# Acciones de Grupos Borrosas

**D. Boixader, J. Recasens**

*Secció Matemàtiques i Informàtica*
*ETS Arquitectura del Vallès*
*Universitat Politècnica de Catalunya*
*Pere Serra 1-15*
*08190 Sant Cugat del Vallès*
{dionis.boixader,j.recasens}@upc.edu

**Resumen**

Este trabajo generaliza (fuzzifica) las acciones de un grupo sobre un conjunto para tratar situaciones donde hay imprecisión e incertidumbre. Las acciones borrosas pueden tratar la granularidad de un conjunto o incluso generarla definiendo una relación de equivalencia borrosa en él.

**Palabras clave**: acción borrosa, aplicación borrosa, relación de $T$-indistinguibilidad.

Las acciones de un grupo $G$ sobre un conjunto $I$ son una herramienta útil en varias ramas de las matemáticas y de la informática. Ejemplos típicos son las acciones de subgrupos del grupo lineal general $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, la acción del grupo lineal proyectivo $\mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{R})$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y la acción de grupos de simetría de polígonos regulares, frisos y mosaicos [4].

También son útiles en Pattern Recognition, en especial en el reconocimiento de caracteres [3, 5], donde una imagen $x$ puede ser comparada con un prototipo $p$ buscando un elemento $g$ de un determinado grupo de modo que la acción de $g$ sobre $x$ lo transforme en $p$ ($gx = p$). Sin embargo es muy poco probable que podamos encontrar un elemento $g$ de un grupo "razonable" con el que $gx$ sea exactamente $p$. De hecho, consideraremos que $x$ corresponde al carácter $p$ cuando podamos encontrar una $g$ con $gx$ próximo o similar a $p$. En este caso y en otros donde exista imprecisión y ruido la acción debe relajarse. Las acciones borrosas introducidas en este trabajo permiten esta relajación.

Como veremos, las acciones borrosas están íntimamente ligadas a las relaciones de indistinguibilidad y a las aplicaciones borrosas. El lector pued hallar información sobre estos dos conceptos en [6] y en [1, 2] respectivamente.

**Definición 1.** *Sea $G$ un grupo con elemento neutro $e$, $I$ un conjunto no vacío y $T$ una t-norma. $\alpha : G \times I \times I \to [0,1]$ es una $T$-acción borrosa de $G$ sobre $I$ si, y sólo si, $\forall g,h \in G$, $\forall x \in I$*

*1a)* $T(\alpha(hg,x,y),\alpha(g,x,z)) \leq \alpha(h,z,y)$

*1b)* $T(\alpha(g,x,z),\alpha(h,z,y)) \leq \alpha(hg,x,y)$

*2.* $\alpha(e,x,x) = 1$.

*$\alpha$ es una acción borrosa perfecta si, y sólo, si, para todo $g \in G$, $x \in I$ existe un único $y_x \in I$ tal que $\alpha(g,x,y) = 1$.*

$\alpha(g,x,y)$ se interpreta como el grado en que $y$ es la imagen de $x$ bajo la acción de $g$.

A continuación presentamos algunas de las propiedades más relevantes de las acciones borrosas.

$\alpha(e,x,y)$ da el grado con el cual $x$ se transforma en $y$ por el elemento neutro $e$ de $G$. Mide por tanto el grado con el cual $x$ e $y$ se pueden considerar equivalentes o indistinguibles y refleja la granularidad de $I$. De hecho, esta relación es una relación de $T$-indistinguibilidad en $I$ que denotaremos por $E_I$. De forma más general, se tiene que fijando $g \in G$, la relación borrosa $R_g(x,y) = \alpha(g,x,y)$ es una aplicación borrosa inyectiva de $I$ en $I$ respecto a la $T$-indistinguibilidad $E_I$. Además $R_g$ y $R_{g^{-1}}$ son aplicaciones borrosas inversas.

En una acción borrosa tendemos a considerar equivalentes objetos que son indistinguibles salvo por la acción de un $g \in G$. Así tenemos que la relación borrosa $E_\alpha$ de $I$ definida por $E_\alpha(x,y) = \sup_{g\in G} \alpha(g,x,y)$ es una relación de $T$-indistinguibilidad, (si $T$ es continua por la izquierda).

Si consideramos una acción borrosa $\alpha$ sobre $I$, las relaciones borrosas $R$ en $I$ útiles deben ser compatibles (invariantes) por la acción.

**Definición 2.** *$R$ es invariante por $\alpha$ si, y sólo si, $T(R(x,y),\alpha(g,x,x'),\alpha(g,y,y')) \leq R(x',y')$.*

**Proposición 3.** *$E_I$ y $E_\alpha$ son invariantes por $\alpha$. Además, $E_I$ es la menor relación de $T$-indistinguibilidad invariante por $\alpha$.*

La relación entre acciones borrosas y crisp sobre un conjunto $I$ nos la proporcionan los dos siguientes resultados.

**Proposición 4.** *Si $\alpha$ es una acción borrosa perfecta de $G$ sobre $I$ y, para $g \in G$ y $x \in I$, $y_x \in I$ es el único elemento de $I$ tal que $\alpha(g,x,y_x) = 1$, entonces $gx = y_x$ es una acción crisp*[1].

**Proposición 5.** *Sea $E$ una relación de $T$-indistinguibilidad en $I$ invariante por la acción (crisp) $x \to gx$. La aplicación $\alpha : G \times I \times I \to [0,1]$ definida por $\alpha(g,x,y) = E(gx,y)$ es una acción borrosa perfecta de $G$ sobre $I$. Además, $E(x,y) = \alpha(e,x,y) = E_I(x,y)$.*

## Referencias


[1] Demirci, M. *Fuzzy functions and their fundamental properties.* Fuzzy Sets and Systems 106, 1999, 239–246.

[2] Demirci, M., Recasens, J. *Fuzzy groups, fuzzy functions and fuzzy equivalence relations.* Fuzzy Sets and Systems 144, 2004, 441–458.

[3] Grenader, U. *General Pattern Theory.* Oxford Mathematical Monographs. 1993.

[4] Martin, G.E. *Transformation Geometry: An introduction to symmetry.* Springer-Verlag, 1982.

[5] Miller, M.I., Younes, L. *Group Actions, Homeomorphisms, and Matching: A general Framework.* International Journal of Computer Vision 41, 2001, 61–84.

[6] Recasens, J. *Indistinguishability Operators. Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations.* Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2011.


[1]Recordemos que una acción crisp de $G$ sobre $I$ es una aplicación $\alpha : G \times I \to I$ que satisface 1: $(hg)x = h(gx)$ 2: $ex = x$, donde $\alpha(g,x)$ se denota por $gx$.