento trifásico son recíprocos. En este caso no son necesarios ni los transformadores ideales de relación de transformación compleja ni las fuentes dependientes, como se muestra en los circuitos equivalentes en T y en π de la Fig. 2.11, en cuyo caso los esquemas para la secuencia directa e inversa coinciden porque ya se ha comentado que $\mathbf{Z}_{1,1}$ y $\mathbf{Z}_{2,2}$ son simétricas, además de circulantes. Los elementos trifásicos pasivos de seis terminales más significativos son las líneas y los transformadores. En el caso de las líneas se suele trabajar con el esquema equivalente en π , mientras que en el caso de los transformadores se suele utilizar el esquema equivalente en T:

- **Línea de transporte:** se suelen considerar geoméricamente simétricas (sobre todo cuando la línea es transpuesta) en cuyo caso las cuatro cajas de la matriz de admitancias son simétricas y circulantes y, además, las cajas I y II son iguales y las cajas III y IV también son idénticas.

Dependiendo de la longitud de la línea, se debe trabajar con parámetros distribuidos en el caso de líneas largas, o con aproximaciones en este modelo, obteniendo el modelo de parámetros concentrados en π para las líneas de longitud corta, o el modelo longitudinal de parámetros concentrados las líneas de longitud muy corta. En el caso de líneas largas, aplicando la transformación de Fortescue a la matriz de impedancias y de admitancias por unidad de longitud, que son simétricas y circulantes [16], se llega al modelo en componentes simétricas:

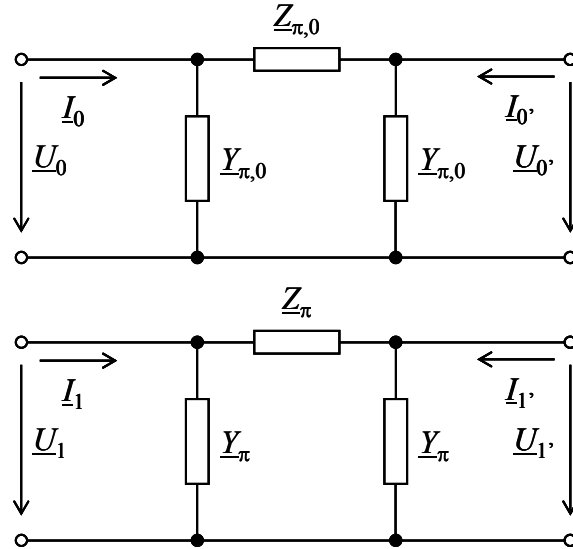


Fig. 2.12. Circuitos de secuencia de una línea de transporte (secuencia inversa igual a secuencia directa).

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_0' \\ I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\pi,0} + 1/Z_{\pi,0} & 0 & 0 & -1/Z_{\pi,0} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\pi} + 1/Z_{\pi} & 0 & 0 & -1/Z_{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{\pi} + 1/Z_{\pi} & 0 & 0 & -1/Z_{\pi} \\ -1/Z_{\pi,0} & 0 & 0 & Y_{\pi,0} + 1/Z_{\pi,0} & 0 & 0 \\ 0 & -1/Z_{\pi} & 0 & 0 & Y_{\pi} + 1/Z_{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -1/Z_{\pi} & 0 & 0 & Y_{\pi} + 1/Z_{\pi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_0' \\ U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

donde se observa que las cajas I y II son idénticas (también son iguales las cajas III y IV). Estas ecuaciones se pueden representar mediante los circuitos equivalentes de la Fig. 2.12.

En la Fig. 2.12 Z_{π} e Y_{π} dependen de la impedancia por unidad de longitud (\underline{z}), de la admitancia por unidad de longitud (\underline{y}), de la constante de propagación ($\underline{\gamma}$) y de la longitud de la línea (l). $Z_{\pi,0}$ e $Y_{\pi,0}$ dependen de la impedancia homopolar por unidad de longitud (\underline{z}_0), de la admitancia homopolar por unidad de longitud (\underline{y}_0), de la constante de propagación para la secuencia homopolar ($\underline{\gamma}_0$) y de la longitud de la línea.

En el caso de líneas de longitudes cortas se realizan aproximaciones en las expresiones de Z_{π} , Y_{π} , $Z_{\pi,0}$ e $Y_{\pi,0}$ resultando:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\pi} &\approx \underline{z} \cdot l = \underline{Z} & ; & & \underline{Z}_{\pi,0} &\approx \underline{z}_0 \cdot l = \underline{Z}_0 \\ \underline{Y}_{\pi} &\approx \underline{y} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\underline{Y}}{2} & ; & & \underline{Y}_{\pi,0} &\approx \underline{y}_0 \cdot \frac{l}{2} = \frac{\underline{Y}_0}{2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si la longitud de la línea es muy corta, se desprecian las admitancias transversales: $\underline{Y}_{\pi} \approx 0$ e $\underline{Y}_{\pi,0} \approx 0$.

En el análisis de faltas no se suele considerar las admitancias en paralelo de los circuitos de secuencia directa e inversa, es decir, $\underline{Y}_{\pi} \approx 0$.

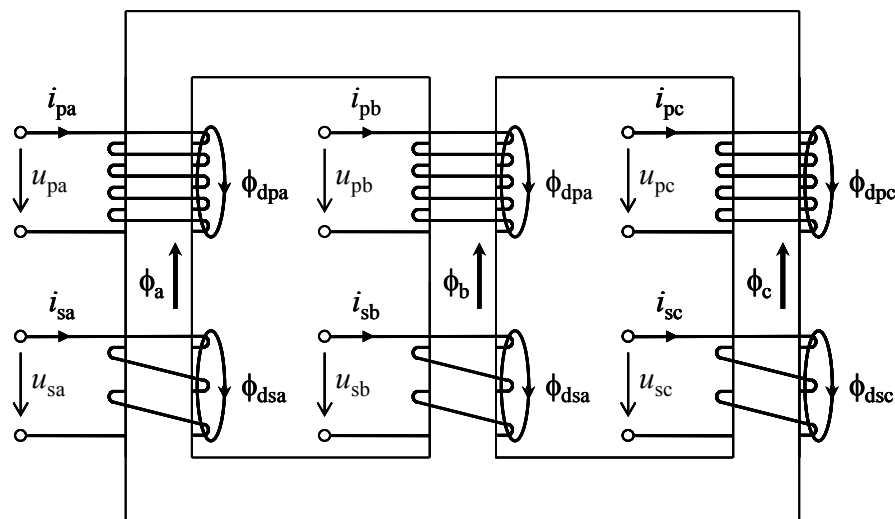


Fig. 2.13. Transformador trifásico de tres columnas.

En el circuito de secuencia homopolar no se puede realizar esta aproximación cuando se trata de faltas a tierra en sistemas de neutro aislado [16]. Por tener un orden de magnitud, la impedancia homopolar $\underline{Z}_{\pi,0}$ suele ser del orden de tres veces la impedancia directa, \underline{Z}_{π} .

- **Transformador trifásico** (representado en la Fig. 2.13, los circuitos equivalentes eléctrico y magnético se muestran en la Fig. 2.14): las ecuaciones eléctricas y magnéticas se pueden escribir en forma matricial para el transformador YNyn0, o con los devanados sin conectar, como:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{p,a} \\ \underline{U}_{p,b} \\ \underline{U}_{p,c} \\ \underline{U}_{s,a} \\ \underline{U}_{s,b} \\ \underline{U}_{s,c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{dp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{dp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{dp} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{ds} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{ds} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{ds} & 0 & 0 & 0 \\ -N_p & 0 & 0 & -N_s & 0 & 0 & \mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_d & \mathfrak{R}_d & \mathfrak{R}_d \\ 0 & -N_p & 0 & -N_s & 0 & 0 & \mathfrak{R}_d & \mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_d & \mathfrak{R}_d \\ 0 & 0 & -N_p & -N_s & 0 & 0 & \mathfrak{R}_d & \mathfrak{R}_d & \mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{p,a} \\ \underline{I}_{p,b} \\ \underline{I}_{p,c} \\ \underline{I}_{s,a} \\ \underline{I}_{s,b} \\ \underline{I}_{s,c} \\ \underline{\phi}_a \\ \underline{\phi}_b \\ \underline{\phi}_c \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

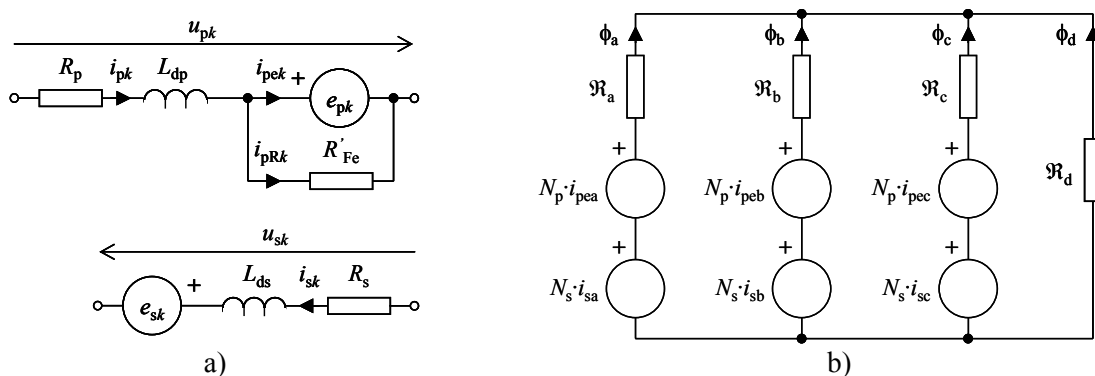


Fig. 2.14. Circuitos equivalentes del transformador trifásico de tres columnas: a) circuito eléctrico equivalente de la fase k; b) circuito magnético equivalente.

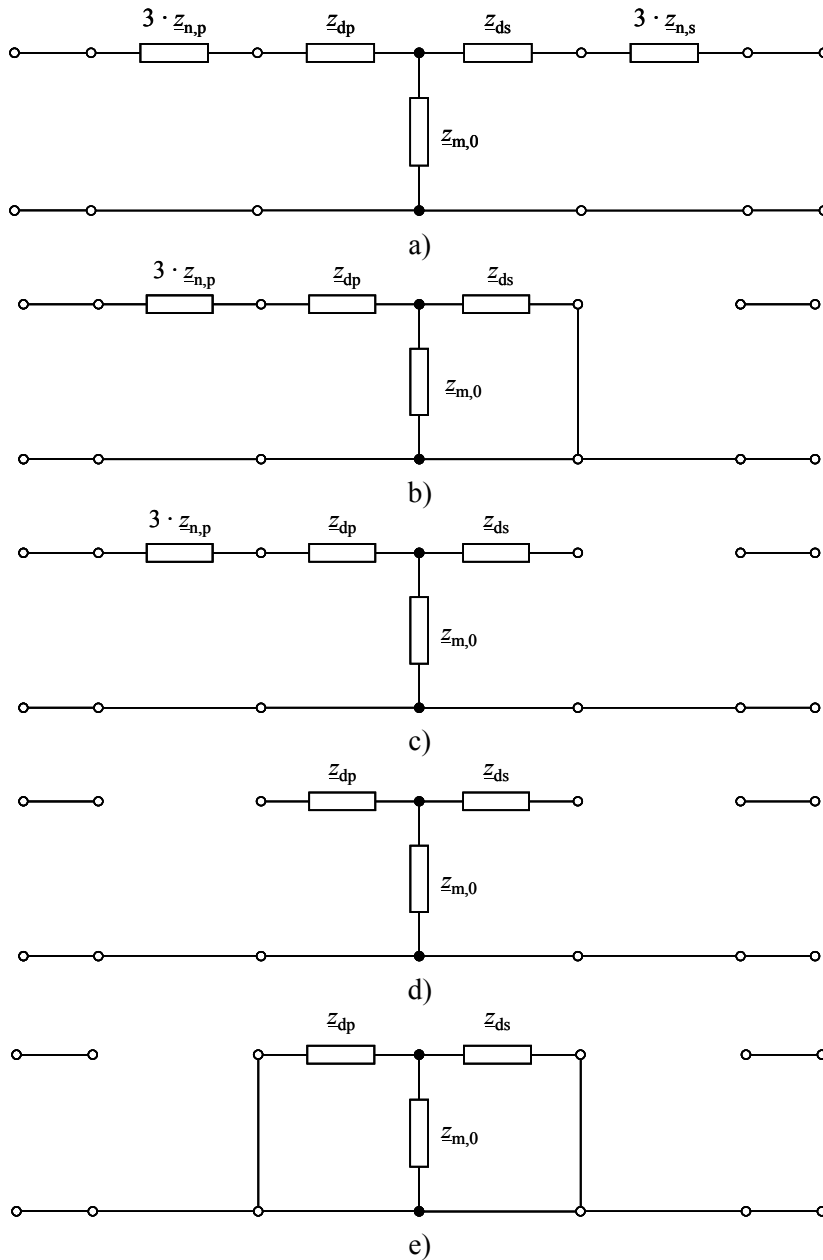


Fig. 2.15. Circuitos de secuencia homopolar del transformador en función de la conexión de los devanados: a) YNyn; b) YNd; c) YNy; d) Yy; e) Dd.

Este modelo corresponde al transformador de tres columnas, pero también es válido para el banco trifásico forzando que $\Re_d = 0$, y también es válido para el banco trifásico de cinco columnas forzando que $\Re_d = \Re_m$.

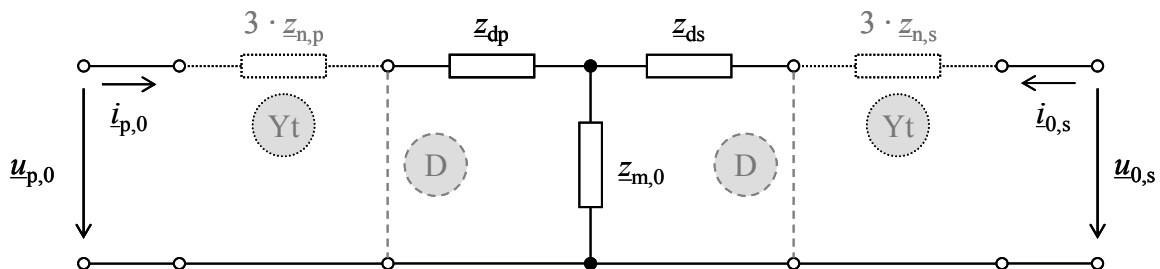


Fig. 2.16. Circuito de secuencia homopolar del transformador con los devanados sin conectar.

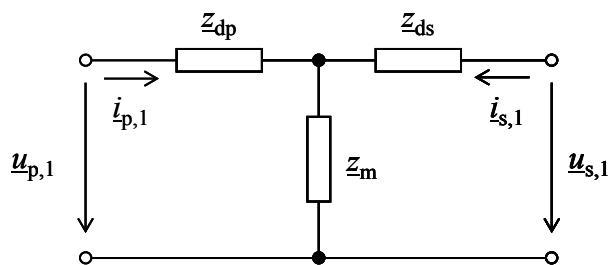


Fig. 2.17. Circuito de secuencia directa (e inversa) del transformador.

Reduciendo a valores por unidad, operando para eliminar los flujos y realizando la transformación de Fortescue se obtiene la matriz de impedancias, la cual es simétrica para esta conexión de los devanados, por lo que este transformador es recíproco:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{p,0} \\ \underline{u}_{p,1} \\ \underline{u}_{p,2} \\ \underline{u}_{s,0} \\ \underline{u}_{s,1} \\ \underline{u}_{s,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}_{dp} + \underline{z}_{m,0} & 0 & 0 & \underline{z}_{m,0} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{z}_{dp} + \underline{z}_m & 0 & 0 & \underline{z}_m & 0 \\ 0 & 0 & \underline{z}_{dp} + \underline{z}_m & 0 & 0 & \underline{z}_m \\ \underline{z}_{m,0} & 0 & 0 & \underline{z}_{ds} + \underline{z}_{m,0} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{z}_m & 0 & 0 & \underline{z}_{ds} + \underline{z}_m & 0 \\ 0 & 0 & \underline{z}_m & 0 & 0 & \underline{z}_{ds} + \underline{z}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{i}_{p,0} \\ \underline{i}_{p,1} \\ \underline{i}_{p,2} \\ \underline{i}_{s,0} \\ \underline{i}_{s,1} \\ \underline{i}_{s,2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Cuando se consideran las conexiones del transformador las submatrices correspondientes a las secuencias directa e inversa no son simétricas porque aparece el índice horario del transformador, dando lugar a un elemento no recíproco. No obstante, en los circuitos con transformadores se suele prescindir del índice horario a la hora de realizar los cálculos y, si es necesario, se añade a posteriori. En cuanto a la submatriz de la secuencia homopolar, sus cuatro elementos dependen de las conexiones, como se muestra en la Fig. 2.15, donde en las conexiones en estrella con neutro se ha supuesto que el neutro está conectado a tierra a través de una impedancia de valor $\underline{z}_{n,p}$ ó $\underline{z}_{n,s}$ dependiendo de que se trate del neutro del primario o del secundario. Todos estos circuitos se pueden resumir en el mostrado en la Fig. 2.16.

En el análisis de faltas no se suele considerar la admitancia en paralelo de los circuitos de secuencia directa e inversa, ya que $z_m = 25 \div 250$ pu, mientras que $z_{dp} = z_{ds} \approx z_{cc} / 2 = 0.02 \div 0.065$ pu. El valor de $\underline{z}_{m,0}$ depende de la topología del circuito magnético: en el caso del banco trifásico y del transformador de cinco columnas $\underline{z}_{m,0} = \underline{z}_m = 25 \div 250$ pu, en el caso del transformador de tres columnas $\underline{z}_{m,0} = 0.1 \div 1.5$ pu.

2.2.3. Conexión de dos elementos trifásicos

La Fig. 2.18 representa la conexión de un elemento trifásico activo de tres terminales (cuya matriz de impedancias es \underline{Z}_s) conectado a un elemento trifásico pasivo de seis terminales con matriz de impedancias \underline{Z}_f , o con matriz de admitancias $\underline{Y}_f = \underline{Z}_f^{-1}$.

La ecuación, en notación matricial, con alimentación senoidal y en régimen permanente para el elemento trifásico activo de tres terminales es:

$$\underline{U} = \underline{V}_s - \underline{Z}_s \cdot \underline{I} \quad (2.38)$$

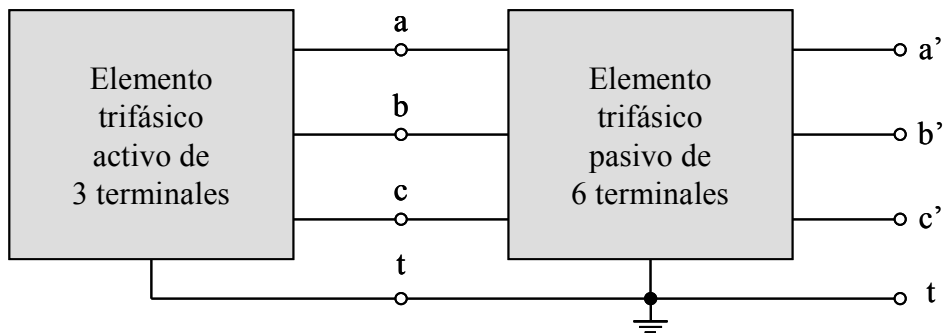


Fig. 2.18. Conexión de un elemento trifásico activo de tres terminales con un elemento trifásico pasivo de seis terminales.

A las ecuaciones (2.38) hay que añadir las del elemento pasivo, que podrán estar dadas en impedancias o en admitancias. Por ejemplo si se trata de un transformador en el que no se considere el índice horario, las ecuaciones son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_f^I & \mathbf{Z}_f^{III} \\ \mathbf{Z}_f^{III} & \mathbf{Z}_f^{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Los circuitos de secuencia que se obtienen en el caso de un transformador donde no se considera el índice horario se han representado en la Fig. 2.19a. Si se desprecian las impedancias en paralelo se obtienen los circuitos de la Fig. 2.19b.

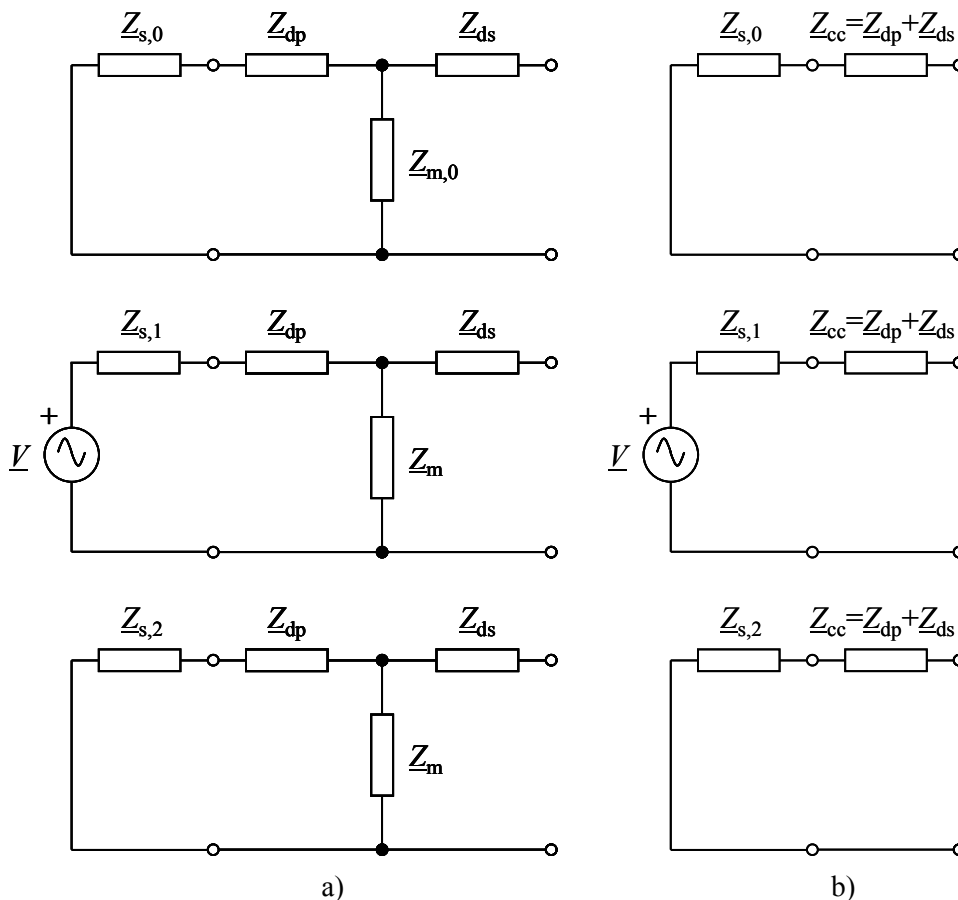


Fig. 2.19. Circuitos de secuencia para la conexión de un elemento trifásico activo de tres terminales con un transformador: a) exacto; b) aproximado.

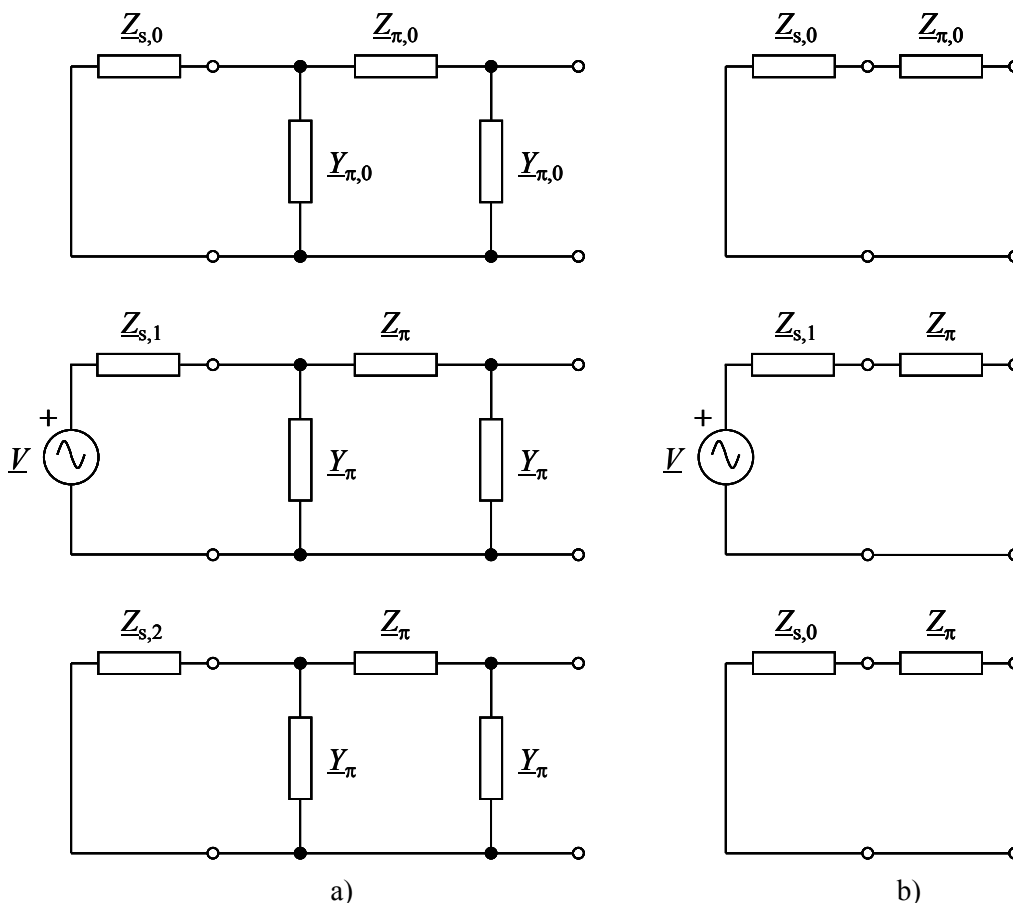


Fig. 2.20. Circuitos de secuencia para la conexión de un elemento trifásico activo de tres terminales con una línea de transporte: a) exacto; b) aproximado.

Y si se trata de una línea, las ecuaciones son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_f^I & \mathbf{Y}_f^{III} \\ \mathbf{Y}_f^{III} & \mathbf{Y}_f^I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}' \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Los circuitos de secuencia que se obtienen en el caso de una línea se representan en la Fig. 2.20a. Si se desprecian las admitancias en paralelo se obtienen los circuitos de la Fig. 2.20b.

Por tanto, si se toman los circuitos equivalentes aproximados de las líneas de transporte, o de los transformadores, la conexión de un elemento trifásico activo de tres terminales con un elemento trifásico pasivo de seis terminales da lugar a los circuitos de secuencia de la Fig. 2.21.

En la Tabla 2.1 se muestran los valores típicos de las impedancia de secuencia para diferentes elementos.

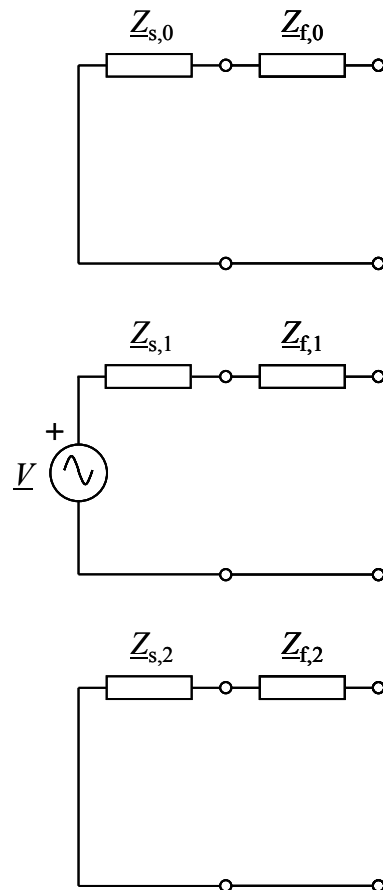


Fig. 2.21. Circuitos de secuencia aproximados para la conexión de un elemento trifásico activo de tres terminales con un elemento trifásico pasivo de seis terminales.

Tabla 2.1. Valores típicos de las impedancias de secuencia.

Elemento	Comp. directa	Inversa	Homopolar
Mq. síncrona polos salientes			
▪ Con devanados amortiguad.	$x_1 \approx 1$ pu	$x_2 \approx 0.2 \cdot x_1$	$x_0 \approx (0.1 \div 0.7) \cdot x_1$
▪ Sin devanados amortiguad.		$x_2 \approx 0.4 \cdot x_1$	
Mq. síncrona polos lisos	$x_1 \approx 1.65$ pu	$x_2 \approx 0.1 \cdot x_1$	$x_0 \approx (0.1 \div 0.7) \cdot x_1$
Mq. induc. neutro no conect.	$z_1 \approx 1$ pu	$z_2 \approx (0.14 \div 0.2) \cdot z_1$	$z_0 \approx \infty$
Transformador			
▪ Estrella – zig-zag			$x_0 \approx 0.1 \cdot x_1$
▪ Estrella – estrella	$x_1 \approx 0.1$ pu	$x_2 = x_1$	$x_0 \approx 10 \cdot x_1$
▪ Triángulo – estrella neutro			$x_0 \approx (0.8 \div 1) \cdot x_1$
Líneas aéreas			
▪ Sin hilo de tierra	$x_1 \approx 0.35 \frac{\Omega}{\text{km}}$	$x_2 = x_1$	$x_0 \approx (3 \div 3.5) \cdot x_1$
▪ Con hilo de tierra			$x_0 \approx 2 \cdot x_1$
Líneas subterráneas			
▪ Unipolares	$x_1 \approx 0.1 \frac{\Omega}{\text{km}}$	$x_2 = x_1$	$x_0 \approx (1 \div 1.2) \cdot x_1$
▪ Tripolares			$x_0 \approx (3 \div 3.5) \cdot x_1$

2.3. Modelo del hueco de tensión

La Fig. 2.22 muestra el sistema a estudiar para obtener las expresiones de los huecos de tensión. Este sistema está compuesto por un elemento trifásico activo de tres terminales de impedancias \underline{Z}_{s0} , \underline{Z}_{s1} y \underline{Z}_{s2} y un elemento trifásico pasivo de seis terminales, de impedancias \underline{Z}_{f0} , \underline{Z}_{f1} y \underline{Z}_{f2} .

Se supone que se produce un cortocircuito en el punto f y que se está analizando la tensión residual en el *punto de conexión común*, pcc, donde están conectados otros usuarios, bien directamente, o bien a través de transformadores.

Este modelo recibe el nombre de *divisor de tensión* debido al hecho de que cuando se produce un cortocircuito trifásico en el punto f, y despreciando cualquier consumo conectado, la tensión en pcc es la del divisor de tensión formado por \underline{Z}_{s1} y \underline{Z}_{f1} .

2.4. Determinación de los huecos de tensión a partir de las faltas que los originan

En este apartado se determinan los diferentes tipos de huecos de tensión a partir del tipo de falta que los origina, de la conexión de la carga y, finalmente, de su posible transmisión a otros niveles de tensión mediante transformadores.

2.4.1. Falta trifásica

En la Fig. 2.23 se representa el sistema trifásico de la Fig. 2.22 cuando se produce una falta trifásica en el punto f. Para este tipo de falta se cumple que:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{a'b'} = \underline{U}_{b'c'} = \underline{U}_{c'a'} = 0 & \Rightarrow \underline{U}_{a'} = \underline{U}_{b'} = \underline{U}_{c'} \\ \underline{I}_{a'} + \underline{I}_{b'} + \underline{I}_{c'} = 0 & \end{aligned} \quad (2.41)$$

El valor de la tensión en el punto f, en componentes simétricas es:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{0'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + \underline{U}_{b'} + \underline{U}_{c'}) = \underline{U}_{a'} \\ \underline{U}_{1'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{b'} + a^2 \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{a'}) = 0 \\ \underline{U}_{2'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{b'} + a \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{a'}) = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

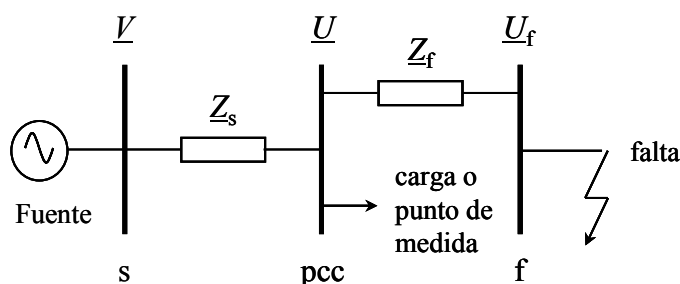


Fig. 2.22. Modelo del hueco de tensión a partir de un divisor de tensión.

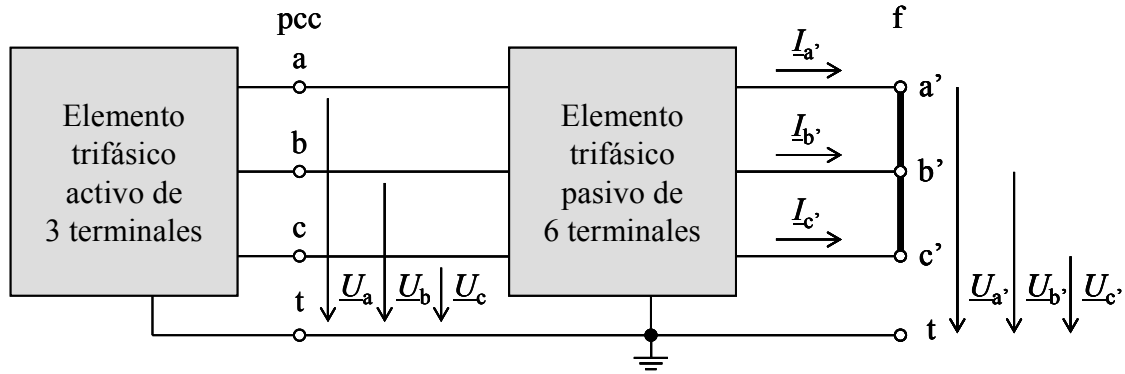


Fig. 2.23. Esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta trifásica en el punto f .

y la intensidad en componentes simétricas:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{0'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + \underline{I}_{b'} + \underline{I}_{c'}) = 0 \\ \underline{I}_{1'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + a \cdot \underline{I}_{b'} + a^2 \cdot \underline{I}_{c'}) \\ \underline{I}_{2'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + a^2 \cdot \underline{I}_{b'} + a \cdot \underline{I}_{c'})\end{aligned}\quad (2.43)$$

Por lo tanto este tipo de falta impone las condiciones:

$$\underline{U}_{1'} = 0 \quad ; \quad \underline{U}_{2'} = 0 \quad ; \quad \underline{I}_{0'} = 0 \quad (2.44)$$

las cuales se han impuesto en los circuitos de la Fig. 2.24. Resolviendo estos circuitos se obtiene la tensión en el punto pcc.

Se observa que las tensiones homopolar, directa e inversa en el pcc son las del correspondiente divisor de tensión entre \underline{Z}_{s1} y \underline{Z}_{f1} . Al resolver el circuito se obtiene:

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= 0 \\ \underline{U}_1 &= \underline{h} \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 &= 0\end{aligned}\quad (2.45)$$

donde \underline{h} es la *profundidad* del hueco, entendiéndose por ella la tensión residual que se tiene en el pcc durante el hueco:

$$\underline{h} = h \left| \varphi_{sf} \right| = \frac{\underline{Z}_{f1}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{f1}} = \frac{Z_{f1} \left| \operatorname{atan} \left(\frac{X_{f1}}{R_{f1}} \right) \right|}{\left| Z_{s1} + Z_{f1} \right| \left| \operatorname{atan} \left(\frac{X_{s1} + X_{f1}}{R_{s1} + R_{f1}} \right) \right|} \quad (2.46)$$

Antes del hueco, la componente directa de la tensión, \underline{U}_1 , tiene el mismo ángulo que \underline{V} que, a su vez, coincide con el ángulo en la fase a de la alimentación, $\underline{V} = \underline{V}_a = V \underline{\alpha}$. Cuando se produce el hueco, la componente directa de la tensión en el pcc, \underline{U}_1 , cambia su ángulo a $\alpha + \varphi_{sf}$, y se dice que se ha producido un *salto de fase* en la tensión del pcc:

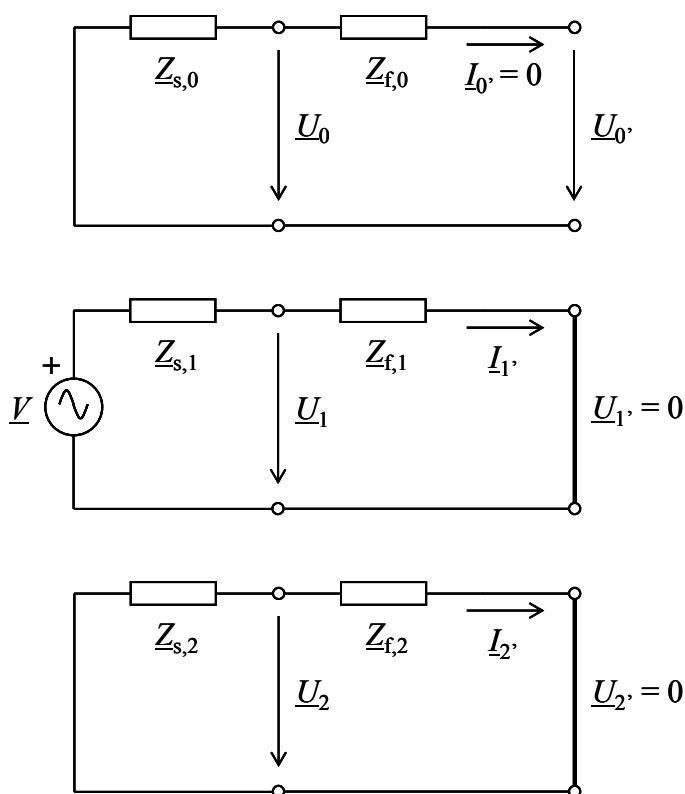


Fig. 2.24. Circuitos equivalentes de secuencia para un falta trifásica.

$$\varphi_{sf} = \text{atan} \left(\frac{X_{f,1}}{R_{f,1}} \right) - \text{atan} \left(\frac{X_{s,1} + X_{f,1}}{R_{s,1} + R_{f,1}} \right) \quad (2.47)$$

Si las impedancias $\underline{Z}_{s,1}$ y $\underline{Z}_{f,1}$ tienen el mismo ángulo, no se produce salto de fase durante el hueco de tensión ($\varphi_{sf} = 0^\circ$). Como $\underline{Z}_{s,1}$ corresponde a la impedancia equivalente de Thevenin de todos los elementos existentes entre el pcc y el generador, estará formada por las impedancias del generador o generadores equivalentes, más las de las líneas y los transformadores. De igual manera, $\underline{Z}_{f,1}$ representa la impedancia de todos los elementos pasivos entre el pcc y el punto f. Por lo tanto incluirá las impedancias de todas las líneas y transformadores. Si el punto pcc está suficientemente alejado del o de los generadores, como para que el efecto de la impedancia de los generadores en la impedancia total no sea importante, entonces sólo influirán las impedancias de las líneas y de los transformadores, tanto en $\underline{Z}_{s,1}$ como en $\underline{Z}_{f,1}$. Por su lado, las impedancias de los transformadores son muy inductivas ($r/x = 0.02 \div 0.2$). Sin embargo, la relación r/x en las líneas depende de la tipología (aéreas o subterráneas).

En la Tabla 2.2 se muestran valores de la relación r/x para líneas aéreas y subterráneas de 11 kV en función de la sección de los conductores [17]. Si las líneas entre el pcc y el generador son del mismo tipo que las líneas entre el pcc y el punto f (es decir, ambas son aéreas o subterráneas) las impedancias $\underline{Z}_{s,1}$ y $\underline{Z}_{f,1}$ tendrán ángulos similares, por lo que se podrá realizar la hipótesis de que no se produce salto de fase. Las ecuaciones (2.45) en variables de fase son las mostradas en (2.48), y corresponden a los **huecos tipo A** definidos por Bollen en [17].

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_a = \underline{h} \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_b = a^2 \cdot \underline{h} \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c = a \cdot \underline{h} \cdot \underline{V} \end{cases} \quad (2.48)$$

Tabla 2.2. Relación r/x en líneas de transporte aéreas y subterráneas

Sección	Aérea	Subterránea
50 mm ²	1.034	4.241
150 mm ²	0.371	1.639
300 mm ²	0.205	0.908

Por tanto los huecos tipo A son originados por faltas trifásicas, o bien por la conexión de una carga trifásica equilibrada de elevada potencia en el punto f.

2.4.2. Falta trifásica a tierra

En la Fig. 2.25 se representa el esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta trifásica a tierra en el punto f. Para este tipo de falta se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_{a'b'} = \underline{U}_{b'c'} = \underline{U}_{c'a'} = 0 \\ \underline{U}_{c'} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{U}_{a'} = \underline{U}_{b'} = \underline{U}_{c'} = 0 \quad (2.49)$$

La tensión en el punto f, en componentes simétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_{0'} = (\underline{U}_{a'} + \underline{U}_{b'} + \underline{U}_{c'})/3 = 0 \\ \underline{U}_{1'} = (\underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{b'} + a^2 \cdot \underline{U}_{c'})/3 = (\underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{a'})/3 = 0 \\ \underline{U}_{2'} = (\underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{b'} + a \cdot \underline{U}_{c'})/3 = (\underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{a'})/3 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.50)$$

Por lo tanto, este tipo de falta impone las condiciones:

$$\underline{U}_{0'} = 0 \quad ; \quad \underline{U}_{1'} = 0 \quad ; \quad \underline{U}_{2'} = 0 \quad (2.51)$$

Las cuales se han impuesto en los circuitos de la Fig. 2.26. Resolviendo estos se obtiene la tensión en el pcc:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_0 = 0 \\ \underline{U}_1 = \underline{h} \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

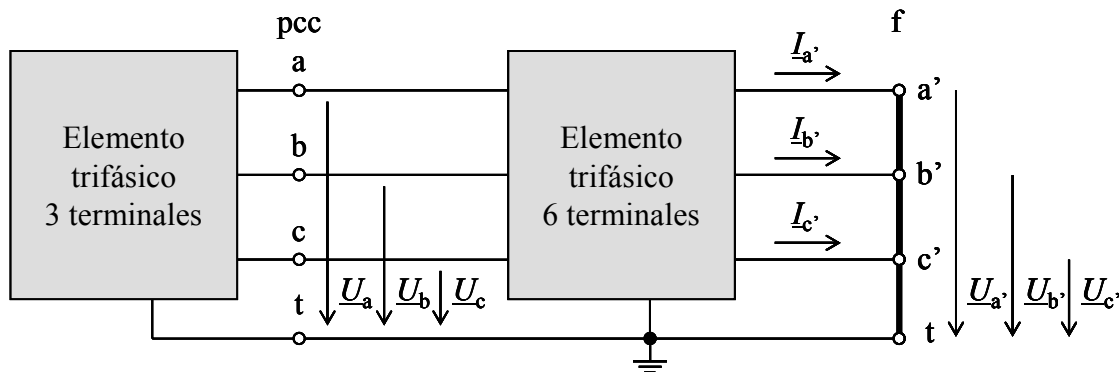


Fig. 2.25. Esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta trifásica a tierra en el punto f.

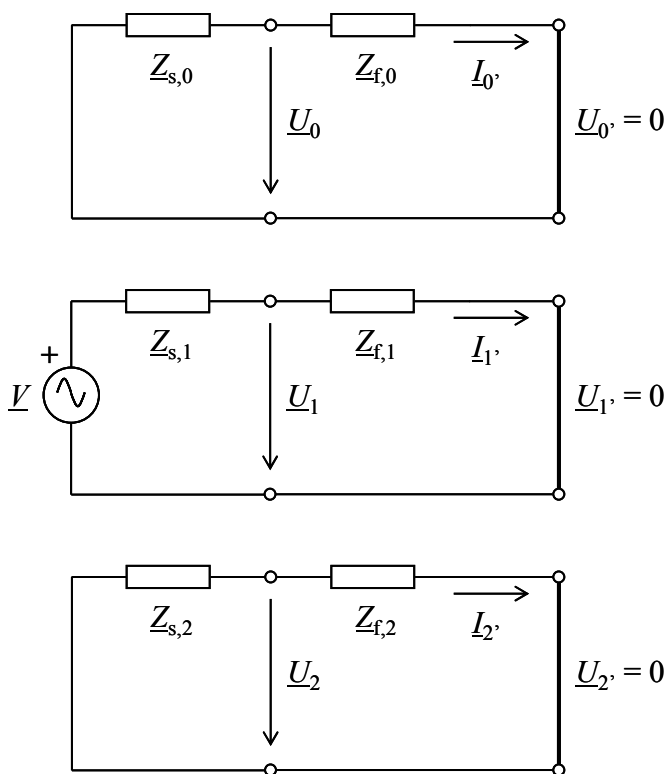


Fig. 2.26. Circuitos equivalentes de secuencia para un falta trifásica a tierra.

Las ecuaciones (2.52) para la falta trifásica a tierra coinciden con las obtenidas para la falta trifásica en (2.45). Por lo tanto, el valor de la profundidad, h , y el del salto de fase, φ_{sf} , son los definidos en las ecuaciones (2.46) y (2.47) respectivamente. Al coincidir las ecuaciones de secuencia de la falta trifásica a tierra con las de la falta trifásica, también coinciden las ecuaciones en variables de fase mostradas en (2.48), que tal como se comentó en el apartado anterior corresponden a los **huecos tipo A** definidos en [17].

2.4.3. Falta fase–tierra

En el sistema de la Fig. 2.27 se ha producido una falta entre la fase a y tierra en el punto f. Para este tipo de falta se cumple que:

$$\underline{U}_a = 0 \quad ; \quad \underline{I}_b = \underline{I}_c = 0 \tag{2.53}$$

La tensión en el punto f, en componentes simétricas, es:

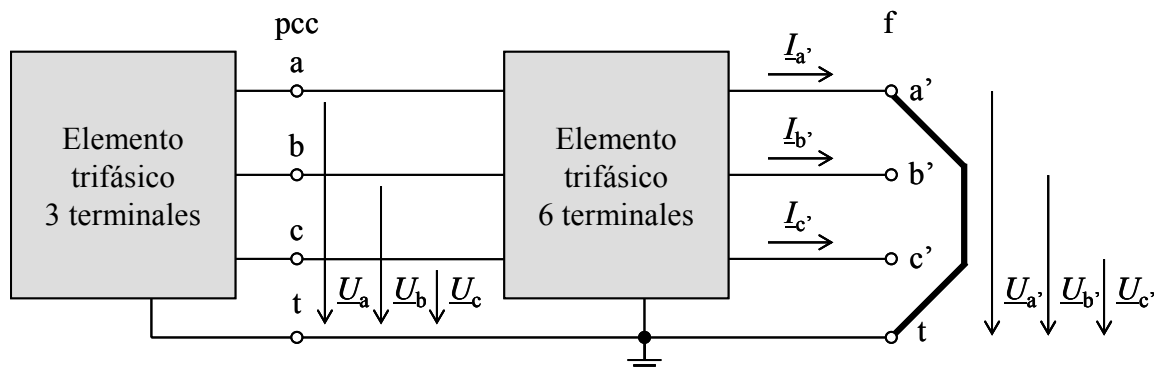


Fig. 2.27. Esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta fase a – tierra en el punto f.

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{0'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + \underline{U}_{b'} + \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{b'} + \underline{U}_{c'}) \\ \underline{U}_{1'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{b'} + a^2 \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (a \cdot \underline{U}_{b'} + a^2 \cdot \underline{U}_{c'}) \\ \underline{U}_{2'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{b'} + a \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 \cdot \underline{U}_{b'} + a \cdot \underline{U}_{c'}) \end{aligned} \right\} \underline{U}_{0'} + \underline{U}_{1'} + \underline{U}_{2'} = 0 \quad (2.54)$$

El valor de las intensidades en componentes simétricas es:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_{0'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + \underline{I}_{b'} + \underline{I}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot \underline{I}_{a'} \\ \underline{I}_{1'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + a \cdot \underline{I}_{b'} + a^2 \cdot \underline{I}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot \underline{I}_{a'} \\ \underline{I}_{2'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + a^2 \cdot \underline{I}_{b'} + a \cdot \underline{I}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot \underline{I}_{a'} \end{aligned} \right\} \underline{I}_{0'} = \underline{I}_{1'} = \underline{I}_{2'} \quad (2.55)$$

Este tipo de falta impone las condiciones:

$$\underline{U}_{0'} + \underline{U}_{1'} + \underline{U}_{2'} = 0 \quad ; \quad \underline{I}_{0'} = \underline{I}_{1'} = \underline{I}_{2'} = 0 \quad (2.56)$$

Estas condiciones se han impuesto en los tres circuitos de la Fig. 2.28. La tensión del pcc suponiendo que $\underline{Z}_{s,0} = \underline{Z}_{s,1} = \underline{Z}_{s,2} = \underline{Z}_s$ vale:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{0'} &= -\frac{1}{3} \cdot (1-h) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_{1'} &= \frac{1}{3} \cdot (2+h) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_{2'} &= -\frac{1}{3} \cdot (1-h) \cdot \underline{V} \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde:

$$\underline{h} = h \angle \varphi_{sf} = \frac{(\underline{Z}_{f,0} + \underline{Z}_{f,1} + \underline{Z}_{f,2})}{3 \cdot \underline{Z}_s + (\underline{Z}_{f,0} + \underline{Z}_{f,1} + \underline{Z}_{f,2})} \quad (2.58)$$

Si las impedancias $3 \cdot \underline{Z}_s$ y $(\underline{Z}_{f,0} + \underline{Z}_{f,1} + \underline{Z}_{f,2})$ presentan el mismo ángulo, no se produciría salto de fase durante el hueco de tensión ($\varphi_{sf} = 0^\circ$).

Las ecuaciones (2.57) en variables de fase son:

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{h} \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_b &= a^2 \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c &= a \cdot \underline{V} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Las ecuaciones (2.59) corresponden a los **huecos tipo B** definidos en [17].

Si la falta se hubiera producido entre la fase b y tierra, la tensión en el pcc en componentes simétricas y en variables de fase sería:

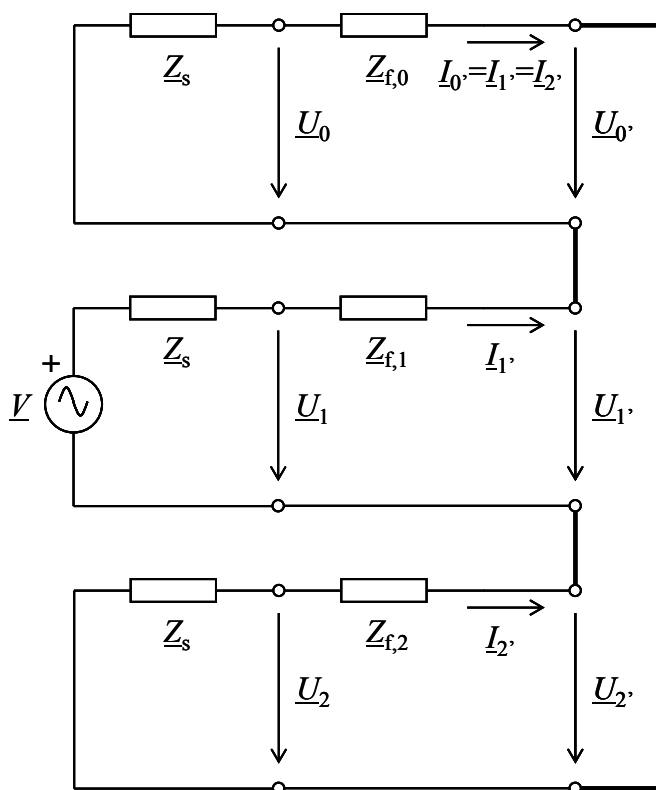


Fig. 2.28. Circuitos equivalentes de secuencia para un falta fase a – tierra.

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{U}_0 &= -\frac{1}{3} \cdot (1-\underline{h}) \cdot a^2 \cdot \underline{V} \\
 \underline{U}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (2+\underline{h}) \cdot \underline{V} \\
 \underline{U}_2 &= -\frac{1}{3} \cdot (1-\underline{h}) \cdot a \cdot \underline{V}
 \end{aligned} \right\} ; \left. \begin{aligned}
 \underline{U}_a &= \underline{V} \\
 \underline{U}_b &= a^2 \cdot \underline{h} \cdot \underline{V} \\
 \underline{U}_c &= a \cdot \underline{V}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Análogamente, si la falta se hubiera producido entre la fase c y tierra:

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{U}_0 &= -\frac{1}{3} \cdot (1-\underline{h}) \cdot a^2 \cdot \underline{V} \\
 \underline{U}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (2+\underline{h}) \cdot a \cdot \underline{V} \\
 \underline{U}_2 &= -\frac{1}{3} \cdot (1-\underline{h}) \cdot \underline{V}
 \end{aligned} \right\} ; \left. \begin{aligned}
 \underline{U}_a &= \underline{V} \\
 \underline{U}_b &= a^2 \cdot \underline{V} \\
 \underline{U}_c &= a \cdot \underline{h} \cdot \underline{V}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

2.4.4. Falta fase–fase

En la Fig. 2.29 se representa el esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta fase b – fase c en el punto f, donde se cumple que:

$$\underline{U}_{b'c'} = 0 \Rightarrow \underline{U}_{b'} = \underline{U}_{c'} \quad (2.62)$$

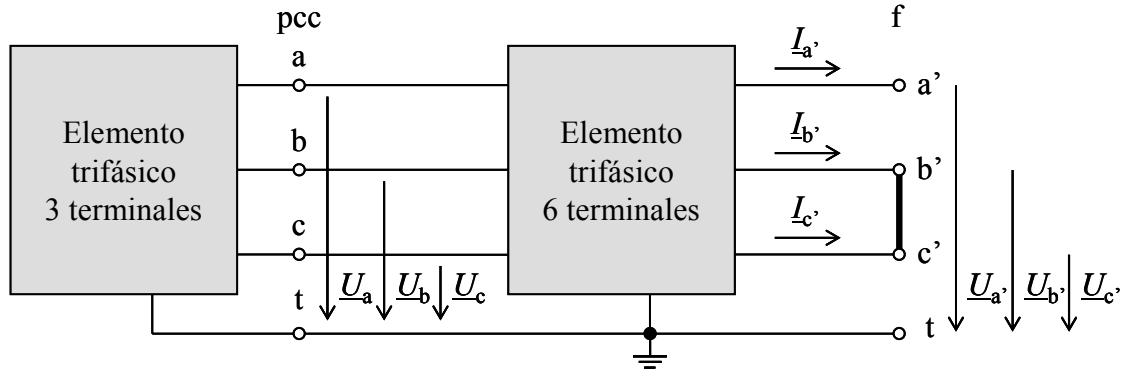


Fig. 2.29. Esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta fase b – fase c en el punto f.

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_{a'} &= 0 \\ \underline{I}_{b'} &= -\underline{I}_{c'} \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

El valor de la tensión en el punto f, en componentes simétricas es:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + \underline{U}_{b'} + \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + 2 \cdot \underline{U}_{b'}) \\ \underline{U}_{1'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a \cdot \underline{U}_{b'} + a^2 \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} - \underline{U}_{b'}) \\ \underline{U}_{2'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + a^2 \cdot \underline{U}_{b'} + a \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} - \underline{U}_{b'}) \end{aligned} \right\} \quad \underline{U}_{1'} = \underline{U}_{2'} \quad (2.64)$$

El valor de las intensidades, en componentes simétricas es:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_{0'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + \underline{I}_{b'} + \underline{I}_{c'}) = 0 \\ \underline{I}_{1'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + a \cdot \underline{I}_{b'} + a^2 \cdot \underline{I}_{c'}) = j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{I}_{b'} \\ \underline{I}_{2'} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + a^2 \cdot \underline{I}_{b'} + a \cdot \underline{I}_{c'}) = -j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{I}_{b'} \end{aligned} \right\} \quad \underline{I}_{1'} + \underline{I}_{2'} = 0 \quad (2.65)$$

Por lo tanto, este tipo de falta impone las condiciones:

$$\underline{U}_{1'} = \underline{U}_{2'} \quad ; \quad \underline{I}_{0'} = 0 \quad ; \quad \underline{I}_{1'} + \underline{I}_{2'} = 0 \quad (2.66)$$

Imponiendo estas condiciones en los circuitos de la Fig. 2.30 se deduce la tensión del pcc suponiendo que $\underline{Z}_{S1} = \underline{Z}_{S2} = \underline{Z}_S$.

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= 0 \\ \underline{U}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + h) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - h) \cdot \underline{V} \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde:

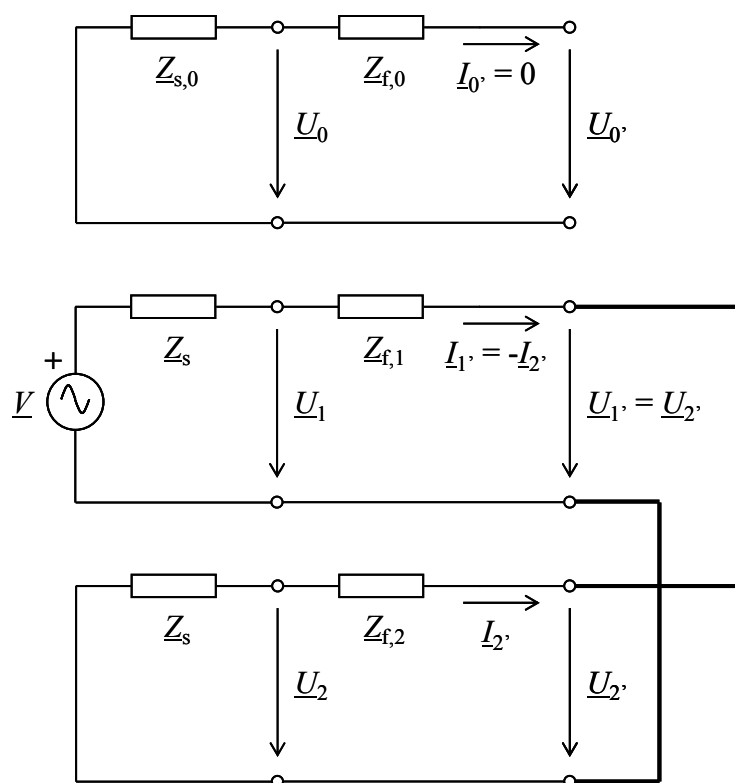


Fig. 2.30. Circuitos equivalentes de secuencia para un falta fase b - fase c.

$$\underline{h} = h \Big|_{\varphi_{sf}} = \frac{(\underline{Z}_{f,1} + \underline{Z}_{f,2})}{2 \cdot \underline{Z}_s + (\underline{Z}_{f,1} + \underline{Z}_{f,2})} \tag{2.68}$$

Si las impedancias $2 \cdot \underline{Z}_s$ y $(\underline{Z}_{f,1} + \underline{Z}_{f,2})$ presentan el mismo ángulo no se producirá salto de fase durante el hueco de tensión ($\varphi_{sf} = 0^\circ$). Las ecuaciones (2.67) en variables de fase son:

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{V} \\ \underline{U}_b &= \left(-\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \right) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c &= \left(-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \right) \cdot \underline{V} \end{aligned} \tag{2.69}$$

Las ecuaciones (2.69) corresponden a los **huecos tipo C** definidos en [17]. Si la falta se hubiera producido entre las fases c y a, la tensión en el pcc, tanto en componentes simétricas como en notación fasorial, sería:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= 0 \\ \underline{U}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \underline{h}) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot a \cdot \underline{V} \end{aligned} \right\} ; \left. \begin{aligned} \underline{U}_a &= \frac{1}{4} \cdot [(1 + 3 \cdot \underline{h}) + j \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \underline{h})] \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_b &= a^2 \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c &= \frac{1}{4} \cdot [(1 - 3 \cdot \underline{h}) + j \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \underline{h})] \cdot \underline{V} \end{aligned} \right\} \tag{2.70}$$

Si la falta se hubiera producido entre las fases a y b la tensión en el punto pcc, tanto en componentes simétricas como notación fasorial, sería:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_0 = 0 \\ \underline{U}_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \underline{h}) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{a}^2 \cdot \underline{V} \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} \underline{U}_a = \frac{1}{4} \cdot \left[(1 + 3 \cdot \underline{h}) - j \cdot \sqrt{3} \cdot (1 - \underline{h}) \right] \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_b = \frac{1}{4} \cdot \left[(1 - 3 \cdot \underline{h}) - j \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + \underline{h}) \right] \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c = \underline{a} \cdot \underline{V} \end{array} \right\} \quad (2.71)$$

2.4.5. Falta fase–fase–tierra

En la Fig. 2.31 se representa el esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta entre las fases b y c y tierra en el punto f. En esta falta se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_{b'c'} = 0 \\ \underline{U}_{c'} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{U}_{b'} = 0 \quad (2.72)$$

$$\underline{I}_{a'} = 0 \quad (2.73)$$

La tensión en el punto f en componentes simétricas es:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_{0'} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + \underline{U}_{b'} + \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot \underline{U}_{a'} \\ \underline{U}_{1'} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + \underline{a} \cdot \underline{U}_{b'} + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot \underline{U}_{a'} \\ \underline{U}_{2'} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{a'} + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{b'} + \underline{a} \cdot \underline{U}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot \underline{U}_{a'} \end{array} \right\} \quad \underline{U}_{0'} = \underline{U}_{1'} = \underline{U}_{2'} \quad (2.74)$$

El valor de las intensidades en componentes simétricas es:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_{0'} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + \underline{I}_{b'} + \underline{I}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{b'} + \underline{I}_{c'}) \\ \underline{I}_{1'} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{b'} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{I}_{b'} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{c'}) \\ \underline{I}_{2'} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{a'} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{b'} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{c'}) = \frac{1}{3} \cdot (\underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{b'} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{c'}) \end{array} \right\} \quad \underline{I}_{0'} + \underline{I}_{1'} + \underline{I}_{2'} = 0 \quad (2.75)$$

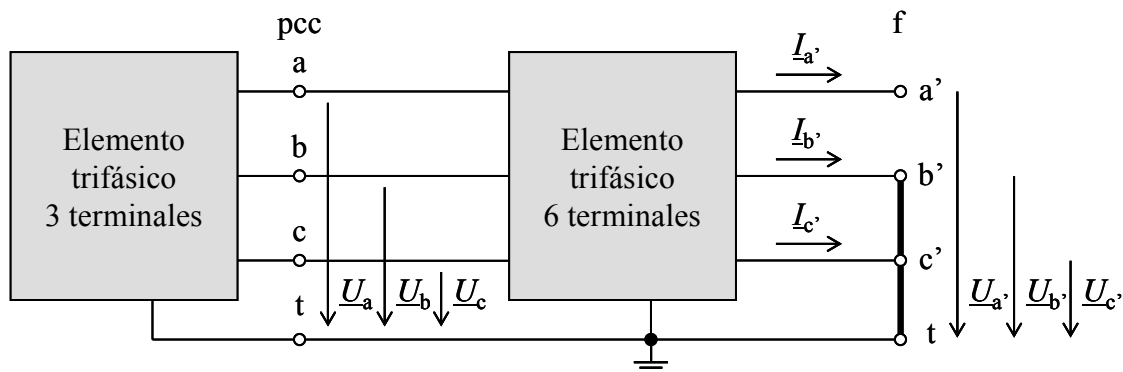


Fig. 2.31. Esquema de un sistema trifásico cuando se produce una falta fase b – fase c – tierra en el punto f.

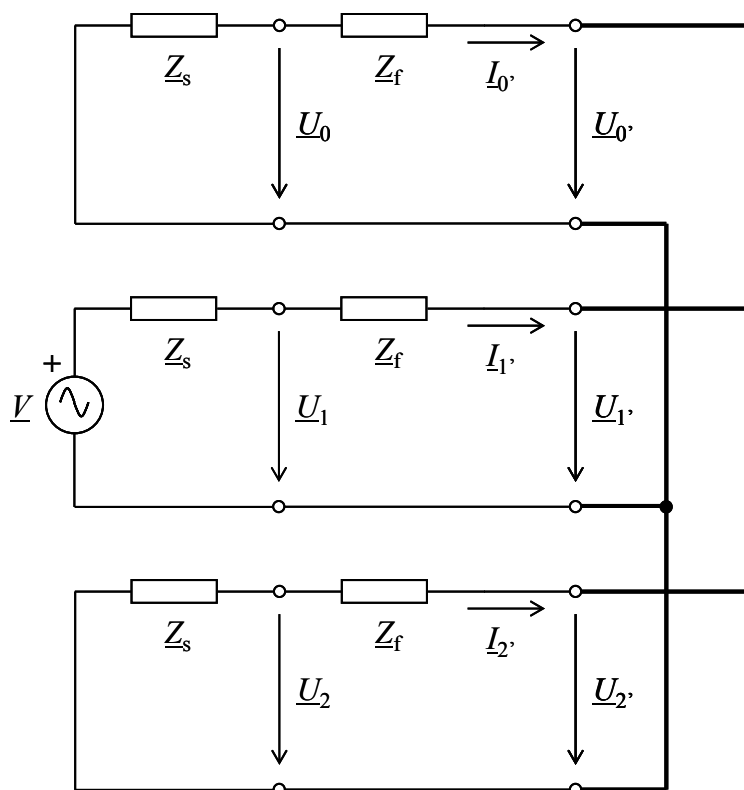


Fig. 2.32. Circuitos equivalentes de secuencia para un falta fase b – fase c – tierra.

Este tipo de falta impone las condiciones siguientes:

$$\underline{U}_{0'} = \underline{U}_{1'} = \underline{U}_{2'} \quad ; \quad \underline{I}_{0'} + \underline{I}_{1'} + \underline{I}_{2'} = 0 \tag{2.76}$$

Imponiendo estas condiciones en los circuitos de la Fig. 2.32 se calcula la tensión del pcc suponiendo que $\underline{Z}_{s,0} = \underline{Z}_{s,1} = \underline{Z}_{s,2} = \underline{Z}_s$ y que $\underline{Z}_{f,0} = \underline{Z}_{f,1} = \underline{Z}_{f,2} = \underline{Z}_f$.

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \underline{h}) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V} \end{aligned} \tag{2.77}$$

donde:

$$\underline{h} = h \angle \varphi_{sf} = \frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_f} \tag{2.78}$$

Si las impedancias \underline{Z}_s y \underline{Z}_f presentan el mismo ángulo, no se producirá salto de fase durante el hueco de tensión ($\varphi_{sf} = 0^\circ$). Las ecuaciones (2.77) en variables de fase son:

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{V} \\ \underline{U}_b &= a^2 \cdot \underline{h} \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c &= a \cdot \underline{h} \cdot \underline{V} \end{aligned} \tag{2.79}$$

Las ecuaciones (2.79) corresponden a los **huecos tipo E** definidos en [17].

Si la falta hubiera sido fase c–fase a–tierra, la tensión en el punto pcc en componentes simétricas y en variables de fase habría sido:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot a \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (2 + \underline{h}) \cdot a^2 \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V} \end{aligned} \right\} ; \left. \begin{aligned} \underline{U}_a &= \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \underline{h}) \cdot a^2 \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_b &= \frac{1}{3} \cdot (4 - \underline{h}) \cdot a \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c &= \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \underline{h}) \cdot \underline{V} \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

Si la falta hubiera sido fase a–fase b–tierra, la tensión en el punto pcc en componentes simétricas y en variables de fase habría sido:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot a \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (2 + \underline{h}) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot a^2 \cdot \underline{V} \end{aligned} \right\} ; \left. \begin{aligned} \underline{U}_a &= \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \underline{h}) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_b &= \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \underline{h}) \cdot a^2 \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_c &= \frac{1}{3} \cdot (4 - \underline{h}) \cdot a \cdot \underline{V} \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

2.4.6. Resumen

La Tabla 2.3 muestra el tipo de hueco de tensión al que se ve sometida una carga conectada en estrella con neutro en función del tipo de falta, así como las hipótesis realizadas para obtener las ecuaciones correspondientes. En la Tabla 2.4 se muestra la tensión en el punto pcc, en componentes simétricas, en función del tipo de hueco observado.

Se puede observar que en los huecos tipos B, C y E se ha realizado la hipótesis de que la impedancia directa y la inversa coinciden. Las impedancias directa e inversa de líneas y transformadores son iguales. Sin embargo, las impedancias directas de los elementos dinámicos (generadores síncronos y máquinas de inducción) son diferentes a las correspondientes impedancias inversas.

Tabla 2.3. Huecos de tensión en función del tipo de falta para cargas conectadas en estrella con neutro e hipótesis adoptada.

Falta	Hueco (carga conectada en estrella con neutro)	Hipótesis
3 fases 3 fases a tierra	Tipo A	
1 fase	Tipo B	$\underline{Z}_{s,0} = \underline{Z}_{s,1} = \underline{Z}_{s,2}$
2 fases	Tipo C	$\underline{Z}_{s,1} = \underline{Z}_{s,2}$
2 fases a tierra	Tipo E	$\underline{Z}_{s,0} = \underline{Z}_{s,1} = \underline{Z}_{s,2}$ $\underline{Z}_{f,0} = \underline{Z}_{f,1} = \underline{Z}_{f,2}$

Tabla 2.4. Componentes simétricas en función del tipo de hueco de tensión.

Homopolar	Directa	Inversa
$\underline{U}_{0,A} = 0$	$\underline{U}_{1,A} = \underline{h} \cdot \underline{V}$	$\underline{U}_{2,A} = 0$
$\underline{U}_{0,B} = -\frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V}$	$\underline{U}_{1,B} = \frac{1}{3} \cdot (2 + \underline{h}) \cdot \underline{V}$	$\underline{U}_{2,B} = -\frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V}$
$\underline{U}_{0,C} = 0$	$\underline{U}_{1,B} = -\frac{1}{2} \cdot (1 + \underline{h}) \cdot \underline{V}$	$\underline{U}_{0,C} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V}$
$\underline{U}_{0,E} = \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V}$	$\underline{U}_{1,E} = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot \underline{h}) \cdot \underline{V}$	$\underline{U}_{2,E} = \frac{1}{3} \cdot (1 - \underline{h}) \cdot \underline{V}$

Para que la hipótesis anterior sea cierta, se supone que el pcc, y por lo tanto también el punto f, está suficientemente alejado de los elementos dinámicos como para que la influencia de sus impedancias internas no afecten al valor de las impedancias totales.

Por otro lado, también se puede observar que se ha supuesto que la impedancia homopolar en los huecos tipos B y E es igual a la directa y a la inversa. Esta hipótesis puede llamar la atención ya que la impedancia homopolar depende en gran medida de la conexión de los neutros y además, en el caso de las líneas es unas tres veces mayor que la impedancia directa. En realidad, los huecos B y E no los suelen sufrir los usuarios, ya que no están conectados directamente al pcc, sino que lo están a través de uno o varios transformadores Dy que, en definitiva, eliminan la componente homopolar como se verá más adelante.

Por lo tanto, aunque la hipótesis comentada en los huecos B y E parezca no justificada, el error se reduce si se considera que estos huecos se van a transferir a otros niveles de tensión a través de uno o varios transformadores Dy [17]. Por otro lado, un hueco tipo E donde las impedancias homopolares son muy altas acaba degenerando en el límite en un hueco tipo C (falta fase-fase), mientras que un hueco tipo B con una impedancia homopolar muy alta acaba degenerando en que no se ha producido falta alguna.

2.5. Determinación de los huecos de tensión para cargas conectadas en triángulo

En el apartado anterior se han determinado los huecos de tensión para cargas conectadas en estrella con neutro. En este apartado se determinan los huecos para las cargas conectadas físicamente en triángulo, y para las cargas conectadas en estrella con neutro aislado (donde habría que obtener el triángulo equivalente).

2.5.1. Introducción

Supongamos ahora que en el pcc se conecta una carga en triángulo. Tomando como referencia el esquema de la Fig. 2.33, las tensiones de fase de la carga en triángulo, \underline{U}_4 , \underline{U}_5 y \underline{U}_6 se pueden obtener a partir de las tensiones entre fase y neutro en el punto de conexión de la carga:

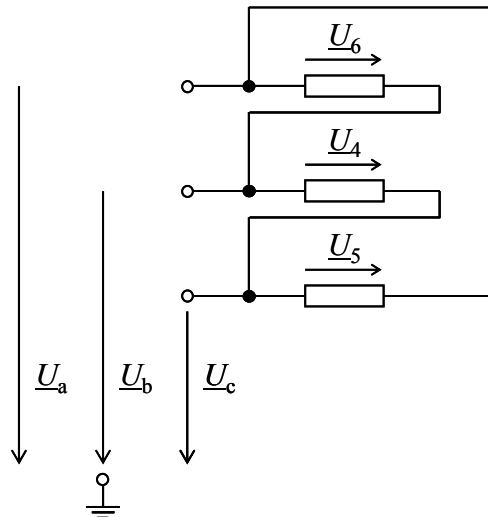


Fig. 2.33. Esquema de una carga conectada en triángulo.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Para obtener las tensiones de fase de la carga en triángulo a partir de las tensiones fase-neutro de la red de la que se alimenta basta con multiplicar éstas por la matriz \mathbf{T}_3 , definida como:

$$\mathbf{T}_3 = \frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

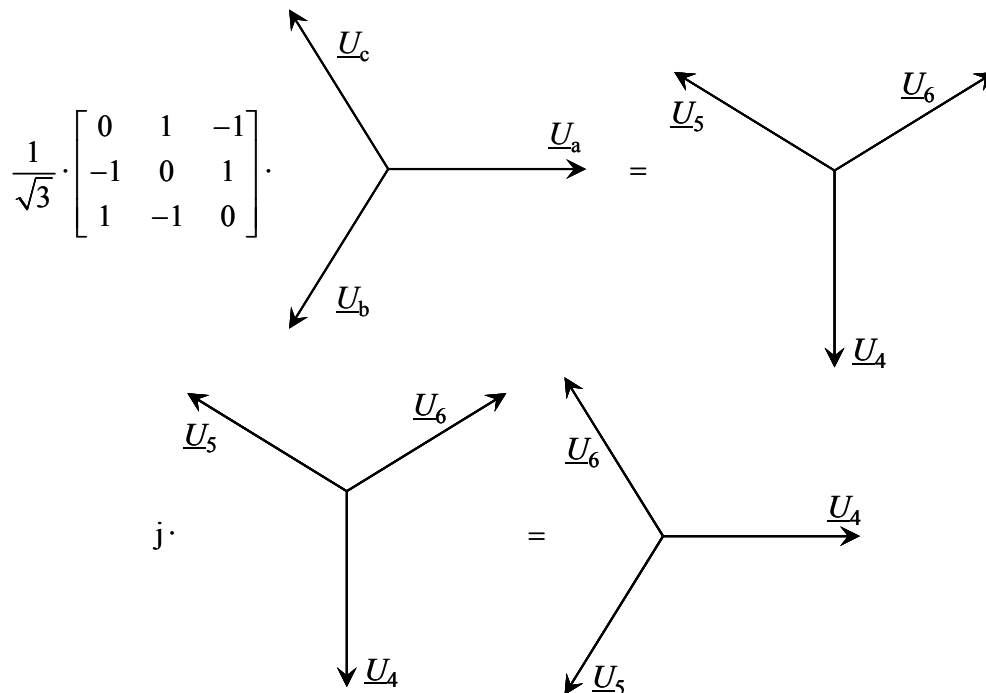


Fig. 2.34. Relación entre los fasores de tensión de una carga conectada en triángulo y sus correspondientes tensiones de alimentación fase-neutro.

La constante $1/\sqrt{3}$ en (2.83) se ha añadido para que los módulos de \underline{U}_4 , \underline{U}_5 y \underline{U}_6 sean iguales a los de \underline{U}_a , \underline{U}_b y \underline{U}_c cuando la alimentación sea simétrica. Debido al desfase de 90° entre el sistema de tensiones \underline{U}_4 , \underline{U}_5 , \underline{U}_6 y el sistema formado por \underline{U}_a , \underline{U}_b , \underline{U}_c se multiplica por j para adelantarlo y poder tener la fase a como referencia, tal como se representa en la Fig. 2.34.

En el caso de trabajar con variables de secuencia, la relación anterior se puede obtener aplicando la transformación de Fortescue a (2.82), resultando:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{0,\Delta} \\ \underline{U}_{1,\Delta} \\ \underline{U}_{2,\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Donde se observa que en una carga en triángulo la componente homopolar de las tensiones de fase es nula, lo cual es lógico puesto que la suma de las tensiones de fase es nula.

2.5.2. Huecos tipos B, C y E vistos por una carga conectada en triángulo

A partir de las ecuaciones del hueco que ve una carga conectada en estrella con neutro cuando se produce una falta fase – tierra (hueco tipo B), (2.57), se pueden obtener las ecuaciones de secuencia para una carga en triángulo sometida al mismo tipo de falta:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{0,\Delta} \\ \underline{U}_{1,\Delta} \\ \underline{U}_{2,\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -(1-h) \\ 2+h \\ -(1-h) \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2+h \\ 1-h \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.85)$$

Las ecuaciones de fase correspondientes son:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2+h \\ 1-h \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot h\right) \cdot j \cdot \sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot h\right) \cdot j \cdot \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.86)$$

Considerando que $h \in \mathbb{R}$; $0 \leq h < 1$, es decir que no se produce salto de fase, los valores extremos para las tensiones \underline{U}_5 y \underline{U}_6 son:

$$h=0 \quad \begin{cases} \underline{U}_{5,\min} = \left(-\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_{6,\min} = \left(-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \underline{V} \end{cases} ; \quad h=1 \quad \begin{cases} \underline{U}_{5,\max} = \left(-\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_{6,\max} = \left(-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \underline{V} \end{cases} \quad (2.87)$$

Analizando los resultados obtenidos, se obtienen unas ecuaciones muy similares a las obtenidas para los huecos tipo C (2.69), donde la única diferencia estriba en considerar que $1/3 \leq h < 1$ y que no exista salto de fase ($h \in \mathbb{R}$) cuando una carga conectada en triángulo se ve sometida a una falta fase–tierra. Las ecuaciones obtenidas en (2.86) se denominan **Tipo C*** en [17].

A partir de las ecuaciones del hueco que ve una carga conectada en estrella con neutro cuando se produce una falta fase–fase (hueco tipo C), (2.67), se pueden obtener las ecuaciones de secuencia para una carga conectada en triángulo sometida al mismo tipo de falta:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{0,\Delta} \\ \underline{U}_{1,\Delta} \\ \underline{U}_{2,\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\underline{h} \\ 1-\underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\underline{h} \\ -(1-\underline{h}) \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.88)$$

Las ecuaciones de fase correspondientes son:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\underline{h} \\ -(1-\underline{h}) \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.89)$$

Las ecuaciones obtenidas en (2.89) se denominan **Tipo D** en [17]. A partir de las ecuaciones del hueco que ve una carga conectada en estrella con neutro cuando se produce una falta fase–fase–tierra (hueco tipo E), (2.77), se pueden obtener las ecuaciones de secuencia para una carga conectada en triángulo sometida al mismo tipo de falta:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{0,\Delta} \\ \underline{U}_{1,\Delta} \\ \underline{U}_{2,\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1-\underline{h} \\ 1+2 \cdot \underline{h} \\ 1-\underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1+2 \cdot \underline{h} \\ -(1-\underline{h}) \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.90)$$

Las ecuaciones de fase correspondientes son:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1+2 \cdot \underline{h} \\ -(1-\underline{h}) \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.91)$$

Tabla 2.5. Huecos de tensión en función del tipo de falta y de la conexión de la carga.

Falta	Tipo de carga	
	Estrella con neutro	Triángulo o estrella sin neutro
3 fases 3 fases a tierra	Tipo A	Tipo A
1 fase	Tipo B	Tipo C*
2 fases	Tipo C	Tipo D
2 fases a tierra	Tipo E	Tipo F

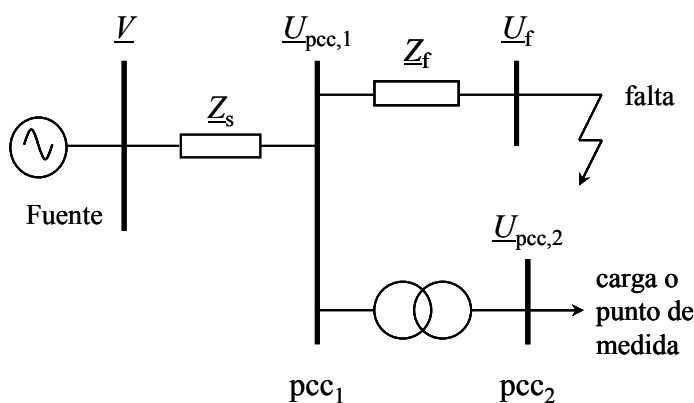


Fig. 2.35. Modelo del hueco de tensión a partir de un divisor de tensión cuando la carga, o el punto de medida, se encuentra en el secundario de un transformador.

Las ecuaciones obtenidas en (2.89) se denominan **Tipo F** en [17]. En la Tabla 2.5 se muestra de forma resumida el tipo hueco de tensión en las cargas, en función de su conexión y del tipo de falta a que se ven sometidas.

2.6. Influencia de las conexiones de los transformadores en la transferencia de los huecos a otros niveles de tensión

Como se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.35, si existen transformadores entre el *punto de conexión común*, pcc₁, y el punto de medida (o de conexión de la carga), pcc₂, tal las faltas pueden determinar diferentes tipos de hueco en el primario y en el secundario del transformador.

2.6.1. Tipos de transformadores

Los transformadores se pueden clasificar en tres grupos en función de su influencia en la transmisión de los huecos de tensión, tal como se muestra en la Tabla 2.6.

Tabla 2.6. Clasificación de los transformadores en función de su influencia en la transmisión de los huecos de tensión.

Grupo	Conexiones	Características	Índices horarios
I	YNyn	No se producen cambios entre primario y secundario (comp. homopolar primario = comp. homopolar secundario).	0, 4, 8, 6, 10, 2
II	YNy Yyn Yy Dd Dz Dzn	Eliminación componente homopolar presente en el primario.	0, 4, 8, 6, 10, 2
III	Dyn Dy YNd Yd YNz Yzn Yz	Permutación de tensiones de línea y de fase.	1, 5, 9, 7, 11, 3

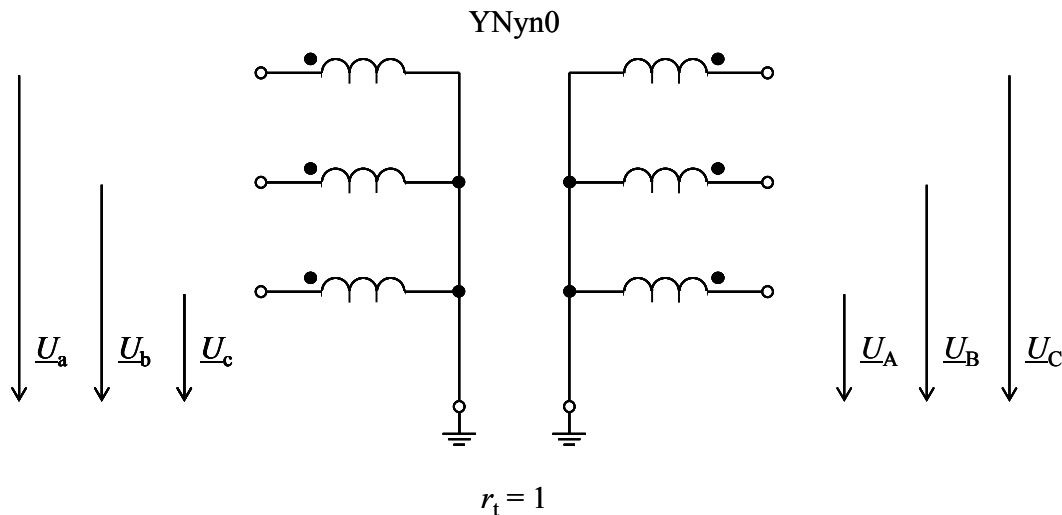


Fig. 2.36. Esquema de un transformador tipo I, conexión YNyn0 y $r_t = 1$.

En cada uno de los tres grupos los índices horarios no influyen puesto que sólo suponen un giro de 120° entre las tensiones de primario y secundario (que equivale a renombrar las fases del secundario), o un giro de 180° (que equivale a invertir el sentido de referencia en las bobinas del secundario).

Por ejemplo, los índices 0, 4, 8 son idénticos entre sí, pero girando 120° las fases a, b, c; mientras que los índices 6, 10, 2 son idénticos a los anteriores pero invirtiendo el sentido de referencia de las tensiones del secundario (giro de 180°).

A continuación se determinan las relaciones matriciales entre las tensiones de primario y secundario para cada tipo de transformador:

- **Transformador tipo I**

En la Fig. 2.36 se muestra el esquema de un transformador YNyn0 donde la relación de transformación es unitaria ($r_t = 1$). Las tensiones del secundario y las del primario están relacionadas según (2.92).

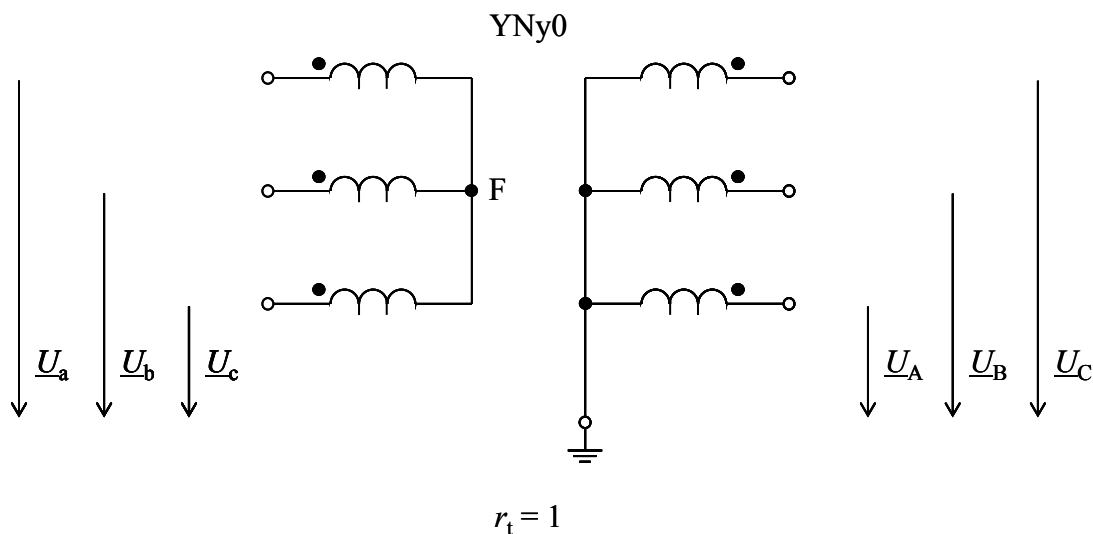


Fig. 2.37. Esquema de un transformador tipo II, conexión YNy0 y $r_t = 1$.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

Por tanto, la matriz de transformación \mathbf{T}_1 viene definida por:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

• **Transformador tipo II**

En la Fig. 2.37 se muestra el esquema de un transformador YNy0 donde la relación de transformación es unitaria ($r_t = 1$). Las tensiones del secundario y las del primario están relacionadas según:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}_{aF} \\ \underline{U}_{bF} \\ \underline{U}_{cF} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{aF} \\ \underline{U}_{bF} \\ \underline{U}_{cF} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

Por tanto, la matriz de transformación \mathbf{T}_2 viene definida por (2.95) suponiendo que se desprecia la impedancia $\underline{z}_{m,0}$ del transformador:

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

La Fig. 2.38 muestra el esquema de un transformador Dd0 ($r_t = 1$). La relación entre las tensiones del secundario y el primario vienen determinadas por (2.96).

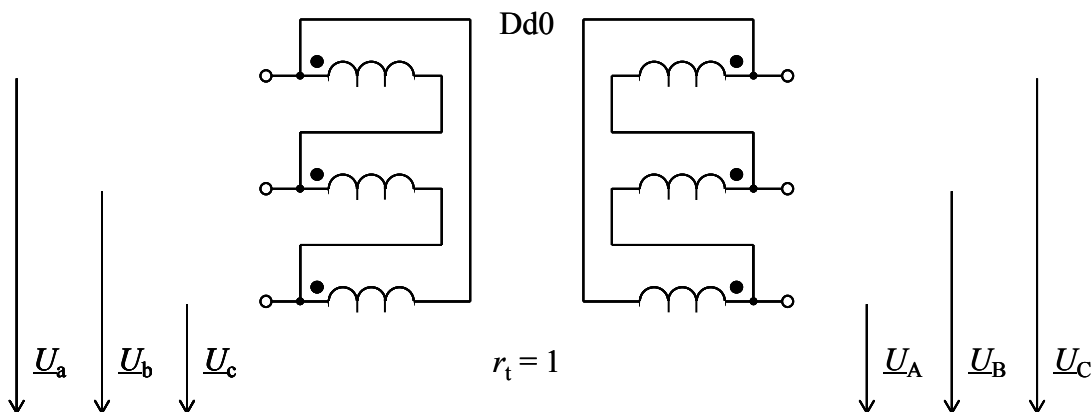


Fig. 2.38. Esquema de un transformador tipo II, conexión Dd0 y $r_t = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}_{ab} \\ \underline{U}_{bc} \\ \underline{U}_{ca} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{U}_{AB} \\ \underline{U}_{BC} \\ \underline{U}_{CA} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{ab} \\ \underline{U}_{bc} \\ \underline{U}_{ca} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

Las tensiones \underline{U}_A , \underline{U}_B y \underline{U}_C son indeterminadas ya que el triángulo está flotando respecto a tierra. Conocido el valor de \underline{U}_A :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_A \\ \underline{U}_B &= \underline{U}_{BC} + \underline{U}_C = \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} + \underline{U}_A = \underline{U}_b - \underline{U}_a + \underline{U}_A \\ \underline{U}_C &= \underline{U}_{CA} + \underline{U}_A = \underline{U}_c - \underline{U}_a + \underline{U}_A \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \underline{U}_A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix}$$

Si se cumple que:

$$\underline{U}_A = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \underline{U}_a - \underline{U}_b - \underline{U}_c) \quad (2.98)$$

se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_A &= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \underline{U}_a - \underline{U}_b - \underline{U}_c) \\ \underline{U}_B &= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \underline{U}_a - \underline{U}_b - \underline{U}_c) - \underline{U}_a + \underline{U}_b = \frac{1}{3} \cdot (-\underline{U}_a + 2 \cdot \underline{U}_b - \underline{U}_c) \\ \underline{U}_C &= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \underline{U}_a - \underline{U}_b - \underline{U}_c) - \underline{U}_a + \underline{U}_b = \frac{1}{3} \cdot (-\underline{U}_a - \underline{U}_b + 2 \cdot \underline{U}_c) \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix}$$

• Transformador tipo III

En la Fig. 2.39 se muestra el esquema de un transformador Dyn3 donde la relación de transformación es unitaria ($r_t = \sqrt{3}$). Las tensiones del secundario y las del primario están relacionadas según:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

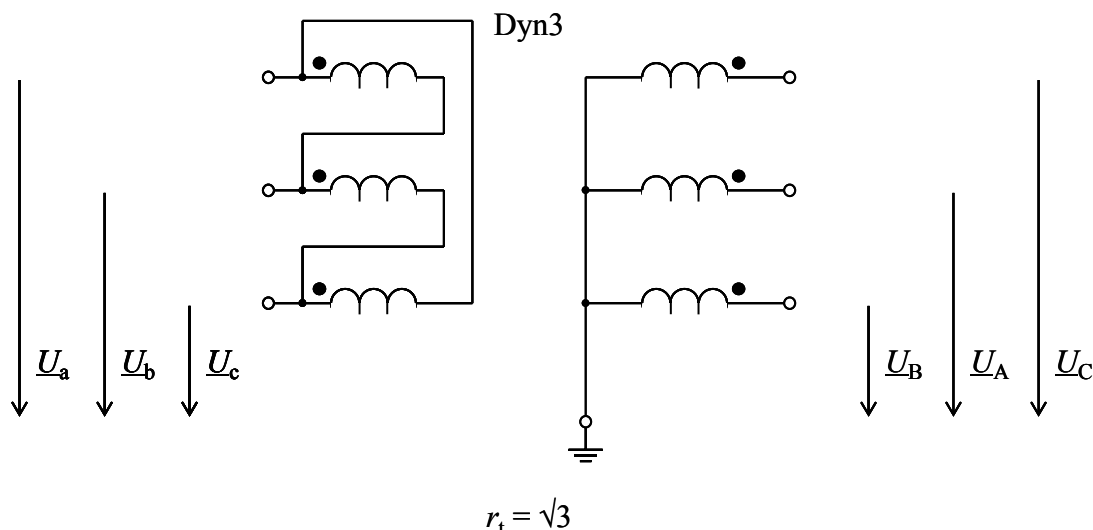


Fig. 2.39. Esquema de un transformador tipo III, conexión Dyn3 y $r_t = \sqrt{3}$.

Se ha escogido una $r_t = \sqrt{3}$ para que los módulos de \underline{U}_A , \underline{U}_B y \underline{U}_C sean iguales a los de \underline{U}_a , \underline{U}_b y \underline{U}_c cuando la alimentación sea simétrica.

Como el índice horario del transformador es 3, las tensiones \underline{U}_A , \underline{U}_B y \underline{U}_C estarán retrasadas 90° con respecto a \underline{U}_a , \underline{U}_b y \underline{U}_c cuando la alimentación sea simétrica. Para que estén en fase se multiplica la matriz de transformación por j (para seguir tomando la fase a como referencia).

$$\mathbf{T}_3 = \frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Existe la siguiente relación entre las matrices \mathbf{T}_2 y \mathbf{T}_3 .

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3^2 \quad (2.102)$$

Lo que equivale a decir que dos transformadores Dy en cascada son equivalentes a un transformador Dd o que dos transformadores Yd en cascada equivalen a un transformador Yy.

2.6.2. Transferencia de huecos tipo B

A continuación se analiza la transferencia de huecos tipo B a otros niveles de tensión, en función del tipo de transformador:

- **Transformador tipo I:** una carga en estrella con neutro situada en el secundario de un transformador tipo I, en cuyo primario se produce un hueco de tensión tipo B, se ve sometida a un hueco de la misma tipología, es decir **Tipo B**.
- **Transformador tipo II:** aplicando las matrices de transformación:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.103)$$

operando:

$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \underline{h} + 1) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_B &= \left(-\frac{1}{6} \cdot (2 \cdot \underline{h} + 1) - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \underline{V} \\ \underline{U}_C &= \left(-\frac{1}{6} \cdot (2 \cdot \underline{h} + 1) + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \underline{V}\end{aligned}\quad (2.104)$$

Analizando los resultados obtenidos, se obtienen unas ecuaciones muy similares a las obtenidas para huecos tipo D. De hecho, las ecuaciones obtenidas en (2.104) se denominan **Tipo D*** en [17], donde la única diferencia estriba en considerar que $1/3 \leq h < 1$ y que no exista salto de fase ($h \in \mathbb{R}$).

- **Transformador tipo III:** como este tipo de transformador permuta tensiones de línea y tensiones fase–neutro, cuando se produce un hueco tipo B en el primario, una carga en estrella con neutro situada en el secundario de este transformador se ve sometida a la misma tensión que en el caso ya analizado en el que una carga conectada en triángulo se veía sometida a un hueco tipo B. Por tanto, en este caso se tendrá un hueco de **Tipo C*** en el secundario del transformador.

2.6.3. Transferencia de huecos tipo C

A continuación se analiza la transferencia de huecos tipo C a otros niveles de tensión, en función del tipo de transformador:

- **Transformador tipo I:** una carga en estrella con neutro situada en el secundario de este transformador, en cuyo primario se produce un hueco de tensión tipo C, se ve sometida a un hueco de la misma tipología, es decir **Tipo C**.
- **Transformador tipo II:** aplicando las matrices de transformación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \\ -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \\ -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.105)$$

En el secundario se sigue teniendo un hueco **Tipo C** (no presenta componente homopolar).

- **Transformador tipo III:** cuando se produce un hueco tipo C en el primario, una carga en estrella con neutro situada en el secundario se ve sometida a la misma tensión que en el caso ya analizado en el que una carga conectada en triángulo se veía sometida a un hueco tipo C. Por tanto, en este caso se tendrá un hueco **Tipo D** en el secundario del transformador.

2.6.4. Transferencia de huecos tipo E

A continuación se analiza la transferencia de huecos tipo E a otros niveles de tensión, en función del tipo de transformador:

- **Transformador tipo I:** una carga en estrella con neutro conectada al secundario de este transformador, en cuyo primario se produce un hueco de tensión tipo E, también se ve sometida a un hueco **Tipo E**.
- **Transformador tipo II:** aplicando las matrices de transformación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \cdot \underline{h} \\ a \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot (2 + \underline{h}) \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.106)$$

Las ecuaciones obtenidas en (2.106) son las que corresponden a huecos **Tipo G** en [17]. La tensión para este nuevo tipo de hueco en componentes simétricas es:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 2 \cdot \underline{h} \\ 1 - \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.107)$$

- **Transformador tipo III:** es el caso análogo al de una carga conectada en triángulo que se ve sometida a un hueco tipo E. Por tanto, en este caso se tendrá un hueco **Tipo F** en el secundario del transformador.

2.6.5. Transferencia de huecos de tensión a través de dos transformadores

Se ha comprobado que al transferir huecos de tensión tipos A, B, C y E a través de un transformador, en el secundario del mismo se pueden observar huecos tipos D, F y G. Por tanto, es necesario analizar qué ocurre cuando estas nuevas tipologías de huecos de tensión son transferidas a otros niveles de tensión mediante otros transformadores.

- **Transferencia de un hueco tipo D al secundario de un transformador de tipo I:** una carga en estrella con neutro conectada en el secundario de un transformador de tipo I, en cuyo primario se produce un hueco de tensión tipo D, se ve sometida a un hueco **Tipo D**.
- **Transferencia de un hueco tipo D al secundario de un transformador de tipo II:** aplicando las matrices de transformación se obtiene el valor de la tensión (2.108), donde no se observa cambio. Por lo tanto, puesto que este tipo de hueco no presenta componente homopolar, en el secundario del transformador se tiene un hueco **Tipo D**.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.108)$$

- **Transferencia de un hueco tipo D al secundario de un transformador de tipo III:** es el caso opuesto al de una carga conectada en triángulo que se ve sometida a un hueco tipo C, la cual ve un hueco tipo D. Por tanto, en este caso se tendría un hueco **Tipo C** en el secundario del transformador.
- **Transferencia de un hueco tipo F al secundario de un transformador de tipo I:** una carga en estrella con neutro conectada en el secundario de un transformador de tipo I en cuyo primario se produce un hueco tipo F, se ve sometida a un hueco de **Tipo F**.
- **Transferencia de un hueco tipo F al secundario de un transformador de tipo II:** aplicando las matrices de transformación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.109)$$

Es decir, no se observa cambio y en el secundario del transformador se tiene un hueco **Tipo F**, puesto que éste no presenta componente homopolar.

- **Transferencia de un hueco tipo F al secundario de un transformador de tipo III:** aplicando las matrices de transformación se obtiene (2.110). Por tanto el secundario se ve sometido a un hueco **Tipo G**.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{2+\underline{h}}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot (2+\underline{h}) \\ -\frac{1}{6} \cdot (2+\underline{h}) - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \\ -\frac{1}{6} \cdot (2+\underline{h}) + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.110)$$

Como este transformador permuta tensiones de línea y de fase, éste es el caso opuesto al de una carga conectada en triángulo cuando se ve sometida a un hueco tipo E, la cual observa un hueco tipo F. Sin embargo, como el hueco tipo E tiene componente homopolar, ésta no se puede generar, por lo que aparece un hueco tipo E pero sin homopolar, es decir, un hueco tipo G.

- **Transferencia de un hueco tipo G al secundario de un transformador de tipo I:** una carga en estrella con neutro conectada en el secundario de un transformador de tipo I en cuyo primario se produce un hueco de tensión tipo G, se ve sometida a un hueco **Tipo G**.
- **Transferencia de un hueco tipo G al secundario de un transformador de tipo II:** aplicando las matrices de transformación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot (2 + \underline{h}) \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot (2 + \underline{h}) \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.111)$$

Es decir, no se observa cambio y en el secundario del transformador se tiene un hueco **Tipo G**, puesto que éste no presenta componente homopolar.

- **Transferencia de un hueco tipo G al secundario de un transformador de tipo III:** aplicando las matrices de transformación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot (2 + \underline{h}) \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \\ -\frac{1}{6} \cdot (2 + \underline{h}) + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{h} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{h} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} - j \cdot \frac{2 + \underline{h}}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{h} + j \cdot \frac{2 + \underline{h}}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \cdot \underline{V} \quad (2.112)$$

Por tanto, el secundario se ve sometido a un hueco **Tipo F**. Este caso es el opuesto al de un hueco de tipo F en el primario de un transformador de tipo III, que se transforma en un hueco de tipo G en el secundario.

2.6.6. Resumen

La Tabla 2.7 muestra el tipo de hueco a que se ve sometida una carga en estrella a tierra, conectada en el secundario de un transformador, cuando en el primario del transformador se producen huecos tipos D, F o G.

Tabla 2.7. Transferencia de huecos a otros niveles de tensión.

Transformador		Hueco en el primario del transformador						
Grupo	Conexiones	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tipo D	Tipo E	Tipo F	Tipo G
I	YNyn	A	B	C	D	E	F	G
II	Yy Dd Dz	A	D*	C	D	G	F	G
III	Dy Yd Yz	A	C*	D	C	F	G	F

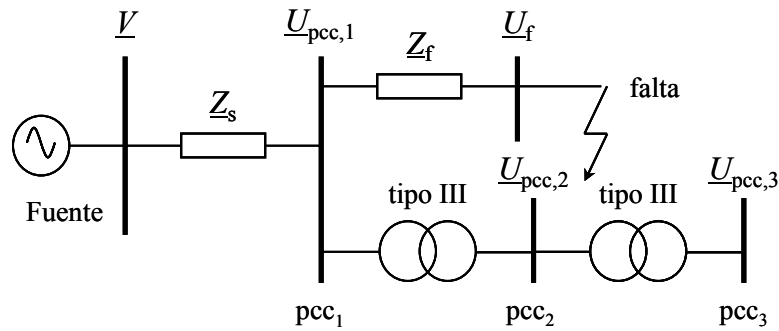


Fig. 2.40. Esquema de la transmisión de una falta con tres posibles puntos de conexión común: pcc_1 , pcc_2 y pcc_3 y dos transformadores tipo III en cascada.

Tabla 2.8. Hueco en función de la falta y el punto de conexión común para dos transformadores tipo III en cascada.

Falta	PCC ₁	PCC ₂	PCC ₃
3 fases	A	A	A
3 fases a tierra	A	A	A
1 fase	B	C*	D*
2 fases	C	D	C
2 fases a tierra	E	F	G

Por último el esquema de la Fig. 2.40 representa un sistema donde se produce una falta y existen dos transformadores de tipo III en cascada. La Tabla 2.8 indica el hueco de tensión en función del tipo de falta y la localización del punto de conexión común. Se observa que este sencillo sistema permite originar los siete tipos de huecos que se han descrito más los huecos C* y D*.

2.7. Clasificación y caracterización

El análisis de la tensión que se tiene en el pcc cuando se originan las diferentes faltas, la conexión de la carga y la transmisión de los huecos de tensión a otros niveles de tensión permite clasificar los huecos de tensión en 7 tipologías: A, B, C, D, E, F y G.

La Tabla 2.9 muestra la tensión de todos los tipos de huecos en componentes simétricas. Sólo los huecos tipos B y E presentan componente homopolar. Por otro lado, el hueco tipo A es el único que sólo presenta componente directa, puesto que es simétrico.

La Tabla 2.10 presenta las ecuaciones de todos los huecos de tensión en variables de fase y en función del tiempo.

La Tabla 2.11 proporciona una idea más gráfica de la tensión residual de cada tipo de hueco, ya que se representa la tensión en función del tiempo. En estas figuras se ha tomado una profundidad $h = 0.5$ y una duración $\Delta t = 5$ ciclos.

Tabla 2.9. Tensión durante el hueco, en componentes simétricas, en función de su tipología.

Tipo de hueco	Homopolar	Directa	Inversa
A	$\underline{V}_{0,A} = 0$	$\underline{V}_{1,A} = h \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{2,A} = 0$
B	$\underline{V}_{0,B} = -\frac{1-h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,B} = \frac{2+h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{2,B} = -\frac{1-h}{3} \cdot \underline{V}$
C	$\underline{V}_{0,C} = 0$	$\underline{V}_{1,C} = \frac{1+h}{2} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{2,C} = \frac{1-h}{2} \cdot \underline{V}$
D	$\underline{V}_{0,D} = 0$	$\underline{V}_{1,D} = \frac{1+h}{2} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{2,D} = -\frac{1-h}{2} \cdot \underline{V}$
E	$\underline{V}_{0,E} = \frac{1-h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,E} = \frac{1+2 \cdot h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{2,E} = \frac{1-h}{3} \cdot \underline{V}$
F	$\underline{V}_{0,F} = 0$	$\underline{V}_{1,F} = \frac{1+2 \cdot h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{2,F} = -\frac{1-h}{3} \cdot \underline{V}$
G	$\underline{V}_{0,G} = 0$	$\underline{V}_{1,G} = \frac{1+2 \cdot h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{2,G} = \frac{1-h}{3} \cdot \underline{V}$

Por todo lo visto hasta ahora, un hueco de tensión se puede caracterizar mediante su profundidad, duración y tipología, q :

$$v(h, \Delta t, q) \quad \text{donde } q \in [A, B, C, D, E, F, G] \quad (2.113)$$

2.8. Punto de onda inicial

Hasta el momento el hueco de tensión se ha caracterizado mediante su profundidad, duración y tipología. En este apartado también se va a analizar el *punto de onda inicial*.

Todo hueco de tensión tiene un instante inicial, t_i , en el que se produce la caída de tensión, y un instante final, t_f , en el que se produce la recuperación de la tensión (todo ello suponiendo que la forma de onda del hueco es perfectamente rectangular). El instante inicial se corresponde con un *punto de onda* de la tensión de la fase a (ψ_i), tal como se muestra en la Fig. 2.41. Para caracterizar el punto de onda inicial, hay que tener en cuenta que la tensión de la fase a, es:

$$v_a(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \quad (2.114)$$

donde el punto de onda inicial, ψ_i , en el instante inicial, t_i , es:

$$\psi_i = \omega \cdot t_i + \alpha \quad (2.115)$$

Dos posibles formas de definir unívocamente el punto de onda inicial de forma sencilla son:

- Si el hueco empieza en un instante inicial $t_i = 0$ s, el punto de onda inicial coincide con el ángulo de la tensión de la fase a: $\psi_i = \alpha$ (Fig. 2.41).

Tabla 2.10. Tensión durante el hueco en variables de fase y ecuaciones temporales en función de su tipología.

Tipo hueco	Tensión	
	Variables de fase	Ecuaciones temporales
A	$\underline{V}_a = h \cdot \underline{V}$	$v_a = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t)$
	$\underline{V}_b = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_b = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$
	$\underline{V}_c = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_c = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$
B	$\underline{V}_a = h \cdot \underline{V}$	$v_a = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t)$
	$\underline{V}_b = -\frac{1}{2} \cdot \underline{V} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{V}$	$v_b = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$
	$\underline{V}_c = -\frac{1}{2} \cdot \underline{V} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{V}$	$v_c = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$
C	$\underline{V}_a = \underline{V}$	$v_a = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t)$
	$\underline{V}_b = -\frac{1}{2} \cdot \underline{V} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1+3 \cdot h^2}}{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi + \beta)$
	$\underline{V}_c = -\frac{1}{2} \cdot \underline{V} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_c = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1+3 \cdot h^2}}{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi - \beta)$ $\beta = \tan^{-1}(\sqrt{3} \cdot h)$
D	$\underline{V}_a = h \cdot \underline{V}$	$v_a = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t)$
	$\underline{V}_b = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{V}$	$v_b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3+h^2}}{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi + \beta)$
	$\underline{V}_c = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underline{V}$	$v_c = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3+h^2}}{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi - \beta)$ $\beta = \tan^{-1}(\sqrt{3}/h)$
E	$\underline{V}_a = \underline{V}$	$v_a = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t)$
	$\underline{V}_b = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_b = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$
	$\underline{V}_c = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_c = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$
F	$\underline{V}_a = h \cdot \underline{V}$	$v_a = \sqrt{2} \cdot h \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \alpha)$
	$\underline{V}_b = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} - j \cdot \frac{2+h}{\sqrt{12}} \cdot \underline{V}$	$v_b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{h^2+h+1}{3}} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi + \beta)$
	$\underline{V}_c = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \underline{V} + j \cdot \frac{2+h}{\sqrt{12}} \cdot \underline{V}$	$v_c = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{h^2+h+1}{3}} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi - \beta)$ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{(2+h)}{(\sqrt{3} \cdot h)}\right)$
G	$\underline{V}_a = \frac{2+h}{3} \cdot \underline{V}$	$v_a = \sqrt{2} \cdot \frac{2+h}{3} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t)$
	$\underline{V}_b = -\frac{2+h}{6} \cdot \underline{V} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7 \cdot h^2+h+1}}{3} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi + \beta)$
	$\underline{V}_c = -\frac{2+h}{6} \cdot \underline{V} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h \cdot \underline{V}$	$v_c = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{7 \cdot h^2+h+1}}{3} \cdot V \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \pi - \beta)$ $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{(3 \cdot \sqrt{3} \cdot h)}{(2+h)}\right)$

Tabla 2.11. Diagrama fasorial y representación temporal de los huecos de tensión

Diagrama fasorial	Representación temporal
<p>Tipo A</p>	
<p>Tipo B</p>	
<p>Tipo C</p>	
<p>Tipo D</p>	
<p>Tipo E</p>	
<p>Tipo F</p>	
<p>Tipo G</p>	

- Si el hueco empieza en un instante inicial $t_i \neq 0$ s, y el ángulo de la tensión de la fase a se fuerza a ser nulo, $\alpha = 0^\circ$, el punto de onda inicial coincide con el instante inicial: $\psi_i = \omega \cdot t_i$ (Fig. 2.42).

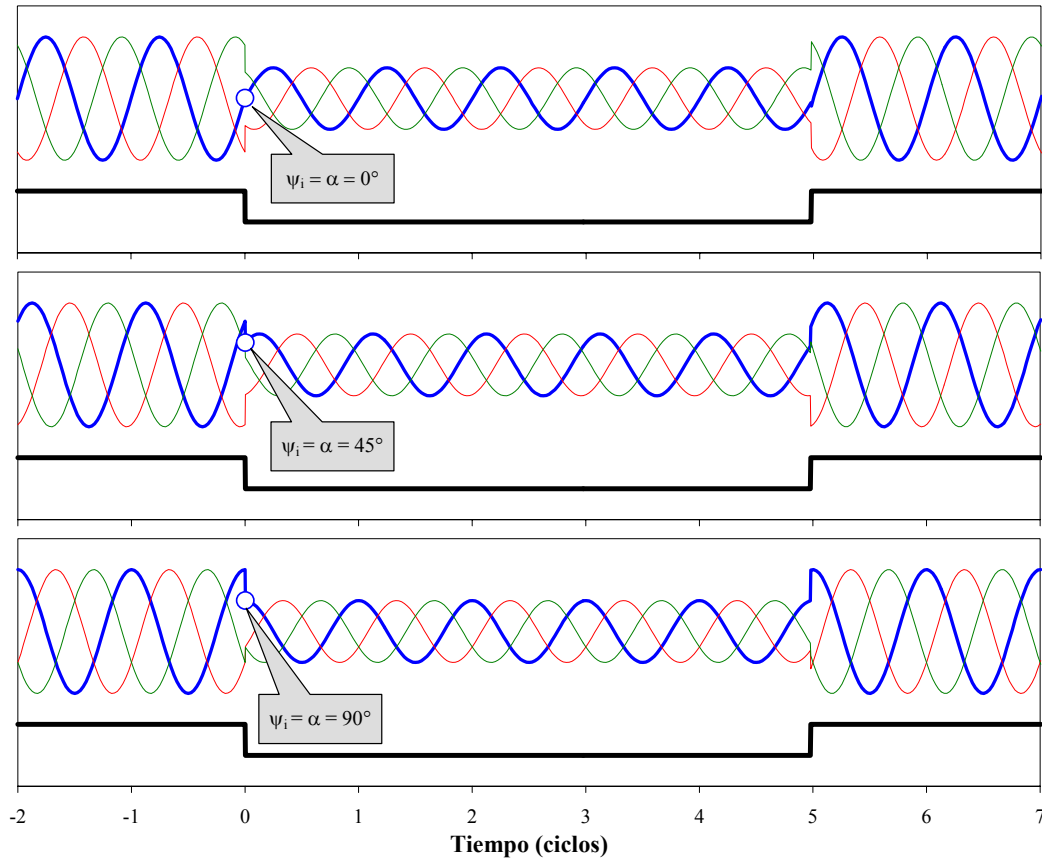


Fig. 2.41. Punto de onda inicial, ψ_i , cuando el instante inicial del hueco de tensión es cero ($t_i = 0$ ciclos). Huecos de tensión: $h = 0.5$, $\Delta t = 5$ ciclos, $q = A$. Ángulo de la tensión de la fase a: a) $\alpha = 0^\circ$; b) $\alpha = 45^\circ$ y c) $\alpha = 90^\circ$.

El punto de onda inicial es otro parámetro que también caracteriza al hueco de tensión (además de la profundidad, la duración y la tipología), y dado que puede tener importancia cuando se estudien los efectos de los huecos, también se tiene en cuenta a la hora de caracterizarlo. Por lo tanto, el hueco de tensión queda caracterizado por la profundidad, la duración, la tipología y el punto de onda inicial:

$$v(h, \Delta t, \psi_i, q) \quad (2.116)$$

2.9. Duración

Aunque anteriormente ya se ha comentado que un hueco puede caracterizarse de forma unívoca por: profundidad, duración, punto de onda inicial y tipología en este apartado se quiere destacar que ciertas cargas (como el transformador), pueden ser más sensibles a la periodicidad de la duración, que al valor total de la misma. Para estos casos:

$$\Delta t = n \cdot T + \delta t \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq \delta t < T \end{cases} \quad (2.117)$$

T es el período, que se puede determinar a partir del valor de la frecuencia (f): $T = 1/f$ y δt la parte fraccionaria de la duración.

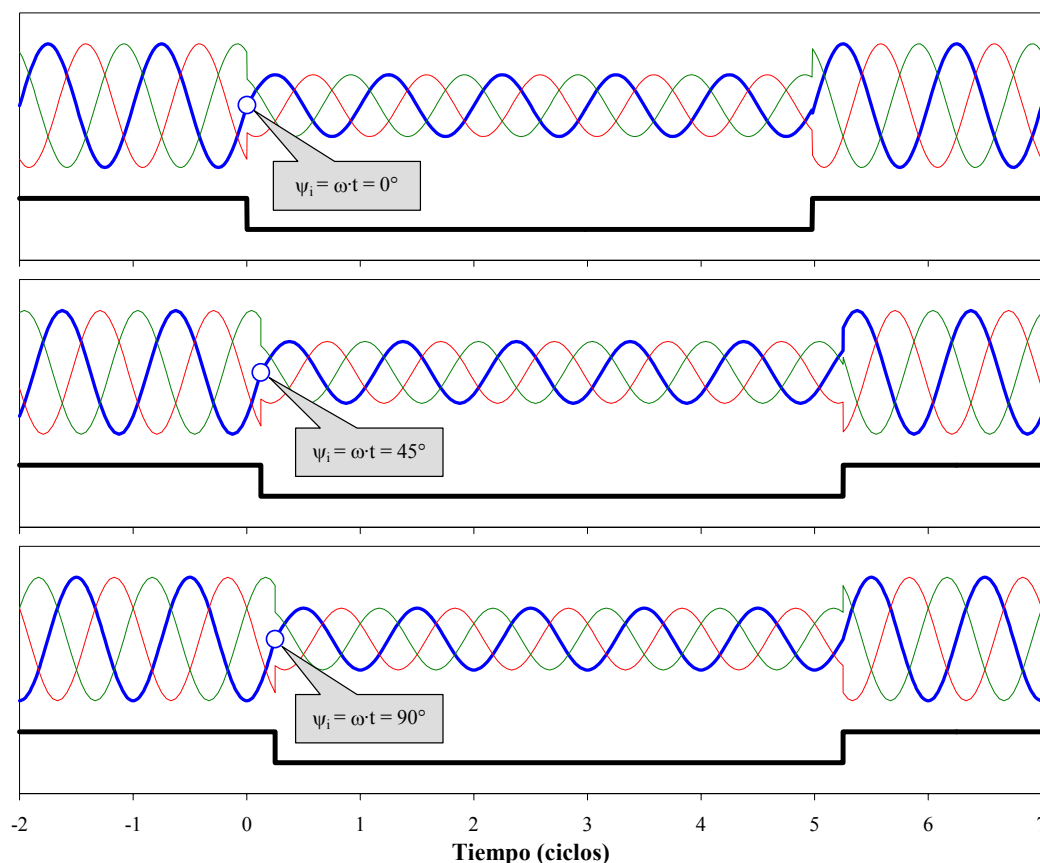


Fig. 2.42. Punto de onda inicial, ψ_i , cuando el ángulo de la tensión de la fase a es cero ($\alpha = 0^\circ$). Huecos de tensión: $h = 0.5$, $\Delta t = 5$ ciclos, $q = A$. Instante inicial del hueco: a) $\omega t = 0^\circ$; b) $\omega t = 45^\circ$ y c) $\omega t = 90^\circ$.

La notación de la tensión durante el hueco en este caso es:

$$v(h, n \cdot T + \Delta t, \psi_i, q) \quad (2.118)$$

Para las cargas que no sean sensibles a la periodicidad de la duración parece más lógico seguir utilizando la notación de (2.116).

2.10. Efectos producidos

Los huecos de tensión producen efectos en los equipos que se ven sometidos a ellos en función de las características propias del hueco, de la naturaleza del equipo afectado y del tipo de conexión a la red.

Entre los tipos de cargas que se ven afectados por los huecos de tensión se encuentran: motores de inducción, transformadores, motores síncronos, convertidores electrónicos, sistemas de control, ordenadores, etc. Esta tesis se centra en el estudio de los efectos de los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos y en los transformadores trifásicos.

De forma breve, los efectos producidos por los huecos de tensión en las diferentes cargas son:

- **Motores de inducción:** picos de intensidad, picos de par, pérdida de velocidad y posible parada del mismo.

- **Transformadores:** picos de intensidad.
- **Motores síncronos:** picos de intensidad, picos de par y posible pérdida de sincronismo.
- **Convertidores electrónicos:** en muchos accionamientos de velocidad variable para máquinas de corriente alterna, la fuente de tensión que alimenta al inversor consiste básicamente en una capacidad que se alimenta a través de un rectificador trifásico en puente de diodos conectado a la red eléctrica. Los huecos de tensión de la red eléctrica causan caídas de tensión en el lado de continua que producen variaciones en la velocidad y en el par de la máquina y picos de corriente en el lado de alterna del rectificador que pueden provocar el disparo de las protecciones.
- **Sistemas de control:** su funcionamiento en tiempo real puede provocar que las informaciones captadas o enviadas a los sensores y actuadores, o bien el procesado del propio sistema de control se vean afectados en su funcionamiento cuando se produzca un hueco de tensión.
- **Ordenadores:** pueden conllevar desde una parada no deseada a la pérdida de información o avería de alguno de sus componentes.

Cuando se analizan los huecos de tensión desde el punto de vista industrial siempre se debe tener en cuenta cual es el coste económico de los efectos producidos. Por ejemplo, las pérdidas económicas pueden ser importantes en el caso de una empresa en la que un hueco de tensión ocasione la parada de un motor de gran potencia y, en consecuencia, se pierda la materia del proceso de producción.

Por lo tanto, puede ser de gran importancia conocer la sensibilidad de los equipos a los huecos de tensión en determinado tipo de industrias para poder hacer frente a ellos minimizando sus consecuencias.

Capítulo 3

Modelo de la máquina de inducción trifásica

3. Modelo de la máquina de inducción trifásica

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta el modelo escogido para la máquina de inducción trifásica rotativa, que permite determinar su comportamiento dinámico cuando se producen huecos de tensión.

3.2. Modelo dinámico de la máquina de inducción trifásica, de jaula sencilla o de rotor bobinado

La máquina de inducción trifásica, de jaula sencilla o de rotor bobinado, posee tres devanados en el estátor y tres en el rotor, estos últimos pueden ser reales (rotor bobinado) o ficticios (jaula sencilla). Las simplificaciones que se suelen realizar para obtener las ecuaciones de la misma son las siguientes [12]:

- Estátor y rotor lisos (entrehierro constante).
- Máquina simétrica (bobinas del estátor iguales entre sí y bobinas del rotor iguales entre sí).
- Comportamiento magnético del hierro lineal.
- Permeabilidad magnética del hierro elevada (reluctancia magnética despreciable frente a la del entrehierro).
- Distribución senoidal del campo en el entrehierro.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la máquina de inducción trifásica de la Fig. 3.1 son:

$$\begin{aligned} v_{sa} &= r_s \cdot i_{sa} + \frac{d\phi_{sa}}{dt} & ; & & v_{sb} &= r_s \cdot i_{sb} + \frac{d\phi_{sb}}{dt} & ; & & v_{sc} &= r_s \cdot i_{sc} + \frac{d\phi_{sc}}{dt} \\ v_{ra} &= r_r \cdot i_{ra} + \frac{d\phi_{ra}}{dt} & ; & & v_{rb} &= r_r \cdot i_{rb} + \frac{d\phi_{rb}}{dt} & ; & & v_{rc} &= r_r \cdot i_{rc} + \frac{d\phi_{rc}}{dt} \end{aligned} \quad (3.1)$$

pudiéndose escribir en notación matricial como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\phi}{dt} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_s \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_s \\ \phi_r \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

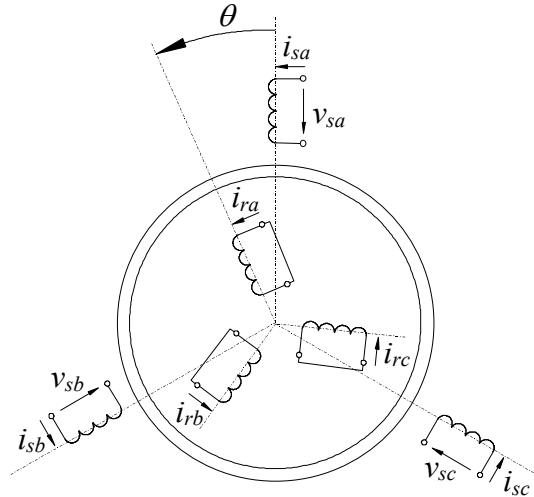


Fig. 3.1. Máquina de inducción trifásica de jaula sencilla o de rotor bobinado en cortocircuito.

siendo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_s^t &= [v_{sa} \quad v_{sb} \quad v_{sc}] \quad ; \quad \mathbf{v}_r^t = [v_{ra} \quad v_{rb} \quad v_{rc}] \\
 \mathbf{i}_s^t &= [i_{sa} \quad i_{sb} \quad i_{sc}] \quad ; \quad \mathbf{i}_r^t = [i_{ra} \quad i_{rb} \quad i_{rc}] \\
 \boldsymbol{\phi}_s^t &= [\phi_{sa} \quad \phi_{sb} \quad \phi_{sc}] \quad ; \quad \boldsymbol{\phi}_r^t = [\phi_{ra} \quad \phi_{rb} \quad \phi_{rc}] \\
 \mathbf{R}_s &= \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Los flujos y las intensidades están relacionados mediante la matriz de acoplamientos, $\mathbf{M}(\theta)$:

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{M}(\theta) \cdot \mathbf{i} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_s \\ \boldsymbol{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss}(\theta) & \mathbf{M}_{sr}(\theta) \\ \mathbf{M}_{rs}(\theta) & \mathbf{M}_{rr}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

cuya expresión es:

$$\mathbf{M}_{ss}(\theta) = \begin{bmatrix} l_s & m_s \cdot \cos \frac{2\pi}{3} & m_s \cdot \cos \frac{-2\pi}{3} \\ m_s \cdot \cos \frac{-2\pi}{3} & l_s & m_s \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \\ m_s \cdot \cos \frac{2\pi}{3} & m_s \cdot \cos \frac{-2\pi}{3} & l_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s & -\frac{m_s}{2} & -\frac{m_s}{2} \\ -\frac{m_s}{2} & l_s & -\frac{m_s}{2} \\ -\frac{m_s}{2} & -\frac{m_s}{2} & l_s \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{M}_{rr}(\theta) = \begin{bmatrix} l_r & m_r \cdot \cos \frac{2\pi}{3} & m_r \cdot \cos \frac{-2\pi}{3} \\ m_r \cdot \cos \frac{-2\pi}{3} & l_r & m_r \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \\ m_r \cdot \cos \frac{2\pi}{3} & m_r \cdot \cos \frac{-2\pi}{3} & l_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_r & -\frac{m_r}{2} & -\frac{m_r}{2} \\ -\frac{m_r}{2} & l_r & -\frac{m_r}{2} \\ -\frac{m_r}{2} & -\frac{m_r}{2} & l_r \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{M}_{sr}(\theta) = [\mathbf{M}_{rs}(\theta)]^t = \begin{bmatrix} m \cdot \cos \theta & m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos \theta & m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ m \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & m \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Sustituyendo la matriz de acoplamientos en la ecuación (3.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt} \{ \mathbf{M}(\theta) \cdot \mathbf{i} \} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{M}(\theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{M}(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{M}(\theta)}{d\theta} \cdot \omega \cdot \mathbf{i} + \mathbf{M}(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.9)$$

En la práctica, las ecuaciones que se utilizan están referidas a uno de los devanados. En esta máquina se reducen al devanado del estátor. Para ello simplemente se han de multiplicar las ecuaciones tensión-corriente de dichos devanados por la relación de espiras entre el estátor y el devanado correspondiente. Aunque no se diga explícitamente, siempre se supone que las ecuaciones están reducidas al estátor.

La expresión del par electromagnético que proporciona el motor de inducción se puede calcular a través de la energía o de la coenergía como:

$$\Gamma(t) = - \left. \frac{\partial W_{\text{mag}}([\Phi], \theta)}{\partial \theta} \right|_{[\Phi]=\text{cte}} = \left. \frac{\partial W'_{\text{mag}}([\mathbf{i}], \theta)}{\partial \theta} \right|_{[\mathbf{i}]=\text{cte}} \quad (3.10)$$

Al ser un sistema lineal, ambas coinciden, resultando:

$$\Gamma(t) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{i}]^t \cdot \mathbf{M}(\theta) \cdot \mathbf{i} \right\} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{i}]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}(\theta) \right\} \cdot \mathbf{i} \quad (3.11)$$

y como $\mathbf{M}_{ss}(\theta)$ y $\mathbf{M}_{rr}(\theta)$ son constantes (no dependen de θ):

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot \mathbf{i}_r + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{i}_r]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{rs}(\theta) \right\} \cdot \mathbf{i}_s \quad (3.12)$$

por otro lado $\mathbf{M}_{sr}(\theta) = \mathbf{M}_{rs}^t(\theta)$, entonces:

$$\Gamma(t) = [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot \mathbf{i}_r \quad (3.13)$$

Por último, además de la ecuación (3.9) (que relaciona la velocidad angular con la posición), falta una segunda ecuación mecánica que relaciona la aceleración angular con el par acelerador:

$$\Gamma - \Gamma_{\text{res}} = J \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (3.14)$$

Por tanto, y en definitiva, el modelo matemático del motor de inducción quedaría definido por el conjunto de las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.14):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \omega \cdot \frac{d\mathbf{M}(\theta)}{d\theta} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{M}(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} \\ \Gamma - \Gamma_{\text{res}} &= J \cdot \frac{d\omega}{dt} \\ \omega &= \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

donde el par eléctrico queda definido por (3.13). En definitiva se tiene un sistema formado por 6 ecuaciones eléctricas y 2 ecuaciones mecánicas.

3.2.1. Transformación de las ecuaciones de la máquina de inducción trifásica

Resolver numéricamente el sistema de ecuaciones mostrado en (3.15) requiere un tiempo elevado de cálculo, por la dependencia de la matriz de acoplamientos con el ángulo mecánico, θ , ya que aún suponiendo lineal el comportamiento magnético de la máquina (l_i y $m_{i,j}$ constantes) y que la velocidad mecánica es constante, se tiene un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes no constantes (periódicos).

Por este motivo, a las ecuaciones anteriores se les aplica una transformación que las convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, suponiendo constante la velocidad mecánica y que el circuito magnético es lineal.

La transformación que se aplica a las ecuaciones de la máquina de inducción se compone de dos matrices de transformación de dimensión 3x3, de la forma

$$\mathbf{T}_c(\Psi_s, \Psi_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\Psi_s) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(\Psi_r) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde Ψ_s y Ψ_r son dos ángulos arbitrarios que permiten transformar las ecuaciones del estátor y del rotor respectivamente. Para eliminar la citada dependencia con la posición angular del rotor, θ , estos ángulos deben cumplir:

$$\Psi_s = \theta + \Psi_r \quad (3.17)$$

La transformación anterior también se puede escribir como:

$$\mathbf{T}_c(\Psi, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\Psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde por simplicidad se ha utilizado la variable Ψ en lugar de Ψ_s y, por lo tanto:

$$\Psi_r = \Psi_s - \theta = \Psi - \theta \quad (3.19)$$

Las tres referencias más utilizadas son:

- referencia fija al estátor: $\Psi = 0$,
- referencia fija al rotor: $\Psi - \theta = 0 \Rightarrow \Psi = \theta$,
- referencia en sincronismo (o fija al campo): $\Psi = \omega_s \cdot t$, y en general, $\Psi = \int \omega_s(t) \cdot dt$, siendo ω_s la pulsación de las tensiones del estátor.

Es evidente que:

$$\mathbf{T}_c^{-1}(\Psi, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}(\Psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^{-1}(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Las transformaciones más utilizadas son las de Park y Ku [18].

3.2.2. Ecuaciones transformadas de Ku

La transformación de Ku tiene como principal cualidad que diagonaliza matrices circulantes, ya que tiene incorporada la transformación de Fortescue o de componentes simétricas. Está definida por:

$$\mathbf{K}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-j \cdot \Psi} & a \cdot e^{-j \cdot \Psi} & a^2 \cdot e^{-j \cdot \Psi} \\ e^{j \cdot \Psi} & a^2 \cdot e^{j \cdot \Psi} & a \cdot e^{j \cdot \Psi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{K}^{-1}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{j \cdot \Psi} & e^{-j \cdot \Psi} \\ 1 & a^2 \cdot e^{j \cdot \Psi} & a \cdot e^{-j \cdot \Psi} \\ 1 & a \cdot e^{j \cdot \Psi} & a^2 \cdot e^{-j \cdot \Psi} \end{bmatrix}$$

siendo a el operador complejo $a = e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}$. Se observa que $\mathbf{K}^{-1}(\Psi) = (\mathbf{K}^t(\Psi))^*$.

La matriz de transformación compuesta en este caso es:

$$\mathbf{K}_c(\Psi, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\Psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{K}(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Aplicando la transformación de Ku a las ecuaciones eléctricas de la máquina de inducción trifásica (3.8), se tiene:

$$\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{K}_c \cdot \frac{d}{dt} \{ \mathbf{M} \cdot \mathbf{i} \} \quad (3.23)$$

Operando:

$$\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{i} + \mathbf{K}_c \cdot \frac{d}{dt} \{ \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{i} \} \quad (3.24)$$

Constructivamente el motor se diseña para que las tres bobinas del estátor sean iguales y, por tanto: $r_{sa} = r_{sb} = r_{sc} = r_s$. En el rotor: $r_{ra} = r_{rb} = r_{rc} = r_r$. En este caso se cumple:

$$\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} = \mathbf{R} \quad (3.25)$$

Definiendo las variables transformadas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sk} &= \mathbf{K}(\Psi) \cdot \mathbf{v}_s \quad ; \quad \mathbf{v}_{rk} = \mathbf{K}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{v}_r \quad ; \quad \mathbf{v}_k = \mathbf{K}_c(\Psi, \theta) \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_{sk} &= \mathbf{K}(\Psi) \cdot \mathbf{i}_s \quad ; \quad \mathbf{i}_{rk} = \mathbf{K}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{i}_r \quad ; \quad \mathbf{i}_k = \mathbf{K}_c(\Psi, \theta) \cdot \mathbf{i} \\ \boldsymbol{\phi}_{sk} &= \mathbf{K}(\Psi) \cdot \boldsymbol{\phi}_s \quad ; \quad \boldsymbol{\phi}_{rk} = \mathbf{K}(\Psi - \theta) \cdot \boldsymbol{\phi}_r \quad ; \quad \boldsymbol{\phi}_k = \mathbf{K}_c(\Psi, \theta) \cdot \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si el sistema es lineal (no hay saturación),

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1}) \right\} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{i}_k}{dt} \quad (3.27)$$

Por último podemos definir la matriz de acoplamientos transformada por Ku como:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_c^{-1} \quad (3.28)$$

Esta matriz es constante (no depende de θ):

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} l_s - m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_s + \frac{m_s}{2} & 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & l_s + \frac{m_s}{2} & 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & l_r - m_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot m}{2} & 0 & 0 & l_r + \frac{m_r}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot m}{2} & 0 & 0 & l_r + \frac{m_r}{2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Cambiando la notación por:

$$\begin{aligned} L_{s0} &= l_s - m_s \quad ; \quad L_{r0} = l_r - m_r \\ L_s &= l_s + \frac{m_s}{2} \quad ; \quad L_r = l_r + \frac{m_r}{2} \quad ; \quad M = \frac{3 \cdot m}{2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

la matriz \mathbf{M}_k se puede expresar por:

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} L_{s0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & L_s & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & L_{r0} & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

El sistema (3.27) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_k &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{K}_c^{-1} \cdot \mathbf{M}_k) \right\} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{M}_k \cdot \frac{d\mathbf{i}_k}{dt} \\
&= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{K}_c \cdot \frac{d\mathbf{K}_c^{-1}}{dt} \cdot \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{i}_k + \mathbf{M}_k \cdot \frac{d\mathbf{i}_k}{dt}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Operando el término $\mathbf{K}_c \cdot \frac{d\mathbf{K}_c^{-1}}{dt}$:

$$\mathbf{K}_c \cdot \frac{d\mathbf{K}_c^{-1}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j \cdot \omega_\Psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j \cdot \omega_\Psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j \cdot s \cdot \omega_\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j \cdot s \cdot \omega_\Psi \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

donde:

$$\omega_\Psi = \frac{d\Psi}{dt} \quad ; \quad s = \frac{\omega_\Psi - \omega}{\omega_\Psi} \tag{3.34}$$

Agrupando términos y representando la derivada por el operador p la ecuación (3.32) queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} v_{s0} \\ v_{sf} \\ v_{sb} \\ v_{r0} \\ v_{rf} \\ v_{rb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_{s0} \cdot p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r_s + L_s \cdot (p + j \cdot \omega_\Psi) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & r_s + L_s \cdot (p - j \cdot \omega_\Psi) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M \cdot (p + j \cdot s \cdot \omega_\Psi) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & M \cdot (p - j \cdot s \cdot \omega_\Psi) & \dots \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & M \cdot (p + j \cdot \omega_\Psi) & 0 \\ \dots & 0 & 0 & M \cdot (p - j \cdot \omega_\Psi) \\ \dots & r_r + L_{r0} \cdot p & 0 & 0 \\ \dots & 0 & r_r + L_r \cdot (p + j \cdot s \cdot \omega_\Psi) & 0 \\ \dots & 0 & 0 & r_r + L_r \cdot (p - j \cdot s \cdot \omega_\Psi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{sf} \\ i_{rb} \\ i_{r0} \\ i_{rf} \\ i_{rb} \end{bmatrix}$$

siendo las nuevas variables transformadas:

- homopolar (subíndice 0),
- *forward* (subíndice f),
- *backward* (subíndice b).

Las tensiones v_{sf} y v_{sb} (así como las tensiones v_{rf} y v_{rb}) son complejo conjugadas:

$$\begin{bmatrix} v_{sf} \\ v_{sb} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} e^{-j \cdot \Psi} & a \cdot e^{-j \cdot \Psi} & a^2 \cdot e^{-j \cdot \Psi} \\ e^{j \cdot \Psi} & a^2 \cdot e^{j \cdot \Psi} & a \cdot e^{j \cdot \Psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Como las ecuaciones de (3.35) correspondientes a dichas tensiones también son complejo conjugadas las intensidades *forward* y *backward* resultantes de resolver el sistema (3.35) también serán complejo conjugadas. En consecuencia, sólo es necesario tener en cuenta la ecuación *forward* del estátor y la del rotor, o las *backward* correspondientes.

Si se trata de una máquina de jaula de ardilla, o de rotor bobinado pero sin alimentación por el rotor, las bobinas del rotor están cortocircuitadas. Por ello, no hay tensión homopolar, luego al no haber excitación, la corriente homopolar del rotor de régimen transitorio y de régimen permanente será cero³, y esa ecuación no hace falta estudiarla.

La expresión del par electromagnético en variables transformadas de Ku es:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot \mathbf{i}_r = [\mathbf{K}^{-1}(\Psi) \cdot \mathbf{i}_{sk}]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot [\mathbf{K}^{-1}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{i}_{rk}] \\ &= [\mathbf{i}_{sk}]^t \cdot [\mathbf{K}^{-1}(\Psi)]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta) \right\} \cdot \mathbf{K}^{-1}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{i}_{rk} \\ &= j \cdot M \cdot (i_{sb} \cdot i_{rf} - i_{sf} \cdot i_{rb}) = 2 \cdot M \cdot \text{Im}(i_{sf} \cdot i_{rf}^*) \end{aligned} \quad (3.37)$$

En resumen, para estudiar el comportamiento dinámico de la máquina de inducción trifásica, se han de estudiar:

- la ecuación homopolar del estátor, que está desacoplada del resto de ecuaciones,
- la ecuación *forward* del estator y la del rotor (o las *backward* respectivas), que están desacopladas entre ellas,
- las ecuaciones mecánicas.

$$\left. \begin{aligned} v_{s0} &= r_s \cdot i_{s0} + L_{s0} \frac{di_{s0}}{dt} \\ \begin{bmatrix} v_{sf} \\ v_{rf} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} + j \cdot \omega_\Psi \cdot \begin{bmatrix} L_s & M \\ s \cdot M & s \cdot L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} \\ \Gamma - \Gamma_{res} &= J \cdot \frac{d\omega}{dt} \\ \omega &= \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Si el estátor se conecta en estrella aislada o en triángulo, tampoco hará falta tener en cuenta la ecuación homopolar del estátor. Tan solo será necesario tenerla en cuenta si se conecta en estrella con neutro.

³ Excepto si existiera una condición inicial no nula: $i_{s0}(0) \neq 0$, o bien $i_{ra}(0) + i_{rb}(0) + i_{rc}(0) \neq 0$

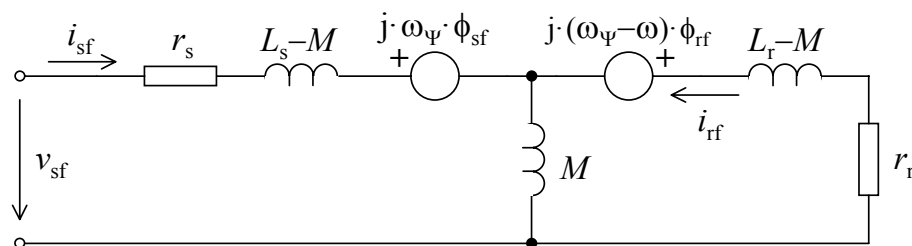


Fig. 3.2. Representación de las ecuaciones eléctricas (componente forward de la transformación de Ku) de la máquina de inducción trifásica.

Por lo tanto el comportamiento eléctrico de la máquina está definido por un sistema de dos ecuaciones diferenciales en variables complejas de orden 1, más dos ecuaciones diferenciales, en variables reales, de orden 1 y la homopolar.

Las ecuaciones *forward* de (3.38) se pueden representar mediante el circuito eléctrico de la Fig. 3.2 siendo las componentes de los flujos:

$$\begin{bmatrix} \phi_{sf} \\ \phi_{rf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sf} \\ i_{rf} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

y donde se ha impuesto que la tensión transformada del rotor es nula, $v_{rf} = 0$, porque las bobinas del rotor están cortocircuitadas. Por último se utilizan las inductancias de dispersión de estátor y rotor, definidas como:

$$L_{sd} = L_s - M \quad ; \quad L_{rd} = L_r - M \quad (3.40)$$

3.2.3. Ecuaciones transformadas de Park

La matriz de Park de orden 3 es:

$$\mathbf{P}(\Psi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\Psi) & \cos\left(\Psi - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\Psi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\Psi) & -\sin\left(\Psi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\Psi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(\Psi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\Psi) & -\sin(\Psi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\Psi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\Psi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\Psi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\Psi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

en donde se observa que $\mathbf{P}^{-1}(\Psi) = \mathbf{P}^t(\Psi)$.

La transformación de Park compuesta es:

$$\mathbf{P}_c(\Psi, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\Psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

y si se aplica a las ecuaciones eléctricas de la máquina de inducción (3.8), y operando:

$$\mathbf{P}_c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{i} + \mathbf{P}_c \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{i} \right\} \quad (3.43)$$

Análogamente a la transformación de Ku:

$$\mathbf{P}_c \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_c^{-1} = \mathbf{R} \quad (3.44)$$

Definiendo las variables transformadas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sp} &= \mathbf{P}(\Psi) \cdot \mathbf{v}_s & ; & \quad \mathbf{v}_{rp} = \mathbf{P}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{v}_r & ; & \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{P}_c(\Psi, \theta) \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_{sp} &= \mathbf{P}(\Psi) \cdot \mathbf{i}_s & ; & \quad \mathbf{i}_{rp} = \mathbf{P}(\Psi - \theta) \cdot \mathbf{i}_r & ; & \quad \mathbf{i}_p = \mathbf{P}_c(\Psi, \theta) \cdot \mathbf{i} \\ \boldsymbol{\phi}_{sp} &= \mathbf{P}(\Psi) \cdot \boldsymbol{\phi}_s & ; & \quad \boldsymbol{\phi}_{rp} = \mathbf{P}(\Psi - \theta) \cdot \boldsymbol{\phi}_r & ; & \quad \boldsymbol{\phi}_p = \mathbf{P}_c(\Psi, \theta) \cdot \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Si el sistema es lineal (no hay saturación),

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_p + \mathbf{P}_c \cdot \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \mathbf{P}_c^{-1}) \right\} \cdot \mathbf{i}_p + \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{i}_p}{dt} \quad (3.46)$$

Por último podemos definir la matriz de acoplamientos transformada por Park como:

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \quad (3.47)$$

Esta matriz es constante (no depende de θ) y coincide con la de Ku (3.29) y (3.31): $\mathbf{M}_p = \mathbf{M}_k$.

El sistema (3.46) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_p + \mathbf{P}_c \cdot \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_c^{-1} \cdot \mathbf{M}_p) \right\} \cdot \mathbf{i}_p + \mathbf{M}_p \cdot \frac{d\mathbf{i}_p}{dt} \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}_p + \mathbf{P}_c \cdot \frac{d\mathbf{P}_c^{-1}}{dt} \cdot \mathbf{M}_p \cdot \mathbf{i}_p + \mathbf{M}_p \cdot \frac{d\mathbf{i}_p}{dt} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Operando se llega a:

$$\begin{bmatrix} v_{s0} \\ v_{sd} \\ v_{sq} \\ v_{r0} \\ v_{rd} \\ v_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + L_{s0} \cdot p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_s + L_s \cdot p & -L_s \cdot \omega_\Psi & 0 & M \cdot p & -M \cdot \omega_\Psi \\ 0 & L_s \cdot \omega_\Psi & r_s + L_s \cdot p & 0 & M \cdot \omega_\Psi & M \cdot p \\ 0 & 0 & 0 & r_r + L_{r0} \cdot p & 0 & 0 \\ 0 & M \cdot p & -M \cdot s \cdot \omega_\Psi & 0 & r_r + L_r \cdot p & -L_r \cdot s \cdot \omega_\Psi \\ 0 & M \cdot s \cdot \omega_\Psi & M \cdot p & 0 & L_r \cdot s \cdot \omega_\Psi & r_r + L_r \cdot p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{r0} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

siendo las nuevas variables transformadas:

- homopolar (subíndice 0),
- directa (subíndice d),

- en cuadratura (subíndice q).

La expresión del par electromagnético en variables de Park es:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= [\mathbf{i}_s]^t \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}(\theta)}{\partial \theta} \cdot \mathbf{i}_r = [\mathbf{i}_{sp}]^t \cdot [\mathbf{P}^{-1}(\Psi)]^t \cdot \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}(\theta)}{\partial \theta} \cdot [\mathbf{P}^{-1}(\Psi - \theta)] \cdot [\mathbf{i}_{rp}] \\ &= M \cdot (i_{rd} \cdot i_{sq} - i_{rq} \cdot i_{sd}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

A partir de las matrices de transformación, (3.22) y (3.42), se puede obtener la relación entre las variables transformadas de Ku y de Park. Operando con la relación entre las variables reales x (como por ejemplo la tensión, la intensidad o el flujo) y las transformadas por Park x_p y por Ku x_k :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_p &= \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \mathbf{x} = \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \mathbf{x}_p \left. \begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{P}_c^{-1} \cdot \mathbf{x}_p \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

el término $\mathbf{K}_c \cdot \mathbf{P}_c^{-1}$ da la relación entre ambas variables transformadas:

$$\begin{bmatrix} x_{s0} \\ x_{sf} \\ x_{sb} \\ x_{r0} \\ x_{rf} \\ x_{rb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{s0} \\ x_{sd} \\ x_{sq} \\ x_{r0} \\ x_{rd} \\ x_{rq} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

de donde se deducen que las componentes homopolares son iguales en ambas transformaciones, la componente *forward* de la transformación de Ku es la notación compleja de las componentes *directa* y *en cuadratura* de la transformación de Park y, por último, la componente *backward* de la transformación de Ku es la complejo-conjugada de la componente *forward*, como ya se había comentado anteriormente:

$$x_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x_d + j \cdot x_q) \quad ; \quad x_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x_d - j \cdot x_q) \quad (3.53)$$

Las ecuaciones eléctricas de régimen dinámico en variables de Park, (3.49), se pueden representar mediante dos circuitos eléctricos, uno correspondiente a la componente directa (Fig. 3.3) y el otro a la componente en cuadratura (Fig. 3.4), donde los valores de los flujos de estátor y rotor son:

$$\begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

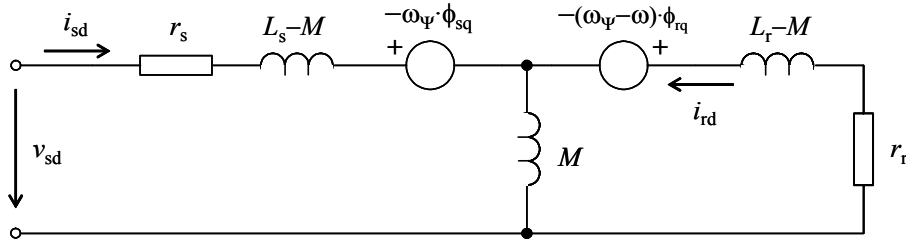


Fig. 3.3. Representación de las ecuaciones eléctricas (componente directa de la transformación de Park) de la máquina de inducción trifásica.

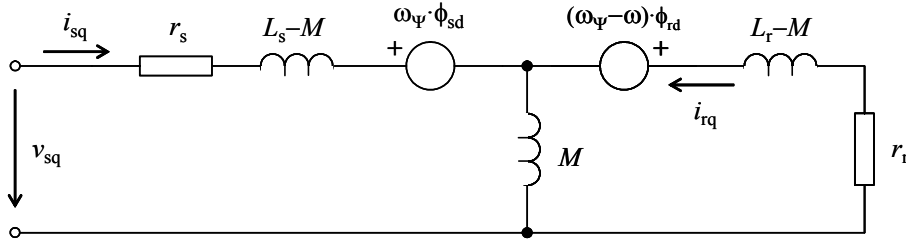


Fig. 3.4. Representación de las ecuaciones eléctricas (componente en cuadratura de la transformación de Park) de la máquina de inducción trifásica.

3.3. Modelo de régimen permanente

Las ecuaciones y el esquema de régimen permanente son aquellos que definen el comportamiento de las máquinas cuando se ha alcanzado el régimen permanente eléctrico y mecánico. A pesar de que la velocidad mecánica de algunas máquinas en régimen permanente eléctrico y mecánico no es rigurosamente constante (cuando el par de régimen permanente es pulsante⁵), las ecuaciones y el esquema de régimen permanente se obtienen en el supuesto de que permaneciera constante.

Para deducir las ecuaciones de régimen permanente de la máquina de inducción trifásica utilizaremos las ecuaciones transformadas de Ku, (3.35). Si la velocidad mecánica permanece constante y se elige una pulsación ω_ψ constante, se tiene un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Las variables de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales tienen en régimen permanente la misma forma que las excitaciones.

Si alimentamos la máquina con un sistema de tensiones simétrico y equilibrado de secuencia directa:

$$\begin{aligned} v_{sa} &= \sqrt{2} \cdot V_s \cdot \cos(\omega_s \cdot t + \varphi_s) \\ v_{sb} &= \sqrt{2} \cdot V_s \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \varphi_s - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ v_{sc} &= \sqrt{2} \cdot V_s \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \varphi_s + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

La tensión del estátor transformada v_{sf} es:

$$v_{sf} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(e^{-j \cdot \Psi} \cdot v_{sa} + a \cdot e^{-j \cdot \Psi} \cdot v_{sb} + a^2 \cdot e^{-j \cdot \Psi} \cdot v_{sc} \right) \quad (3.56)$$

⁵ Como, por ejemplo, el caso del motor de inducción monofásico.

Sustituyendo las tensiones de las tres fases y operando se llega a:

$$v_{sf} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot V_s \cdot e^{j \cdot (\omega_s \cdot t + \varphi_s - \Psi)} \quad (3.57)$$

Esta tensión es constante en la referencia en sincronismo, $\Psi = \omega_s \cdot t$, $\omega_\Psi = \omega_s$,

$$v_{sf} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot V_s \cdot e^{j \cdot \varphi_s} \quad (3.58)$$

Como las excitaciones del sistema son constantes o nulas:

- $v_{sf} = \text{cte}$,
- $v_{sb} = v_{sf}^* = \text{cte}$,
- $v_{s0} = 0$, porque la alimentación del estátor es equilibrada,
- $v_{rf} = v_{rb}^* = 0$, por ser nulas las tres tensiones del rotor,
- $v_{r0} = 0$, porque la alimentación del rotor es nula,

las variables en régimen permanente serán constantes o nulas:

$$\begin{aligned} i_{sf} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I_s \cdot e^{j \cdot \varphi_{is}} & ; & & i_{rf} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot I_r \cdot e^{j \cdot \varphi_{ir}} \\ i_{sb} &= i_{sf}^* & ; & & i_{rb} &= i_{rf}^* & ; & & i_{s0} &= i_{r0} = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Fijando la atención en las ecuaciones *forward*, como las variables en régimen permanente son constantes, sus derivadas son nulas. Las ecuaciones transformadas de Ku del sistema eléctrico, (3.38), quedan:

$$\left. \begin{aligned} v_{sf} &= r_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot L_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot i_{rf} \\ 0 &= r_r \cdot i_{rf} + j \cdot s \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot i_{sf} + j \cdot s \cdot \omega_\Psi \cdot L_r \cdot i_{rf} \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

siendo s el deslizamiento

$$s = \frac{\omega_\Psi - \omega}{\omega_\Psi} \quad (3.61)$$

Dividiendo la ecuación del rotor por s ,

$$\left. \begin{aligned} v_{sf} &= r_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot L_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot i_{rf} \\ 0 &= \frac{r_r}{s} \cdot i_{rf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot L_r \cdot i_{rf} \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Sumando y restando el término $j \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot i_{sf}$ a la primera ecuación y el término $j \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot i_{rf}$ a la segunda ecuación:

$$\left. \begin{aligned} v_{sf} &= r_s \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot (L_s - M) \cdot i_{sf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot (i_{sf} + i_{rf}) \\ 0 &= \frac{r_r}{s} \cdot i_{rf} + j \cdot \omega_\Psi \cdot M \cdot (i_{sf} + i_{rf}) + j \cdot \omega_\Psi \cdot (L_r - M) \cdot i_{rf} \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

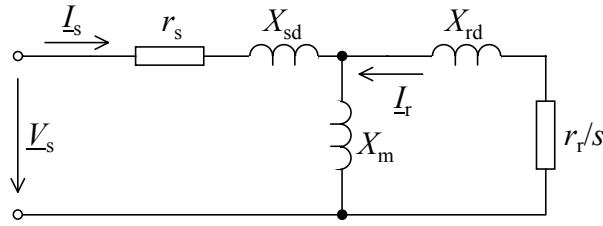


Fig. 3.5. Esquema equivalente por devanado de la máquina de inducción trifásica válido para régimen permanente senoidal.

Estas ecuaciones se pueden representar con el conocido esquema de la Fig. 3.5. Los fasores del mismo están relacionados con las variables de Ku mediante:

$$\underline{V}_s = V_s \cdot e^{j \cdot \phi_s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot v_{sf} \Rightarrow \underline{I}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot i_{sf} \quad ; \quad \underline{I}_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot i_{rf} \quad (3.64)$$

Las reactancias son

$$\begin{aligned} X_{sd} &= \omega_\psi \cdot L_{sd} = \omega_\psi \cdot (L_s - M) \quad ; \quad X_{rd} = \omega_\psi \cdot L_{rd} = \omega_\psi \cdot (L_r - M) \\ X_m &= \omega_\psi \cdot M \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.3.1. Par electromagnético

Para determinar la expresión del par electromagnético en régimen permanente se parte de la expresión, en variables de Ku, del par en régimen dinámico, tal como se muestra en (3.37) Sustituyendo en esta expresión las intensidades definidas en (3.64) resulta:

$$\Gamma(t) = 2 \cdot M \cdot \text{Im}(i_{sf} \cdot i_{rf}^*) = 3 \cdot M \cdot \text{Im}(\underline{I}_s \cdot \underline{I}_r^*) \quad (3.66)$$

A partir de la segunda ecuación eléctrica de la máquina de inducción se obtiene:

$$\underline{I}_s = -\frac{r_r + j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot L_r}{j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot M} \cdot \underline{I}_r \quad (3.67)$$

Sustituyendo esta expresión en (3.66):

$$\Gamma(t) = 3 \cdot M \cdot \text{Im}\left(\left(-\frac{r_r + j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot L_r}{j \cdot s \cdot \omega_\psi \cdot M} \cdot \underline{I}_r\right) \cdot \underline{I}_r^*\right) = 3 \cdot \frac{1}{\omega_\psi} \cdot \frac{r_r}{s} \cdot I_r^2 \quad (3.68)$$

se obtiene la expresión del par de la máquina de inducción en régimen permanente en la que se observa que el par es proporcional a la potencia disipada en la resistencia r_r/s .

3.4. Ecuaciones de la máquina de inducción con p pares de polos

Las ecuaciones de la máquina de inducción (3.13) y (3.15) corresponden a un par de polos (al igual que todo el resto de ecuaciones deducidas a partir de éstas).

Tabla 3.1: Relación entre las ecuaciones de la máquina de un par de polos y de la de p pares de polos.

1 par de polos	p pares de polos
θ	$p \cdot \theta$
ω	$p \cdot \omega$
$\Gamma(t)$	$p \cdot \Gamma(t)$

Cuando una máquina tiene p pares de polos a cada vuelta mecánica le corresponden p vueltas eléctricas. En consecuencia, la matriz de acoplamientos no depende del ángulo mecánico sino del ángulo eléctrico, que es p veces mayor:

$$\mathbf{M}(\theta_e) = \mathbf{M}(p \cdot \theta) \quad (3.69)$$

La ecuación (3.8) se puede expresar como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt} \{ \mathbf{M}(\theta_e) \cdot \mathbf{i} \} \quad (3.70)$$

Sin embargo, el par electromagnético, definido en (3.10), sí que se obtiene derivando la co-energía (o la energía) magnética con respecto al ángulo mecánico:

$$\Gamma(t) = \left. \frac{\partial W'_{mag}([\mathbf{i}], \theta_e)}{\partial \theta} \right|_{[\mathbf{i}]=cte} = \left. \frac{\partial W'_{mag}([\mathbf{i}], \theta_e)}{\partial (\theta_e/p)} \right|_{[\mathbf{i}]=cte} \quad (3.71)$$

luego:

$$\Gamma(t) = [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{M}_{sr}(\theta_e) \right\} \cdot \mathbf{i}_r = [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial (\theta_e/p)} \mathbf{M}_{sr}(\theta_e) \right\} \cdot \mathbf{i}_r = p \cdot [\mathbf{i}_s]^t \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_e} \mathbf{M}_{sr}(\theta_e) \right\} \cdot \mathbf{i}_r \quad (3.72)$$

En definitiva, una máquina de inducción de p pares de polos se puede analizar como una de un par de polos, variando la expresión del par, que queda multiplicada por p y cambiando θ por $p \cdot \theta$ y ω por $p \cdot \omega$, tal como se muestra en la Tabla 3.1.

Capítulo 4

Efectos de los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos

4. Efectos de los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos

En este capítulo se simulan los efectos de los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos. Para ello los huecos se caracterizan como se ha descrito en el capítulo 2 y se utiliza el modelo matemático del capítulo 3 para el motor de inducción trifásico. Posteriormente, se realizan cálculos masivos de huecos de tensión para cuantificar y valorar con más exactitud la sensibilidad de este tipo de cargas. Finalmente, se muestran las conclusiones.

4.1. Introducción

Todos los huecos de tensión simulados en este capítulo presentan una forma de onda rectangular, es decir, que se ha considerado instantánea la caída y posterior recuperación de la tensión.

Por lo que respecta a la máquina de inducción, se ha escogido un motor que acciona un ventilador en una planta química. Sus datos nominales son $P_N = 560$ kW, $U_N = 380$ V, $f_N = 50$ Hz, $\Gamma_N = 1793$ Nm, $n_N = 2983$ r/min e $I_N = 956.4$ A. En todos los casos se ha supuesto que el motor está trabajando en condiciones nominales cuando se ve sometido al hueco de tensión. Sin embargo, hay que hacer notar que también se han realizado cálculos con otros motores que reflejan el mismo comportamiento cualitativo.

La mayoría de motores de inducción de la industria no disponen de neutro, y también éste es el caso del motor escogido. Esto implica que, tal como ya se ha comentado en el capítulo 2, los efectos producidos por los huecos de tensión tipos E y G son idénticos, puesto que presentan la misma componente directa e inversa. En consecuencia los resultados mostrados para los huecos de tensión tipo E también son válidos para los huecos tipo G.

El modelo dinámico utilizado para la máquina de inducción es lineal y es válido para la máquina de jaula de ardilla o para la de rotor bobinado. Se ha trabajado con las ecuaciones transformadas de Ku, en la referencia en sincronismo.

4.2. Efectos producidos por los huecos de tensión

Los efectos observados en un motor de inducción que se ve sometido a un hueco de tensión son: picos de intensidad, picos de par y pérdida de velocidad mecánica ([19] y [20]). Por lo tanto, las variables estudiadas han sido la intensidad instantánea $i(t)$, el par instantáneo $\Gamma(t)$, y la velocidad instantánea $\omega(t)$.

Estos valores han sido referidos a los valores nominales de corriente, par y velocidad respectivamente para poder comparar los resultados:

$$i_{\text{pu}} = \frac{i}{\sqrt{2} \cdot I_N} \quad ; \quad \Gamma_{\text{pu}} = \frac{\Gamma}{\Gamma_N} \quad ; \quad \omega_{\text{pu}} = \frac{\omega}{\omega_N} \quad (4.1)$$

Los efectos comentados dependen de la profundidad, la duración, el tipo y el punto de onda inicial del hueco de tensión, de los parámetros del motor de inducción, de las características de la carga mecánica, etc. Según la caracterización de los huecos de tensión realizada en el capítulo 2, cualquiera de estos efectos se puede representar por una notación que defina unívocamente al hueco de tensión que lo origina. Como ejemplo, en el caso de la intensidad:

$$i(h, \Delta t, \psi_i, q) \quad (4.2)$$

En el estudio de múltiples casos se ha observado que el punto de onda inicial del hueco de tensión tiene influencia en los máximos picos de intensidad obtenidos. En el apartado siguiente, se determina el punto de onda inicial más desfavorable para cada tipología.

La Fig. 4.1 muestra la evolución temporal de la intensidad del motor, en la fase más desfavorable, cuando se ve sometido a los diferentes tipos de huecos de tensión, de una profundidad $h = 0.1$, una duración $\Delta t = 5.5$ ciclos y el punto de onda inicial más desfavorable a cada tipología. En todos los casos se observan picos de intensidad, tanto durante el hueco, como tras la recuperación de la tensión. Teniendo en cuenta la notación anterior, las intensidades mostradas en la Fig. 4.1 se pueden representar como:

$$\begin{aligned} \text{Hueco Tipo A: } & i(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 45^\circ, q = A) \\ \text{Hueco Tipo B: } & i(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = B) \\ \text{Hueco Tipo C: } & i(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 0^\circ, q = C) \\ \text{Hueco Tipo D: } & i(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = D) \\ \text{Hueco Tipo E: } & i(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 0^\circ, q = E) \\ \text{Hueco Tipo F: } & i(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = F) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tanto durante el hueco, como tras la recuperación de la tensión, siempre se observa que el máximo pico de intensidad se obtiene en el primer semiperíodo.

Comparando los resultados mostrados en la Fig. 4.1, se observa que el hueco de tensión tipo A (simétrico) es más severo que los asimétricos, y que dentro de éstos, el tipo B es el menos severo.

La Fig. 4.2 muestra la evolución temporal del par del motor cuando se ve sometido a los seis huecos de tensión anteriores, de una profundidad $h = 0.1$, una duración $\Delta t = 5.5$ ciclos y el punto de onda inicial más desfavorable para cada tipología:

$$\begin{aligned} \text{Hueco Tipo A: } & \Gamma(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 45^\circ, q = A) \\ \text{Hueco Tipo B: } & \Gamma(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = B) \\ \text{Hueco Tipo C: } & \Gamma(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 0^\circ, q = C) \\ \text{Hueco Tipo D: } & \Gamma(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = D) \\ \text{Hueco Tipo E: } & \Gamma(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 0^\circ, q = E) \\ \text{Hueco Tipo F: } & \Gamma(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = F) \end{aligned} \quad (4.4)$$

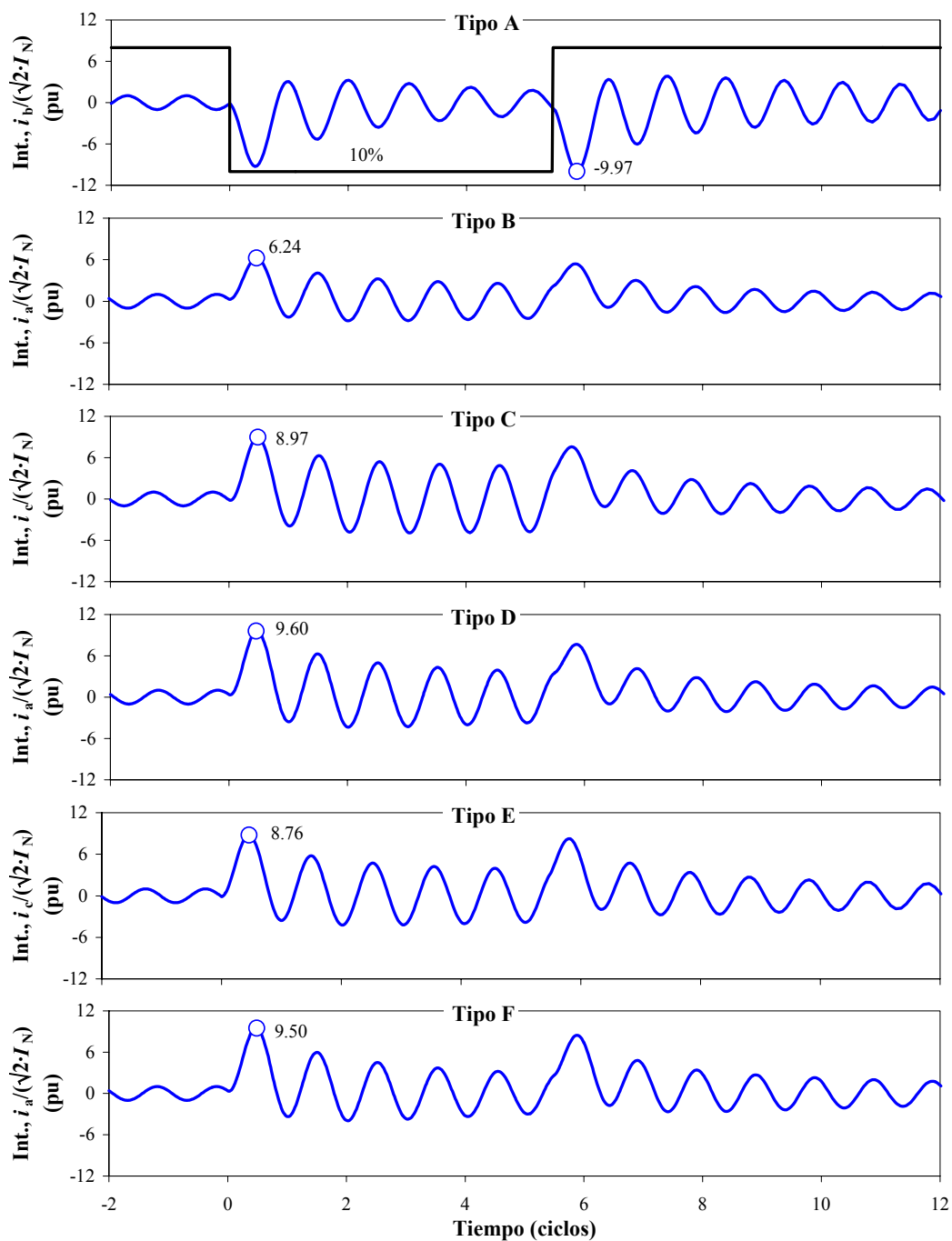


Fig. 4.1. Picos de intensidad para huecos tipos A, B, C, D, E y F, de profundidad del 10%, duración de 5.5 ciclos y el punto de onda inicial más desfavorable.

Los picos de par se producen tanto durante el hueco, como tras la recuperación de la tensión. El valor máximo de todos ellos se puede obtener tanto en una zona como en la otra, aunque en la Fig. 4.2 los máximos picos de par se han obtenido siempre durante el hueco de tensión.

A diferencia de lo que sucede con los picos de intensidad, el máximo pico de par no siempre se encuentra en el primer semiperíodo tras la caída de tensión o tras la recuperación de la misma.

También se observa que el par oscila durante el hueco de tensión si éste es asimétrico. Dicho de otro modo se aprecia el par pulsante debido a la componente inversa de la tensión.

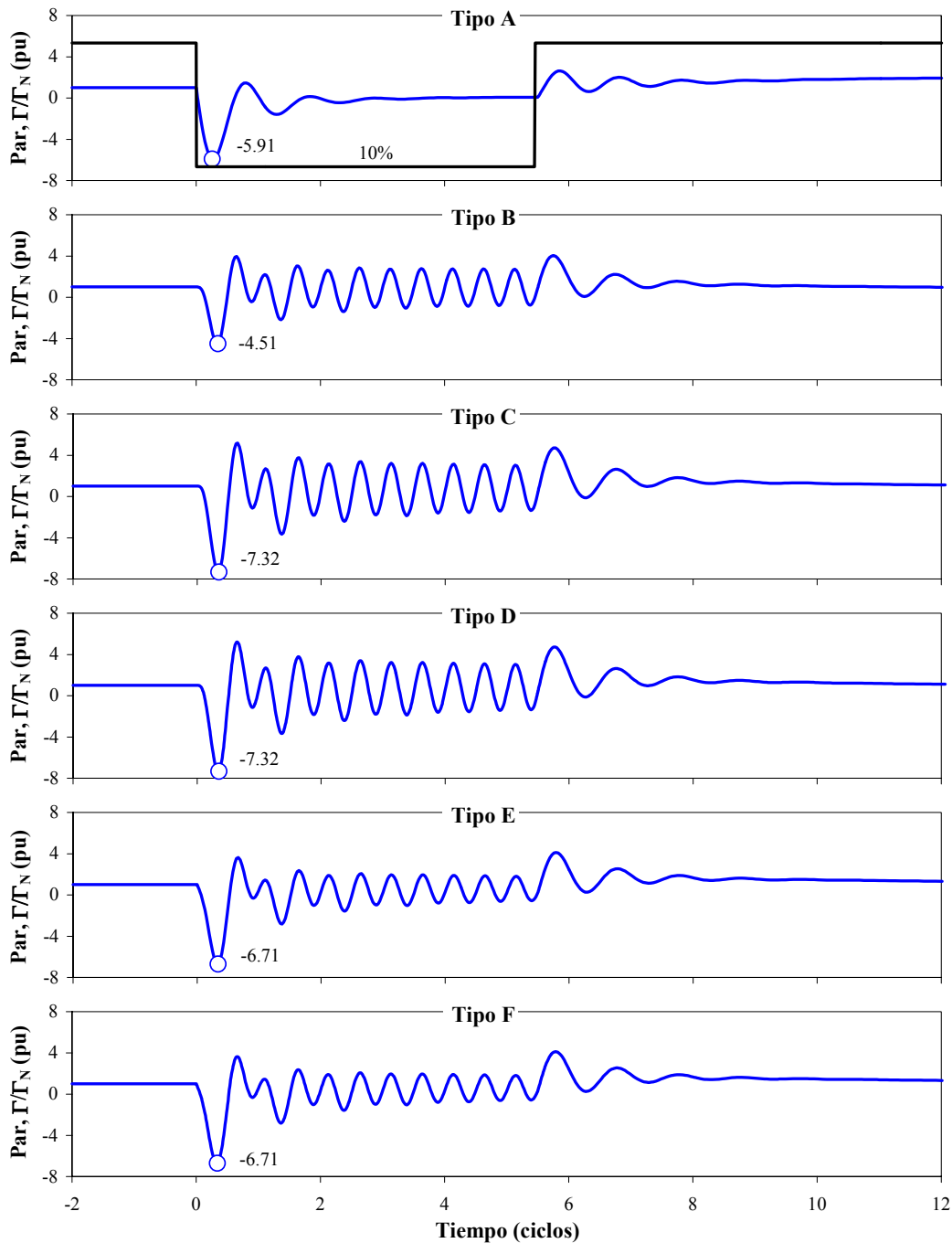


Fig. 4.2. Picos de par para huecos tipos A, B, C, D, E y F, de profundidad del 10%, duración de 5.5 ciclos y el punto de onda inicial más desfavorable.

A diferencia del caso anterior (picos de intensidad), los huecos de tensión asimétricos pueden llegar a ser más severos que los simétricos cuando se analizan los picos de par.

Los huecos de tensión tipo B se muestran siempre como los menos severos, produciéndose los picos de par más pequeños.

La Fig. 4.3 muestra la evolución temporal de la velocidad del motor cuando se ve sometido a los seis huecos de tensión anteriores, de una profundidad $h = 0.1$, una duración $\Delta t = 5.5$ ciclos y el punto de onda inicial más desfavorable a cada tipología:

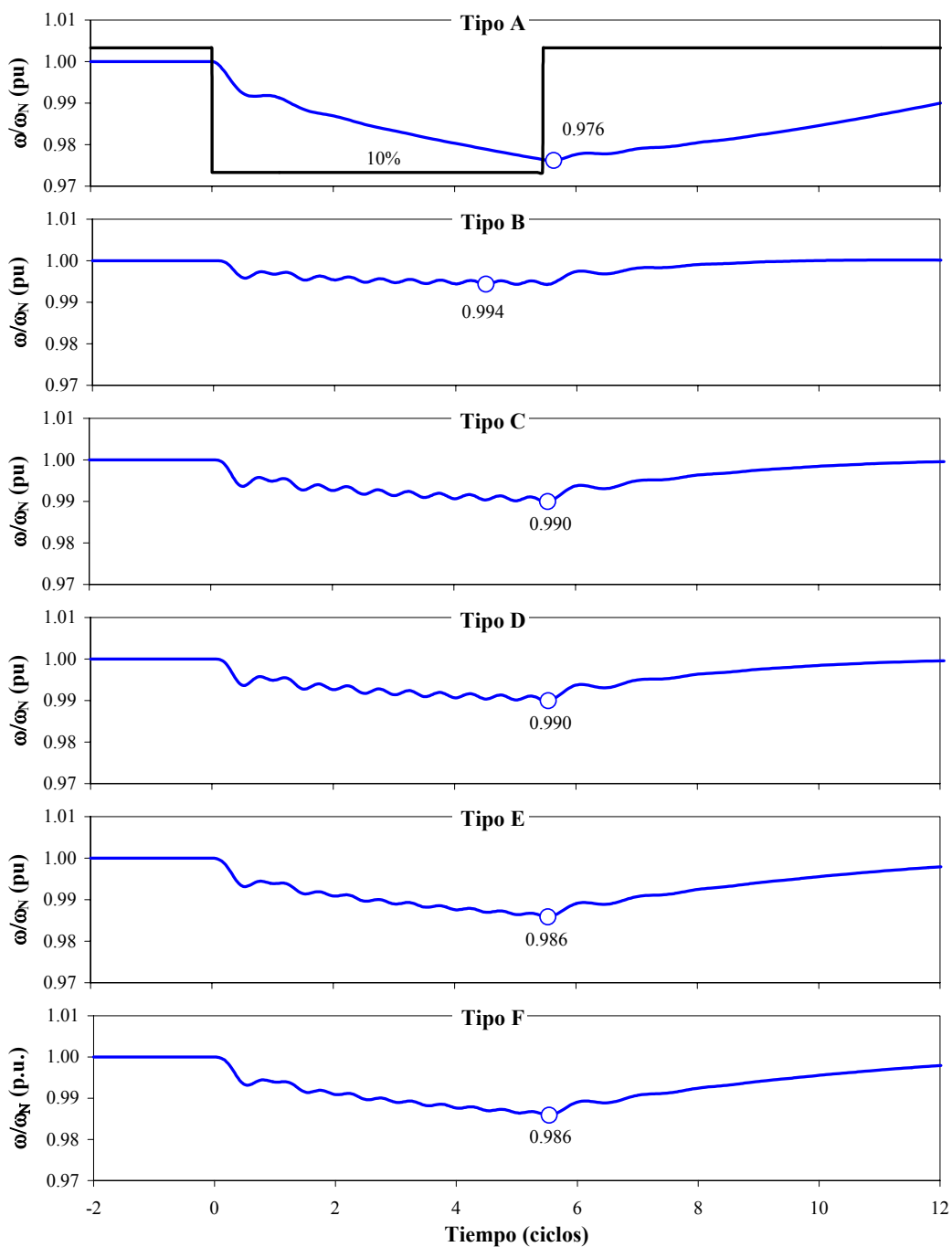


Fig. 4.3. Pérdida de velocidad para huecos tipos A, B, C, D, E y F, de profundidad del 10%, duración de 5.5 ciclos y el punto de onda inicial más desfavorable.

$$\begin{aligned}
 \text{Hueco Tipo A: } & \omega(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 45^\circ, q = A) \\
 \text{Hueco Tipo B: } & \omega(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = B) \\
 \text{Hueco Tipo C: } & \omega(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 0^\circ, q = C) \\
 \text{Hueco Tipo D: } & \omega(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = D) \\
 \text{Hueco Tipo E: } & \omega(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 0^\circ, q = E) \\
 \text{Hueco Tipo F: } & \omega(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i = 90^\circ, q = F)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Cuando se produce un hueco de tensión, la intensidad y el par del motor son los efectos más destacables ya que pueden llegar a ser varias veces los respectivos valores nominales.

Por el contrario, la pérdida de velocidad en los ejemplos anteriores no supera el 3%. Este hecho puede ser tenido en cuenta para centrar el estudio en los picos de intensidad y de par, siempre que la pérdida de velocidad no sea un aspecto crítico en el dispositivo accionado por el motor.

4.2.1. Magnitudes de interés

Llegados a este punto conviene definir una serie de conceptos relacionados con los valores máximos observados cuando se produce un hueco de tensión:

- *Pico de intensidad*: valor máximo del valor absoluto de la intensidad instantánea en cualquiera de las tres fases cuando se produce un hueco de tensión:

$$i_{\text{pico}} = \max \left\{ |i_a(t)|, |i_b(t)|, |i_c(t)| \right\} \quad (4.6)$$

Por ejemplo, en la Fig. 4.1 el *pico de intensidad* para el hueco tipo B de profundidad del 10% y duración de 5.5 ciclos se obtiene en la fase a y tiene un valor: $i_{\text{pico,pu}} = 6.24$ pu.

- *Pico de par*: valor máximo del valor absoluto del par instantáneo cuando se produce un hueco de tensión:

$$\Gamma_{\text{pico}} = \max \left\{ |\Gamma(t)| \right\} \quad (4.7)$$

Por ejemplo, en la Fig. 4.2 el *pico de par* para el hueco tipo B de profundidad del 10% y duración de 5.5 ciclos es: $\Gamma_{\text{pico,pu}} = 4.51$ pu.

- *Pico de velocidad*: valor mínimo de la velocidad instantánea cuando se produce un hueco de tensión:

$$\omega_{\text{pico}} = \min \left\{ |\omega(t)| \right\} \quad (4.8)$$

Por ejemplo, en la Fig. 4.3 el valor del *pico de velocidad* para el hueco tipo B de profundidad del 10% y duración de 5.5 ciclos es: $\omega_{\text{pico,pu}} = 0.994$ pu.

Cuando se analiza una serie de huecos de tensión h_1, h_2, h_3, \dots :

- *Máximo pico de intensidad*: valor máximo de entre todos los picos de intensidad:

$$i_{\text{MAX}} = \max \left\{ i_{\text{pico}}^{h_1}, i_{\text{pico}}^{h_2}, i_{\text{pico}}^{h_3}, \dots \right\} \quad (4.9)$$

Por ejemplo, en la Fig. 4.1 el *máximo pico de intensidad* corresponde al tipo A y su valor es: $i_{\text{MAX,pu}} = 9.97$ pu.

- *Máximo pico de par*: valor máximo de entre todos los picos de par:

$$\Gamma_{\text{MAX}} = \max \left\{ \Gamma_{\text{pico}}^{h_1}, \Gamma_{\text{pico}}^{h_2}, \Gamma_{\text{pico}}^{h_3}, \dots \right\} \quad (4.10)$$

En la Fig. 4.2 el *máximo pico de par* corresponde a los tipos C y D y su valor es: $\Gamma_{\text{MAX,pu}} = 7.32$ pu.

- *Mínimo pico de velocidad*: valor máximo de entre todos los picos de velocidad:

$$\omega_{\text{MIN}} = \min \left\{ \omega_{\text{pico}}^{h_1}, \omega_{\text{pico}}^{h_2}, \omega_{\text{pico}}^{h_3}, \dots \right\} \quad (4.11)$$

En la Fig. 4.3 el *mínimo pico de velocidad* corresponde al tipo A y su valor es: $\omega_{\text{MIN,pu}} = 0.976 \text{ pu}$.

4.3. Influencia del punto de onda inicial

El punto de onda inicial es una característica propia del hueco de tensión, al igual que la profundidad, la duración y la tipología. En consecuencia, cabe esperar que diferentes puntos de onda inicial (manteniendo constantes la profundidad, la duración y la tipología) determinen efectos cuantitativamente diferentes en el motor de inducción. En este apartado se estudia con detalle la influencia del punto de onda inicial en estos efectos.

Se ha observado, sin embargo, que el punto de onda inicial no tiene una influencia significativa en la pérdida de velocidad, sea cual sea el tipo de hueco de tensión. En consecuencia no se muestran los datos obtenidos para este caso.

Cuando el estudio se centra en los picos de intensidad y de par, se observa una fuerte relación entre el punto de onda inicial y los valores obtenidos en el caso de los huecos asimétricos: B, C, D, E y F.

Para el análisis de la influencia del punto de onda inicial (en los picos de intensidad y de par) se ha procedido al cálculo de 240 huecos de tensión (40 para cada una de las seis tipologías analizadas) de igual profundidad y duración y diferente punto de onda inicial. La Fig. 4.4 muestra de forma esquemática los huecos de tensión simulados.

En la Fig. 4.5 se muestran seis gráficas, una para cada tipología de hueco, correspondientes a los picos de intensidad en función del punto de onda inicial y agrupados en dos series: 1) picos de intensidad durante el hueco (línea roja); 2) picos de intensidad tras la recuperación de la tensión (línea azul). Todos los huecos presentan una profundidad del 10% y una duración de 5.5 ciclos:

$$i_{\text{pico}}(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i, q) \quad (4.12)$$

En la Fig. 4.5 se observa que los picos de intensidad para los huecos de tensión simétricos, tipo A, no presentan grandes variaciones al modificar el punto de onda inicial. Sin embargo existe una clara dependencia entre los picos de intensidad y el punto de onda inicial en los huecos de tensión asimétricos (tipos B, C, D, E, y F). En concreto, para los huecos de tensión tipos B, D y F el punto de onda inicial más desfavorable (el que produce el *máximo pico de intensidad*) es de 90° , y para los huecos de tensión tipos C y E, el punto de onda inicial más desfavorable es de 0° .

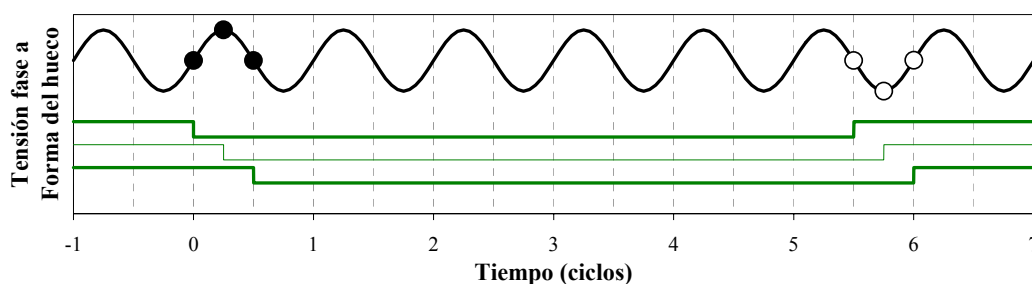


Fig. 4.4. Tensión en la fase a y forma de onda de huecos de tensión con misma profundidad y duración, pero distinto punto de onda inicial.

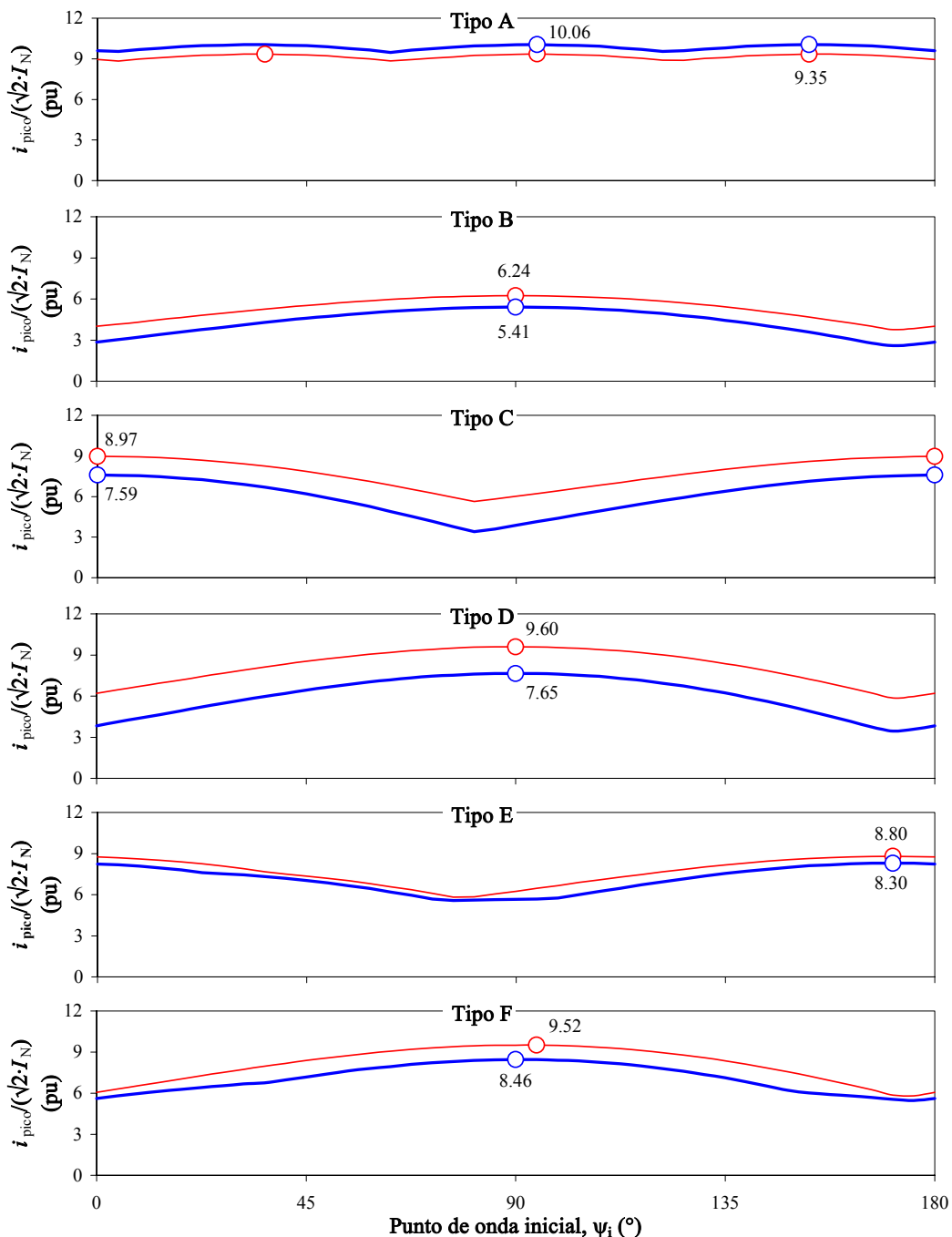


Fig. 4.5. Picos de intensidad para huecos tipos A, B, C, D, E y F, en función del punto de onda inicial. La línea roja muestra los picos de intensidad durante el hueco, y la línea azul los producidos tras la recuperación de la tensión. Todos los huecos presentan una profundidad del 10% y una duración de 5.5 ciclos.

Comparando los picos de intensidad durante el hueco y tras la recuperación de la tensión (líneas roja y azul respectivamente) se observa un comportamiento muy simétrico.

Estos resultados se han contrastado para otros valores de profundidad y duración del hueco de tensión y para otros motores, llegando siempre a resultados similares [19], [21] y [22]. El punto de onda inicial más desfavorable para cada tipo de hueco se utilizará posteriormente cuando se analicen los efectos de otras características del hueco en los motores de inducción, y también para obtener las curvas de sensibilidad del motor.

En la Fig. 4.6 se presentan los resultados obtenidos para los picos de par. Cada gráfica se ha realizado para una tipología diferente, a partir del cálculo de 40 huecos de tensión, todos ellos con una profundidad del 10% y una duración de 5.5 ciclos:

$$\Gamma_{\text{pico}}(h = 0.1, \Delta t = 5.5 \cdot T, \psi_i, q) \quad (4.13)$$

La línea roja de cada gráfica se corresponde con los picos de par observados durante el hueco de tensión, y la línea azul con los picos de par tras la recuperación de la tensión.

En este caso se observa que el punto de onda inicial no tiene ninguna influencia en los picos de par cuando el hueco de tensión es simétrico (tipo A, Fig. 4.6). Sin embargo, la influencia del punto de onda inicial en los picos de par es muy importante para los huecos de tensión asimétricos, de modo análogo a lo que ocurría con los picos de intensidad.

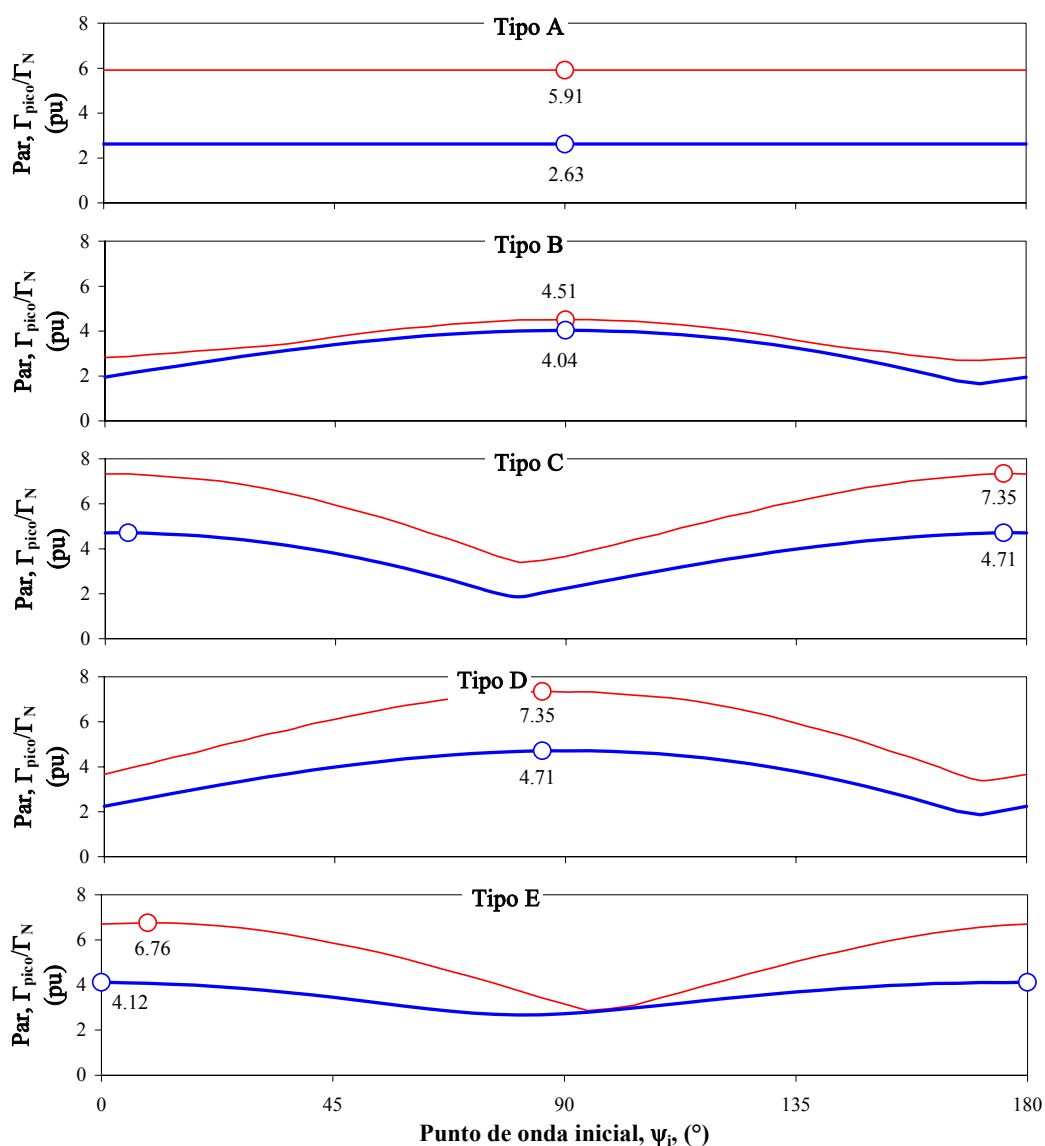


Fig. 4.6. Picos de par para huecos tipos A, B, C, D, E y F, en función del punto de onda inicial. La línea roja muestra los picos de par durante el hueco, y la línea azul los producidos tras la recuperación de la tensión. Todos los huecos presentan una profundidad del 10% y una duración de 5.5 ciclos.

Tabla 4.1: Punto de onda inicial más desfavorable.

Tipo de hueco:	Ψ_i
A	-
B, D, F	90°
C, E	0°

Los resultados presentados en la Fig. 4.6 indican que el punto de onda inicial más desfavorable es de 90° para los huecos de tensión tipos B, D y F, y el punto de onda inicial más desfavorable es de 0° para los huecos de tensión tipos C y E. Estos ángulos coinciden con los observados en el caso de los picos de intensidad.

También en este caso se han corroborado estos resultados para huecos de tensión de distinta profundidad y duración, así como para otros motores de inducción.

La Tabla 4.1 muestra el punto de onda inicial más desfavorable en función del tipo de hueco.

4.4. Influencia de la duración del hueco de tensión

En este apartado se estudia la relación que tiene la duración del hueco de tensión en los picos de intensidad y de par que se producen en el motor.

Como es lógico, la pérdida de velocidad será tanto mayor cuanto mayor sea la duración del hueco de tensión. En consecuencia no se ha estudiado la influencia de la duración en la pérdida de velocidad.

La duración se puede expresar en función del número de ciclos o períodos, n , tal como ya se definió en (2.7). Si T es el período ($T = 1/f$), entonces:

$$\Delta t = n \cdot T + \delta t \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq \delta t < T \end{cases} \quad (4.14)$$

De este modo, la duración es la suma de dos términos, uno que contabiliza el número entero de períodos transcurridos, $n \cdot T$, y otro que tiene en cuenta la parte fraccionaria, δt .

Para cada tipo de hueco de tensión se han calculado tres series diferenciadas con unas duraciones comprendidas entre los ciclos 1 y 2 ($n = 1$), entre los ciclos 10 y 11 ($n = 10$) y entre los ciclos 100 y 101 ($n = 100$).

Todos los huecos de tensión calculados tienen una profundidad $h = 10\%$, y cada tipo se ha calculado para el punto de onda inicial más desfavorable, tal como se muestra en la Fig. 4.7 con un punto negro.

$$\text{Fig. 4.7a, } \begin{cases} \text{serie 1: } v_1(0.1, T + \delta t, 90^\circ, [A,B,D,F]) \\ \text{serie 2: } v_2(0.1, 10 \cdot T + \delta t, 90^\circ, [A,B,D,F]) \\ \text{serie 3: } v_3(0.1, 100 \cdot T + \delta t, 90^\circ, [A,B,D,F]) \end{cases} \quad (4.15)$$

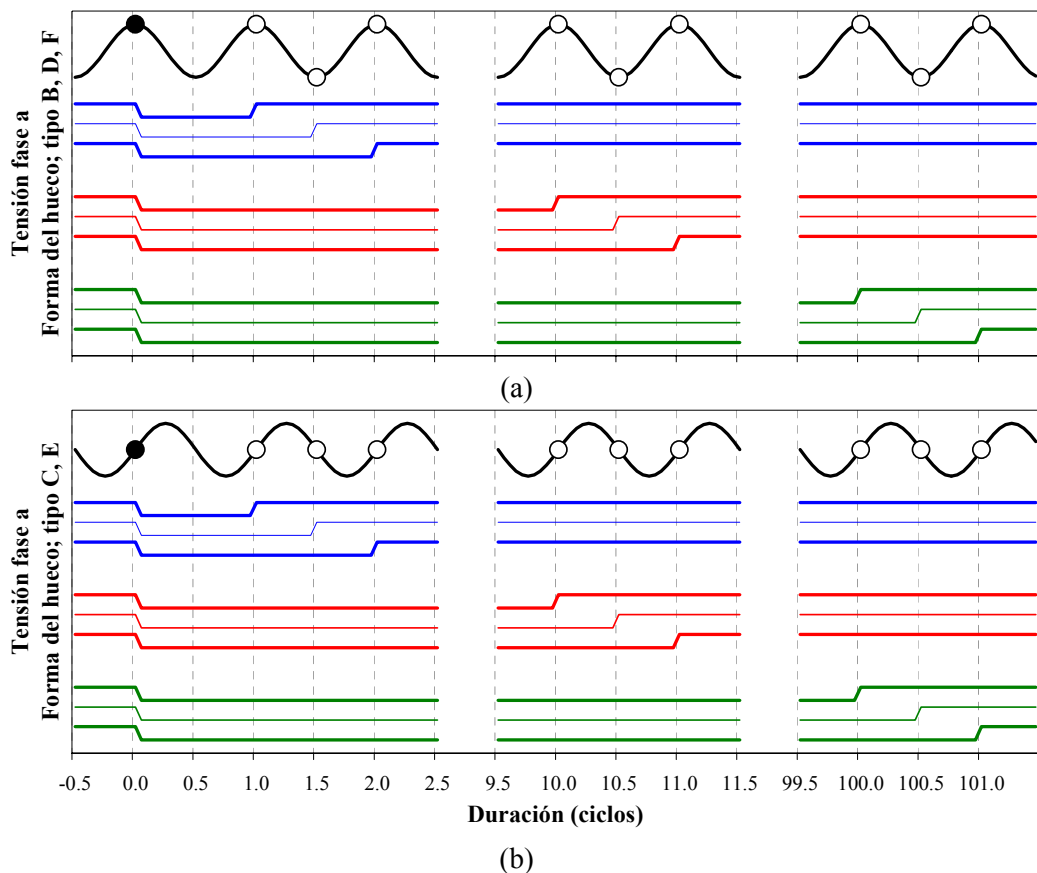


Fig. 4.7. Tensión de la fase a, y forma de onda de los huecos de tensión, a) huecos B, D y F: $\psi_i = 90^\circ$; b) huecos C y E: $\psi_i = 0^\circ$.

$$\text{Fig. 4.7b, } \begin{cases} \text{serie 1: } v_1(0.1, T + \delta t, 0^\circ, [C,E]) \\ \text{serie 2: } v_2(0.1, 10 \cdot T + \delta t, 0^\circ, [C,E]) \\ \text{serie 3: } v_3(0.1, 100 \cdot T + \delta t, 0^\circ, [C,E]) \end{cases} \quad (4.16)$$

La Fig. 4.8 muestra los picos de intensidad para los huecos tipo A, producidos durante el hueco de tensión (Fig. 4.8a), los producidos tras la recuperación de la tensión (Fig. 4.8b) y, por último, los producidos en ambas zonas (Fig. 4.8c).

Con respecto a los picos de intensidad producidos durante el hueco (es decir, entre la caída y posterior recuperación de la tensión, Fig. 4.8a) se pueden realizar los siguientes comentarios:

- Todos los picos de intensidad de una misma serie (huecos con el mismo valor de n) presentan el mismo valor puesto que todos los huecos presentan duraciones de más de un ciclo ($\Delta t \geq 1$ ciclo) y, tal como se ha comentado en el apartado 4.2, el pico de intensidad se produce en el primer semiperíodo.
- Los picos de intensidad de series diferentes también son iguales ya que si éstos se producen en el primer semiperíodo, la duración total del hueco no influye en el pico de intensidad registrado tras la caída de tensión (siempre que $\Delta t \geq 1$ ciclo).

Por lo que respecta a los picos de intensidad observados tras la recuperación de la tensión, Fig. 4.8b, se observa que para duraciones pequeñas (serie azul, $n = 1$) los valores obtenidos son algo menores que para duraciones mayores. En todas las series se aprecian ciertas oscilaciones, aunque moderadas, al ir variando δt .

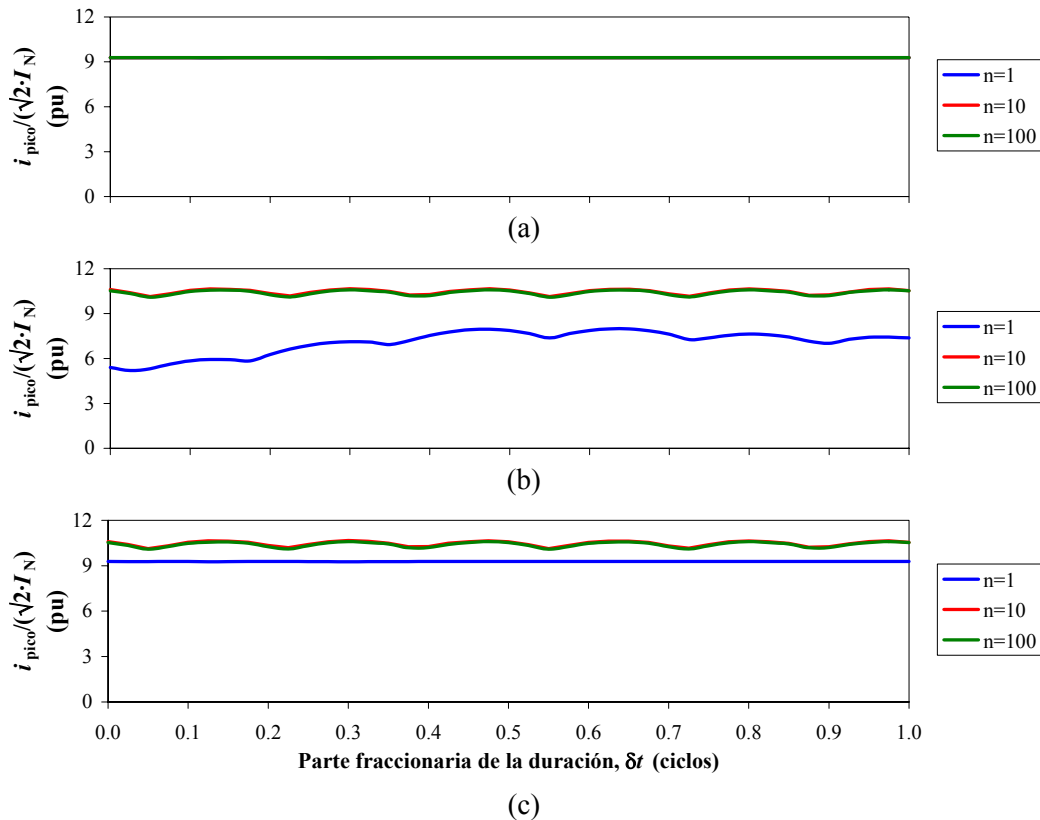


Fig. 4.8. Picos de intensidad respecto a δt . $q = A$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

Por último, en la Fig. 4.8c se representan los picos de intensidad absolutos, donde se aprecia que para duraciones cortas (serie azul, $n = 1$) éstos se obtienen durante el hueco de tensión, y para las otras dos (serie roja, $n = 10$, y serie verde, $n = 100$) éstos se obtienen tras la recuperación de la tensión.

En la Fig. 4.9 se muestran los resultados obtenidos para los picos de intensidad, cuando el motor de inducción se ve sometido a huecos de tensión de tipo B. Para este caso se observa que los picos de intensidad se producen durante el hueco.

Sin embargo, tal como se puede observar en [19] dependiendo de las características del sistema sometido al hueco de tensión, y de las propias del mismo hueco, los picos de intensidad a veces se localizan durante el hueco, y a veces tras la recuperación de la tensión.

Como ya se ha visto para los huecos de tipo A, en la Fig. 4.9a se observan tres líneas rectas superpuestas puesto que en todos los huecos de tensión estudiados el pico de intensidad observado es el mismo (primer semiperíodo) y las condiciones iniciales idénticas. Cabe destacar sin embargo, que el máximo pico de intensidad observado tras la recuperación de la tensión (Fig. 4.9b) se presenta para $\delta t = 0.5$ ciclos para todas las series.

La Fig. 4.10 muestra los resultados obtenidos para los picos de intensidad cuando el motor se ve sometido a huecos de tipo C. El comportamiento del motor es análogo al descrito para los de tipo B, es decir, los picos de intensidad observados durante el hueco son prácticamente independientes de la duración (ya que $n \geq 1$), y los que se presentan tras la recuperación de la tensión presentan un valor máximo cuando $\delta t = 0.5$ ciclos.

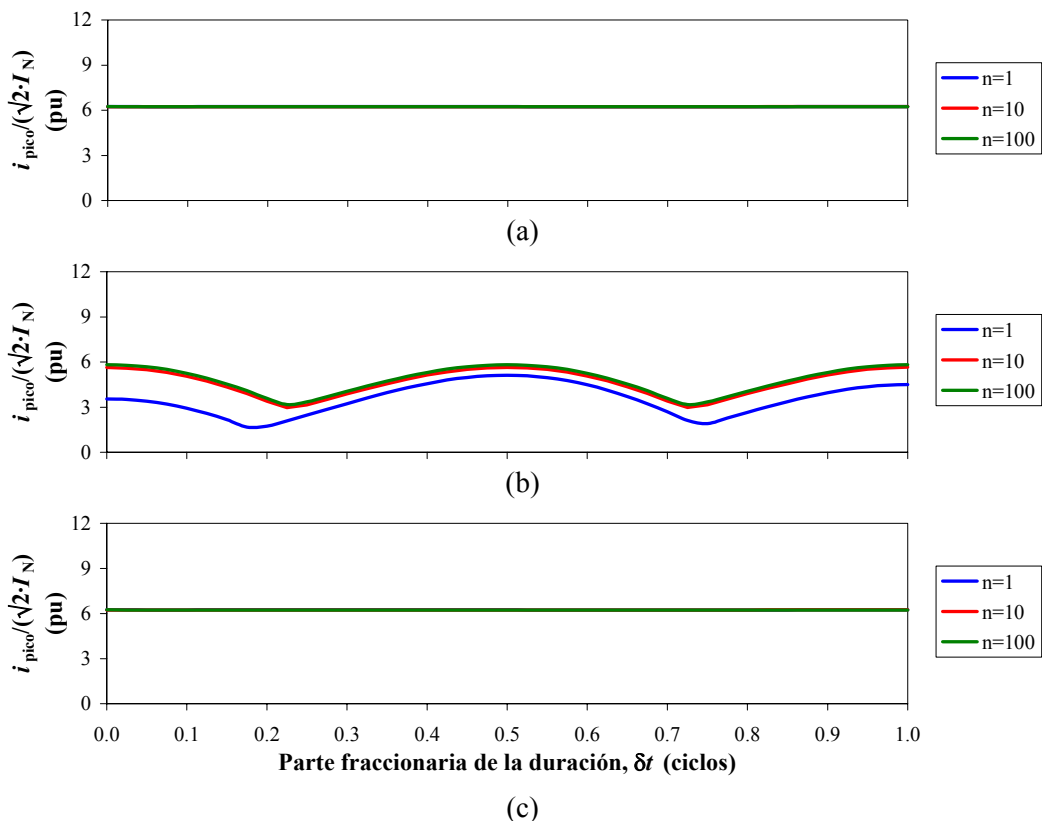


Fig. 4.9. Picos de intensidad respecto a δt . $q = B$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

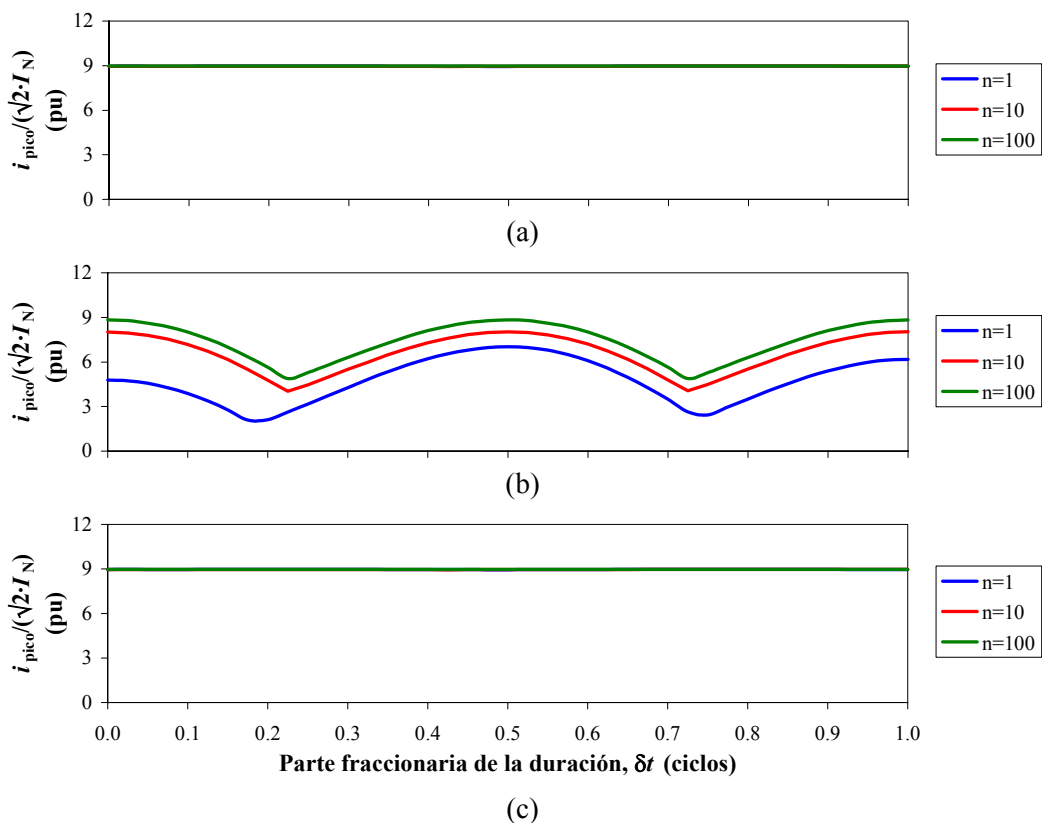


Fig. 4.10. Picos de intensidad respecto a δt . $q = C$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

Los valores calculados para los huecos de tipo D se muestran en la Fig. 4.11, donde se aprecia una gran similitud de resultados con los obtenidos con los huecos de tipo C.

La Fig. 4.12 muestra los resultados para los huecos de tipo E. Se observa que para $n = 100$ ciclos los picos de intensidad no siempre se producen durante el hueco (Fig. 4.12c). Por lo demás, el comportamiento de los picos de intensidad durante el hueco y tras la recuperación de la tensión sigue las pautas ya descritas en las tipologías anteriores.

Los resultados obtenidos para los picos de intensidad cuando el hueco es de tipo F se muestran en la Fig. 4.13, y reflejan un comportamiento prácticamente idéntico al descrito para los huecos de tipo E.

En resumen, los *máximos picos de intensidad* se obtienen cuando $\delta t = 0.5$ ciclos. Por tanto, cuando posteriormente se realicen cálculos masivos de huecos de tensión, bastará estudiar un único hueco por cada período para considerar el caso más desfavorable:

$$i_{\text{pico}}(h, n \cdot T + 0.5 \cdot T, \psi_i, q) \quad (4.17)$$

A continuación se estudia la variación de los picos de par respecto a la parte fraccionaria de la duración, δt . Como en el caso anterior, se estudian tres series con partes enteras de la duración de 1, 10 y 100 ciclos (series azul, roja y verde respectivamente), donde cada una de ellas está formada por 40 huecos de tensión con diferente valor de δt .

La Fig. 4.14 muestra los máximos picos de par obtenidos cuando el motor se ve sometido a huecos de tensión simétricos, tipo A.

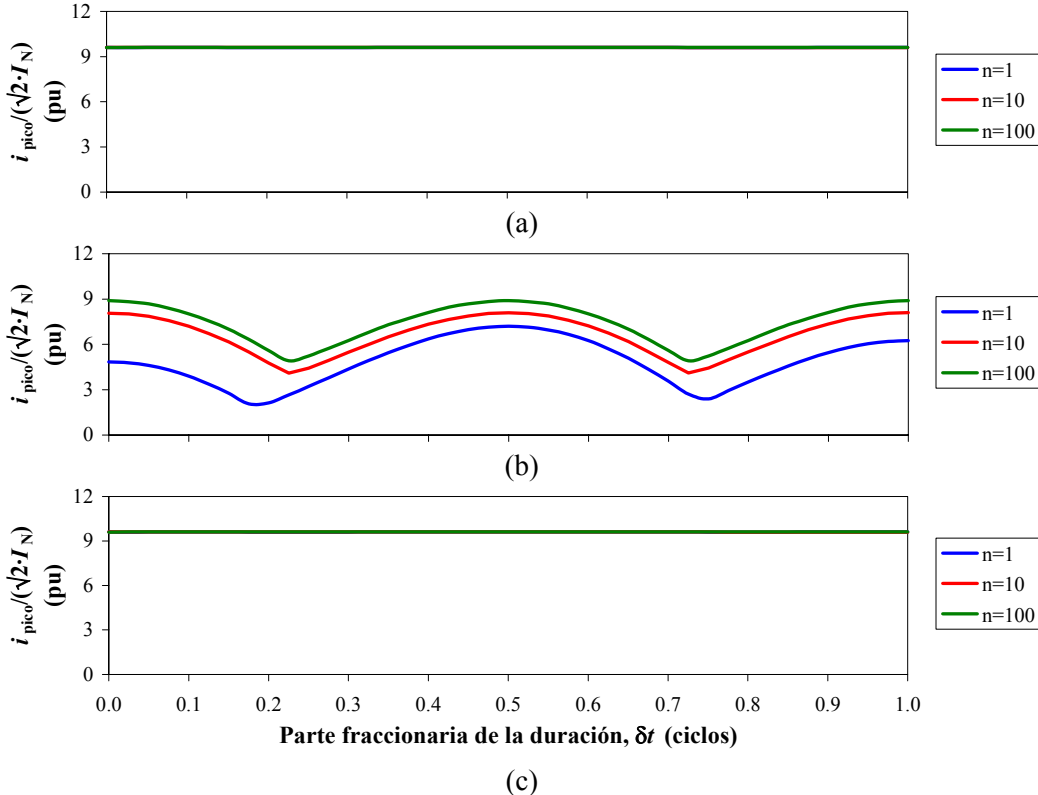


Fig. 4.11. Picos de intensidad respecto a δt . $q = D$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

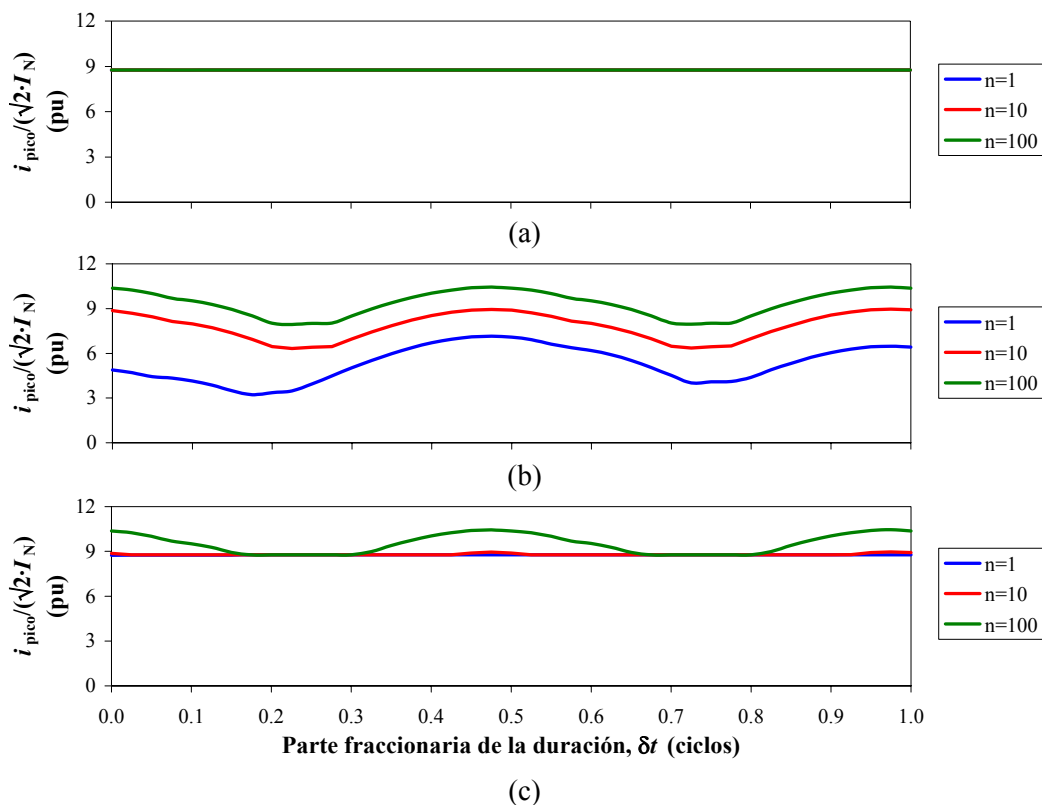


Fig. 4.12. Picos de intensidad respecto a δt . $q = E$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

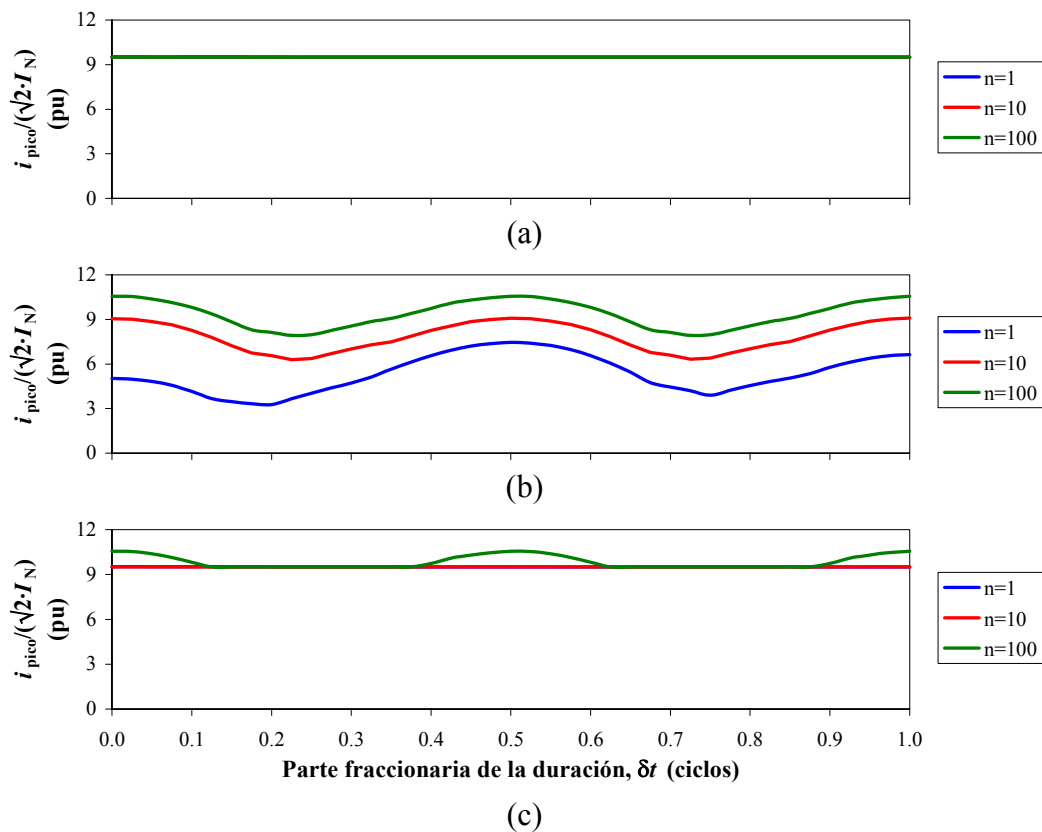


Fig. 4.13. Picos de intensidad respecto a δt . $q = F$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

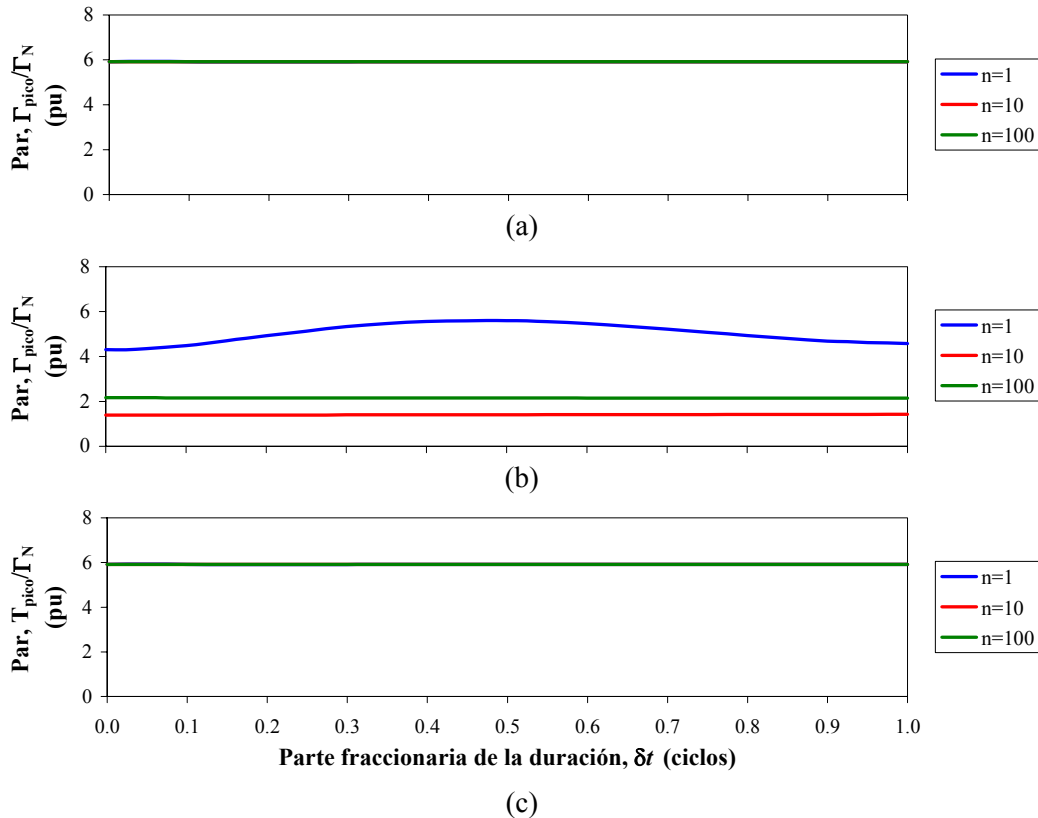


Fig. 4.14. Picos de par respecto a δt . $q = A$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

Los valores de la Fig. 4.14a muestran que los picos de par observados durante el hueco son independientes de la duración del mismo, puesto que el pico de par se produce durante el primer ciclo tras la caída de tensión, y todas las series escogidas presentan duraciones mayores. Sin embargo, hay que destacar que aunque en este ejemplo se hayan localizado los picos de par en el primer período tras la caída de tensión, no siempre se observa este comportamiento [22], a diferencia de lo que ocurría en los picos de intensidad.

Para los picos de par producidos por los huecos de tipo A tras la recuperación de la tensión (Fig. 4.14b) la serie azul, con duraciones comprendidas entre 1 y 2 ciclos ($n = 1$), presenta el *máximo pico de par* cuando $\delta t = 0.5$ ciclos. Para las otras dos series, roja ($n = 10$) y verde ($n = 100$), no parece observarse ninguna influencia de los picos de par respecto a la parte fraccionaria de la duración. En esta gráfica es curioso observar que la serie azul, con duraciones más cortas, presenta picos de par notablemente superiores a las otras series de duraciones más largas. Por último, como los picos de par producidos durante el hueco son mayores que los producidos tras la recuperación de la tensión, la Fig. 4.14a coincide con la Fig. 4.14c.

La Fig. 4.15 muestra los picos de par cuando el sistema se ve sometido a huecos de tensión de tipo B. A diferencia del caso anterior el *máximo pico de par* tras la recuperación de la tensión siempre se presenta cuando $\delta t = 0.5$ ciclos, independientemente del valor de la parte entera de la duración, n .

En la Fig. 4.16, la Fig. 4.17, la Fig. 4.18 y la Fig. 4.19 se muestran los resultados obtenidos para huecos tipos C, D, E y F respectivamente. Los valores numéricos son muy similares para los huecos C y D, así como para los huecos E y F. De nuevo se observa que los máximos picos de par se obtienen cuando la parte fraccionaria de la duración vale $\delta t = 0.5$ ciclos.

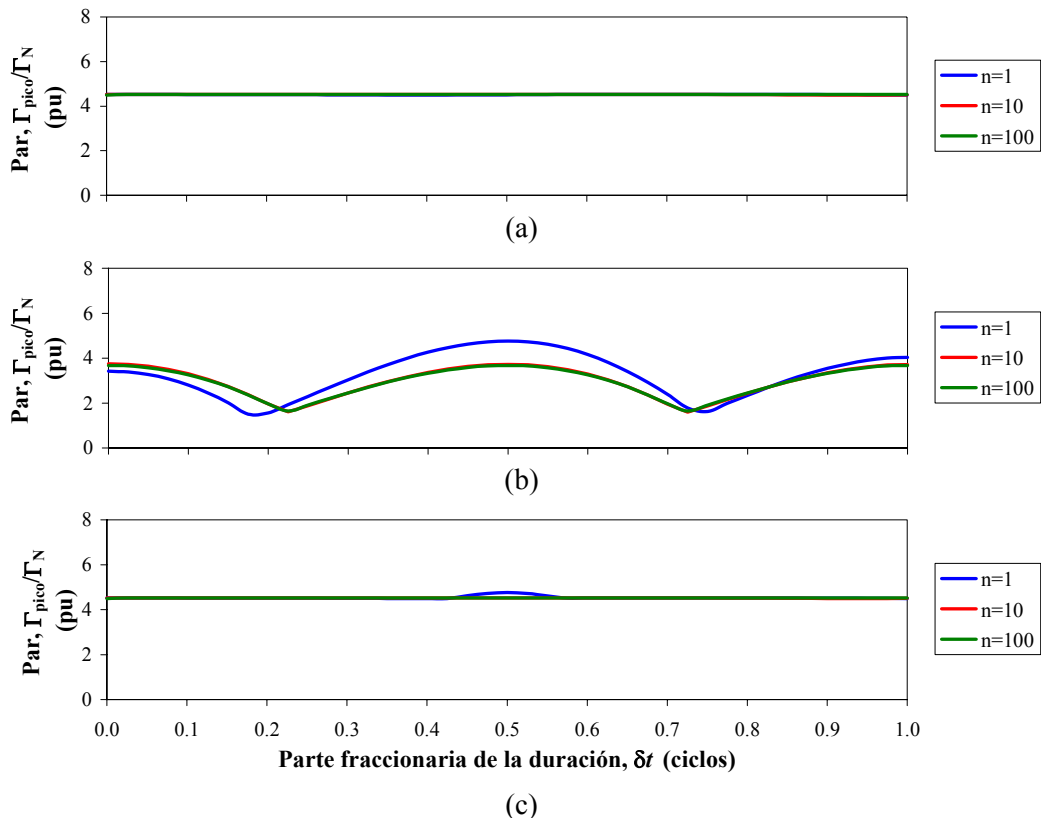


Fig. 4.15. Picos de par en función de δt . $q = B$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

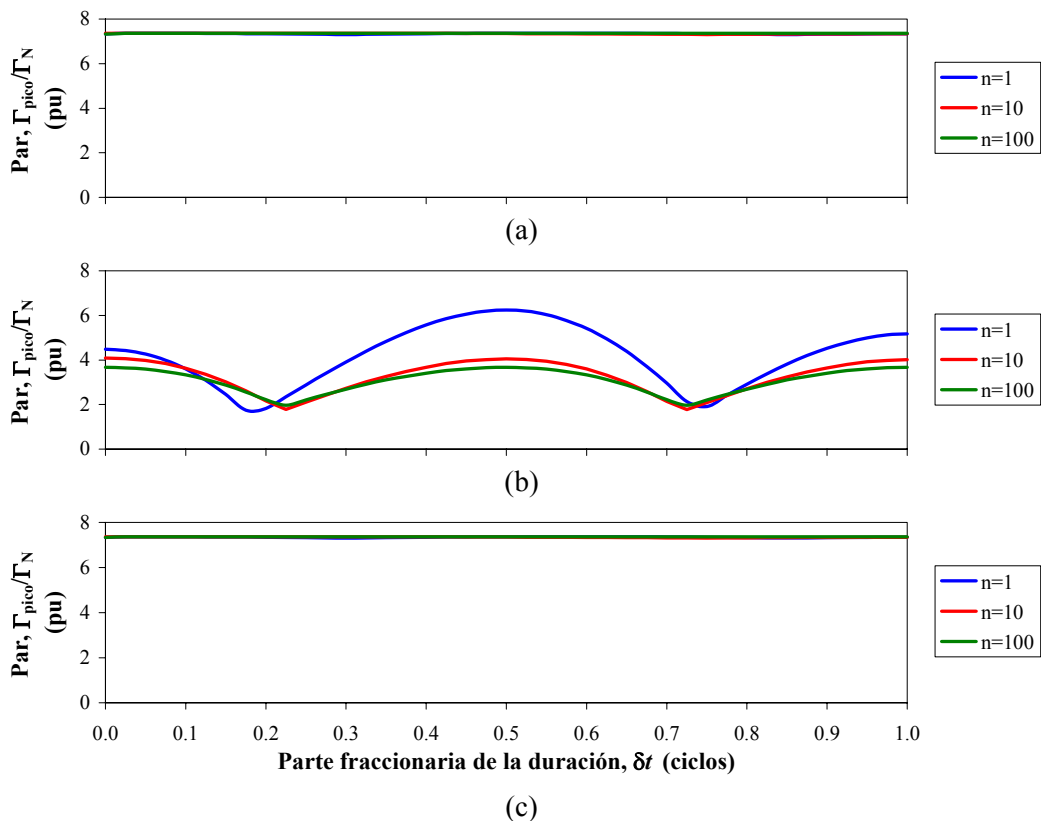


Fig. 4.16. Picos de par en función de δt . $q = C$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

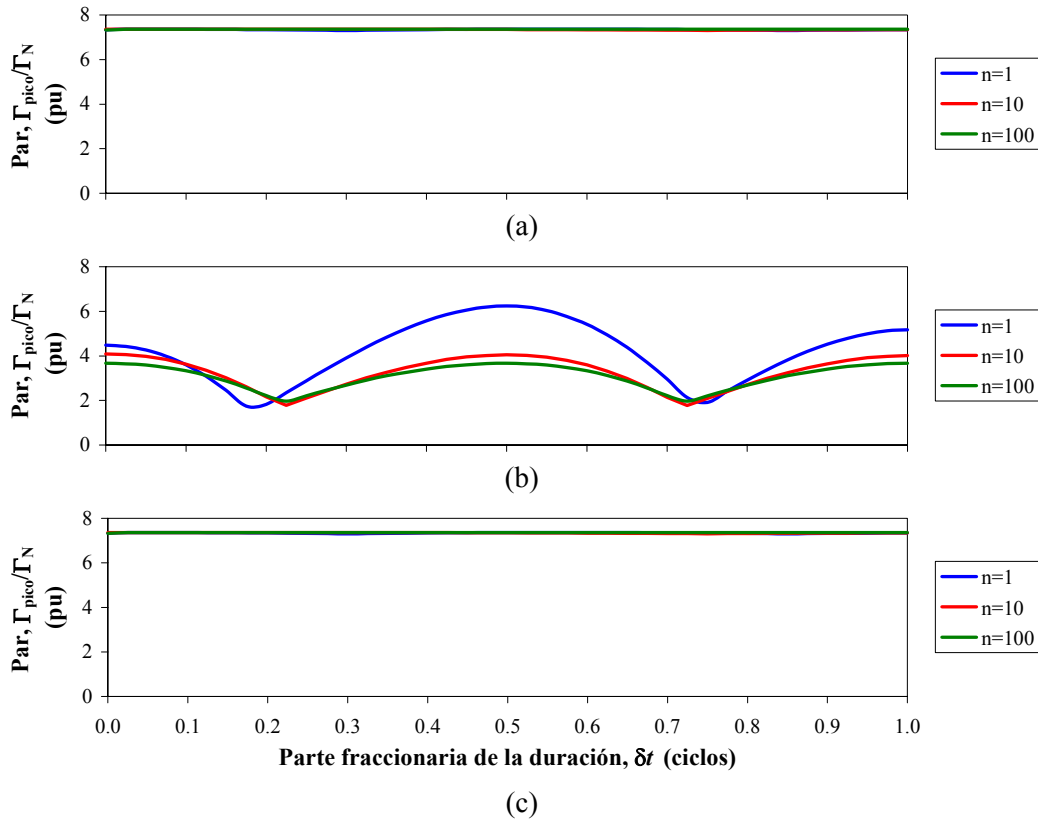


Fig. 4.17. Picos de par en función de δt . $q = D$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

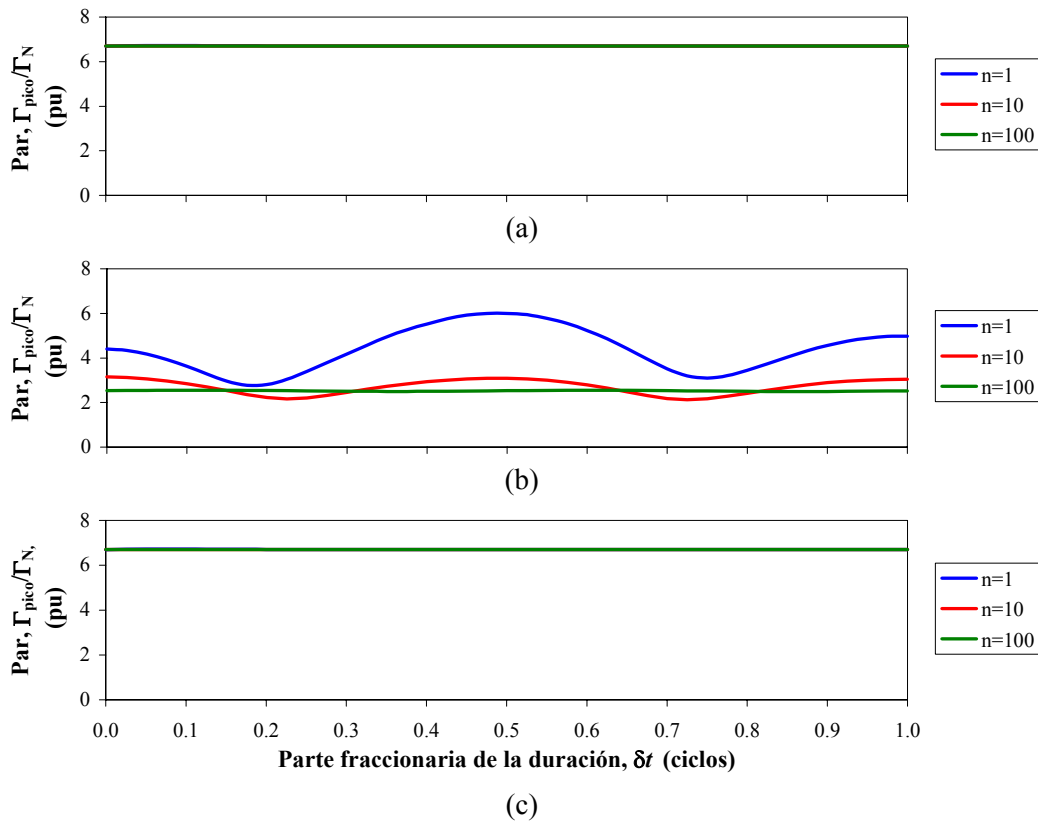


Fig. 4.18. Picos de par en función de δt . $q = E$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

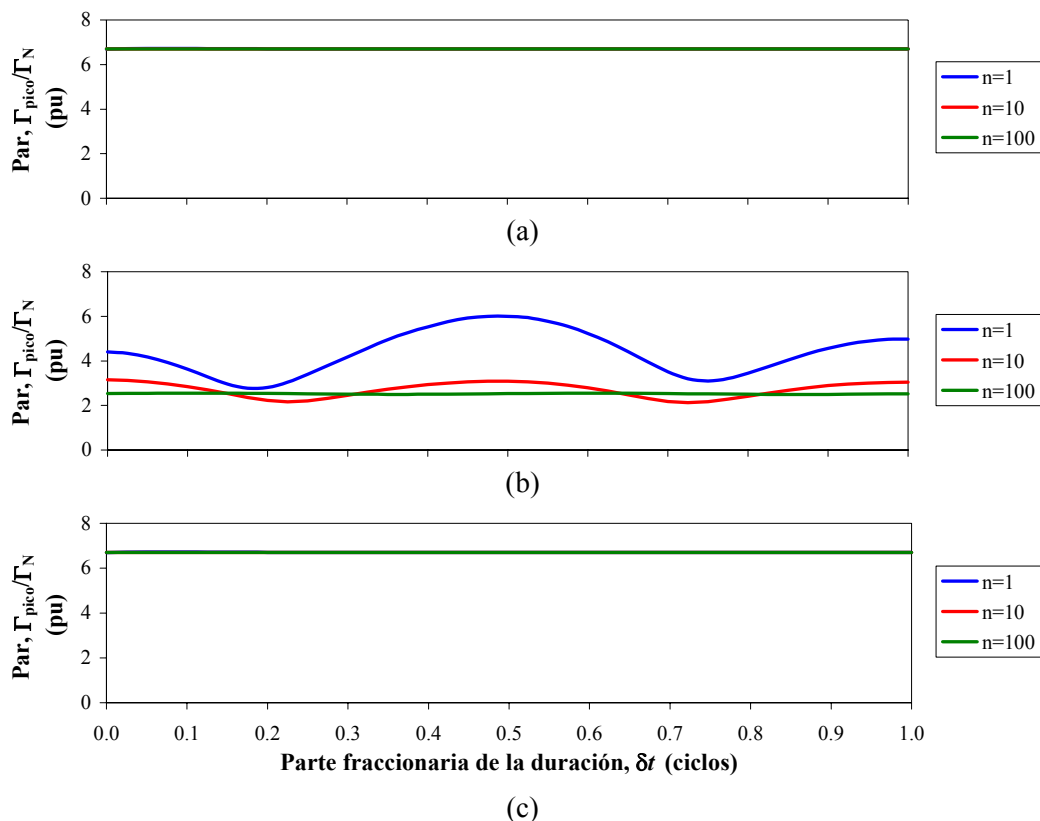


Fig. 4.19. Picos de par en función de δt . $q = F$ y $h = 10\%$. Tres series: azul ($n = 1 \cdot T$), roja ($n = 10 \cdot T$) y verde ($n = 100 \cdot T$). a) durante el hueco; b) tras la recuperación de la tensión, y c) total.

Analizando conjuntamente los picos de intensidad y los de par, y englobando todos los tipos de huecos de tensión estudiados, se puede resumir este apartado indicando que el *máximo pico de intensidad* y el *máximo pico de par* se tienen para $\delta t = 0.5$ ciclos.

Para determinar la influencia de la parte entera de la duración en los picos de intensidad y de par, en el apartado 4.6 se presentan los resultados obtenidos al realizar el cálculo masivo de huecos de tensión.

4.5. Simulación de rangos extensivos de huecos de tensión

Se ha desarrollado un algoritmo para analizar la influencia de rangos extensivos de huecos de tensión en el motor de inducción objeto de nuestro estudio (este algoritmo se ha aplicado a otros motores, y se han obtenido resultados muy similares a los presentados en este apartado [19], [21], [22], [23]).

La rapidez de cálculo del algoritmo es elevada, ya que utiliza los resultados de cálculos anteriores, cuando es posible. Por ejemplo, en el caso de huecos de la misma profundidad y tipo, pero diferente duración, para calcular los picos de intensidad y de par durante el hueco, basta con calcular el hueco con la duración más larga. Los efectos estudiados son: picos de intensidad, picos de par y pérdida de velocidad. En este apartado se ha representado la pérdida de velocidad mediante el deslizamiento, que también puede ser referido al valor nominal:

$$s = \frac{\omega_s - p \cdot \omega}{\omega_s} \quad ; \quad s_{pu} = \frac{s}{s_N} \quad (4.18)$$

Por tanto se puede definir el pico de deslizamiento (s_{pico}) y el máximo pico de deslizamiento (s_{MAX}) a partir del pico de velocidad (ω_{pico}) y del mínimo pico de velocidad (ω_{MIN}):

$$s_{pico} = \frac{\omega_s - p \cdot \omega_{pico}}{\omega_s} \quad ; \quad s_{MAX} = \frac{\omega_s - p \cdot \omega_{MIN}}{\omega_s} \quad (4.19)$$

El procedimiento de trabajo consiste en estudiar una gran cantidad de huecos del mismo tipo y con el punto de onda inicial más desfavorable, en el que se varía la profundidad y duración. De cada uno de estos huecos se localiza el valor máximo de las variables (*pico de intensidad*, *pico de par* y *pico de deslizamiento*) que se almacena en una matriz, en función de la profundidad y de la duración del hueco. En consecuencia se obtienen un conjunto de matrices, \mathbf{M}_q :

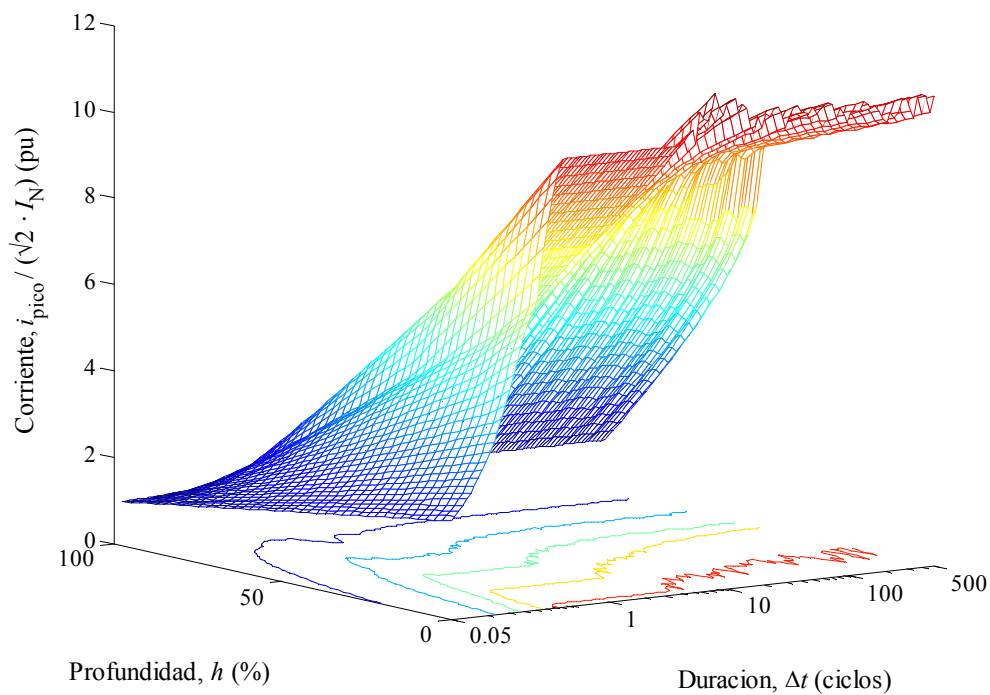
- \mathbf{I}_q : matriz con los picos de corriente para huecos tipo q .
- \mathbf{T}_q : matriz con los picos de par para huecos tipo q .
- \mathbf{S}_q : matriz con los picos de deslizamiento para huecos tipo q .

Cada elemento de una matriz, $m_q(i, j)$, es el valor de pico de la variable estudiada para un hueco de tensión tipo q con una profundidad h_i y una duración Δt_j . En todas las matrices se han tomado un total de 40 valores de profundidad, equidistantes en escala lineal entre 0 y 97.5%. Respecto a las duraciones se han analizado dos tipos de distribuciones:

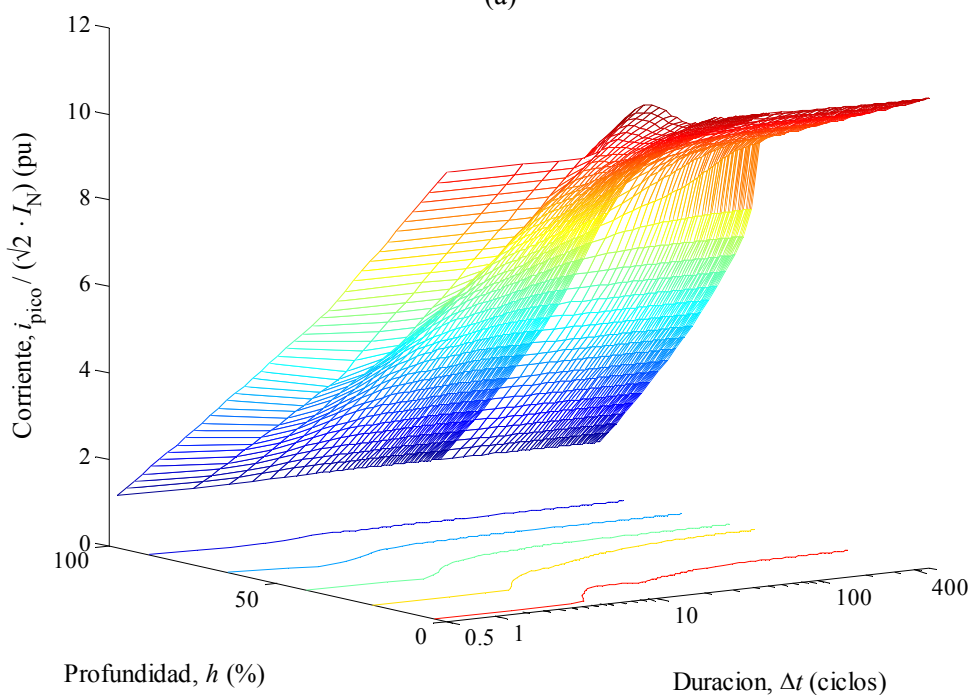
- $r = 1$: formado por 125 duraciones distribuidas de forma equidistante en escala logarítmica. La duración mínima es $\Delta t_{min} = 0.05$ ciclos, y la máxima $\Delta t_{max} = 500$ ciclos. En consecuencia, 125 duraciones y 40 profundidades determinan 5000 huecos de tensión calculados.
- $r = 2$: formado por 95 duraciones con el valor de δt más desfavorable, $\delta t = 0.5$ ciclos. La duración mínima es, $\Delta t_{min} = 0.5$ ciclos, y la máxima, $\Delta t_{max} = 490.5$ ciclos. En este caso, 95 duraciones y 40 profundidades totalizan 3800 huecos de tensión calculados.

En total pues, se han calculado un total de 36 matrices $\mathbf{M}_{q,r}$:

- $\mathbf{I}_{q,1}$: matriz con los picos de intensidad para huecos tipo q . Formado por 125 duraciones equidistantes en escala logarítmica ($0.05 \leq \Delta t \leq 500$ ciclos) y 40 profundidades equidistantes en escala lineal ($0 \leq h \leq 97.5\%$).
- $\mathbf{I}_{q,2}$: matriz con los picos de intensidad para huecos tipo q . Formado por 95 duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos ($0.5 \leq \Delta t \leq 490.5$ ciclos) y 40 profundidades equidistantes en escala lineal ($0 \leq h \leq 97.5\%$).
- $\mathbf{T}_{q,1}$: matriz con los picos de par para huecos tipo q . Formado por 125 duraciones equidistantes en escala logarítmica ($0.05 \leq \Delta t \leq 500$ ciclos) y 40 profundidades equidistantes en escala lineal ($0 \leq h \leq 97.5\%$).
- $\mathbf{T}_{q,2}$: matriz con los picos de par para huecos tipo q . Formado por 95 duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos ($0.5 \leq \Delta t \leq 490.5$ ciclos) y 40 profundidades equidistantes en escala lineal ($0 \leq h \leq 97.5\%$).
- $\mathbf{S}_{q,1}$: matriz con los picos de pérdida de velocidad para huecos tipo q . Formado por 125 duraciones equidistantes en escala logarítmica ($0.05 \leq \Delta t \leq 500$ ciclos) y 40 profundidades equidistantes en escala lineal ($0 \leq h \leq 97.5\%$).



(a)

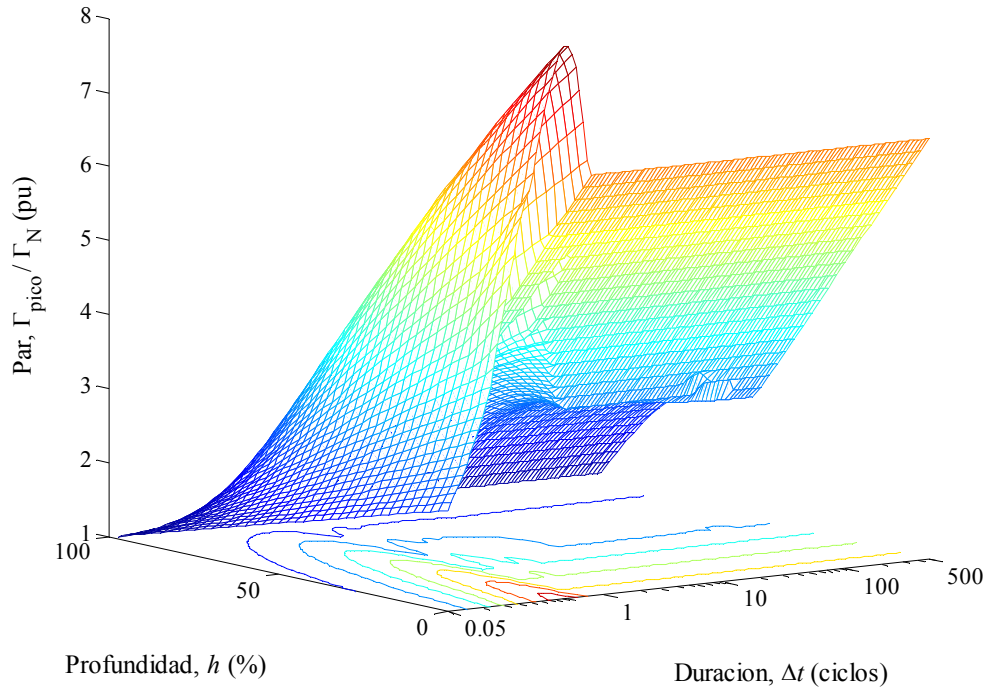


(b)

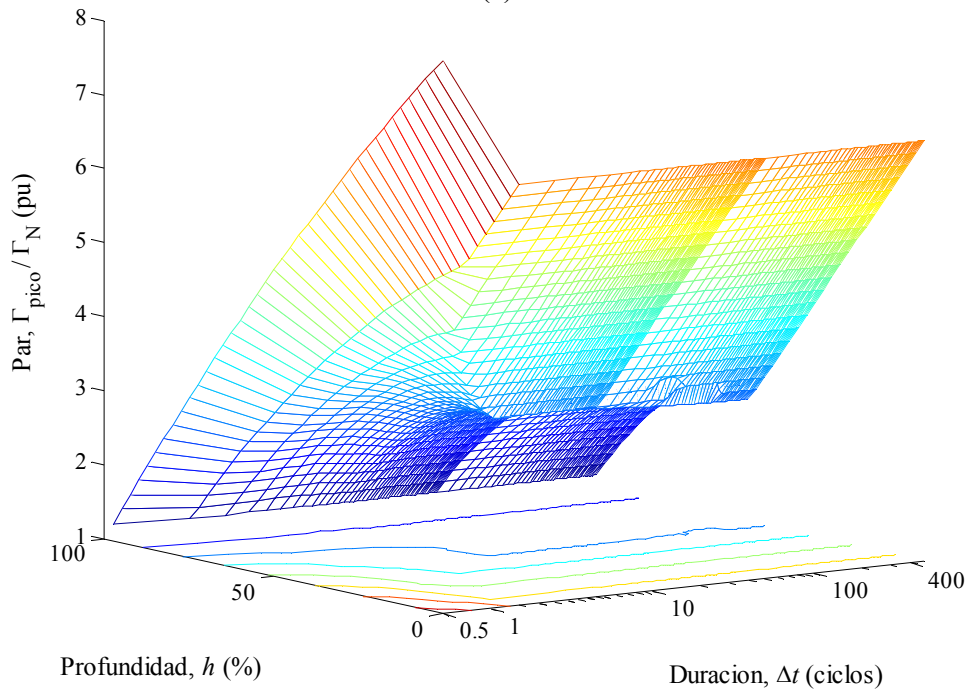
Fig. 4.20. Superficies que representan los picos de intensidad en función de la profundidad y duración de los huecos que los provocan (tipo A): a) duraciones equidistantes en escala logarítmica, $I_{A,1}$; b) duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos, $I_{A,2}$.

- $S_{q,2}$: matriz con los deslizamientos máximos para huecos tipo q . Formado por 95 duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos ($0.5 \leq \Delta t \leq 490.5$ ciclos) y 40 profundidades equidistantes en escala lineal ($0 \leq h \leq 97.5\%$).

En la Fig. 4.20 se muestra, a modo de ejemplo, la representación gráfica de las matrices de los picos de intensidad para huecos de tipo A. La Fig. 4.20a corresponde a las duraciones equidistantes en escala logarítmica y la Fig. 4.20b a las duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos.



(a)



(b)

Fig. 4.21. Superficies que representan los picos de par en función de la profundidad y duración de los huecos que los provocan (tipo A): a) duraciones equidistantes en escala logarítmica, $\mathbf{T}_{A,1}$; b) duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos, $\mathbf{T}_{A,2}$.

Para analizar los resultados obtenidos en la Fig. 4.20a y Fig. 4.20b hay que tener en cuenta que el valor mínimo de la duración es de 0.05 ciclos en el caso de la Fig. 4.20a y de 0.5 ciclos en el caso de la Fig. 4.20b, (la gama de valores es mayor en el primer caso). Comparando los resultados, cuando los valores de duración coinciden, la superficie obtenida en el segundo caso es la envolvente de la primera. Por tanto, para analizar huecos con duraciones superiores a 0.5 ciclos es más adecuado utilizar valores de duración con $\delta t = 0.5$ ciclos. Se ha seguido el mismo criterio para los picos de par (Fig. 4.21) y de deslizamiento (Fig. 4.22).

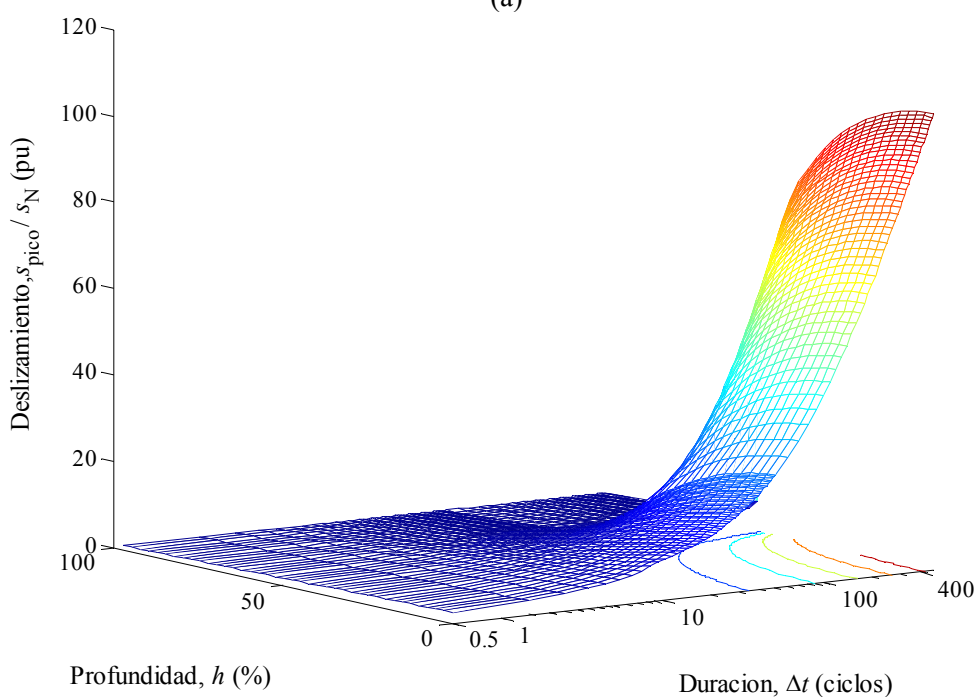
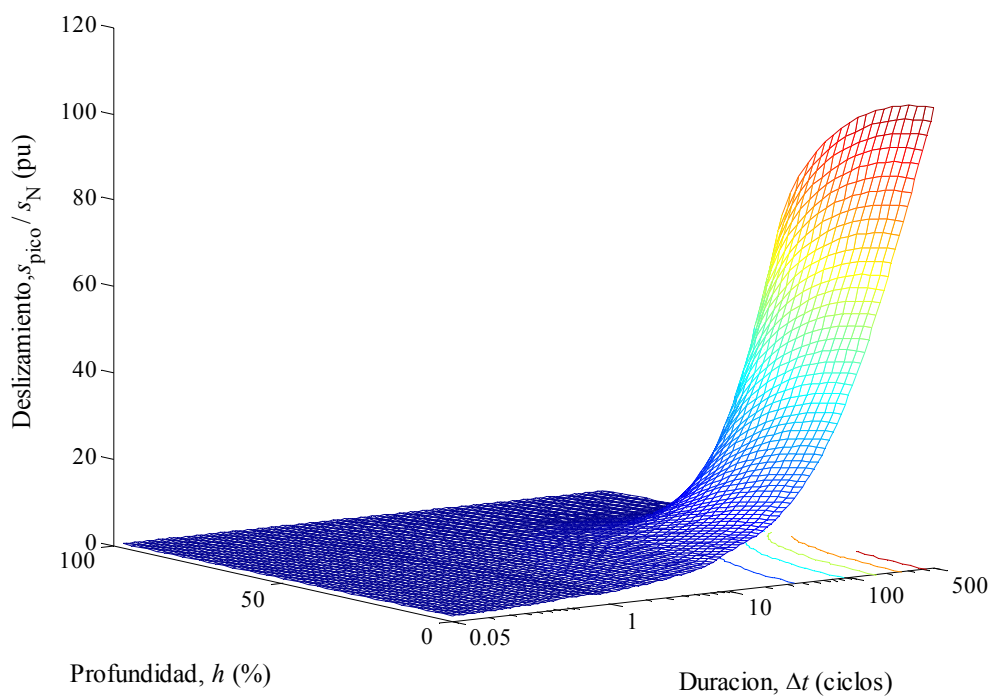


Fig. 4.22. Superficies que representan los picos de deslizamiento en función de la profundidad y duración de los huecos que los provocan (tipo A): a) duraciones equidistantes en escala logarítmica, $S_{A,1}$; b) duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos, $S_{A,2}$.

En las gráficas tridimensionales (Fig. 4.20, Fig. 4.21 y Fig. 4.22) se proyectan las curvas de nivel sobre la superficie formada por los ejes de profundidad y duración. Este tipo de curvas son las utilizadas por la CBEMA (Computer Business Equipment Manufacturing Association) para el estudio de la sensibilidad de los equipos a los huecos de tensión [24], y es el sistema de representación adoptado en esta tesis para mostrar la sensibilidad de la máquina de inducción a los huecos de tensión.

4.6. Curvas de sensibilidad

En este apartado se muestran las curvas de tipo CBEMA que representan la sensibilidad del motor de inducción a los huecos de tensión, en adelante denominadas curvas de sensibilidad. En primer lugar, en la Fig. 4.23 se muestran los picos de corriente clasificados por tipología cuando se toman unas duraciones equidistantes en escala logarítmica, matriz $\mathbf{I}_{q,1}$. La duración mínima es $\Delta t_{\min} = 0.05$ ciclos, y la máxima, $\Delta t_{\max} = 500$ ciclos.

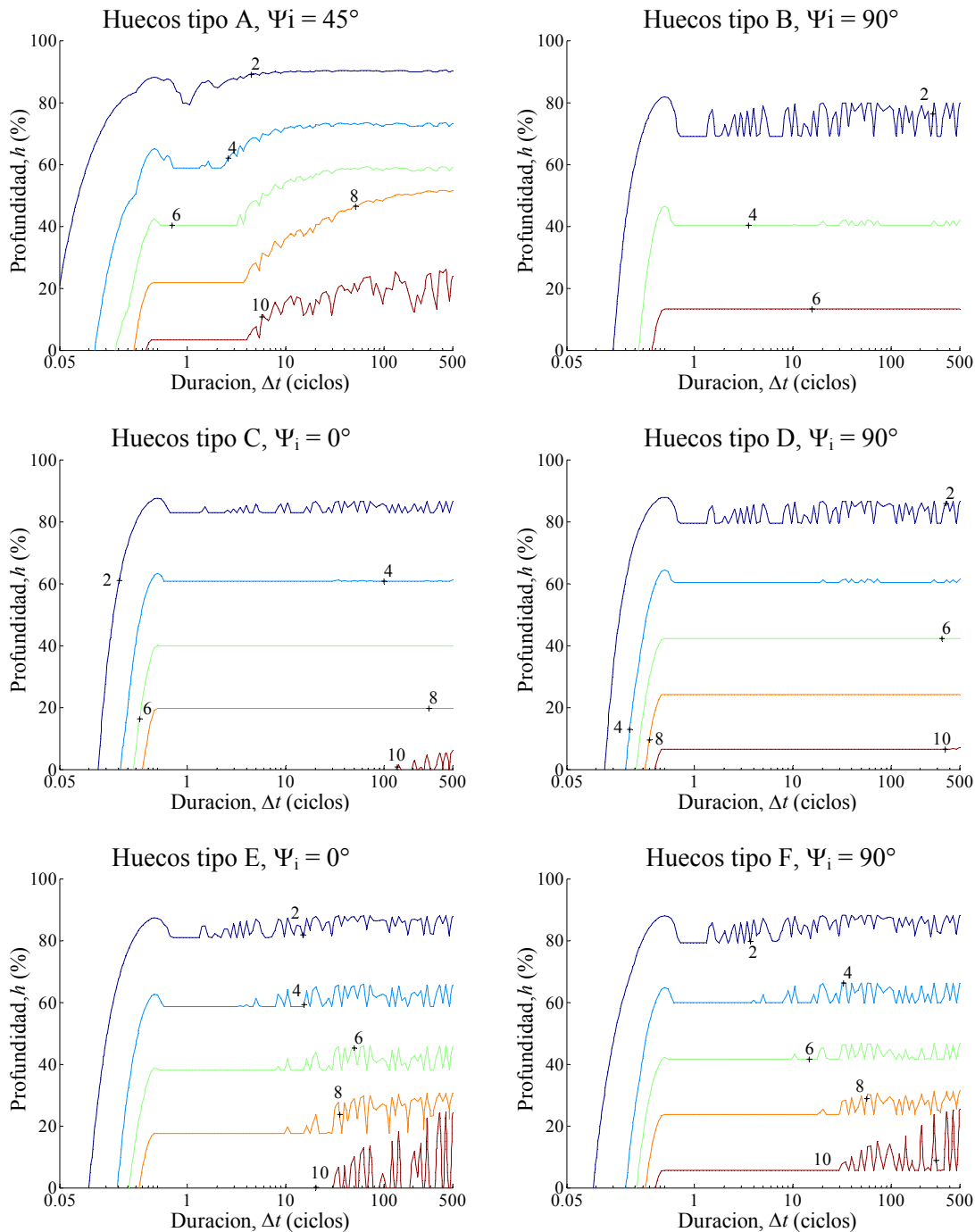


Fig. 4.23. Curvas de sensibilidad para los picos de intensidad, $i_{\text{pico}}/(\sqrt{2} \cdot I_N)$ (pu), en huecos de tensión tipos A, B, C, D, E y F para el punto de onda inicial más desfavorable y duraciones equidistantes en escala logarítmica.

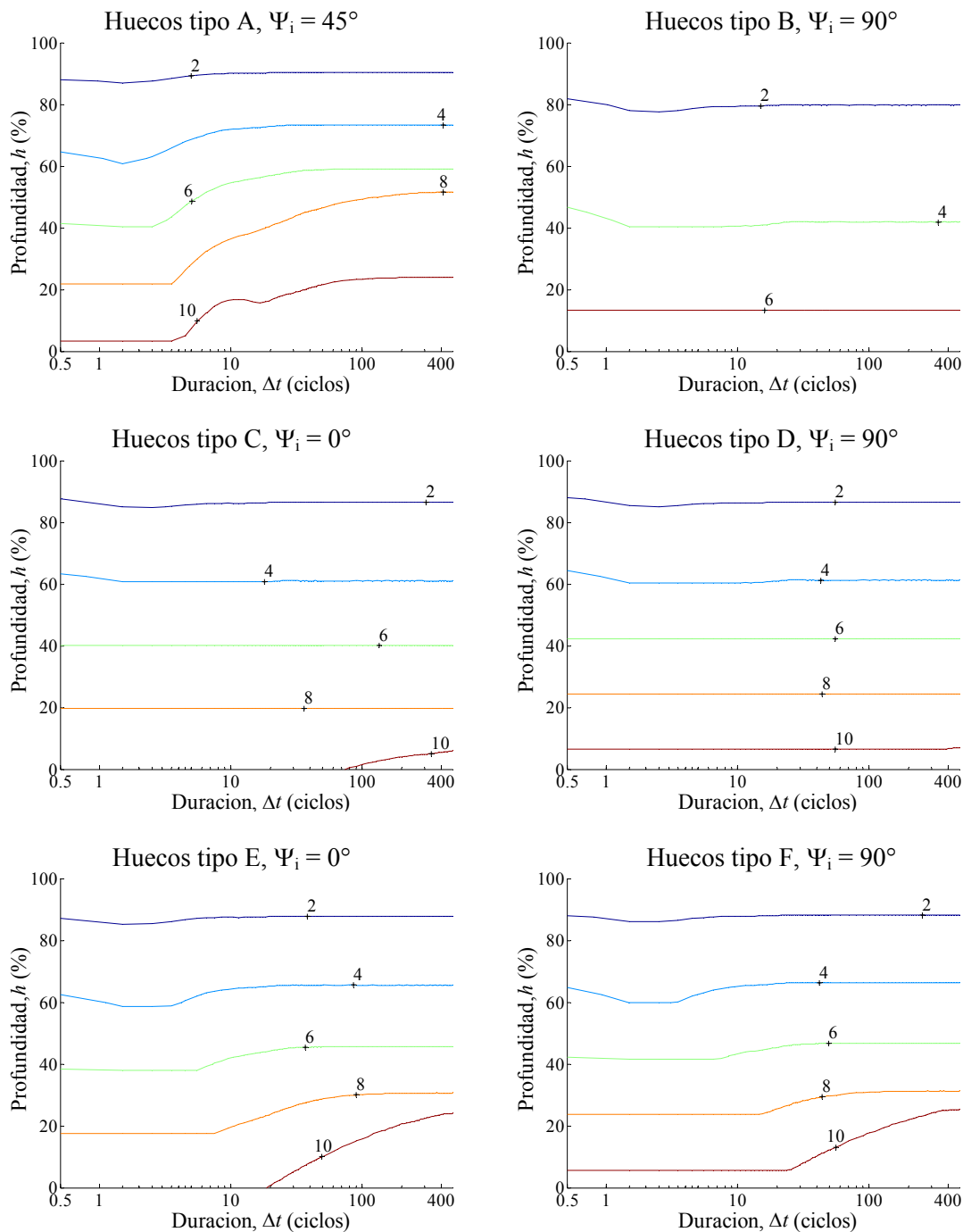


Fig. 4.24. Curvas de sensibilidad para los picos de intensidad, $i_{\text{pico}}/(\sqrt{2} \cdot I_N)$ (pu), en huecos de tensión tipos A, B, C, D, E y F para el punto de onda inicial más desfavorable y el valor de δt más desfavorable.

Los ejes de estas curvas de nivel, o isóneas, representan la profundidad del hueco, h (%), en escala lineal y la duración del mismo, Δt (ciclos), en escala logarítmica. La Fig. 4.24 muestra también los picos de intensidad, para los valores de duración más desfavorables, $\delta t = 0.5$ ciclos, matriz $\mathbf{I}_{q,2}$. La duración mínima es 0.5 ciclos ($n = 0$), y la máxima, 490.5 ciclos ($n = 490$). En un primer análisis visual de la Fig. 4.23 y de la Fig. 4.24, se observa que:

- Las curvas de sensibilidad de la Fig. 4.24 están calculadas para el valor de δt más desfavorable, y por tanto, estas curvas son las envolventes de las mostradas en la Fig. 4.23 cuando las duraciones están comprendidas entre 0.5 y 490.5 ciclos.

- Los resultados obtenidos para los huecos de tensión simétricos, tipo A, y los huecos de tensión tipo B, son claramente diferentes del resto.
- Los picos de corriente más severos se obtienen cuando el hueco de tensión es simétrico, tipo A. Los valores obtenidos para los tipos C, D, E y F son similares, y por último, los huecos de tensión tipo B, se muestran como los menos severos.

En la Fig. 4.25 se muestran los picos de par para los diferentes tipos de huecos de tensión cuando la duración se distribuye de forma equidistante en escala logarítmica, matriz $\mathbf{T}_{q,1}$.

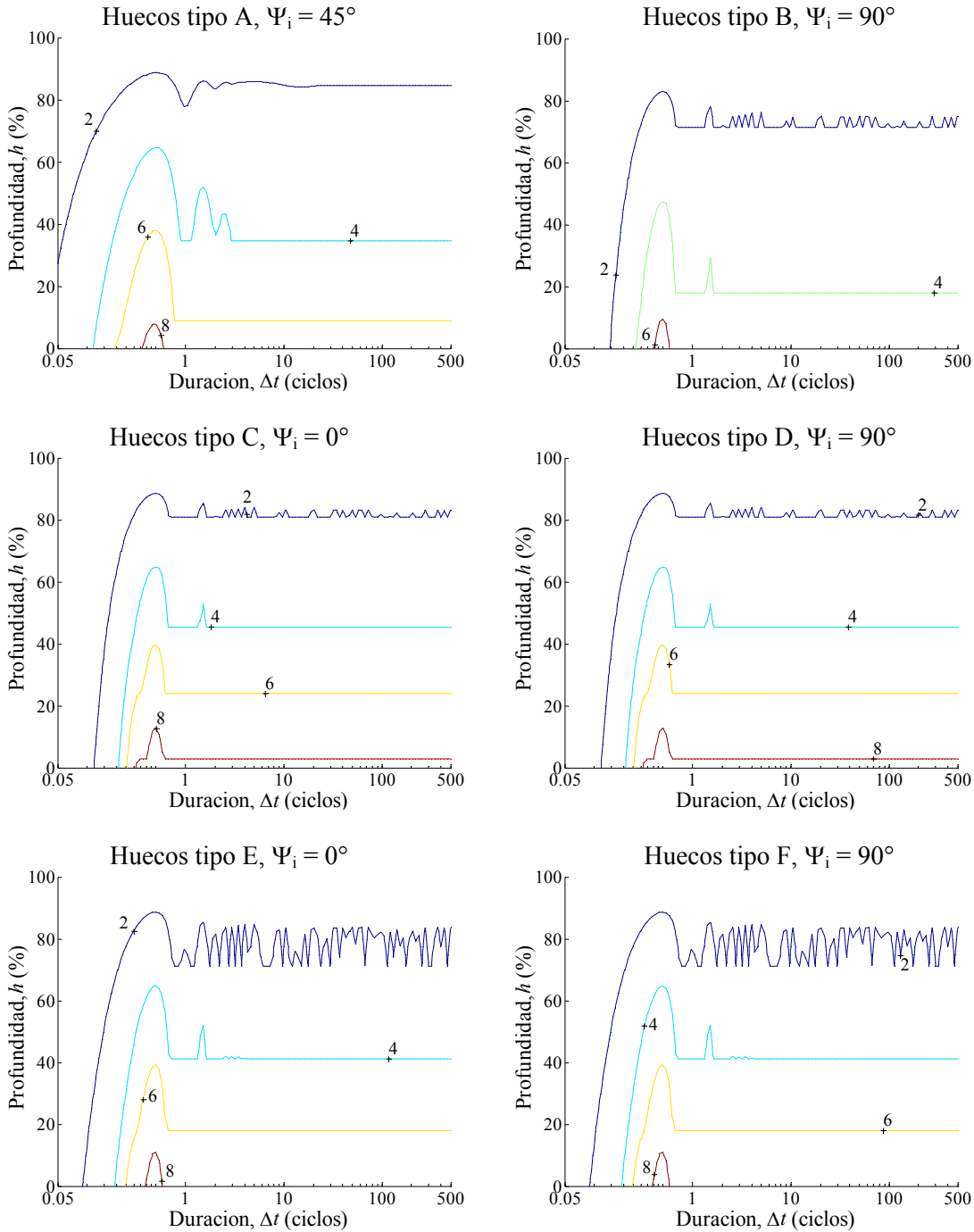


Fig. 4.25. Curvas de sensibilidad para los picos de par, $\Gamma_{\text{pico}}/\Gamma_N$ (pu), en huecos de tensión tipos A, B, C, D, E y F para el punto de onda inicial más desfavorable y duraciones equidistantes en escala logarítmica.

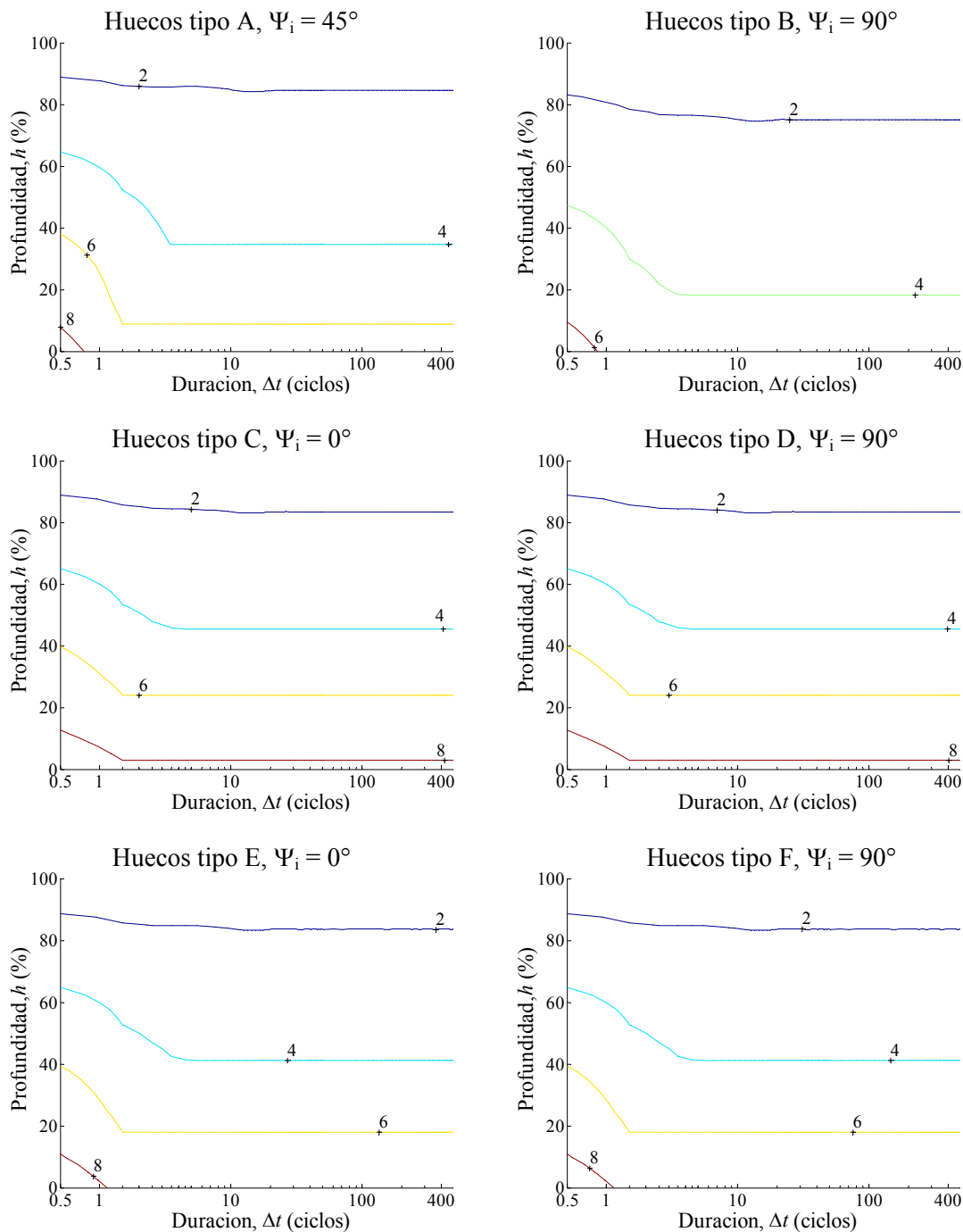


Fig. 4.26. Curvas de sensibilidad para los picos de par, $\Gamma_{\text{pico}}/\Gamma_N$ (pu), en huecos de tensión tipos: A, B, C, D, E y F para el punto de onda inicial más desfavorable y con el valor de δt más desfavorable.

En la Fig. 4.26 se realiza la misma representación cuando se toman duraciones con el valor de δt más desfavorable, matriz $\mathbf{T}_{q,2}$. Tal como ya se ha comentado en el caso de los picos de intensidad, las curvas presentadas en la Fig. 4.26 son las envolventes de las que se presentan en la Fig. 4.25. Analizando ambas se obtienen las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos para los huecos de tensión tipo B, son claramente diferentes del resto.
- Los picos de par obtenidos para los huecos de tensión asimétricos, tipos C, D, E y F, se muestran como los más severos en la mayoría de ocasiones, si bien es cierto que

los resultados obtenidos para los de tipo A, presentan valores próximos. También en este caso los huecos tipo B se muestran como los menos severos.

Como último efecto de los huecos de tensión en los motores de inducción, falta evaluar los resultados obtenidos para la pérdida de velocidad. Los resultados se muestran en la Fig. 4.27, para duraciones equidistantes en escala logarítmica, matriz $S_{q,1}$, y en la Fig. 4.28 para las duraciones con el valor de δt más desfavorable, matriz $S_{q,2}$.

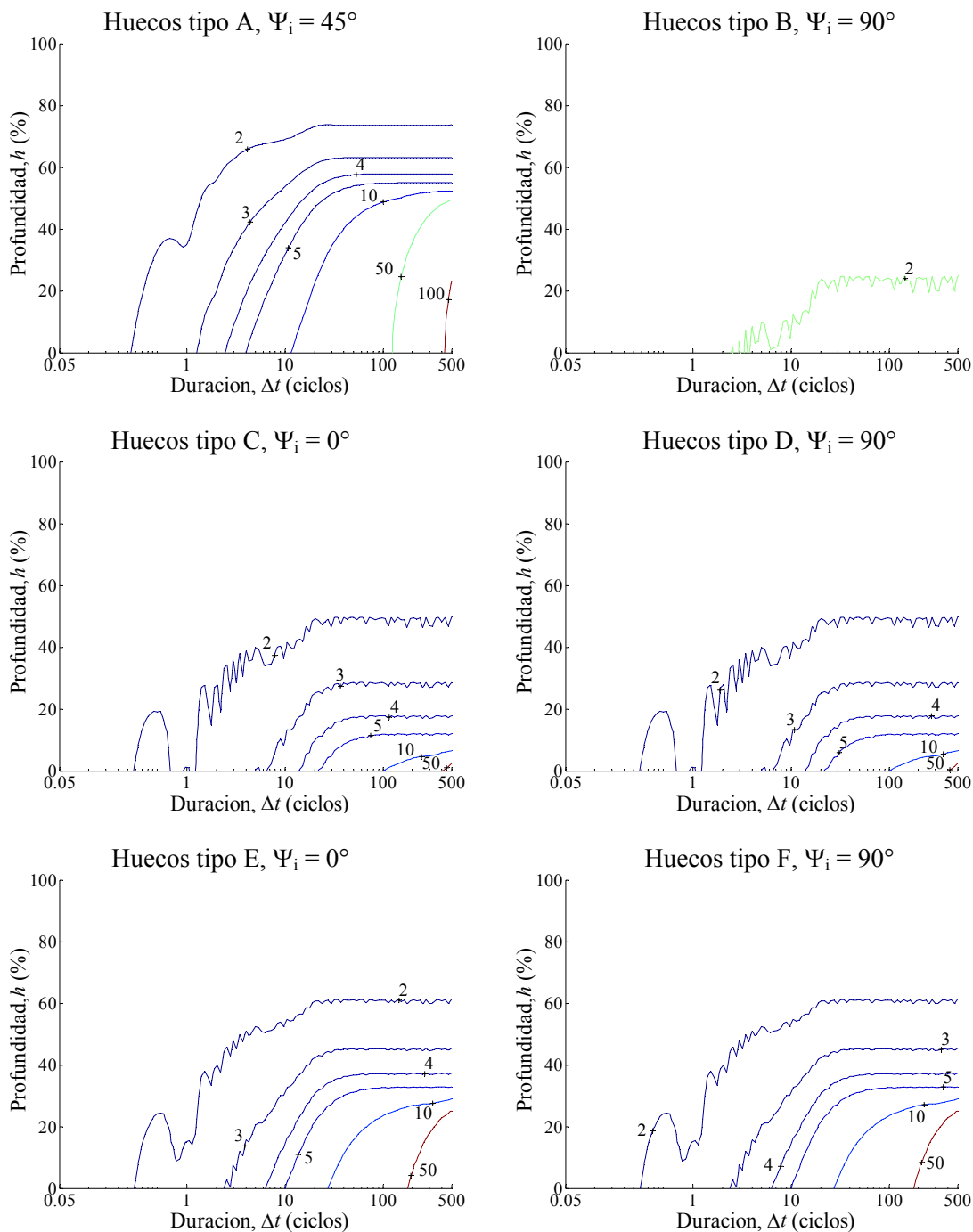


Fig. 4.27. Curvas de sensibilidad para los picos de deslizamiento, s_{pico}/s_N (pu), en huecos de tensión tipos A, B, C, D, E y F para el punto de onda inicial más desfavorable y duraciones equidistantes en escala logarítmica.

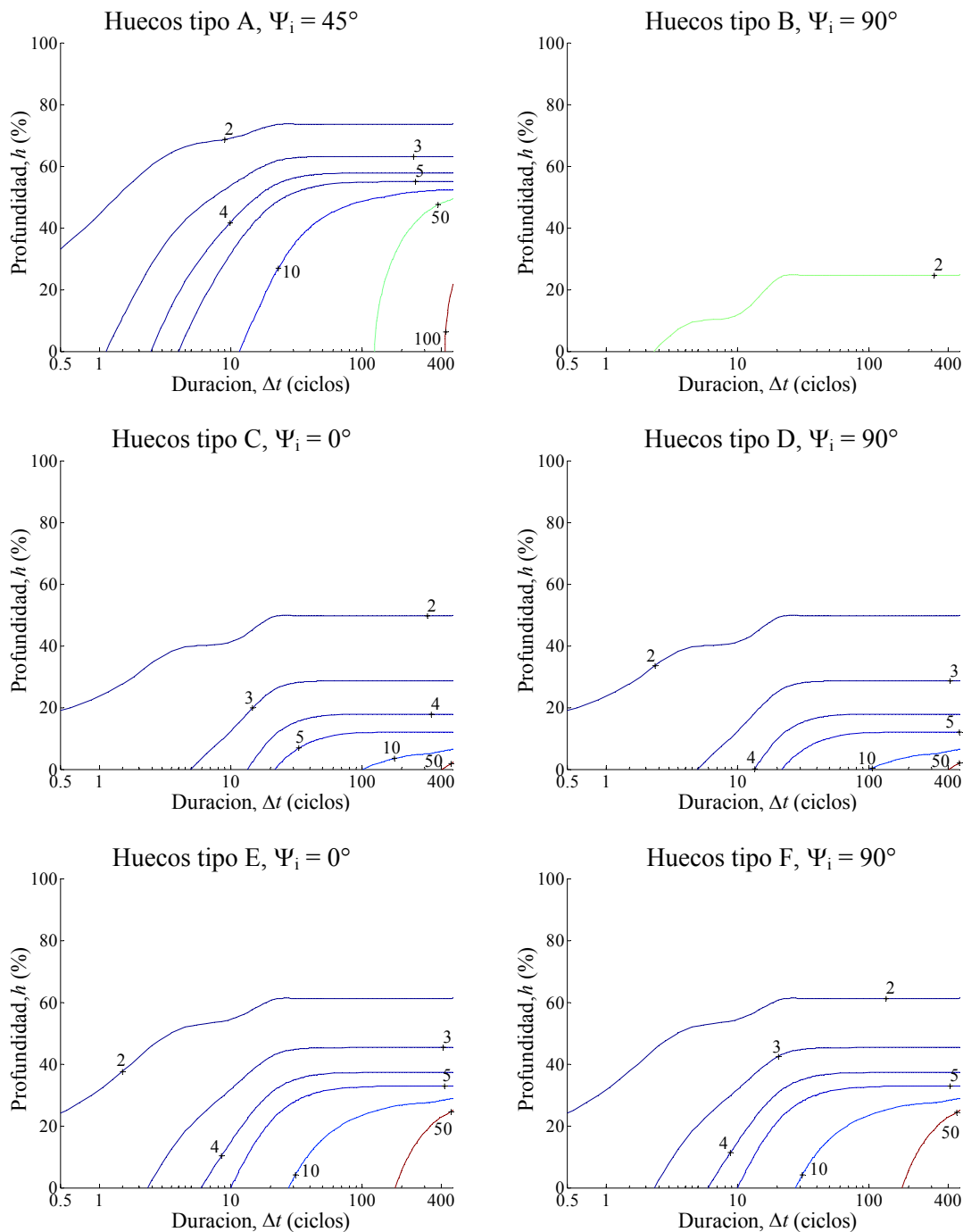


Fig. 4.28. Curvas de sensibilidad para los picos de deslizamiento, s_{pico}/s_N (pu), en huecos de tensión tipos A, B, C, D, E y F para el punto de onda inicial más desfavorable y el valor de δt más desfavorable.

Los resultados mostrados en la Fig. 4.27 y en la Fig. 4.28 permiten obtener las conclusiones siguientes:

- Se diferencian nítidamente tres grupos. El primer grupo está formado por los huecos tipo A, el segundo por los tipo B, y el tercer grupo por las restantes tipologías de huecos de tensión.
- El grupo que presenta pérdidas de velocidad más elevadas es el formado por huecos de tensión tipo A, el que presenta efectos menos severos es el formado por los hue-

cos de tensión tipo B, y finalmente el tercer grupo, formado por el resto de tipologías, presenta resultados intermedios.

Las conclusiones descritas en este apartado se han basado en un análisis cualitativo de las curvas de sensibilidad. En el apartado siguiente se procede a evaluar una comparación de los resultados de una forma cuantitativa midiendo la distancia entre las superficies de resultados.

Una aplicación concreta de las curvas de sensibilidad consiste en determinar, en función del tarado de las protecciones del motor o del sistema, qué huecos de tensión podrían provocar su disparo no deseado.

Por tanto, estas curvas de sensibilidad permiten determinar la sensibilidad del motor de inducción frente a los huecos de tensión, y ajustar las protecciones a las condiciones de trabajo deseadas, evitando paradas no deseadas en el proceso productivo del que forma parte el motor.

4.7. Comparación de huecos

Para comparar la severidad de dos tipos de huecos de tensión, se puede utilizar la distancia entre las dos superficies que originan los datos obtenidos para cada uno de ellos:

- Si dos superficies están muy próximas entre sí (la distancia es pequeña) es que son muy similares.
- Si una superficie está muy separada del plano 0 (o plano del suelo) entonces corresponde a un hueco muy severo.

Existen varias definiciones de distancia entre dos superficies, aquí se ha tomado la distancia Euclídea. Dadas dos matrices \mathbf{M}_x e \mathbf{M}_y (de dimensión $k \times l$), esta distancia se define como:

$$D(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l [m_x(i, j) - m_y(i, j)]^2} \quad (4.20)$$

la cual cumple las siguientes propiedades:

- $D(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y) \geq 0$
- $D(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y) = 0$, sólo en el caso de que $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$
- $D(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y) = D(\mathbf{M}_y, \mathbf{M}_x)$
- $D(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_z) \leq D(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y) + D(\mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z)$

Para facilitar la interpretación de resultados se puede normalizar la distancia mediante el uso de una distancia de referencia:

$$d(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y) = \frac{D(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y)}{D_{\text{REF}}} \quad (4.21)$$

En nuestro caso se ha elegido como distancia de referencia la distancia entre una matriz de máximos y la matriz nula:

$$D_{\text{REF}} = D_{\text{MAX}} = D(\mathbf{M}_{\text{MAX}}, \mathbf{0}) \quad (4.22)$$

Los elementos de la matriz de máximos, \mathbf{M}_{MAX} , se obtienen como el valor máximo de todos los elementos situados en la misma posición de las matrices \mathbf{M}_A , \mathbf{M}_B , \mathbf{M}_C , \mathbf{M}_D , \mathbf{M}_E y \mathbf{M}_F , es decir es el valor máximo de entre todos los tipos de huecos:

$$m_{\text{MAX}}(i, j) = \max \{m_A(i, j), m_B(i, j), m_C(i, j), \dots\} \quad (4.23)$$

Cuando la matriz de máximos corresponde a los picos de intensidad, \mathbf{I}_{MAX} , a sus elementos los denominamos máximos picos de intensidad. En el caso de los picos de par, \mathbf{T}_{MAX} , a sus elementos los denominamos máximos picos de par y, por último, en el caso de la pérdida de velocidad, \mathbf{S}_{MAX} , a sus elementos los denominamos máximos picos de deslizamiento.

Por lo tanto, la distancia normalizada entre dos matrices, \mathbf{M}_X y \mathbf{M}_Y , se define como:

$$d(\mathbf{M}_X, \mathbf{M}_Y) = \frac{D(\mathbf{M}_X, \mathbf{M}_Y)}{D_{\text{MAX}}} \cdot 100 = \frac{100}{D_{\text{MAX}}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l [m_x(i, j) - m_y(i, j)]^2} \quad (4.24)$$

Lógicamente, cuanto mayor sea la distancia entre ambas superficies, mayores son las diferencias en los efectos que producen ambos tipos de huecos de tensión.

A modo de ejemplo en la Fig. 4.29a se muestran dos superficies 3D: la correspondiente a los máximos picos de intensidad, \mathbf{I}_{MAX} , y la matriz nula, $\mathbf{0}$; habiéndose representando también de forma simbólica la distancia entre ellas $D(\mathbf{I}_{\text{MAX}}, \mathbf{0})$. En la Fig. 4.29b se muestran los picos de intensidad para huecos tipo B, \mathbf{I}_B , la matriz nula, $\mathbf{0}$; y la distancia entre ellas $D(\mathbf{I}_B, \mathbf{0})$. Por último, en la Fig. 4.29c, las matrices \mathbf{I}_{MAX} e \mathbf{I}_B ; y la distancia entre ellas $D(\mathbf{I}_{\text{MAX}}, \mathbf{I}_B)$. En todos los casos se han tomado duraciones con el valor de δt más desfavorable.

La Fig. 4.30, y siguiendo el criterio adoptado para los picos de intensidad, refleja las superficies de los picos de par. En este caso se aprecia que, para un determinado valor de profundidad, h , las superficies \mathbf{T}_{MAX} y \mathbf{T}_B presentan sus valores máximos para las duraciones más cortas, es decir, $\Delta t = 0.5$ ciclos.

Por último, en la Fig. 4.31 se muestran las superficies obtenidas para los picos de deslizamiento. En el ejemplo escogido queda de manifiesto que la distancia entre la matriz correspondiente a los huecos tipo B y la matriz de valores máximos es muy elevada.

A continuación se muestran diferentes tablas que indican las distancias normalizadas entre cada una de las tipologías de huecos de tensión para las tres variables estudiadas (intensidad, par y velocidad) y para diferentes distribuciones en la duración de los huecos de tensión (equidistantes logarítmicamente y con el valor de δt más desfavorable).

La Tabla 4.2 muestra las distancias entre superficies de picos de intensidad, de diferentes tipos de huecos de tensión, cuando las duraciones son equidistantes en escala logarítmica, $\mathbf{I}_{q,1}$. También se muestra la distancia de cada una de ellas con la matriz de referencia, $\mathbf{I}_{\text{MAX},1}$. Cada una de las casillas de la tabla representa la distancia normalizada $d(\mathbf{I}_{X,1}, \mathbf{I}_{Y,1})$ entre las matrices $\mathbf{I}_{X,1}$ e $\mathbf{I}_{Y,1}$. Por ejemplo, $d(\mathbf{I}_{A,1}, \mathbf{I}_{B,1}) = 42.77\%$, es la distancia entre las superficies de picos de intensidad correspondientes a los huecos tipos A y B. La distancia normalizada permite obtener conclusiones a partir de los resultados numéricos obtenidos. El hueco de tensión tipo A es el que muestra una menor distancia a la superficie de máximos, $d(\mathbf{I}_{A,1}, \mathbf{I}_{\text{MAX},1}) = 1.62\%$. Por tanto, esta tipología es la que produce los picos de intensidad más severos, o cuantitativamente mayores. Los huecos de tensión tipo B presentan la mayor distancia a la matriz de valores máximos, $d(\mathbf{I}_{B,1}, \mathbf{I}_{\text{MAX},1}) = 43.38\%$. En consecuencia, son los huecos menos severos, es decir, los que determinan efectos cuantitativamente menores.

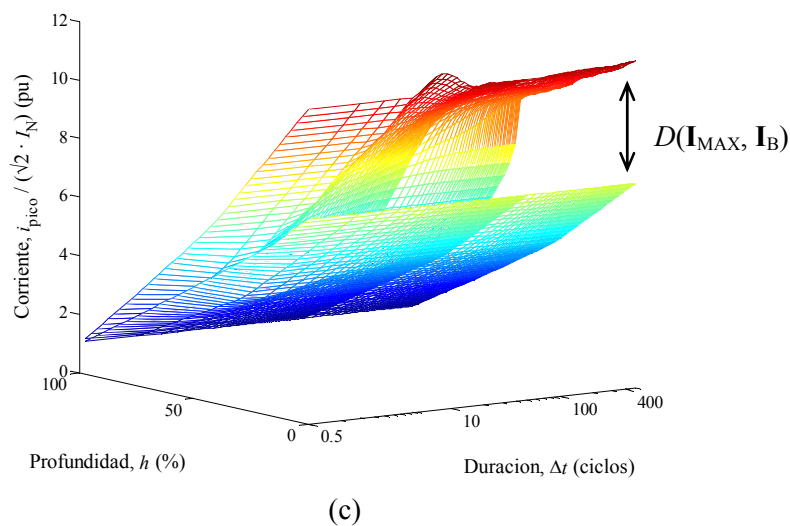
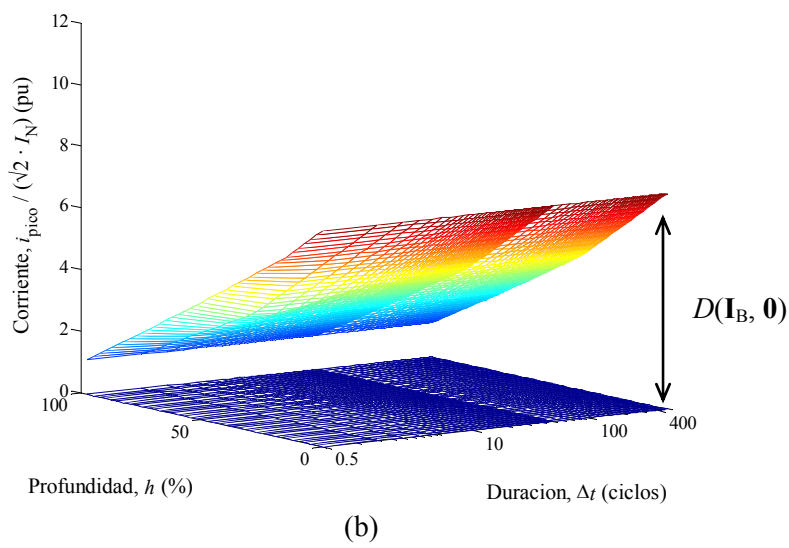
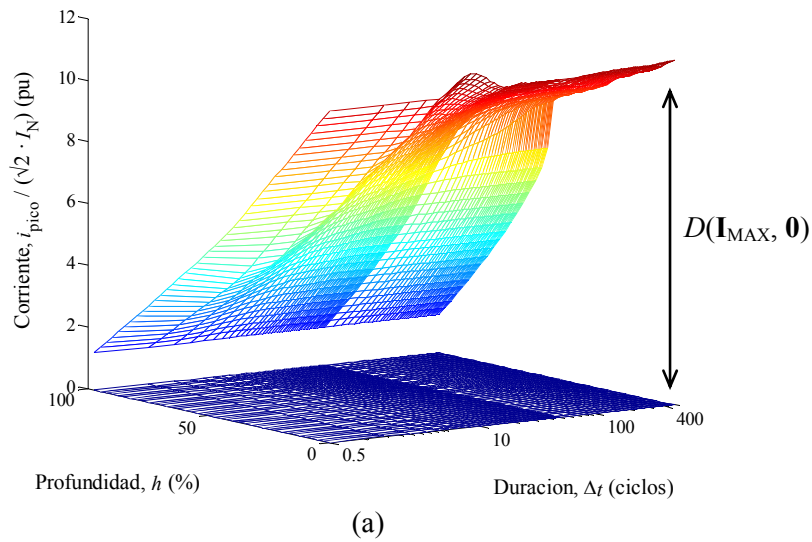


Fig. 4.29. Superficies 3D de los picos de intensidad. Distancias entre las matrices de: a) valores máximos y la matriz nula; b) huecos tipo B y la matriz nula; c) de valores máximos y la matriz de huecos tipo B.

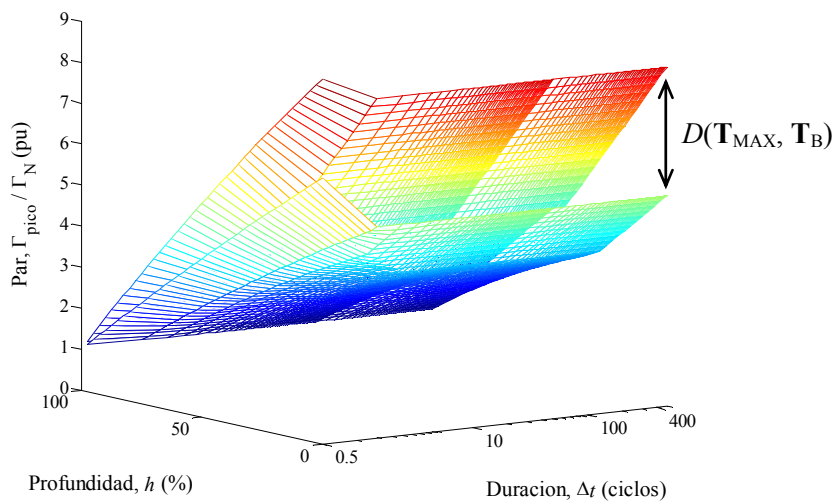
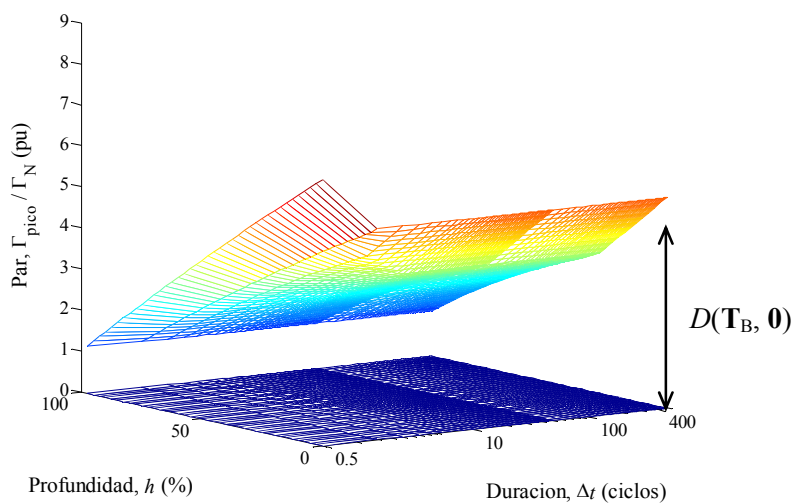
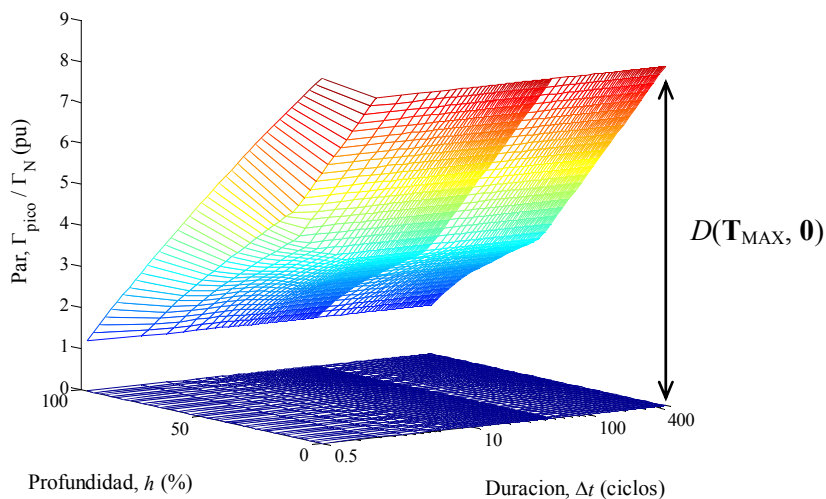
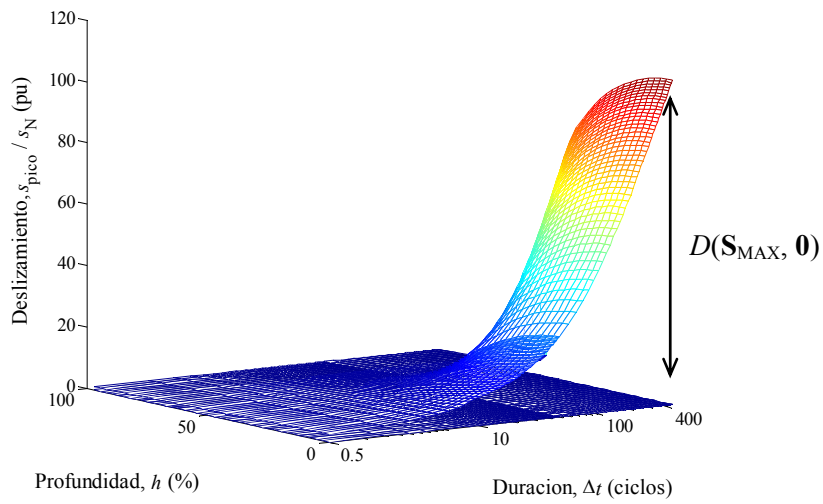
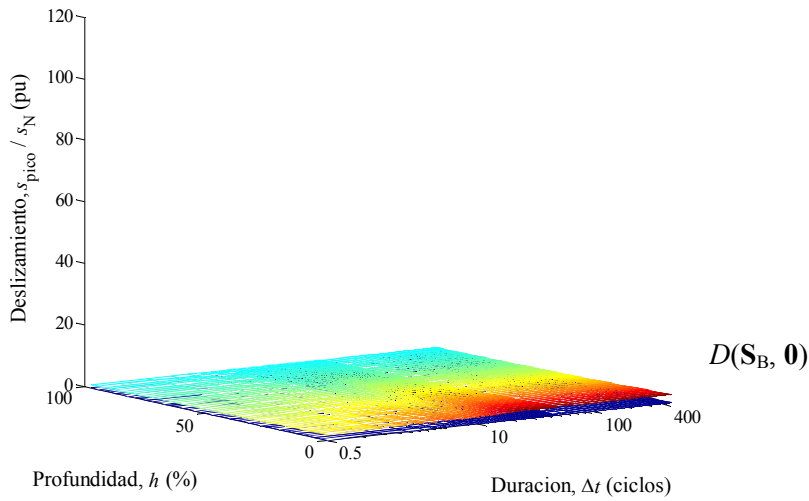


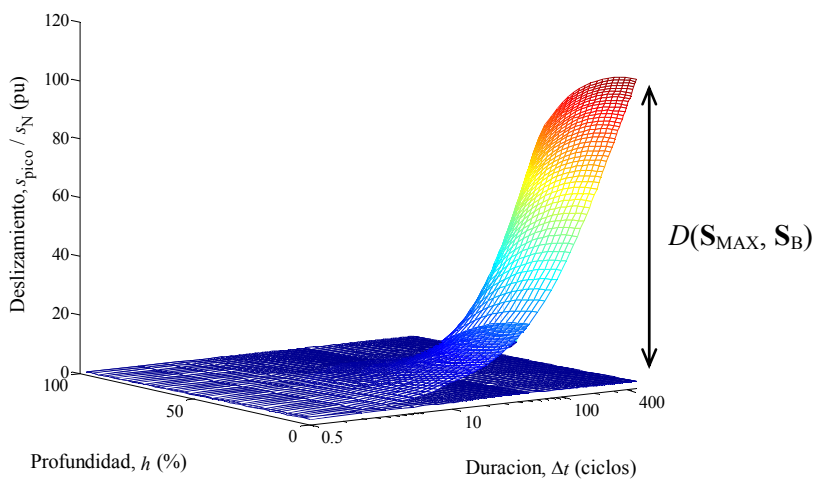
Fig. 4.30. Superficies 3D de los picos de par. Distancias entre las matrices de: a) valores máximos y la matriz nula; b) huecos tipo B y la matriz nula; c) de valores máximos y la matriz de huecos tipo B.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.31. Superficies 3D de los picos de deslizamiento. Distancias entre las matrices de: a) valores máximos y la matriz nula; b) huecos tipo B y la matriz nula; c) de valores máximos y la matriz de huecos tipo B.

Tabla 4.2. Distancia normalizada (%) entre las superficies de los picos de intensidad (duraciones equidistantes en escala logarítmica).

	$I_{A,1}$	$I_{B,1}$	$I_{C,1}$	$I_{D,1}$	$I_{E,1}$	$I_{F,1}$	$I_{MAX,1}$
$I_{A,1}$		42.77	20.61	18.48	18.63	16.66	1.62
$I_{B,1}$	42.77		25.49	29.95	27.24	31.09	43.38
$I_{C,1}$	20.61	25.49		5.16	5.78	6.92	20.77
$I_{D,1}$	18.48	29.95	5.16		6.68	4.02	18.44
$I_{E,1}$	18.63	27.24	5.76	6.68		5.14	18.88
$I_{F,1}$	16.66	31.09	6.92	4.02	5.14		16.63
$I_{MAX,1}$	1.62	43.38	20.77	18.44	18.88	16.63	

Tabla 4.3. Distancia normalizada (%) entre las superficies de los picos de intensidad (duraciones con el valor de δt más desfavorable).

	$I_{A,2}$	$I_{B,2}$	$I_{C,2}$	$I_{D,2}$	$I_{E,2}$	$I_{F,2}$	$I_{MAX,2}$
$I_{A,2}$		45.55	23.47	20.76	16.97	15.64	0.85
$I_{B,2}$	45.55		24.24	28.13	32.19	34.07	45.87
$I_{C,2}$	23.47	24.24		4.29	9.67	10.95	23.63
$I_{D,2}$	20.76	28.13	4.29		7.14	7.75	20.87
$I_{E,2}$	16.97	32.19	9.67	7.14		2.51	17.01
$I_{F,2}$	15.64	34.07	10.95	7.75	2.51		15.62
$I_{MAX,2}$	0.85	45.87	23.63	20.87	17.01	15.62	

La distancia normalizada también puede ser utilizada para estudiar la similitud, o no, entre dos tipos de huecos de tensión. Por ejemplo, los huecos de tensión tipo B, presentan una distancia normalizada respecto a los otros tipos, $d(I_{B,1}, I_{X,1})$, donde $I_{X,1}$ puede ser la superficie de los huecos tipo A, C, D, E o F, siempre superior al 25%. En consecuencia, los huecos tipo B presentan resultados nítidamente diferenciados del resto de tipologías. Por otro lado, las distancias mutuas entre los huecos de tensión tipos C, D, E y F son siempre inferiores al 7%, en consecuencia pueden considerarse similares. Por lo tanto, se pueden realizar las siguientes agrupaciones atendiendo al grado de severidad en cuanto a los picos de intensidad:

- Tipo A: $d(I_{A,1}, I_{X,1}) > 16\%$, donde $I_{X,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C, D, E o F.
- Tipos C, D, E y F: $d(I_{X,1}, I_{Y,1}) < 7\%$, donde $I_{X,1}$ e $I_{Y,1}$ son cualquiera de las superficies de los tipos C, D, E o F.
- Tipo B: $d(I_{B,1}, I_{X,1}) > 25\%$, donde $I_{X,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, C, D, E o F.

Calculando las distancias entre las superficies de los picos de intensidad, para el valor de δt más desfavorable, $I_{X,2}$, se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 4.3, que lógicamente son diferentes a los de la Tabla 4.2, pero de nuevo se mantienen los tres grupos propuestos con anterioridad, si bien en este caso las diferencias entre ellos son algo menores:

- Tipo A: $d(I_{A,2}, I_{X,2}) > 15\%$, donde $I_{X,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C, D, E o F.
- Tipos C, D, E y F: $d(I_{X,2}, I_{Y,2}) < 11\%$, donde $I_{X,2}$ e $I_{Y,2}$ son cualquiera de las superficies de los tipos C, D, E o F.
- Tipo B: $d(I_{B,2}, I_{X,2}) > 24\%$, donde $I_{X,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, C, D, E o F.

Esta metodología se ha seguido con las matrices de picos de par, $\mathbf{T}_{q,1}$ y $\mathbf{T}_{q,2}$, obteniendo los resultados mostrados en la Tabla 4.3 y en la Tabla 4.4 respectivamente. En el primer caso para duraciones equidistantes en escala logarítmica, y en el segundo para el valor de δt más desfavorable. Un análisis de las distancias entre las superficies de picos de par cuando la duración es equidistante en escala logarítmica, $\mathbf{T}_{q,1}$, permite agrupar los huecos en tres grupos:

- Tipos C, D, E y F: $d(\mathbf{T}_{X,1}, \mathbf{T}_{Y,1}) < 9\%$, donde $\mathbf{T}_{X,1}$ y $\mathbf{T}_{Y,1}$ son cualquiera de las superficies de los tipos C, D, E o F. Cabe destacar dos subgrupos en este caso:
 - Tipos C y D: $d(\mathbf{T}_{C,1}, \mathbf{T}_{D,1}) < 0.00\%$, presentan valores prácticamente idénticos.
 - Tipos E y F: $d(\mathbf{T}_{E,1}, \mathbf{T}_{F,1}) < 0.00\%$, sus valores también son muy similares.
- Tipo A: $d(\mathbf{T}_{A,1}, \mathbf{T}_{X,1}) > 13\%$, donde $\mathbf{T}_{X,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C, D, E o F.
- Tipo B: $d(\mathbf{T}_{B,1}, \mathbf{T}_{X,1}) > 24\%$, donde $\mathbf{T}_{X,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, C, D, E o F.

El grupo más severo es el primero (tipos C, D, E y F), donde $d(\mathbf{T}_{X,1}, \mathbf{T}_{MAX,1}) < 12.3\%$ a la matriz de valores máximos. El segundo grupo, formado por los huecos de tensión simétricos, tipo A, que presentan una distancia $d(\mathbf{T}_{A,1}, \mathbf{T}_{MAX,1}) = 15.79\%$ (por tanto, bastante próximo al primer grupo). Este resultado, diferente al observado para los picos de intensidad, es debido a que la tensión inversa en los huecos asimétricos produce una oscilación en el par que no se produce en los huecos simétricos (tipo A). Por último, los huecos monofásicos, son los que presentan efectos menos severos, $d(\mathbf{T}_{B,1}, \mathbf{T}_{MAX,1}) = 36.33\%$. Repitiendo el análisis de las superficies correspondientes a los picos de par para el valor de δt más desfavorable, $\mathbf{T}_{X,2}$, se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 4.5. En este caso también se proponen las mismas agrupaciones, pero presentando los siguientes valores de distancias entre superficies:

- Tipos C, D, E y F: $d(\mathbf{T}_{X,2}, \mathbf{T}_{Y,2}) < 8\%$, donde $\mathbf{T}_{X,2}$ y $\mathbf{T}_{Y,2}$ son cualquiera de las superficies de los tipos C, D, E o F. También se distinguen dos subgrupos:

Tabla 4.4. Distancia normalizada (%) entre las superficies de los picos de par (duraciones equidistantes en escala logarítmica).

	$\mathbf{T}_{A,1}$	$\mathbf{T}_{B,1}$	$\mathbf{T}_{C,1}$	$\mathbf{T}_{D,1}$	$\mathbf{T}_{E,1}$	$\mathbf{T}_{F,1}$	$\mathbf{T}_{MAX,1}$
$\mathbf{T}_{A,1}$		24.37	19.26	19.26	13.22	13.22	15.79
$\mathbf{T}_{B,1}$	24.37		33.21	33.21	26.55	26.55	36.33
$\mathbf{T}_{C,1}$	19.26	33.21		0.00	8.28	8.28	11.03
$\mathbf{T}_{D,1}$	19.26	33.21	0.00		8.28	8.28	11.03
$\mathbf{T}_{E,1}$	13.22	26.55	8.28	8.28		0.00	12.23
$\mathbf{T}_{F,1}$	13.22	26.55	8.28	8.28	0.00		12.23
$\mathbf{T}_{MAX,1}$	15.79	36.33	11.03	11.03	12.23	12.23	

Tabla 4.5. Distancia normalizada (%) entre las superficies de los picos de par (duraciones con el valor de δt más desfavorable).

	$\mathbf{T}_{A,2}$	$\mathbf{T}_{B,2}$	$\mathbf{T}_{C,2}$	$\mathbf{T}_{D,2}$	$\mathbf{T}_{E,2}$	$\mathbf{T}_{F,2}$	$\mathbf{T}_{MAX,2}$
$\mathbf{T}_{A,2}$		17.65	18.25	18.25	10.36	10.36	18.24
$\mathbf{T}_{B,2}$	17.65		35.07	35.07	27.36	27.36	35.12
$\mathbf{T}_{C,2}$	18.25	35.07		0.00	7.93	7.93	0.59
$\mathbf{T}_{D,2}$	18.25	35.07	0.00		7.93	7.93	0.59
$\mathbf{T}_{E,2}$	10.36	27.36	7.93	7.93		0.00	7.94
$\mathbf{T}_{F,2}$	10.36	27.36	7.93	7.93	0.00		7.94
$\mathbf{T}_{MAX,2}$	18.24	35.12	0.59	0.59	7.94	7.94	

- Tipos C y D: $d(\mathbf{T}_{C,2}, \mathbf{T}_{D,2}) < 0.00\%$, presentan valores prácticamente idénticos.
- Tipos E y F: $d(\mathbf{T}_{E,2}, \mathbf{T}_{F,2}) < 0.00\%$, sus valores también son muy similares.
- Tipo A: $d(\mathbf{T}_{A,2}, \mathbf{T}_{X,2}) > 10\%$, donde $\mathbf{T}_{X,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C, D, E o F.
- Tipo B: $d(\mathbf{T}_{B,2}, \mathbf{T}_{X,2}) > 17\%$, donde $\mathbf{T}_{X,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, C, D, E o F.

Por último, las distancias entre las superficies de los picos de deslizamiento, cuando las duraciones son equidistantes en escala logarítmica, $\mathbf{S}_{X,1}$, se muestran en la Tabla 4.6, y en la Tabla 4.7 cuando $\delta t = 0.5$ ciclos, $\mathbf{S}_{X,2}$.

Estos datos permiten clasificar los huecos de tensión en tres grupos, en función de su severidad, cuando se analizan los picos de deslizamiento:

- Tipo A: $d(\mathbf{S}_{A,1}, \mathbf{S}_{X,1}) > 59\%$, donde $\mathbf{S}_{X,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C, D, E o F.
- Tipos E y F: $d(\mathbf{S}_{E,1}, \mathbf{S}_{F,1}) < 0.00\%$ y $d(\mathbf{S}_{X,1}, \mathbf{S}_{Y,1}) > 45\%$, donde $\mathbf{S}_{X,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos E o F y $\mathbf{S}_{Y,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, B, C o D.
- Tipos B, C y D: $d(\mathbf{S}_{C,1}, \mathbf{S}_{D,1}) < 0.00\%$ y $d(\mathbf{S}_{X,1}, \mathbf{S}_{Y,1}) > 45\%$, donde $\mathbf{S}_{X,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C o D y $\mathbf{S}_{Y,1}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, E o F.

En los 5000 casos calculados los huecos de tensión simétricos (tipo A), han presentado pico de deslizamiento: $d(\mathbf{S}_{A,1}, \mathbf{S}_{MAX,1}) = 0\%$.

Tabla 4.6. Distancia normalizada(%) entre las superficies de los picos de deslizamiento (duraciones equidistantes en escala logarítmica).

	$\mathbf{S}_{A,1}$	$\mathbf{S}_{B,1}$	$\mathbf{S}_{C,1}$	$\mathbf{S}_{D,1}$	$\mathbf{S}_{E,1}$	$\mathbf{S}_{F,1}$	$\mathbf{S}_{MAX,1}$
$\mathbf{S}_{A,1}$		96.07	89.88	89.88	59.70	59.70	0
$\mathbf{S}_{B,1}$	96.07		12.51	12.51	53.53	53.53	96.07
$\mathbf{S}_{C,1}$	89.88	12.51		0.00	45.82	45.82	89.88
$\mathbf{S}_{D,1}$	89.88	12.51	0.00		45.82	45.82	89.88
$\mathbf{S}_{E,1}$	59.70	53.53	45.82	45.82		0.00	59.70
$\mathbf{S}_{F,1}$	59.70	53.53	45.82	45.82	0.00		59.70
$\mathbf{S}_{MAX,1}$	0	96.07	89.88	89.88	59.70	59.70	

Tabla 4.7. Distancia normalizada (%) entre las superficies de los picos de deslizamiento (duraciones con δt más desfavorable).

	$\mathbf{S}_{A,2}$	$\mathbf{S}_{B,2}$	$\mathbf{S}_{C,2}$	$\mathbf{S}_{D,2}$	$\mathbf{S}_{E,2}$	$\mathbf{S}_{F,2}$	$\mathbf{S}_{MAX,2}$
$\mathbf{S}_{A,2}$		96.66	90.49	90.49	59.82	59.82	0
$\mathbf{S}_{B,2}$	96.66		13.31	13.31	55.42	55.42	96.66
$\mathbf{S}_{C,2}$	90.49	13.31		0.00	47.58	47.58	90.49
$\mathbf{S}_{D,2}$	90.49	13.31	0.00		47.58	47.58	90.49
$\mathbf{S}_{E,2}$	59.82	55.42	47.58	47.58		0.00	59.82
$\mathbf{S}_{F,2}$	59.82	55.42	47.58	47.58	0.00		59.82
$\mathbf{S}_{MAX,2}$	0	96.66	90.49	90.49	59.82	59.82	

Tabla 4.8. Agrupación de tipologías en función del efecto estudiado y la distancia normalizada.

	G ₁	G ₂	G ₃
Picos de intensidad	A	C, D, E y F	B
Picos de par	C, D, E y F	A	B
Picos de deslizamiento	A	E y F	B, C y D

En consecuencia, en este caso coincide la superficie de los huecos tipo A con la superficie de máximos picos de deslizamiento. Cabe destacar también la gran distancia existente entre los huecos simétricos y los huecos tipo B: $d(\mathbf{S}_{A,1}, \mathbf{S}_{B,1}) = 96.07\%$.

En el caso de superficies de picos de deslizamiento con el valor de δt más desfavorable, $\mathbf{S}_{X,2}$, los resultados se muestran en la Tabla 4.7, y permiten proponer la misma clasificación pero con los valores siguientes:

- Tipo A: $d(\mathbf{S}_{A,2}, \mathbf{S}_{X,2}) > 59\%$, donde $\mathbf{S}_{X,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C, D, E o F.
- Tipos E y F: $d(\mathbf{S}_{E,2}, \mathbf{S}_{F,2}) < 0.00\%$ y $d(\mathbf{S}_{X,2}, \mathbf{S}_{Y,2}) > 47\%$, donde $\mathbf{S}_{X,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos E o F y $\mathbf{S}_{Y,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, B, C o D.
- Tipos B, C y D: $d(\mathbf{S}_{C,2}, \mathbf{S}_{D,2}) < 0.00\%$ y $d(\mathbf{S}_{X,2}, \mathbf{S}_{Y,2}) > 47\%$, donde $\mathbf{S}_{X,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos B, C o D y $\mathbf{S}_{Y,2}$ es cualquiera de las superficies correspondientes a los huecos tipos A, E o F.

Como resumen, cabe decir que se ha procedido a una clasificación que permite agrupar las siete tipologías de huecos de tensión propuestas en [17], y mostradas en el capítulo 2, en tres grupos que son función del efecto estudiado (picos de intensidad, picos de par y picos de deslizamiento), tal como se muestra en la Tabla 4.8. Esta agrupación puede permitir simplificar el estudio de los efectos de los huecos de tensión sobre el motor de inducción trifásico, de siete casos a tres. En la Tabla 4.8 se han indicado los nuevos grupos por G_N , clasificados por orden de severidad. En la nueva clasificación el grado de severidad depende del efecto estudiado.

4.8. Curvas de sensibilidad utilizando la componente directa de la tensión

Otro posible camino para agrupar los diferentes tipos de huecos descritos en el capítulo 2 es la utilización de la componente directa de la tensión en el eje de ordenadas de las curvas de sensibilidad. En la Tabla 4.9 se muestran los valores máximos y mínimos de la componente directa de cada una de las tipologías de huecos.

La Fig. 4.32 muestra las curvas de sensibilidad correspondientes a los picos de intensidad, utilizando la componente directa de la tensión en el eje de ordenadas, y duraciones equidistantes en escala logarítmica, para los huecos tipos A, B, C, D, E y F. Las curvas presentadas para los huecos de tensión de tipo A en la Fig. 4.32 y en la Fig. 4.23 son idénticas, puesto que este hueco de tensión sólo tiene componente directa.

También se aprecia en la Fig. 4.32 que las curvas de sensibilidad presentan el valor mínimo para la tensión directa V_1 indicado en la Tabla 4.9. Solamente los huecos de tensión simétricos, tipo A, tienen un valor mínimo nulo de la componente directa.

Tabla 4.9. Valores máximos y mínimos de la componente directa de la tensión en función del tipo de hueco.

Componente directa	Valor mínimo $h = 0$	Valor máximo $h = 1$
$\underline{V}_{1,A} = h \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,A,MIN} = 0$	$\underline{V}_{1,A,MAX} = \underline{V}$
$\underline{V}_{1,B} = \frac{2+h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,B,MIN} = \frac{2}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,B,MAX} = \underline{V}$
$\underline{V}_{1,C} = \frac{1+h}{2} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,C,MIN} = \frac{1}{2} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,C,MAX} = \underline{V}$
$\underline{V}_{1,D} = \frac{1+h}{2} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,D,MIN} = \frac{1}{2} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,D,MAX} = \underline{V}$
$\underline{V}_{1,E} = \frac{1+2 \cdot h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,E,MIN} = \frac{1}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,E,MAX} = \underline{V}$
$\underline{V}_{1,F} = \frac{1+2 \cdot h}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,F,MIN} = \frac{1}{3} \cdot \underline{V}$	$\underline{V}_{1,F,MAX} = \underline{V}$

Todos los huecos de tensión asimétricos (tipos B, C, D, E y F) presentan un valor mínimo de la componente directa mayor o igual a $1/3$ pu. Comparando de forma visual los resultados presentados en la Fig. 4.32 se puede realizar la siguiente clasificación, en función de la severidad:

- Tipos B, C y D
- Tipos E y F
- Tipo A

Dicho de otro modo, si se superpusieran las curvas de sensibilidad correspondientes a dos tipos de huecos del mismo grupo, prácticamente coincidirían sus valores, aunque al comparar las curvas para el tipo B con las del tipo C o D, los valores mínimos de la componente directa son diferentes. Otro aspecto a destacar en las curvas de sensibilidad de la Fig. 4.32 es el fuerte rizado que se produce en las curvas para duraciones elevadas. La justificación de este comportamiento viene dada porque al ser las duraciones equidistantes en escala logarítmica, el valor de δt es “pseudo-aleatorio”.

En consecuencia, y tal como ya se ha comentado en el apartado 4.4, como los picos de intensidad dependen en gran medida del valor de δt , obteniéndose el máximo pico de intensidad cuando $\delta t = 0.5$ ciclos, dos huecos de tensión cuyas duraciones ($\Delta t = n \cdot T + \delta t$) presenten valores de n próximos, pero con valores de parte fraccionaria (δt) diferentes puedan dar lugar a picos de intensidad de valor sensiblemente diferentes.

En la Fig. 4.33 se muestran las curvas de sensibilidad para los picos de intensidad en las que los huecos de tensión estudiados presentan una duración con $\delta t = 0.5$ ciclos.

Por tratarse de las duraciones más desfavorables, las curvas mostradas son las envolventes de las ya mostradas en la Fig. 4.32. La duración mínima para estas curvas de sensibilidad es $\Delta t = 0.5$ ciclos. En este caso, y como cabría esperar, es lógico que desaparezca el rizado en los picos de intensidad para huecos de tensión con valores de duración en los que el valor de n es elevado.

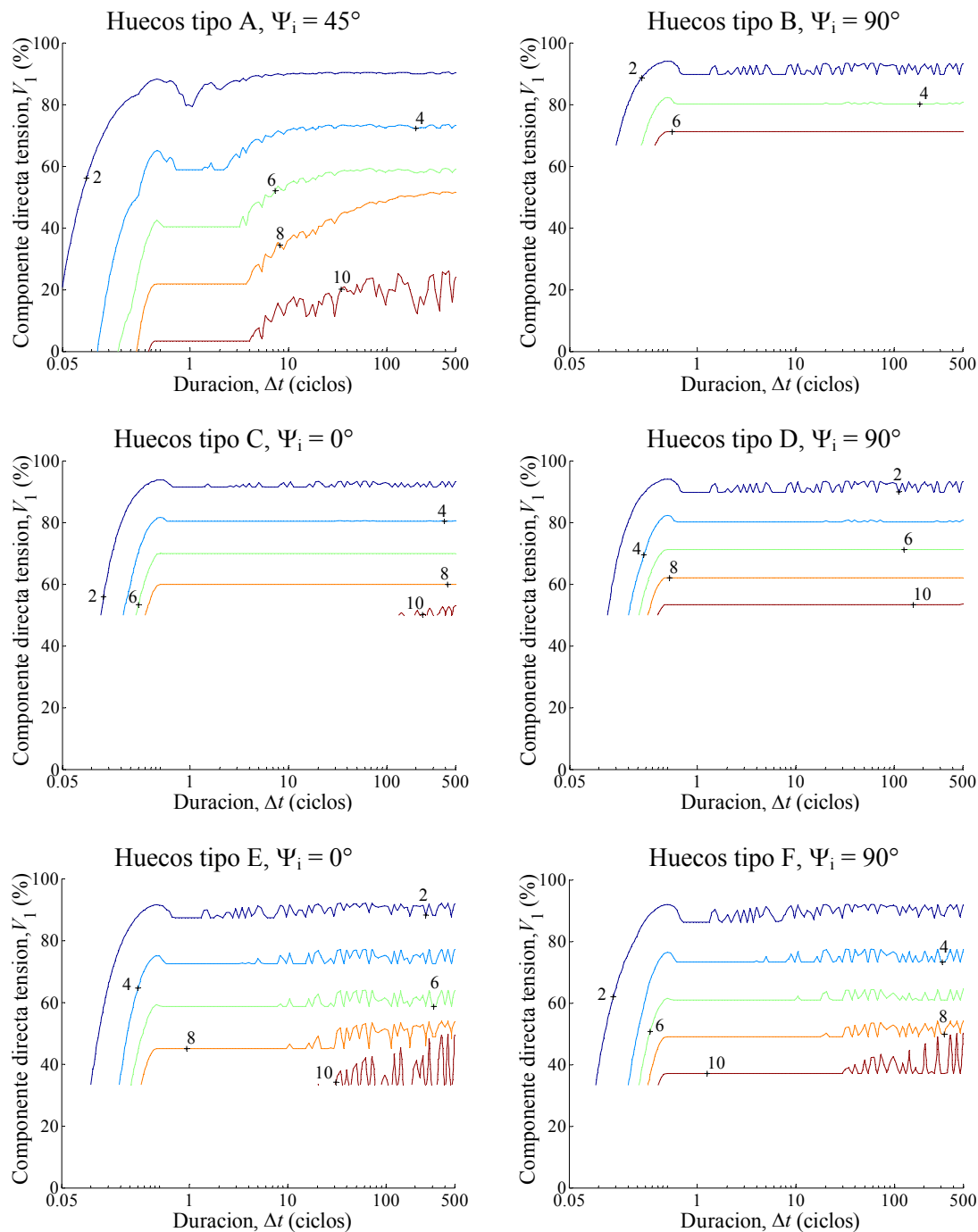


Fig. 4.32. Isolíneas para los picos de intensidad en huecos con el punto de onda inicial más desfavorable. Duraciones equidistantes en escala logarítmica. Componente directa de la tensión en el eje de ordenadas.

El análisis de los resultados obtenidos para los picos de intensidad para duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos (Fig. 4.33) determina la misma clasificación de los huecos, por grado de severidad, que la propuesta para duraciones equidistantes en escala logarítmica.

Los datos reflejados en la Fig. 4.32 y en la Fig. 4.33 muestran que se pueden llegar a tener picos de intensidad con un valor de hasta 10 veces el valor máximo en condiciones nominales, para el caso particular estudiado.

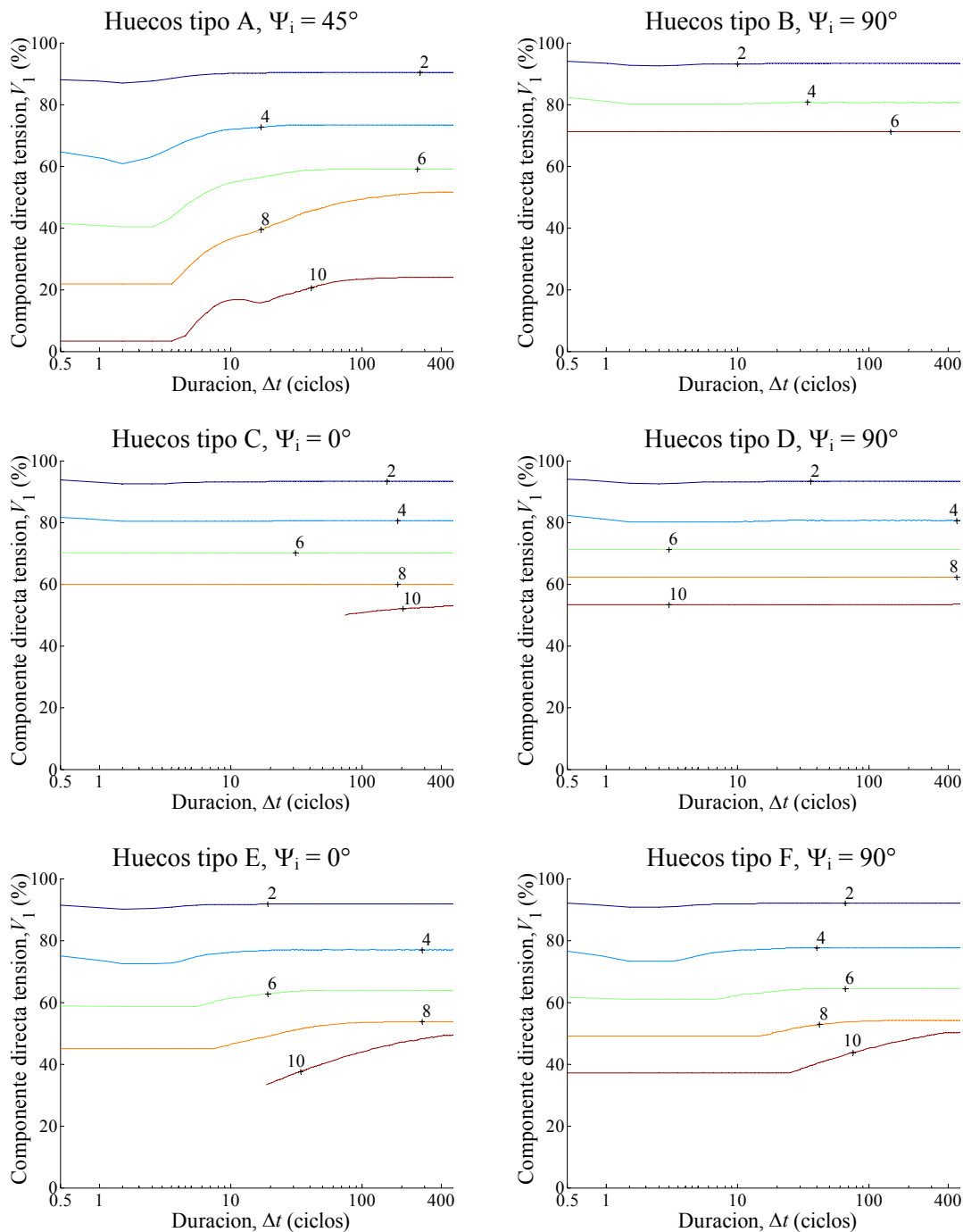


Fig. 4.33. Isolneas para los picos de intensidad en huecos con el punto de onda inicial más desfavorable. Duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos. Componente directa de la tensión en el eje de ordenadas.

La Fig. 4.34 muestra las curvas de sensibilidad para los picos de par, cuando las duraciones son equidistantes en escala logarítmica, y en el eje de ordenadas se representa la componente directa de la tensión. La forma de las curvas es similar a las obtenidas en el caso de los picos de intensidad. En el caso calculado la isolínea máxima representada es la correspondiente a 8 veces el valor del par nominal.

Se aprecia por tanto que los huecos de tensión pueden determinar importantes picos de par, que a su vez provocan fatiga mecánica, y ésta puede producir a su vez la rotura del eje.

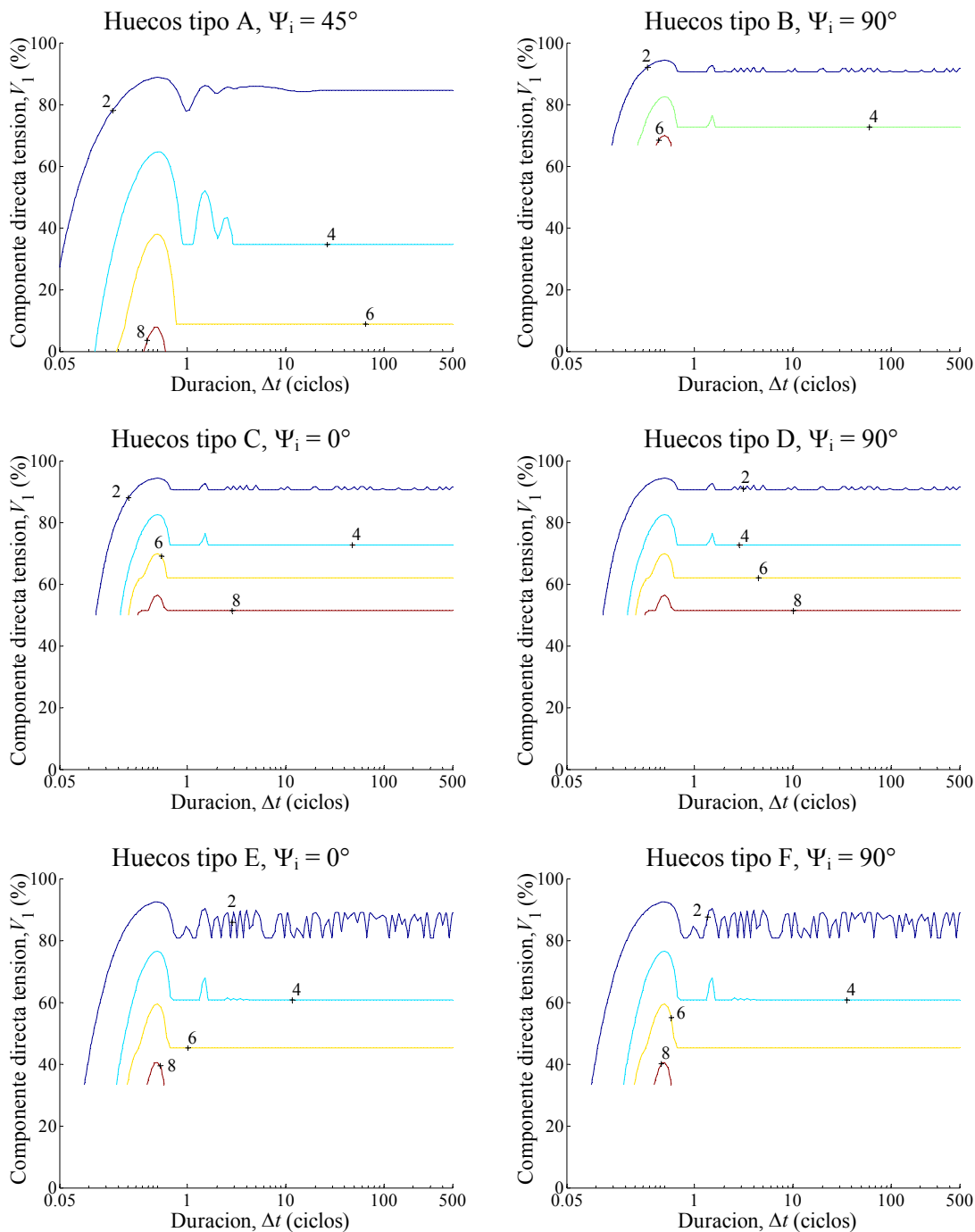


Fig. 4.34. Isolíneas para los picos de par en huecos con el punto de onda inicial más desfavorable. Duraciones equidistantes en escala logarítmica. Componente directa de la tensión en el eje de ordenadas.

Comparando los resultados mostrados en la Fig. 4.34 para las distintas tipologías de huecos, se propone la siguiente clasificación, en función de la severidad de los picos de par provocados:

- Tipos B, C y D.
- Tipos E y F.
- Tipo A.

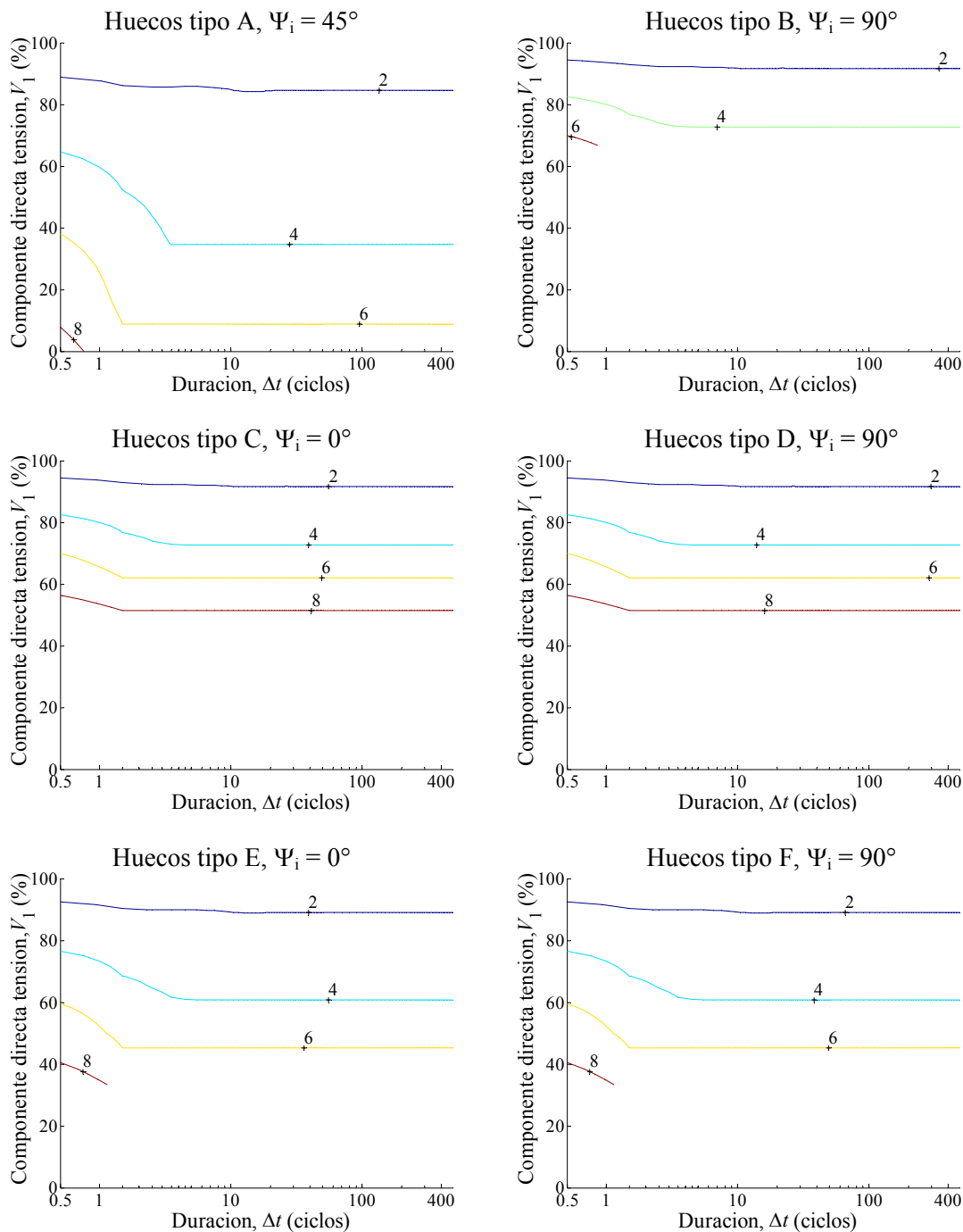


Fig. 4.35. Isolíneas para los picos de par en huecos con el punto de onda inicial más desfavorable. Duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos. Componente directa de la tensión en el eje de ordenadas.

Esta clasificación es idéntica a la que se llega después de analizar los picos de par, pero con huecos de tensión cuyas duraciones presentan un valor de $\delta t = 0.5$ ciclos, tal como se aprecia en la Fig. 4.35. Asimismo coincide con la clasificación ya propuesta para los picos de intensidad. Comparando los resultados obtenidos con los picos de par, cuando las duraciones son equidistantes en escala logarítmica (Fig. 4.34) y cuando presentan un valor de $\delta t = 0.5$ ciclos (Fig. 4.35), se observa que las isolíneas de las gráficas de la segunda figura presentan menos oscilaciones que las de la segunda, tal como pasaba para los picos de intensidad, y que son las envolventes de las mostradas en la primera figura.

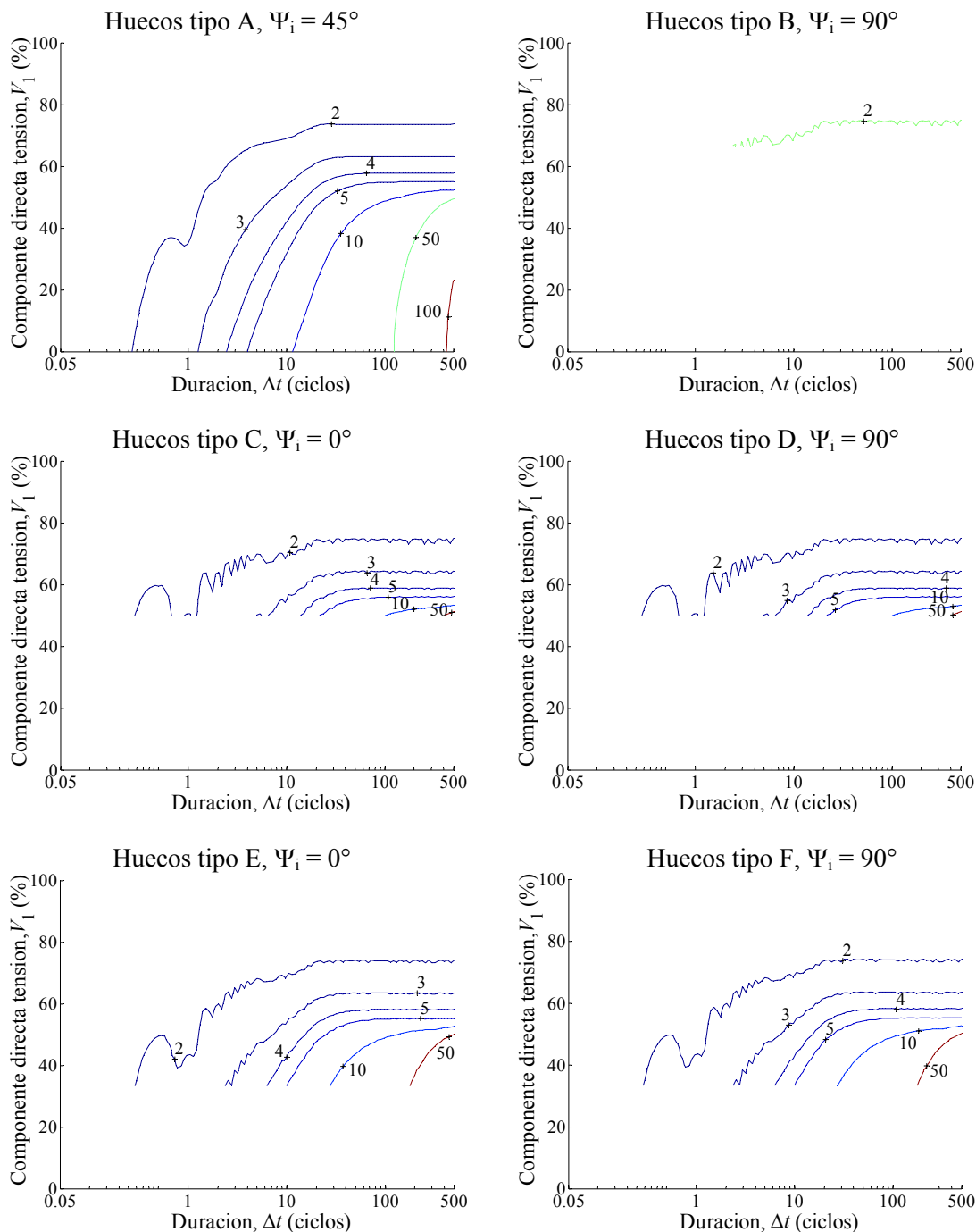


Fig. 4.36. Isolíneas para los picos de deslizamiento en huecos con el punto de onda inicial más desfavorable. Duraciones equidistantes en escala logarítmica. Componente directa de la tensión en el eje de ordenadas.

Por último y para finalizar, en la Fig. 4.36 se muestran las curvas de sensibilidad para los picos de deslizamiento, cuando en el eje de ordenadas se utiliza la componente directa de la tensión y se toman huecos cuyas duraciones son equidistantes en escala logarítmica.

Esta figura muestra, tal como ya se ha visto en la Fig. 4.32 para los picos de intensidad, y en la Fig. 4.34 para los picos de par, que cuando las duraciones son equidistantes en escala logarítmica, se observan unas curvas de sensibilidad con cierto rizado.

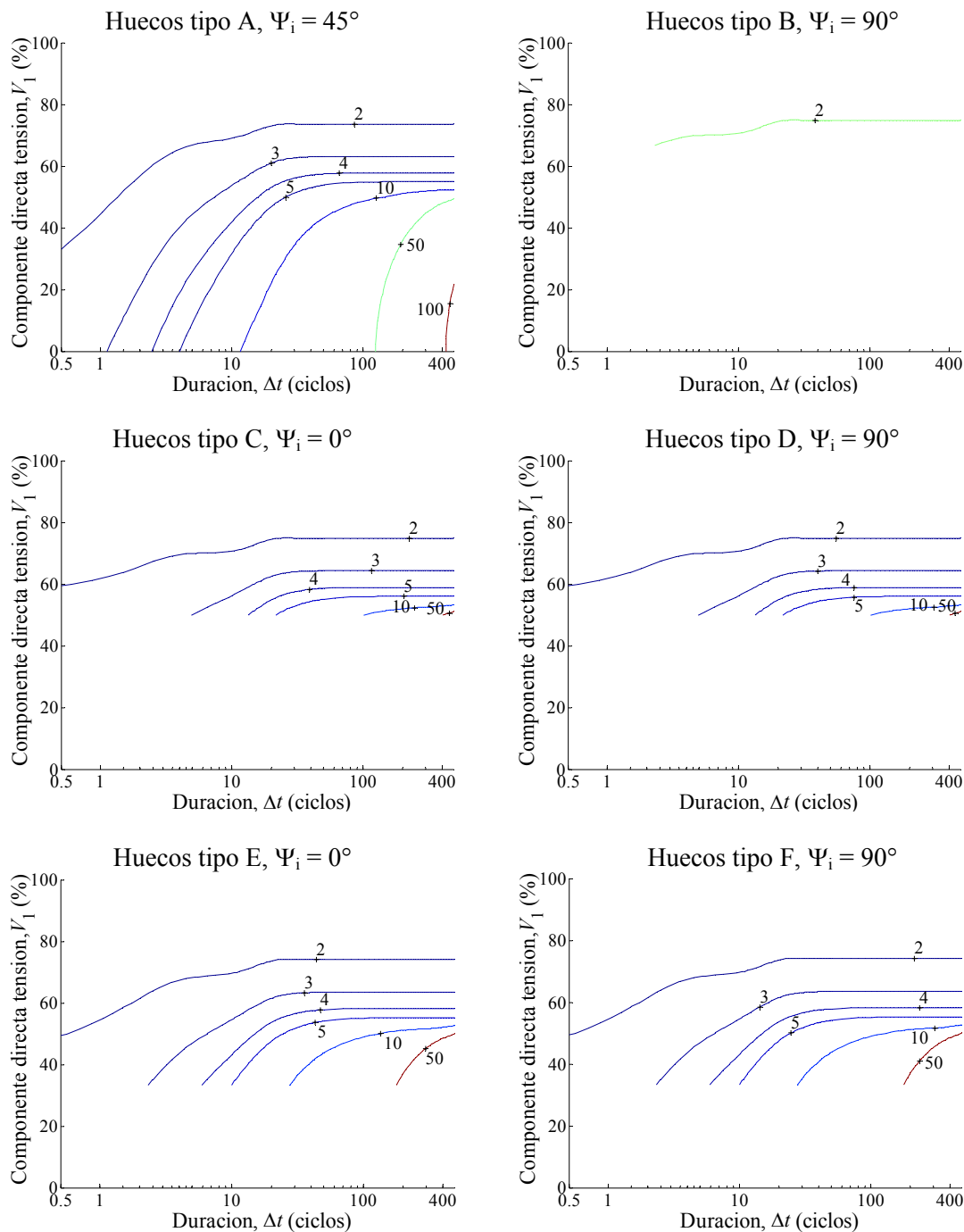


Fig. 4.37. Isolneas para los picos de deslizamiento en huecos con el punto de onda inicial más desfavorable. Duraciones con $\delta t = 0.5$ ciclos. Componente directa de la tensión en el eje de ordenadas.

De nuevo, al tomar duraciones con valores de $\delta t = 0.5$ ciclos se obtienen las curvas de sensibilidad de la Fig. 4.37, que corresponden a las envolventes de las curvas de sensibilidad de la Fig. 4.36. Comparando los resultados de forma visual, tanto los de la Fig. 4.36 como los de la Fig. 4.37, se propone la siguiente clasificación por grado de severidad:

- Tipos B, C y D
- Tipos E y F
- Tipo A

En definitiva, se propone estudiar el efecto de los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos utilizando curvas de sensibilidad en cuyo eje de ordenadas se represente la componente directa de la tensión. De este modo, se puede reducir el estudio al pasar de 7 topologías iniciales a únicamente tres, agrupadas del modo siguiente según el orden de severidad:

- Tipos B, C y D
- Tipos E y F
- Tipo A

Por tanto, esta clasificación es independiente del efecto estudiado, y reduce considerablemente el estudio de los efectos de los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos.

4.9. Conclusiones

En este capítulo se han mostrado los efectos de los huecos de tensión en los motores de inducción trifásicos mediante la utilización de curvas de sensibilidad.

Se ha comprobado que el estudio de los efectos que producen los huecos de tensión en los motores de inducción se puede limitar a tres grupos, que contienen las siete topologías propuestas por M. Bollen en [17], cuando se utiliza la componente directa de la tensión en el eje de ordenadas de las curvas de sensibilidad. Este hecho simplifica de forma importante la cantidad de casos a estudiar.