Matriz Laplaciana de grafos ponderados con vértices independientes[S]

Silvia Gago[a]

(a) *Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de Catalunya.*
E-mail: silvia.gago@upc.edu

Resumen. En este trabajo demostramos que los operadores Laplacianos que han sido obtenidos añadiendo nuevos vértices independientes a un grafo ponderado, pueden ser considerados como perturbaciones de los operadores Laplacianos de la red inicial. De esta forma, obtenemos la inversa de Moore-Penrose de la matriz Laplaciana del nuevo grafo en función de la Laplaciana del grafo original.

Palabras clave. Operadores discretos elípticos, Laplaciana, Perturbaciones, Grafos ponderados

1 Introducción y notación

Dado un conjunto finito V de n elementos, sea $\mathcal{C}(V)$ el espacio de todas las funciones reales que toman valores en V. Para cada función $u \in \mathcal{C}(V)$, el vector asociado en $\mathbb{R}^n$ lo denotaremos por u. Para cada vértice $x \in V$, la función característica se denotará por $\varepsilon_x \in \mathcal{C}(V)$; el producto escalar en $\mathcal{C}(V)$ es $\langle u, v\rangle = \sum_{x\in V} u_x v_x$ para cualquier $u, v \in \mathcal{C}(V)$. Una función unitaria y positiva ω se llama peso, y $\Omega(V)$ es el conjunto de todos los pesos en V.

Si $\mathcal{K}$ es un endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$, se dice que es autoadjunto si $\langle \mathcal{K}(u), v\rangle = \langle u, \mathcal{K}(v)\rangle$ para cualquier $u \in \mathcal{C}(V)$. Además, $\mathcal{K}$ es semidefinido positivo cuyo $\langle \mathcal{K}(u), u\rangle \geq 0$ para cualquier $u \in \mathcal{C}(V)$. Un operador autoadjunto $\mathcal{K}$ es elíptico si es semidefinido positivo y su menor autovalor λ es simple. En este caso, existe una única función unitaria $\omega \in \mathcal{C}(V)$, que satisface $\mathcal{K}(\omega) = \lambda\omega$, por eso $\mathcal{K}$ se llama operador (λ, ω)-elíptico. Es fácil de demostrar que un operador (λ, ω)-elíptico es singular si y sólo si $\lambda = 0$.

Cualquier función $K : V \times V \to \mathbb{R}$ se llama núcleo en V, y determina un endomorfismo en $\mathcal{C}(V)$ que asigna a cualquier elemento $u \in \mathcal{C}(V)$ la función $\mathcal{K}(u) = \sum_{y\in V} K(\cdot, y)u(y)$. Por el contrario, cada endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$ tiene

[S] Este trabajo ha sido subvencionado por el Ministerio de Ciencia e Innovación a través de los proyectos MTM2011-28800-C02-02 y MTM2014-60450-R.

asociado el núcleo $K(x,y) = \langle \mathcal{K}(\epsilon_y), \epsilon_x \rangle$ para todos x, $y \in V$. Por lo tanto, un endomorfismo $\mathcal{K}$ es autoadjunto si y sólo si su núcleo K es una función simétrica.

Dados σ, $\tau \in \mathcal{C}(V)$, denotaremos por $\mathcal{P}_{\sigma,\tau}$ al endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$ que asigna a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ la función $\mathcal{P}_{\sigma,\tau}(u) = \langle \tau, u \rangle \sigma$, y lo llamaremos proyector, ya que asigna a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ su proyección en σ a lo largo de τ. Observamos que el núcleo asociado es $P_{\sigma,\tau}(x,y) = (\sigma \otimes \tau)(x,y) = \sigma(x)\tau(y)$. En particular, si $\omega \neq 0$ el endomorfismo $\mathcal{P}_{\omega,\omega}$ se denota simplemente por P_ω.

Dados $\lambda \geq 0$, $\omega \in \Omega(V)$ y un operador (λ,ω)-elíptico $\mathcal{F}$, nos interesa resolver la llamada ecuación de Poisson para $\mathcal{F}$ en V: dado un $f \in \mathcal{C}(V)$ encontrar $u \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\mathcal{F}(u) = f$. Como $\mathcal{F}$ define un automorfismo en $\omega^\perp$, el inverso de un operador (λ,ω)-elíptico $\mathcal{F}$ en $\omega^\perp$ se llama operador de Green operador ortogonal y lo denotaremos por $\mathcal{G}$. Este operador actúa en $\omega^\perp$, pero puede ser extendido a $\mathcal{C}(V)$ al asignar a cada $f \in \mathcal{C}(V)$ la única solución de la ecuación de Poisson $\mathcal{F}(u) = f - \mathcal{P}_\omega(f)$.

Ahora consideremos una función no nula $\sigma \in \mathcal{C}(V)$, la proyección autoadjunta asociada $\mathcal{P}_\sigma$ y el operador $\mathcal{H}_\sigma = \mathcal{F} + \mathcal{P}_\sigma$, llamado perturbación de $\mathcal{F}$ debida a σ. La relación entre los dos operadores de Green de $\mathcal{H}_\sigma$ y$\mathcal{F}$ se puede encontrar en [3, Corolario 3.6].

Además, si consideramos $\sigma_i \in \mathcal{C}(V)$, $i = 1, \ldots, m+\ell$ tales que $\sigma_i \notin \omega^\perp$ para $i = 1, \ldots, m$ y $\sigma_{m+i} \in \omega^\perp$, $i = 1, \ldots, \ell$, el operador

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} + \sum_{i=1}^{m+\ell} \mathcal{P}_{\sigma_i}$$

se llama *operador perturbado*. En este caso, m o ℓ pueden ser 0. Si $\mathcal{F}^\dagger$ denota el operador inverso de Moore-Penrose de $\mathcal{F}$, entonces, la relación entre los correspondientes operadores inversos de Moore-Penrose viene dada en el teorema [3, Teorema 3.5]. Además, el siguiente lema nos facilita una herramienta fundamental para nuestros resultados.

Lemma 1. *Sean* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_{\mathsf{n}\times\mathsf{n}}$, $\mathsf{B} \in \mathcal{M}_{\mathsf{n}\times\mathsf{r}}$, $\mathsf{D} \in \mathcal{M}_{\mathsf{r}\times\mathsf{r}}$ *invertible, y* $\mathsf{S} = \mathsf{A} - \mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T}$, *entonces*

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{B}^\mathsf{T} & \mathsf{D} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \mathsf{C} & \mathsf{E} \\ \mathsf{E}^\mathsf{T} & \mathsf{F} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathsf{C} &= \left(\mathsf{I}_\mathsf{n} + \frac{1}{\mathsf{n}+\mathsf{r}}\mathsf{J}_{\mathsf{n}\times\mathsf{r}}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T}\right)\left[\mathsf{S}^\dagger + \frac{1}{\mathsf{n}+\mathsf{r}}\mathsf{S}^\dagger\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{J}_{\mathsf{r}\times\mathsf{n}} + \frac{1}{\mathsf{n}(\mathsf{n}+\mathsf{r})}\mathrm{tr}(\mathsf{D}^{-1})\mathsf{J}_\mathsf{n}\right],\\
\mathsf{E} &= -\frac{1}{\mathsf{n}+\mathsf{r}}\mathsf{J}_{\mathsf{n}\times\mathsf{r}}\mathsf{D}^{-1} - \mathsf{C}\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1},\\
\mathsf{F} &= \mathsf{D}^{-1} - \frac{1}{\mathsf{n}+\mathsf{r}}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{J}_\mathsf{r} + \frac{1}{\mathsf{n}+\mathsf{r}}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{J}_{\mathsf{n}\times\mathsf{r}}\mathsf{D}^{-1} + \mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{C}\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}.
\end{aligned}$$

2 Añadiendo varios vértices independentes

A partir de ahora $\Gamma = (V, E, c)$ denota una red finita, es decir, un grafo ponderado conexo sin lazos ni aristas múltiples, con conjunto de vértices V, cardinalidad n, y conjunto de aristas E, en las que cada arista $e_{xy} \in E$ tiene asignado un valor $c(x, y) > 0$ llamado conductancia. La conductancia c es una función simétrica $c : V \times V \to [0, \infty)$ tal que $c(x, x) = 0$ para cada $x \in V$ y donde un vértice x es adyacente a otro y si y sólo si $c(x, y) > 0$. Dado un peso en V, $\omega \in \Omega(V)$, para cada par de vértices $(x, y) \in V \times V$, definimos como ω-dipolo entre x e y a la función $\tau_{xy} = \frac{\varepsilon_x}{\omega(x)} - \frac{\varepsilon_y}{\omega(y)}$. La Laplaciana de la red Γ es el endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$ que asigna a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ la función

$$\mathcal{L}(u)(x) = \sum_{y \in V} c(x, y)[u(x) - u(y)], \quad x \in V.$$

El operador Laplaciano es un operador elíptico y singular en $\mathcal{C}(V)$ y además $\mathcal{L}(u) = 0$ si y sólo si u es una función constante. Dado $q \in \mathcal{C}(V)$, se define como operador de Schrödinger en Γ con potencial q al endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$ que asigna a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ la función $\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}(u) + qu$. Dado un peso $\omega \in \Omega(V)$, el potencial determinado por ω es la función $q_\omega = -\frac{1}{\omega}\mathcal{L}(\omega)$. Es sabido que el operador de Schrödinger $\mathcal{L}_q$ es un operador (λ, ω)-elíptico si y sólo si $q = q_\omega + \lambda$, ver [1]. Además, es singular si y sólo $\lambda = 0$ y en ese caso, $\mathcal{L}_{q_\omega}(v) = 0$ si y sólo $v = a\omega$, $a \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathcal{G}_{\lambda,\omega}$ al operador de Green ortogonal asociado con $\mathcal{L}_q$ y por $\mathsf{G}_{\lambda,\omega}$ a su correspondiente núcleo. De ahora en adelante, consideraremos un valor fijo de $\lambda \geq 0$, el peso $\omega \in \Omega(V)$ y el operador de Schrödinger $\mathcal{L}_q$ con $q = q_\omega + \lambda$.

En este trabajo investigaremos las perturbaciones del operador $\mathcal{L}_q$ obtenidas al añadir varios vértices independientes. Por lo tanto, consideraremos la red obtenida al agregar r nuevos vértices independientes x'_i a respectivamente m_i vértices de Γ, para cada $1 \leq i \leq r$, y para cada x'_i sea $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{m_i}}\}$ el conjunto de vértices de Γ a los que conectamos cada nuevo vértice, con respectivas nuevas conductancias a_{i_j}, $1 \leq j \leq i_{m_i}$, para cada $1 \leq i \leq r$. La nueva red es $\Gamma' = (V', E', c')$, donde $V' = V \cup \{x'_1, \dots, x'_r\}$, con conjunto de aristas $E' = E \cup \{e_{x'_1 x_{1_1}}, \dots, e_{x'_r x_{r_{m_r}}}\}$ y conductancia

$$c'(x, y) = \begin{cases} a_{i_j} > 0 & \text{si } \ x = x'_i \in V, \ y = x_{i_j}, \quad 1 \leq j \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq r, \\ c(x, y) & \text{si } \ x, y \in V \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $\omega(x'_i)$ es un valor positivo asignado a cada x'_i, para $1 \leq i \leq r$, definiremos como nuevo peso asociado a la nueva red Γ', a $\omega'(x) = \omega(x)/\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{r} \omega(x'_i)^2}$, para cada $x \in V'$. Observamos que en este caso se verifica que $\omega(x)/\omega(y) = \omega'(x)/\omega'(y)$, para cada $x, y \in V'$.

Fig. 1: Varios vértices independientes

Proposición 1. *Si $\mathcal{L}'$ es la Laplaciana de Γ', para cada $u \in \mathcal{C}(V')$ se verifica*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'u(x_{i_j}) &= \mathcal{L}u(x_{i_j}) + a_{i_j}(u(x_{i_j}) - u(x'_i)), \quad j = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, r;\\
\mathcal{L}'u(x'_i) &= \sum_{j=1}^{m_i} a_{i_j}(u(x'_i) - u(x_{i_j})), \quad i = 1, \ldots, r;\\
\mathcal{L}'u(x) &= \mathcal{L}u(x), \quad \textit{en otro caso.}
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
q'_{\omega'}(x_{i_j}) &= q_\omega(x_{i_j}) - a_{i_j} + a_{i_j}\frac{\omega(x'_i)}{\omega(x_{i_j})}, \quad j = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, r;\\
q'_{\omega'}(x'_i) &= -\sum_{j=1}^{m_i} a_{i_j} + \frac{1}{\omega(x'_i)}\sum_{j=1}^{m_i} a_{i_j}\omega(x_{i_j}), \quad i = 1, \ldots, r;\\
q'_{\omega'}(x) &= q_\omega(x), \quad \textit{en otro caso.}
\end{aligned}$$

Además, si $p = q'_{\omega'} + \lambda$ y $q = q_\omega + \lambda$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_p u(x_{i_j}) &= \mathcal{L}_q u(x_{i_j}) + a_{i_j}\omega(x'_i)\left(\frac{u(x_{i_j})}{\omega(x_{i_j})} - \frac{u(x'_i)}{\omega(x'_i)}\right), \quad j = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, r;\\
\mathcal{L}'_p u(x'_i) &= \lambda u(x'_i) + \sum_{j=1}^{m_i} a_{i_j}\omega(x_{i_j})\left(\frac{u(x'_i)}{\omega(x'_i)} - \frac{u(x_{i_j})}{\omega(x_{i_j})}\right), \quad i = 1, \ldots, r;\\
\mathcal{L}'_p u(x) &= \mathcal{L}_q u(x), \quad \textit{en otro caso.}
\end{aligned}$$

Observamos que la relación entre las matrices asociadas con los operadores de Schrödinger de Γ y Γ' viene dada por

$$\mathsf{L}'_p = \begin{pmatrix} \mathsf{H} & \mathsf{B} \\ \mathsf{B}^\intercal & \mathsf{D} \end{pmatrix},$$

donde H es la matriz asociada con el operador perturbado $\mathcal{H} = \mathcal{L}_q + \displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} \mathcal{P}_{\sigma_{i_j}}$, con $\sigma_{i_j} = \dfrac{\rho_{i_j}}{\omega(x_{i_j})}\varepsilon_{x_{i_j}}$, $\rho_{i_j} = \sqrt{a_{i_j}\omega(x_{i_j})\omega(x'_i)}$ para cada $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, r$, $B = \left(\sum_{j=1}^{m_1} a_{1_j}\mathsf{e}_{1_j}, \dots, \sum_{j=1}^{m_r} a_{r_j}\mathsf{e}_{r_j}\right)$, y $D = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ con

$$\alpha_i = \lambda + \frac{1}{\omega(x'_i)^2}\sum_{j=1}^{m_i}\rho_{i_j}^2, \quad i = 1, \dots, r.$$

Por lo tanto, para cada $i_1 \le i_j < i_k \le i_{m_i}$, $1 \le i \le r$, definimos el *dipolo ponderado entre* x_{i_j} *y* x_{i_k} como

$$\sigma_{i_j i_k} = \sqrt{\frac{a_{i_j}a_{i_k}\omega(x_{i_j})\omega(x_{i_k})\omega(x'_i)}{\lambda\omega(x'_i) + \sum_{j=1}^{m_i} a_{i_j}\omega(x_{i_j})}}\left(\frac{\varepsilon_{x_{i_j}}}{\omega(x_{i_j})} - \frac{\varepsilon_{x_{i_k}}}{\omega(x_{i_k})}\right),$$

y para cada $j = 1, \dots, m_i$, $i = 1, \dots, r$ también definimos las perturbaciones

$$\tau_{i_j} = \sqrt{\frac{\lambda\omega(x'_i)}{\lambda\omega(x'_i) + \sum_{j=1}^{m_i} a_{i_j}\omega(x_{i_j})}}\sigma_{i_j}.$$

Ahora consideraremos el conjunto de perturbaciones $\pi_{k_i} \in \mathcal{C}(V)$ definidas como $\pi_{k_i} = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\alpha_i}}\sigma_{k_i}$, y para $s_i = 1, \dots, m_i - 1$, $t_i = s_i + 1, \dots, m_i$, sea $k_i = \dfrac{(2m_i - 1 - s_i)s_i}{2} + t_i$ y $\pi_{k_i} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_i}}\dfrac{\rho_{s_i}\rho_{t_i}}{\omega(x'_i)}\left(\dfrac{\varepsilon_{x_{s_i}}}{\omega(x_{s_i})} - \dfrac{\varepsilon_{x_{t_i}}}{\omega(x_{t_i})}\right)$.

Teorema 1. *La inversa de Moore–Penrose de* L'_p *viene dada por*

$$(\mathsf{L}'_p)^\dagger = \begin{pmatrix} \mathsf{C} & \mathsf{E} \\ \mathsf{E}^\intercal & \mathsf{F} \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathsf{C} = \left(\mathsf{I_n} + \frac{1}{\mathsf{n+r}}\mathsf{J_{n\times r}}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^\intercal\right)\left[\mathsf{S}^\dagger + \frac{1}{\mathsf{n+r}}\mathsf{S}^\dagger\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{J_{r\times n}} + \frac{1}{\mathsf{n(n+r)}}\mathsf{tr}(\mathsf{D}^{-1})\mathsf{J_n}\right],$$

$$\mathsf{E} = -\frac{1}{\mathsf{n+r}}\mathsf{J_{n\times r}}\mathsf{D}^{-1} - \mathsf{C}\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1},$$

$$\mathsf{F} = \mathsf{D}^{-1} - \frac{1}{\mathsf{n+r}}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{J_r} + \frac{1}{\mathsf{n+r}}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^\intercal\mathsf{J_{n\times r}}\mathsf{D}^{-1} + \mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^\intercal\mathsf{C}\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1},$$

donde

$$\mathcal{S}^{\dagger} = \mathcal{G} + h\mathcal{P}_{\omega} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\frac{m_i(m_i+1)}{2}} h_j[\mathcal{P}_{\mathcal{G}(\pi_{j_i}),\omega} - \mathcal{P}_{\omega,\mathcal{G}(\pi_{j_i})}] - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k,l=1}^{\frac{m_i(m_i+1)}{2}} h_{kl}\mathcal{P}_{\mathcal{G}(\pi_{k_i}),\mathcal{G}(\pi_{l_i})},$$

y donde $(b_{ij}) = (I + \langle \mathcal{G}(\pi_j), \pi_i \rangle)^{-1}$,

$$\begin{aligned}
h &= \lambda^{\dagger}\alpha \left(\alpha + \sum_{r,s=1}^{m} b_{rs}\rho_r\rho_s \right)^{-1}, \\
h_i &= h\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sum_{r=1}^{m} b_{ir}\rho_r, \quad i = 1, \dots, \frac{m(m+1)}{2}, \\
h_{ij} &= b_{ij} - \frac{h\lambda}{\alpha} \left(\sum_{r=1}^{m} b_{ir}\rho_r \right) \left(\sum_{s=1}^{m} b_{js}\rho_s \right), \quad i, j = 1, \dots, \frac{m(m+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Ahora observamos que si $\lambda = 0$, las conductancias $c'(x,y) = 1$ para todo $x, y \in V'$ y los pesos son constantes, el operador $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}$ es la Laplaciana y además todas las perturbaciones $\tau_{i_j} = 0$ y

$$\sigma_{i_j i_k} = \sqrt{\frac{1}{m_i}} \left(\varepsilon_{x_{i_j}} - \varepsilon_{x_{i_k}} \right).$$

Por lo tanto, la relación entre las inversas de las Laplacianas de la redes nueva y la antigua viene dada por el siguiente Corolario.

Corolario 1. *La inversa de Moore–Penrose de* L' *es*

$$(\mathsf{L}')^{\dagger} = \begin{pmatrix} \mathsf{C} & \mathsf{E} \\ \mathsf{E}^{\mathsf{T}} & \mathsf{F} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathsf{C} &= \left(\mathsf{I_n} + \frac{1}{\mathsf{n+r}} \mathsf{J_{n\times r}} \mathsf{D}^{-1} \mathsf{B}^{\mathsf{T}} \right) \left[\mathsf{S}^{\dagger} + \frac{1}{\mathsf{n+r}} \mathsf{S}^{\dagger}\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}\mathsf{J_{r\times n}} + \frac{1}{\mathsf{n(n+r)}} \mathsf{tr}(\mathsf{D}^{-1})\mathsf{J_n} \right], \\
\mathsf{E} &= -\frac{1}{\mathsf{n+r}} \mathsf{J_{n\times r}} \mathsf{D}^{-1} - \mathsf{C}\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}, \\
\mathsf{F} &= \mathsf{D}^{-1} - \frac{1}{\mathsf{n+r}} \mathsf{D}^{-1}\mathsf{J_r} + \frac{1}{\mathsf{n+r}} \mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^{\mathsf{T}}\mathsf{J_{n\times r}}\mathsf{D}^{-1} + \mathsf{D}^{-1}\mathsf{B}^{\mathsf{T}}\mathsf{C}\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1},
\end{aligned}$$

donde S *es el núcleo asociado con el operador* $\mathcal{S} = \mathcal{H} - \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{\sqrt{m_i}} \varepsilon_i \otimes \varepsilon_i$,

$$\mathsf{S}^{\dagger} = \mathcal{L}^{\dagger} - \sum_{i,j=1}^{\frac{m(m+1)}{2}} b_{ij} \mathcal{P}_{\mathcal{L}^{\dagger}(\pi_i),\mathcal{L}^{\dagger}(\pi_j)},$$

y además $(b_{ij}) = (I + \langle \mathcal{L}^{\dagger}(\pi_j), \pi_i \rangle)^{-1}$.

3 Ejemplo

Para ilustrar las aplicaciones de nuestros resultados, calcularemos la inversa de Moore-Penrose de la Laplaciana de un cubo en términos de la inversa de Moore-Penrose de la Laplaciana de un ciclo de seis vértices, C_6, $L_6 = circ(2, -1, 0, 0, 0, -1)$, cuyo inversa de Moore-Penrose se puede calcular analíticamente (ver [4])

$$L_6^{\dagger} = \frac{1}{72} circ(35, -5, -13, -19, -13, -5).$$

Además $D = diag(3, 3)$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y para aplicar el corolario tenemos que calcular la matriz $(b_{ij}) = (I + \langle \mathcal{L}^{\dagger}(\pi_j), \pi_i \rangle)^{-1}$.

Fig. 2: Grafo cubo

Llamando Π a la matriz cuyas columnas son las perturbaciones π_i, es decir,

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que $(\mathsf{I} + \Pi \mathsf{L}^{\dagger} \Pi^{\mathsf{T}})$ es una matriz invertible cuya inversa es

$$(b_{ij}) = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 79 & -21 & 7 & -3 & 34 & 24 \\ -21 & 79 & -3 & 7 & 24 & 34 \\ 7 & -3 & 106 & 6 & 7 & -3 \\ -3 & 7 & 6 & 106 & -3 & 7 \\ 34 & 24 & 7 & -3 & 79 & -21 \\ 24 & 34 & -3 & 7 & -21 & 79 \end{bmatrix}.$$

Calculamos las matrices de proyecciones, obtenemos $\mathsf{S}^\dagger = \frac{1}{24} circ(7,0,-2,-3,-2,0)$ y finalmente la expresión de

$$\mathsf{L}^\dagger = \frac{1}{96}\begin{bmatrix} 29 & 1 & -7 & -11 & -7 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 29 & 1 & -7 & -11 & -7 & -7 & 1 \\ -7 & 1 & 29 & 1 & -7 & -11 & 1 & -7 \\ -11 & -7 & 1 & 29 & 1 & -7 & -7 & 1 \\ -7 & -11 & -7 & 1 & 29 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & -11 & -7 & 1 & 29 & -7 & 1 \\ 1 & -7 & 1 & -7 & 1 & -7 & 29 & -11 \\ -7 & 1 & -7 & 1 & -7 & 1 & -11 & 29 \end{bmatrix}.$$

Referencias

[1] Bendito, E., Carmona, A. y Encinas, A.M.. The Kirchoff indices of join networks. *Discrete Appl. Math.*, **160** (2012), 24–37.

[2] Z. Cinkir, A.. Deletion and contraction identities for the resistance values and the Kirchhoff index, *Int. J. Quantum Quem.*, **111** (2011), 4030–4041.

[3] Carmona, A., Encinas, A.M., Mitjana, M.. Discrete elliptic operadors and their Green operadors, *Linear Algebra Appl.*, **442** (2014), 115–134.

[4] Carmona, A., Encinas, A.M., Gago, S., Jiménez, M.J., Mitjana, M.. The inverse matriz of some circulant matrices *submitted*, arXiv:1505.07598.

[5] Wang, W., Yang, D., Luo, Y.. The Laplacian polynomial and Kirchhoff index of graphs derived from regular graphs, *Discrete Appl. Math.*, **161** (2013), 3063–3071.