

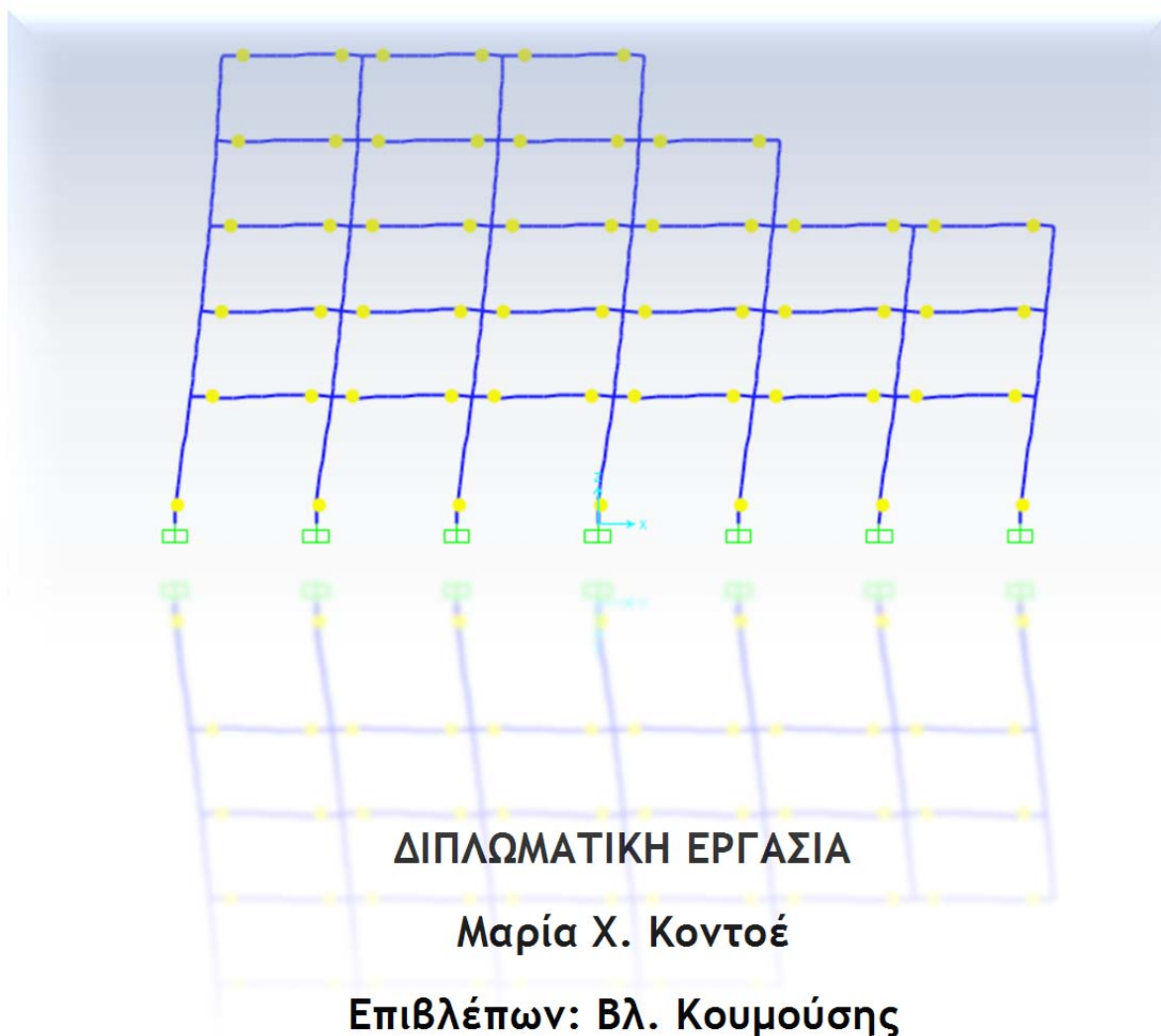


**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών

# ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ



Αθήνα, Νοέμβριος 2016

Κοντοέ Μαρία Χ. (2016)  
Βέλτιστος Αντισεισμικός Σχεδιασμός Πλαισίων με βάση την Πλαστική Οριακή Ανάλυση  
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών,  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Kontoe Maria Ch. (2016).  
Optimum Earthquake-Proof Design of Steel Frames based on Limited Plastic Analysis  
Institute of Structural Analysis and Antiseismic Research,  
National Technical University of Athens, Greece

<b>Πίνακας Περιεχομένων</b>
-----------------------------

<b>1</b>	<b><u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ</u></b>	<b>9</b>
1.1	ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ	9
1.2	ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΦΟΡΕΑ	10
1.2.1	ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	11
1.2.2	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	12
1.2.3	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	12
1.3	ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ	13
1.3.1	ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ	16
1.3.2	ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX	17
1.3.2.1	ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ	18
1.3.3	ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	19
1.3.4	ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ	21
1.3.5	Ο ΔΥΙΣΜΟΣ ΣΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ	22
1.3.5.1	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΩΤΟΓΕΝΟΥΣ ΛΥΣΗΣ ΑΠΟ ΔΥΪΚΗ ΛΥΣΗ	23
1.3.5.2	ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΓΕΝΟΥΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΔΥΪΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ	24
1.4	ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ	24
1.4.1	ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	24
1.4.2	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΥ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ	26
1.4.2.1	ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΔΟΚΟΥ	26
1.4.2.2	ΠΛΑΓΙΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ	27
1.4.2.3	ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΟΥ ΖΥΓΩΜΑΤΟΣ	27
1.4.2.4	ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΚΟΜΒΟΥ	28
1.4.3	ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ	29
1.4.3.1	ΣΤΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ	29
1.4.3.1.1	ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΦΟΡΕΑ	29
1.4.3.1.2	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ	32

<b>2</b>	<b>ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΦΟΡΕΑ</b>	<b>35</b>
2.1	ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	35
2.2	ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	35
2.2.1	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	35
2.2.2	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	36
2.3	ΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ	36
2.3.1	ΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	36
2.3.2	ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ	37
2.3.2.1	ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΕΙ ΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΑΝΤΟΧΩΝ	37
2.3.2.2	ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ	38
2.3.3	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΜΗΤΡΩΪΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	39
2.3.3.1	ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	39
2.3.3.2	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ	39
2.3.3.3	ΜΗΤΡΩΟ ΙΚΑΝΟΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΟΜΒΟΥ	41
2.3.4	ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ	42
2.3.4.1	ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	42
2.3.4.2	ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ	43
2.3.4.3	<i>ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ MATLAB</i>	43
2.4	ΕΠΙΛΟΓΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ	44
2.5	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	45
2.6	ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΛΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΘΡΩΣΕΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΕΝΟΥ ΦΟΡΕΑ	46
<b>3</b>	<b>ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ</b>	<b>49</b>
3.1	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	51
3.1.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	51
3.1.1.1	ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	51
3.1.1.2	ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	52

<b>3.2</b>	<b>ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ</b>	<b>54</b>
3.2.1	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΤΙΣ ΔΟΚΟΥΣ	54
3.2.1.1	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	55
3.2.2	ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΝΟΜΟΥ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΟΚΟΥΣ	57
3.2.2.1	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	58
3.2.3	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	59
3.2.3.1	ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΑΣΤΟΧΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ	59
3.2.3.2	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΑΝΤΟΧΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΟΚΩΝ	61
<b>3.3</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ</b>	<b>62</b>
<b>4</b>	<b><u>ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΠΡΟΤΥΠΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ</u></b>	<b>65</b>
<b>4.1</b>	<b>ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ</b>	<b>66</b>
4.1.1	ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	66
4.1.1.1	ΟΡΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	66
4.1.2	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΜΗΤΡΩΪΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	67
4.1.2.1	ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	67
4.1.2.2	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ	67
4.1.3	ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	69
4.1.3.1	ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	69
4.1.3.2	ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	69
4.1.3.3	ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ MATLAB	70
4.1.4	ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΦΟΡΕΑ	70
4.1.4.1	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ	70
4.1.4.2	ΠΛΑΣΤΙΚΕΣ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	70
<b>4.2</b>	<b>ΑΝΑΛΥΣΗ PUSH OVER</b>	<b>71</b>
4.2.1	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	72
<b>5</b>	<b><u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ</u></b>	<b>75</b>
5.1.1	ΦΟΡΕΑΣ 1	76

5.1.2 ΦΟΡΕΑΣ 2	78
5.2 ΠΛΑΓΙΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΜΕ ΠΛΑΣΤΙΚΕΣ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ	79
5.2.1 ΦΟΡΕΑΣ 3	79
5.3 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΟΡΟΦΟΥ	82
5.3.1 ΦΟΡΕΑΣ 4	82
5.3.2 ΦΟΡΕΑΣ 5	83
5.4 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ	85
5.4.1 ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ ΜΕ ΚΟΙΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ	85
5.4.2 ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ ΚΟΙΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ	86
<b>6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>	<b>89</b>
<b>7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>93</b>

## Πίνακας Σχημάτων

Εικόνα 1-1: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με μοναδική λύση .....	19
Εικόνα 1-2: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με μη-μοναδική λύση .....	20
Εικόνα 1-3: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με απεριόριστη λύση.....	20
Εικόνα 1-4: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού χωρίς λύση .....	21
Εικόνα 1-5: Πιθανή διάταξη τιμών αντικειμενικής συνάρτησης πρωτεγενούς και δυϊκού προβλήματος.....	23
Εικόνα 1-6: Απόλυτα Πλαστική Συμπεριφορά Υλικού [3] .....	25
Εικόνα 1-7: Μηχανισμοί Τύπου Δοκού.....	26
Εικόνα 1-8: Πλαίσιο m Ορόφων με m Πλευρικούς Μηχανισμούς.....	27
Εικόνα 1-9: Τεθλασμένο Ζύγωμα Τριών Ράβδων .....	27
Εικόνα 1-10: Μηχανισμός Κόμβου.....	28
Εικόνα 1-11: Ακραίες Δράσεις Αμφίπακτου Στοιχείου .....	30
Εικόνα 1-12: Αλληλεπίδραση Ροπών & Αξονικών Δυνάμεων (Masonet - Ssave) .....	33
Εικόνα 2-1: Πολυγωνική Προσέγγιση Χωρίων Αλληλεπίδρασης .....	38
Εικόνα 2-2: Κατάρτιση Μητρώου <i>Aineq, bineq</i> σε <i>matlab</i> .....	41
Εικόνα 2-3: Κατάρτιση Μητρώου <i>IK, ik</i> σε <i>matlab</i> .....	42
Εικόνα 2-4: Εντολή Επίλυσης Προβλήματος σε <i>matlab</i> .....	43
Εικόνα 2-5: Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης Βέλτιστων Διατομών Φορέα εξαγόμενο από πρόγραμμα <i>matlab</i> .....	45
Εικόνα 2-6: Ορισμός Χωρίων Διαγράμματος Αλληλεπίδρασης και Περιορισμών .....	46
Εικόνα 2-7: Μοντέλο Πλαστικών Αρθρώσεων Προγράμματος στην <i>matlab</i> .....	47
Εικόνα 3-1: Γεωμετρικά Στοιχεία Εξεταζόμενου Φορέα .....	51
Εικόνα 3-2: Μηχανισμός Κατάρρευσης Φορέα .....	52
Εικόνα 3-3: Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης Διατομών Φορέα .....	53
Εικόνα 3-4: Μηχανισμός Κατάρρευσης Πλαισίου 6 ορόφων.....	54
Εικόνα 3-5: Μηχανισμός Κατάρρευσης Πλαισίου με Τυχαία Μορφολογία.....	54
Εικόνα 3-6: Εντολή Επίλυσης Προβλήματος σε <i>matlab</i> .....	55
Εικόνα 3-7: Πλαστικές Αρθρώσεις Φορέα .....	56
Εικόνα 3-8: Παραδείγματα Πλαστικών Αρθρώσεων Πλασίων.....	56
Εικόνα 3-9: Παραδείγματα Πλαστικών Αρθρώσεων Πλασίων.....	57
<b>Εικόνα 3-10: Μηχανισμός Κατάρρευσης Φορέα .....</b>	<b>59</b>
Εικόνα 3-11: Μηχανισμός Κατάρρευσης Φορέα .....	60
Εικόνα 3-12: Μηχανισμοί Κατάρρευσης Φορέα .....	62
Εικόνα 4-1: Εντολή Επίλυσης Προβλήματος σε <i>matlab</i> .....	70

Εικόνα 4-2: Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης SAP .....	72
Εικόνα 4-3: Διάγραμμα M-G Διατομών στο SAP .....	73
Εικόνα 5-1: Μηχανισμός Κατάρρευσης από matlab .....	76
Εικόνα 5-2: Μηχανισμός Κατάρρευσης από SAP .....	76
Εικόνα 5-3: Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα .....	77
Εικόνα 5-4: Διάγραμμα Ροπών Κάμψης του φορέα .....	77
Εικόνα 5-5: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω matlab .....	78
Εικόνα 5-6: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω SAP .....	79
Εικόνα 5-7: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω matlab .....	80
Εικόνα 5-8: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω SAP .....	80
Εικόνα 5-9: παραδείγματα πλάγιων μηχανισμών κατάρρευσης πλαισίων με πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα .....	81
Εικόνα 5-10: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab .....	82
Εικόνα 5-11: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP .....	82
Εικόνα 5-12: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab .....	84
Εικόνα 5-13: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP .....	84
Εικόνα 5-14: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab .....	86
Εικόνα 5-15: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP .....	86
Εικόνα 5-16: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab .....	87
Εικόνα 5-17: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP .....	87
Εικόνα 5-18: Παραδείγματα Μηχανισμών Κατάρρευσης με επιπρόσθετες παραμέτρους στον σχεδιασμό .....	87



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πλαίσιο της παρούσης διπλωματικής διερευνήθηκε η δυνατότητα βέλτιστου σχεδιασμού των μελών μεταλλικών πλαισίων υπό την επίδραση πλευρικών φορτίσεων, μέσω γραμμικού προγραμματισμού. Για την μελέτη των φορέων εφαρμόστηκε η πλαστική ανάλυση κατά την οποία επιδιώκεται να προσδιοριστεί ο μέγιστος αριθμός πλαστικών αρθρώσεων που δύνανται να αναπτύξουν οι φορείς έως την αστοχία τους για την επιβαλλόμενη φόρτιση.

Για την ανάπτυξη του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των μεταβλητών και των ορίων τους, των περιορισμών στους οποίους υπόκεινται και της αντικειμενικής συνάρτησης με την οποία καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή τους. Για την μελέτη των πλαισίων επιλέχθηκε η χρήση του στατικού θεωρήματος. Οι μεταβλητές του προβλήματος είναι τα εντατικά μεγέθη και οι αντοχές σε κάμψη των μελών των φορέων, οι οποίες λαμβάνουν θετική τιμή. Οι περιορισμοί είναι οι εξισώσεις ισορροπίας των εντάσεων επί των μελών και των εξωτερικών φορτίσεων για το σύνολο των βαθμών ελευθερίας των πλαισίων και η επιφάνεια διαρροής που εφαρμόστηκε στα άκρα των μελών τους. Ένας επιπλέον περιορισμός που εισήχθη κατά τον σχεδιασμό είναι ο ικανοτικός έλεγχος κόμβων των πλαισίων. Η αντικειμενική συνάρτηση εμπεριέχει τις μεταβλητές των αντοχών σε κάμψη των μελών και στοχεύει στην ελαχιστοποίηση τους μέσω του σχεδιασμού ελαχίστου βάρους. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναπτύσσεται το σύνολο των ανωτέρω παραμέτρων που ελήφθησαν υπόψη στο πρόβλημα καθώς και η μητρωϊκή μορφή με την οποία εισήχθησαν στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Επιπλέον, επειδή η επίλυση του προβλήματος απαιτεί την εισαγωγή γραμμικών σχέσεων και περιορισμών παρατίθεται στο ίδιο κεφάλαιο η διαδικασία με την οποία γραμμικοποιήθηκε η επιφάνεια διαρροής και οι αντίστοιχοι περιορισμοί που προέκυψαν και η γραμμική σχέση που συνδέει τα μεγέθη αντοχών σε αξονική δύναμη και κάμψη, ώστε η πρώτη να ληφθεί υπόψη κατά την επίλυση, ανάλογα με την κατηγορία διατομής που επιθυμείται να λάβει το κάθε μέλος. Επίσης, παρουσιάζεται η μεθοδολογία με την οποία προέκυψαν, τα διαγράμματα αλληλεπίδρασης των φορέων με τις βέλτιστες διατομές όπως εκτιμήθηκαν από την επίλυση του προβλήματος και οι πλαστικές αρθρώσεις που αναπτύχθηκαν στα μέλη τους για την δεδομένη φόρτιση για την οποία σχεδιάστηκαν και η διαδικασία επιλογής των πρότυπων διατομών που ικανοποιούν τις απαιτήσεις αντοχής των μελών.

Στο 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο παρουσιάζονται εκτενώς τα αποτελέσματα του ανωτέρου σχεδιασμού ενδεικτικά για ένα μεταλλικό πλαίσιο από το σύνολο αυτών που μελετήθηκαν. Οι αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν εφαρμόστηκαν σε πλαίσια για τα οποία θεωρήθηκε πως τα εξωτερικά υποστυλώματα, το σύνολο των εσωτερικών υποστυλωμάτων και οι δοκοί κάθε ορόφου αποτελούν ομάδες που λαμβάνουν την κοινή βέλτιστη διατομή όπως προκύπτει από τον σχεδιασμό. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε σχέση με τον μηχανισμό κατάρρευσης των πλαισίων δεν ήταν ικανοποιητικά. Προκειμένου να περιοριστούν οι σχηματιζόμενες πλαστικές αρθρώσεις και να παρουσιάσουν οι υπό μελέτη φορείς τον επιθυμητό μηχανισμό αστοχίας που υποδεικνύεται από τον Ε.Α.Κ. ακολούθησε μια διαδικασία

διερεύνησης η οποία παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό. Εισήχθησαν στο πρόγραμμα νέοι παράμετροι που αφορούσαν τον περιορισμό των αξονικών εντάσεων στις δοκούς και την ενίσχυση των αντοχών των μελών που δεν ήταν επιθυμητό να παρουσιάσουν πλαστικές αρθρώσεις κατά την κατάρρευσή τους. Αυτό επετεύχθη είτε με την εισαγωγή ορίων στα αναπτυσσόμενα εντατικά μεγέθη των δοκών, είτε αφαιρώντας τον νόμο της αλληλεπίδρασης από τις δοκούς των πλαισίων ή μετασχηματίζοντας την αντικειμενική συνάρτηση. Σε κάποιες από τις ανωτέρω περιπτώσεις παρουσιάστηκε βελτίωση των αποτελεσμάτων, ωστόσο ο σχεδιασμός που υποδεικνύεται από τη λύση του προβλήματος δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί.

Η ανωτέρω διερεύνηση κατέδειξε πως είναι απαραίτητο να διατηρηθεί ο αρχικός σχεδιασμός του οποίου τα αποτελέσματα κρίθηκε απαραίτητο να συγκριθούν ως προς την ορθότητα τους μέσω της ανελαστικής ανάλυσης που πραγματοποιεί το πρόγραμμα sap. Η εισαγωγή των φορέων στο SAP πραγματοποιήθηκε για πλαίσια τα οποία λαμβάνουν τις βέλτιστες πρότυπες διατομές. Για να είναι αποτελεσματική η σύγκριση των φορέων εφαρμόστηκε στα πλαίσια με τις πρότυπες διατομές η διαδικασία της οριακής ανάλυσης. Μέσω του γραμμικού προγραμματισμού εκτιμήθηκε η υπεραντοχή που διαθέτουν οι φορείς λόγω της επιλογής πρότυπων διατομών, τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται και ο μηχανισμός κατάρρευσης τους. Η οριακή ανάλυση πραγματοποιήθηκε λαμβάνοντας υπόψη το στατικό θεώρημα και αποτέλεσε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στο οποίο αναζητήθηκε το μέγιστο φορτίο που δύνανται να παραλάβουν οι κατασκευές, λαμβάνοντας ως δεδομένες τις πρότυπες διατομές που αποτελούν τα μέλη του φορέα. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι παράμετροι του προβλήματος βελτιστοποίησης καθώς και αυτοί που εισήχθησαν στο sap ώστε τα αποτελέσματα των δυο μεθόδων να είναι συγκρίσιμα.

Η εφαρμογή των δύο αναλύσεων, τα αποτελέσματα τους παρουσιάζονται στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο της παρούσης διπλωματικής. Ωστόσο, επειδή σε κάποιους φορείς αναπτύχθηκε μη επιθυμητός μηχανισμός κατάρρευσης μέσω των δύο μεθόδων εισήχθησαν επιπλέον κατασκευαστικοί παράμετροι στην διαδικασία σχεδιασμού. Με τους περιορισμούς αυτούς απαιτήθηκε η προκύπτουσα διατομή των εξωτερικών υποστυλωμάτων να μην είναι μικρότερη των εσωτερικών και εξαλείφθηκαν οι περιπτώσεις όπου η επιλογή πρότυπων διατομών που ικανοποιούν τις απαιτήσεις ελάχιστων αντοχών των μελών, οδήγησε τα μέλη για τα οποία απαιτούνταν διαφορετική δυσκαμψία να λάβουν κοινές πρότυπες διατομές. Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν, οι κατασκευές οι οποίες σχεδιάστηκαν ώστε τα μέλη τους να λαμβάνουν κοινή διατομή ανάλογα με το είδος του δομικού στοιχείου που αποτελούν ανέπτυξαν τον επιθυμητό πλάγιο μηχανισμό κατάρρευσης.

Η σύγκριση και η ανάλυση των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται στο 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο της εργασίας. Τα συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας αφορούν στον επιτυχή προσδιορισμό του μηχανισμού κατάρρευσης των υπό μελέτη φορέων μέσω των δύο αναλύσεων, στην σύγκριση των αποτελεσμάτων τους και στην αδυναμία του συνόλου των παραμέτρων που εισήχθησαν στο πρόβλημα να διασφαλίσουν τον επιτυχή σχεδιασμό για το σύνολο των πλαισίων. Επιπλέον, διατυπώνεται η εκτίμηση για τον ασφαλέστερο τρόπο σχεδιασμού των

πλαισίων όπως προέκυψε από τις αναλύσεις. Αναφέρονται πιθανά αίτια για τις αβεβαιότητες που προέκυψαν και προτείνονται εναλλακτικοί τρόποι προσέγγισης για περαιτέρω διερεύνηση οι οποίοι ίσως βελτιώσουν την διαδικασία σχεδιασμού



## ABSTRACT

The present thesis aimed at defining the optimal design of members which are part of metallic frames, which are also under stress of side forces. Such forces simulate seismic actions that are imposed on the constructions. The design of the frames was determined by the solution of a linear programming problem. The algorithm that had to be developed for this purpose, was based on plastic analysis of frames. This analysis seeks to determine the maximum number of plastic hinges that can be developed on the constructions up to their failure under the implementation of maximum load.

To implement the optimization problem, it is necessary to define the *variables* and their limits, the *restrictions* and the *objective function* that determines how these receive their minimum value. For the current study, the static theorem is used. The *variables* of the problem consist of the internal forces that are developed at the members of the frames and their bending resistance. The *restrictions* refer to the equilibrium between the developed internal and imposed external forces in each frames' grade of freedom and the leakage surface, which is applied on the members of the structures. A further restriction that is introduced in the problem is that in each joint the total bending resistance of columns should be at least 30% greater than that of the beams. The *objective function* includes the variables of bending resistance of members and aims to minimize them through the minimum weight design. In the 2<sup>nd</sup> chapter, the whole of the above aspects that have been taken into account are presented as is the way in which these were introduced into the linear programming problem. Moreover, due to the fact that the yield surface's restrictions and the relations between the axial and bending members' resistance should be linear, the way they were modified, is also elaborated. The methodology to generate the interaction charts for the estimated variables and the developed plastic hinges is also presented as is the approach that was followed to select from standard sections' table, the one that meets each member's strength requirements.

In Chapter 3, the results of the above design are analytically presented, for one (indicative) metal frame of all those which were studied. The members of the frames are separated into groups which have the common optimum cross section as it was resulted by the solution of the problem. The different groups are the external and internal columns and the beams of each floor. The results obtained related to the frame's collapse and were not satisfactory. In order to limit the developed plastic hinges and acquire the desirable failure mechanism for the constructions which is indicated from E.A.K, further research was conducted, which is also presented in this chapter. New parameters were introduced to the algorithm, to reduce the developed axial forces on the beams and to reinforce the strength of the members which were not desirable to present hinges at the collapse of the frames. This was achieved either by introducing limits to the internal axial forces of beams, or by removing the restrictions of yield surface from frames' beams or by transforming the

objective function of the problem. In some of the cases the results were improved, but the design specified by the solution of the problem couldn't be applied on structures.

The above process showed that it was necessary to maintain the design which was presented in the 2<sup>nd</sup> chapter. However, it is obligatory to compare the results of this design with those that comes from push over analysis which was performed by the SAP program. The members of the frames that were introduced into this program are consist of optimal standard sections as these resulted by the solution of the design problem. In order to take into account the overstrength that these frames acquire by the standard sections and compare the results of the two methods, it was necessary to develop another linear problem which is called *limit load analysis for frame structures*. In the 4<sup>th</sup> chapter, the parameters of the optimization problem and those which were introduced to the program to render comparable the results of the two methods are presented.

The results of the two methods are presented at the 5<sup>th</sup> chapter. It was noticed that both methods led to the conclusion that some frames developed undesirable collapse mechanism and for that reason, additional construction restrictions were introduced in the design process. On the basis of the results obtained, the structures that were designed in such a way that their columns and their beams designate two groups that their members are consisted by common cross-sections, developed the desired collapse mechanism.

The 6<sup>th</sup> chapter includes a comparative assessment of the the two methods and the present thesis conclusions, which may be outlined as follows (a) both the above methods identify, successfully, the mechanism of collapse for the studied frames (b) the parameters that were introduced to the problem, did not achieve to ensure a successful design for all the frames and (c) the safest way of designing frames is being assessed. Finally, possible causes for the uncertainties that have been encountered while performing the research for this thesis are mentioned and alternative approaches for further research that might improve the design process are suggested.

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας ολοκληρώνεται ο κύκλος σπουδών μου στην σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Με την ευκαιρία αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή μου Δρ. Βλάσση Κουμούση που μου ανέθεσε αυτή την εργασία καθώς και για την καθοδήγηση του καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Μωυσίδη Αργύρη για την υποστήριξη του σχετικά με την ανάπτυξη των προγραμμάτων στην matlab και τον υποψήφιο διδάκτορα Καπογιάννη Ιωάννη για τις συμβουλές του σε σχέση με το λογισμικό sap. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την βοήθεια και την στήριξη που μου παρείχαν καθ'όλη τη διάρκεια της ακαδημαϊκής μου πορείας και για όλο το διάστημα εκπόνησης της παρούσας εργασίας .

Κοντοέ Μαρία

Νοέμβριος 2016





## 1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

### 1.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Το επάγγελμα Μηχανικών αφορά στην αξιοποίηση και εφαρμογή των αρχών της φύσης για την κατασκευή χρήσιμων αντικειμένων. Ένας μηχανολόγος σχεδιάζει ένα νέο κινητήρα, ένας πολιτικός μηχανικός σχεδιάζει μια γέφυρα ή ένα κτίριο, ένας χημικός μηχανικός σχεδιάζει μια χημική διαδικασία και ένας ηλεκτρολόγος μηχανικός σχεδιάζει έναν υπολογιστή ή ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα.

Για πολλούς λόγους, ένας εκ των οποίων είναι η ανταγωνιστική αγορά, ένας μηχανικός δεν θα πρέπει να ενδιαφέρεται μόνο σε ένα σχέδιο το οποίο να λειτουργεί σε ονομαστικό επίπεδο, αλλά και να αποτελεί τον καλύτερο σχεδιασμό. Η διαδικασία του προσδιορισμού του καλύτερου σχεδιασμού ονομάζεται *βελτιστοποίηση*. με αυτό τον τρόπο είναι δυνατόν να επιτευχθεί ο σχεδιασμός του μικρότερου εναλλάκτη θερμότητας που επιτυγχάνει την επιθυμητή μεταβίβαση θερμότητας, ή μπορεί να σχεδιαστεί η γέφυρα με το χαμηλότερο κόστος για συγκεκριμένη τοποθεσία.

Στην παρούσα εργασία συζητείται μια προσέγγιση βελτιστοποίησης, βασισμένη σε υπολογιστή, δεδομένων των δυνατοτήτων επεξεργασίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών που επιτρέπουν την αξιολόγηση πολλών συνδυασμών σχεδιασμού. Επιπλέον, οι εξελιγμένοι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται, επιτρέπουν την αποτελεσματική αναζήτηση του 'βέλτιστου'.

Για την αξιοποίηση αυτού του τρόπου βελτιστοποίησης είναι αναγκαία [1]:

- Ένα ποσοτικό μοντέλο (*quantitative model*) για τον προσδιορισμό των απαντήσεων που μας ενδιαφέρουν. Η διαμόρφωση ενός έγκυρου και ακριβούς μοντέλου του προβλήματος σχεδιασμού αποτελεί το πιο σπουδαίο βήμα στην βελτιστοποίηση. Δεν είναι ασυνήθιστο να αφιερώνεται το 90% της προσπάθειας σχεδιασμού (βελτιστοποίηση) στην ανάπτυξη και την επικύρωση του ποσοτικού μοντέλου.
- Ο προσδιορισμός μεταβλητών (*variables*), που να μπορούν ελεύθερα να προσαρμοσθούν και των οποίων οι τιμές προσδιορίζονται από τον υπεύθυνο σχεδιασμού με συγκεκριμένη τεκμηρίωση. Μερικές φορές αναφέρονται επίσης ως βαθμοί ελευθερίας (*degrees of freedom*) του μοντέλου του υπολογιστή. Η ελευθερία στην τροποποίηση των μεταβλητών σχεδιασμού οδηγεί στην έννοια του χώρου σχεδιασμού (*design space*). Αν έχουμε τέσσερις μεταβλητές σχεδιασμού, τότε έχουμε ένα τετραδιάστατο χώρο στον οποίο μπορούμε να διερευνήσουμε για τον καλύτερο σχεδιασμό.
- Εκτός από τις μεταβλητές σχεδιασμού, θα πρέπει επίσης προσδιορισθούν και τα *κριτήρια της βελτιστοποίησης*. Τα κριτήρια αυτά έχουν δύο μορφές: στόχοι και περιορισμοί. Οι Στόχοι αντιπροσωπεύουν τους στόχους που είναι επιθυμητό να

μεγιστοποιηθούν ή να ελαχιστοποιηθούν. *Περιορισμοί* αποτελούν τα όρια θα πρέπει εντός των οποίων θα πρέπει οριοθετείται η λύση, για την περίπτωση περιορισμών ανισότητας, ή τιμές-στόχοι που πρέπει να πληρούνται σε περίπτωση περιορισμών ισότητας. Συλλογικά καλούμε τις λειτουργίες του σχεδιασμού τους στόχους και τους περιορισμούς συναρτήσεις σχεδιασμού (*design functions*) .

Συνοπτικά, η προσέγγιση της βελτιστοποίησης με ηλεκτρονικούς υπολογιστές, αναφέρεται στη χρήση αλγορίθμων για την αναζήτηση στο χώρο του σχεδιασμού ενός μοντέλου υπολογιστή. Οι μεταβλητές σχεδιασμού ρυθμίζονται από έναν αλγόριθμο, προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι και να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί

## 1.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΦΟΡΕΑ

Η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι διαδεδομένη στο πεδίο δραστηριοτήτων του πολιτικού μηχανικού. Τα υφιστάμενα προγράμματα σχεδιασμού, συμβάλλουν στον προσδιορισμό του φέροντος οργανισμού μιας κατασκευής με την ταχεία ανάλυση και την διαστασιολόγηση, στη συνέχεια, του υπό μελέτη φορέα.

Στην προσπάθεια διεύρυνσης και εξέλιξης των ανωτέρω δυνατοτήτων, αναπτύσσεται μια νέα γενιά αλγορίθμων με στόχο την εύρεση βελτιωμένων λύσεων στο πρόβλημα, οι οποίες συμμορφώνονται με κάποια επιπλέον κριτήρια και περιορισμούς που τίθενται στις αρχικές απαιτήσεις σχεδιασμού. Οι αλγόριθμοι αυτοί εκτελούν μια επαναληπτική διαδικασία ανάλυσης και σχεδιασμού του φορέα, τροποποιώντας αυτόματα τις διαστάσεις των μελών του σύμφωνα με τους κανόνες που ορίζονται από τον χρήστη.

Σε κάθε βήμα της διαδικασίας αυτής οι παράμετροι που μεταβάλλουν τις τιμές τους αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού. Το εύρος διακύμανσης των μεταβλητών που αποτελούν το πεδίο λύσεων του προβλήματος καλείται χώρος σχεδιασμού (*design space*). Το σύνολο των λύσεων που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος ορίζουν το υποσύνολο των αποδεκτών λύσεων (*feasible solutions*).

Με στόχο την κατάλληλη βαθμονόμηση των αποδεκτών λύσεων, γίνεται χρήση μιας συνάρτησης η οποία, συσχετίζοντας τις μεταβλητές, θέτει έναν επιπλέον περιορισμό σύμφωνα με κάποιο κριτήριο που ορίζει ο χρήστης. Η μαθηματική αυτή σχέση καλείται αντικειμενική συνάρτηση (*objective function*) και ορίζει ουσιαστικά τον στόχο που πρέπει να επιτευχθεί κατά την επίλυση του προβλήματος (σχεδιασμός ελαχίστου βάρους ή ελαχίστου κόστους). Με αυτό τον τρόπο, οι αποδεκτές λύσεις που ικανοποιούν το εν λόγω κριτήριο, οδηγούν στο βέλτιστο σχεδιασμό μιας κατασκευής σύμφωνα με την αντικειμενική συνάρτηση που έχει επιλεγεί.

Με την διαδικασία αυτή γίνεται προσπάθεια να επιλυθούν τρεις κατηγορίες προβλημάτων που αφορούν στο βέλτιστο σχεδιασμό κατασκευών. Το είδος του προβλήματος που αντιμετωπίζεται κάθε φορά καθορίζεται από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Τα είδη των προβλημάτων είναι τα εξής:

- Βέλτιστη Διαστασιολόγηση - Sizing optimization: στόχος του είναι η βέλτιστη διαστασιολόγηση των διατομών των μελών του φορέα με βάση κάποια αντικειμενική συνάρτηση
- Βελτιστοποίηση Σχήματος - Shape optimization: στόχος του είναι ο προσδιορισμός του σχήματος, δηλαδή των συντεταγμένων των κόμβων ενός ραβδωτού ή επιφανειακού φορέα
- Βελτιστοποίηση διάταξης - Topology optimization: στόχος του είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης διάταξης συνδεσμολογίας ενός ραβδωτού φορέα ή κατά πόσο θα εμφανίζεται υλικό σε ένα τμήμα ενός επιφανειακού φορέα.

Η παραμετρική διεύρυνση που περιγράφηκε και αποσκοπεί στον βέλτιστο σχεδιασμό μιας κατασκευής δεν είναι δυνατόν να λειτουργήσει ως θεωρία σχεδιασμού καθώς υπολείπεται σημαντικά στη φάση του προκαταρκτικού σχεδιασμού. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο τελικός σχεδιασμός της κατασκευής μέσω τέτοιων μεθόδων είναι βέλτιστος σε σχέση με κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο που έχει τεθεί και η διερεύνηση των λύσεων που προσφέρει περιορίζεται από την αυθαίρετη επιλογή των μεταβλητών σχεδιασμού και το εύρος διακύμανσης τους. Επομένως, κρίσιμο θέμα για την επίλυση του προβλήματος αποτελεί η επιλογή των μεταβλητών και της αντικειμενικής συνάρτησης. Επίσης, η αναγωγή του σχεδιασμού σε μαθηματικό πρόβλημα περιορίζει τη διερεύνηση σε οντότητες που μπορούν να αποτιμηθούν μόνο μέσω μιας συνεχούς ή διακριτής μεταβλητής.

### 1.2.1 ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού η διερεύνηση αφορά στη μορφή του υπό μελέτη φορέα, στον τρόπο καταπόνησης του και στην συμπεριφορά του. Επομένως, το πρόβλημα αυτό περιγράφεται από παραμέτρους οι οποίες καθορίζουν το υλικό και τις μηχανικές του ιδιότητες, τη συνδεσμολογία και τη διάταξη του φορέα, τις φορτίσεις και τους συνδυασμούς τους καθώς και τους ελέγχους αντοχής και λειτουργικότητας.

Στο σύνολο αυτών των παραμέτρων ανάλογα με τις απαιτήσεις σχεδιασμού επιλέγονται οι μεταβλητές που επιδιώκεται να βελτιστοποιηθούν. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται το διάνυσμα  $[x]$  του οποίου οι τιμές μεταβάλλονται σε κάθε βήμα της διαδικασίας του αλγορίθμου εντός του πεδίο ορισμού τους που καθορίζεται εξ αρχής. Ιδιαίτερη σημασία για τον προσδιορισμό των ορίων των μεταβλητών είναι τα αποτελέσματα να οδηγούν σε λύσεις που έχουν φυσική σημασία. Η μέθοδος αυτή δίνει μια οικογένεια διαφορετικών αποδεκτών λύσεων της κατασκευής.

#### **Συνεχείς και Διακριτές μεταβλητές**

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται είτε ανήκουν σε ένα πεδίο ορισμού και λαμβάνουν οποιαδήποτε τιμή εντός αυτού, είτε είναι ένα σύνολο συγκεκριμένων τιμών όπως για παράδειγμα οι πίνακες πρότυπων διατομών. Συνήθως το διάνυσμα των μεταβλητών είναι μικτό και αποτελείται και από τα δύο είδη μεταβλητών. Στην πράξη όμως προκειμένου να διευκολυνθεί η υπολογιστική διαδικασία θεωρούνται όλες οι μεταβλητές συνεχείς και κατά την

τελική επίλυση ανάλογα με τη φύση της παραμέτρου επιλέγεται η πλησιέστερη διακριτή τιμή, οπού απαιτείται. Με τον τρόπο αυτόν δεν εξασφαλίζεται η βέλτιστη επίλυση του προβλήματος.

### Όρια Μεταβλητών

Όπως έχει αναφερθεί για την επίλυση του προβλήματος επιλέγονται τα όρια μέσα στα οποία παίρνουν τιμές οι μεταβλητές. Η επιλογή των ορίων είναι περίπλοκη και γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται το φυσικό νόημα των μεταβλητών σχεδιασμού. Προκύπτει ένα σύνολο λύσεων εντός των ανεκτών ορίων και προσδιορίζεται η βέλτιστη.

#### 1.2.2 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Επιπλέον της διαδικασίας οριοθέτησης των μεταβλητών είναι απαραίτητο να διατυπωθούν και οι περιορισμοί του προβλήματος. Με αυτό τον τρόπο περιγράφεται το πρόβλημα και οι συνθήκες στις οποίες οφείλουν να ανταποκρίνονται οι λύσεις του. Μορφώνονται οι σχέσεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν, το σύνολο ή κάποιες μεταβλητές σχεδιασμού. Οι περιορισμοί αυτοί μπορούν να έχουν άμεση ή πεπλεγμένη μορφή και διατυπώνονται μέσω σχέσεων ισότητας ή ανισότητας. Στόχος αυτής της διαδικασίας είναι να περιοριστεί η συμπεριφορά του προβλήματος. Το σύνολο των περιορισμών οφείλει να ικανοποιείται ώστε ο σχεδιασμός να θεωρείται επιτρεπτός. Οι ανισοτικοί περιορισμοί που ικανοποιούνται ως ισότητα για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών αποτελεί το σύνολο των ενεργών περιορισμών του προβλήματος για τον σχεδιασμό αυτό.

Δεν είναι απαραίτητο να είναι ενεργοί όλοι οι περιορισμοί, για κάθε σχεδιασμό. Υπάρχει δε πάντα η πιθανότητα, οι περιορισμοί που διατυπώνονται να ορίζουν ένα κενό χώρο λύσεων.

Τέλος, σημειώνεται ότι, κατά την διατύπωση των συναρτήσεων περιορισμού κρίνεται απαραίτητη η κανονικοποίηση τους. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται, για την αποφυγή λαθών που τυχόν προκύψουν, από την αξιοποίηση μεγεθών με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Για την κανονικοποίηση, οι περιορισμοί διαιρούνται με τις αντίστοιχες επιτρεπόμενες τιμές ώστε να είναι συγκρίσιμες με τη μονάδα.

#### 1.2.3 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Οι ανωτέρω περιορισμοί διαμορφώνουν ένα πεδίο αποδεκτών λύσεων του προβλήματος. Για να προσδιοριστεί μεταξύ αυτών ο ζητούμενος, βέλτιστος σχεδιασμός διατυπώνεται μια συνάρτηση η οποία συμβάλει στην ιεράρχηση των λύσεων. Το κριτήριο αυτό ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση. Με βάση αυτή, πραγματοποιείται σύγκριση των διαφόρων πιθανών σχεδιασμών που προκύπτουν και επιλέγεται αυτός για τον οποίο ελαχιστοποιείται η τιμή της συνάρτησης.

##### ✓ Μαθηματική Διατύπωση

Το ζητούμενο του προβλήματος είναι να προσδιοριστεί το διάνυσμα  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , ώστε να ελαχιστοποιηθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  και να ικανοποιηθούν οι:

- ✓  $k$  περιορισμοί ισότητας  $h_j = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = 1, 2, \dots, k$
- ✓  $m$  περιορισμοί ανισότητας  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$
- ✓ περιορισμοί των μεταβλητών σχεδιασμού  $x_r^l \leq x_r \leq x_r^u, r = 1, 2, \dots, n$

Προκειμένου να έχει λύση το πρόβλημα ο αριθμός των περιορισμών ισότητας είναι απαραίτητο να είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών,  $k \leq n$ .

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης εντάσσονται σε δύο κατηγορίες, γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού. Η διάκριση τους οφείλεται στη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών. Αν οι συναρτήσεις  $f, h_j, g_i$  είναι γραμμικές σχέσεις των μεταβλητών σχεδιασμού τότε το πρόβλημα είναι γραμμικού προγραμματισμού (linear programming problem), ενώ εάν έστω μια από αυτές τις συναρτήσεις είναι μη γραμμική τότε ο χρήστης καλείται να αντιμετωπίσει πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού (non-linear programming problem).

### 1.3 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Η τυπική μορφή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού διατυπώνεται ως εξής:

Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση:  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

με μεταβλητές σχεδιασμού:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

η οποία υπόκειται σε περιορισμούς ισότητας της μορφής:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

1-1

Το σύνολο των συντελεστών των εκφράσεων  $a_{ij}, b_i, c_i$  καθώς και οι μεταβλητές σχεδιασμού ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς.

Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο οι εκφράσεις αυτές να διατυπωθούν με μητρική μορφή ως ακολούθως:

- Το σύνολο των  $n$  μεταβλητών ορίζει το διάνυσμα  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  διαστάσεων  $n \times 1$ .
- Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ορίζουν ένα μητρώο διαστάσεων  $1 \times n$ ,  $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ .

- Οι περιορισμοί του προβλήματος εκφράζονται με ορθογωνικό μητρώο  $A$  διαστάσεων  $m \times n$ , το οποίο περιέχει τους συντελεστές των μεταβλητών, και με το διάνυσμα  $b$   $m \times 1$ , το οποίο της τιμές που βρίσκονται στο δεξί μέλος της ισότητας.

Με την ανωτέρω αναγωγή που περιγράφηκε προκύπτει το έξης πρόβλημα:

Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση  $c^T x$ , η οποία υπόκειται στους περιορισμούς  $[A]x = b$  και  $x \geq 0$ .

### Ανισοτικοί Περιορισμοί

Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι δυνατόν να εμφανίζονται περιορισμοί με τη μορφή ανισοτήτων.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

1-2

Στην περίπτωση αυτή προκειμένου το πρόβλημα να διατυπωθεί με την τυπική μορφή γραμμικού προγραμματισμού εισάγονται στις ανισοτικές σχέσεις επιπλέον  $m$  μεταβλητές-ελλείμματα (slack variables), οι οποίες μετατρέπουν τις σχέσεις αυτές σε ισότητες. Επομένως το πρόβλημα αποκτά την εξής μορφή:

Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση:  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

που υπόκειται στους περιορισμούς:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m$$

και  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

και  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

1-3

Θεωρώντας την ανωτέρω αναγωγή το πρόβλημα έχει  $m+n$  άγνωστες μεταβλητές και αποκτά την τυπική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Σε μητρική μορφή το μητρώο  $A$  των συντελεστών των περιορισμών, διαστάσεων  $m \times (n+m)$  διαχωρίζεται σε  $[A, I]$ , όπου το  $A$  είναι διαστάσεων  $m \times n$  και  $I$  το μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων  $m \times m$ .

Στην περίπτωση που οι περιορισμοί είναι της μορφής:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \underline{1-4}$$

προκειμένου να διατυπωθεί το πρόβλημα στη τυπική του μορφή χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές πλεονάσματα (surplus variables),  $y_i \geq 0$  οι οποίες μετατρέπουν τους περιορισμούς σε ισότητες με των κάτωθι τρόπο:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - y_i = b_i \quad \underline{1-5}$$

Επιπλέον, εάν οι ανισοτικές σχέσεις πολλαπλασιαστούν με τον συντελεστή  $-1$ , οι ελλειμματικές μεταβλητές μετατρέπονται σε πλεονάσματα, εφόσον μεταβάλλεται η φορά της ανίσωσης και αντίστροφα. Με αυτόν τον τρόπο, επιτρέπεται η αναγωγή του προβλήματος πάντοτε σε τυπικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

### Μεταβλητές του προβλήματος

Όπως έχει αναφερθεί, οι μεταβλητές  $x_i$  του προβλήματος οφείλουν να είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Στην περίπτωση που η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται επιδιώκεται η απαλοιφή της ελεύθερης μεταβλητής και ενός περιορισμού που την περιλαμβάνει. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η επίλυση του περιορισμού αυτού ως προς την μεταβλητή, δεδομένου ότι ο συντελεστής της διαφέρει του μηδενός. Επομένως, η μεταβλητή αυτή εκφράζεται σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων μεταβλητών και μιας σταθεράς και αντικαθίσταται με αυτή τη μορφή σε όλους τους υπόλοιπους περιορισμούς. Με την εφαρμογή της μεθοδολογίας που περιγράφηκε προκύπτει το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού  $n-1$  μεταβλητών και  $m-1$  περιορισμών. Ακολούθως της επίλυσης του προβλήματος αυτού προσδιορίζεται μέσω της γραμμικής σχέσης και η τιμή της ελεύθερης μεταβλητής.

### Βασικές λύσεις

Θεωρείται το σύστημα ισοτήτων  $[A]\{x\} = \{b\}$ , όπου

$[A]$ : μητρώο διαστάσεων  $m \times n$

$\{x\}$ : διάνυσμα διαστάσεων  $n \times 1$

$\{b\}$ : διάνυσμα διαστάσεων  $m \times 1$

Το σύστημα αυτό έχει νόημα εάν ο αριθμός των μεταβλητών  $n$  είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των περιορισμών  $m$ , ώστε να υπάρχει δυνατότητα επιλογής μεταξύ των μεταβλητών. Στην περίπτωση που  $n=m$  τότε επιλύεται το αλγεβρικό σύστημα και προκύπτει μια τιμή για κάθε μεταβλητή. Οι λύσεις αυτές εάν αντικατασταθούν στην αντικειμενική συνάρτηση δίνουν την μοναδική και ελάχιστη τιμή της. Απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυση του συστήματος είναι οι εξισώσεις να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Για την λύση του συστήματος θεωρούνται από το σύνολο των μεταβλητών  $n$ , τυχασία  $m$  μεταβλητές οι οποίες θεωρούνται μη μηδενικές. Εν συνεχεία, από το μητρώο  $[A]$  διακρίνονται  $m$  στήλες με τους αντίστοιχους συντελεστές των επιλεγόμενων μεταβλητών και δημιουργείται ένα μητρώο  $[B]$ , διαστάσεων  $m \times m$  το οποίο αποκαλείται βάση. Επιλύεται το σύστημα  $[B]\{x_B\} = \{b\}$  και προκύπτει το διάνυσμα  $\{x_B\}$  των βασικών μεταβλητών του προβλήματος, διαστάσεων  $m \times 1$ . Οι υπόλοιπες μεταβλητές του προβλήματος που δεν ελήφθησαν υπόψη στην ανωτέρω διαδικασία θεωρούνται μηδενικές. Με αυτόν τον τρόπο το διάνυσμα των μεταβλητών του προβλήματος αποκτά την μορφή  $\{x\} = [\{x_B\}, \{0\}]$  και αποτελεί μια λύση του αρχικού συστήματος  $[A]\{x\} = \{b\}$ . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνόμενη, θεωρώντας κάθε φορά διαφορετικό διάνυσμα βασικών μεταβλητών, οδηγεί σε πληθώρα λύσεων για το πρόβλημα. Ο αριθμός των βασικών λύσεων εξαρτάται από τον πλήθος των συνδυασμών των μεταβλητών που είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν και δίνεται από την σχέση:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad 1-6$$

όπου  $m$  είναι σε κάθε βήμα ο αριθμός των επιλεγόμενων στηλών εκ των  $n$  στηλών του συνολικού μητρώου  $[A]$ .

Στα διανύσματα των βασικών μεταβλητών που προκύπτουν από την ανωτέρω διαδικασία είναι πιθανόν να εμφανίζονται κάποιες μηδενικές λύσεις. Το διάνυσμα αυτό αποκαλείται εκφυλισμένη βασική λύση (degenerate basic solution).

Επιπλέον, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη ότι σε ένα τυπικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το σύνολο των λύσεων οφείλει να είναι μη αρνητικό ώστε το διάνυσμα που προκύπτει να αποτελεί αποδεκτή λύση του προβλήματος (feasible solution). Αν το βασικό διάνυσμα  $\{x_B\}$  ικανοποιεί την προϋπόθεση αυτή τότε αναφέρεται ως βασική αποδεκτή λύση του προβλήματος (basic feasible solution).

### 1.3.1 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στο γραμμικό προγραμματισμό επιδιώκεται η διαγωνιοποίηση του συστήματος των εξισώσεων μέσω της απαλοιφής Gauss, ως προς κάποια βασική αποδεκτή λύση. Στο πλαίσιο αυτό αντικαθίσταται μια εξίσωση με ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο της συν ένα γραμμικό



συνδυασμό άλλων εξισώσεων του συστήματος και επιτυγχάνεται η παρακάτω τριγωνική μορφή:

$$x_1 + y_{1,m+1}x_{m+1} + y_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + y_{1,n}x_n = y_{10}$$

$$x_2 + y_{2,m+1}x_{m+1} + y_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + y_{2,n}x_n = y_{20}$$

.

.

.

$$x_m + y_{m,m+1}x_{m+1} + y_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + y_{m,n}x_n = y_{m0}$$

1-7

Οι μεταβλητές  $x_1, x_2, \dots, x_m$  θεωρούνται βασικές, ενώ οι υπόλοιπες θεωρούνται μη-βασικές. Επομένως, προκύπτει η λύση του συστήματος ως εξής:  $x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, \dots, x_m = y_{m0}$  και  $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0$

Στη συνέχεια, προκειμένου να λάβει τη θέση μιας μη βασικής μεταβλητής μια βασική πρέπει να γίνει ο συντελεστής της μονάδα. Έστω ότι η βασική μεταβλητή βρίσκεται στην στήλη  $p$  και η μη βασική στην στήλη  $q$ , τότε εάν  $y_{pq} \neq 0$ , διαιρείται η γραμμή  $p$  με αυτόν τον συντελεστή. Ακολούθως, από τις υπόλοιπες γραμμές του συστήματος αφαιρούνται κατάλληλα πολλαπλάσια της γραμμής  $p$  ώστε να απαλοιφεί η νέα βασική μεταβλητή από αυτές. Οι συντελεστές του νέου προβλήματος ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}, \quad i \neq p$$

$$y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}}$$

1-8

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις περιστροφής και το στοιχείο  $y_{pq}$ , στοιχείο περιστροφής.

### 1.3.2 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Στόχος της μεθόδου είναι ο προσδιορισμός της βασικής, αποδεκτής λύσης για την οποία ελαχιστοποιείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Προς τούτο, επιπλέον της τροποποίησης των περιορισμών, που περιγράφηκε ανωτέρω, τροποποιείται και η αντικειμενική συνάρτηση, ώστε να μηδενιστούν ο συντελεστές των βασικών μεταβλητών.

1.3.2.1 ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Ο πίνακας συντελεστών του προβλήματος διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m & \alpha_{m+1} & \alpha_{m+2} & \dots & \alpha_n & b \\
 \hline
 1 & 0 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \dots & y_{1,n} & y_{10} \\
 0 & 1 & \dots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \dots & y_{2,n} & y_{20} \\
 \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
 \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \dots & y_{m,n} & y_{m0} \\
 \hline
 0 & 0 & \dots & 0 & r_{m+1} & r_{m+2} & \dots & r_n & -z_0
 \end{array}
 \tag{1-9}$$

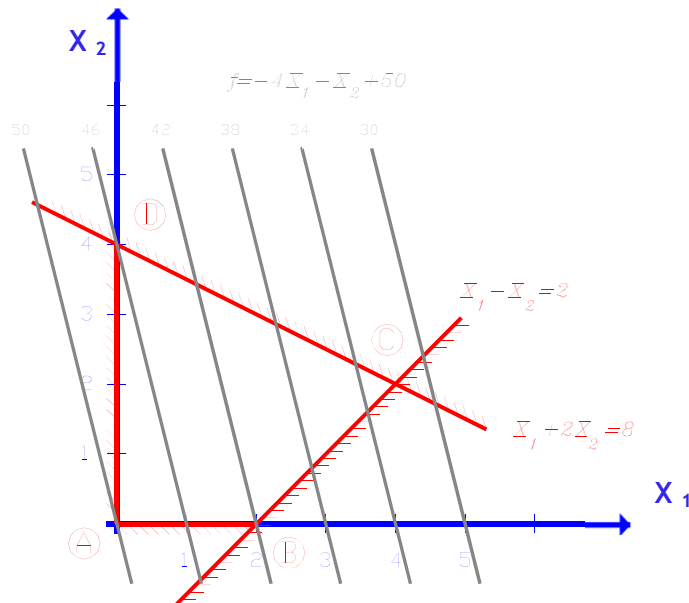
Ο συντελεστής  $z_0$  που παρουσιάζεται στον πίνακα δίνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη συγκεκριμένη βασική λύση.

Οι συντελεστές  $r_j$  ονομάζονται συντελεστές σχετικού κόστους και εκφράζουν την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μη βασικές μεταβλητές. Εάν όλοι οι συντελεστές αυτοί έχουν θετική τιμή τότε η λύση που έχει προκύψει είναι η βέλτιστη. Ρόλος των συντελεστών, είναι ο προσδιορισμός της μη βασικής μεταβλητής που θα μετατραπεί σε βασική.

Επιλέγεται κάθε φορά, η μεταβλητή της οποίας ο δείκτης  $r$  έχει την μικρότερη αρνητική τιμή, καθώς επιτυγχάνεται μεγαλύτερη μείωση στο αποτέλεσμα της αντικειμενικής συνάρτησης. Εν συνεχεία, προσδιορίζεται η βασική μεταβλητή που θα μετατραπεί σε μη βασική. Για τον σκοπό αυτό υπολογίζονται  $\frac{y_{i0}}{y_{iq}}, i=1,2,\dots,m$ , για όλους τους θετικούς συντελεστές  $y_{iq}$ , και επιλέγεται ο μικρότερος ως στοιχείο περιστροφής. Εάν κανένας από τους συντελεστές  $y_{iq}$  δεν είναι θετικός τότε το πρόβλημα είναι μη φραγμένο. Σε αντίθετη περίπτωση εφαρμόζεται η διαδικασία περιστροφής και προκύπτει η νέα βασική αποδεκτή λύση του προβλήματος καθώς και η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

### 1.3.3 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το σύνολο των ανισοτικών περιορισμών  $m$  και οι καρτεσιανοί άξονες θετικών τιμών των μεταβλητών ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, οριοθετούν μια κλειστή επιφάνεια  $m$  διαστάσεων στην οποία κινείται και λαμβάνει αποδεκτές τιμές η αντικειμενική συνάρτηση. Εντός του πολυέδρου, η αντικειμενική συνάρτηση «κινείται» με τη μορφή ισοϋψών μέχρι να λάβει την ελάχιστη τιμή της. Ενδεικτικά παρουσιάζεται το γράφημα ενός προβλήματος βελτιστοποίησης δύο μεταβλητών.

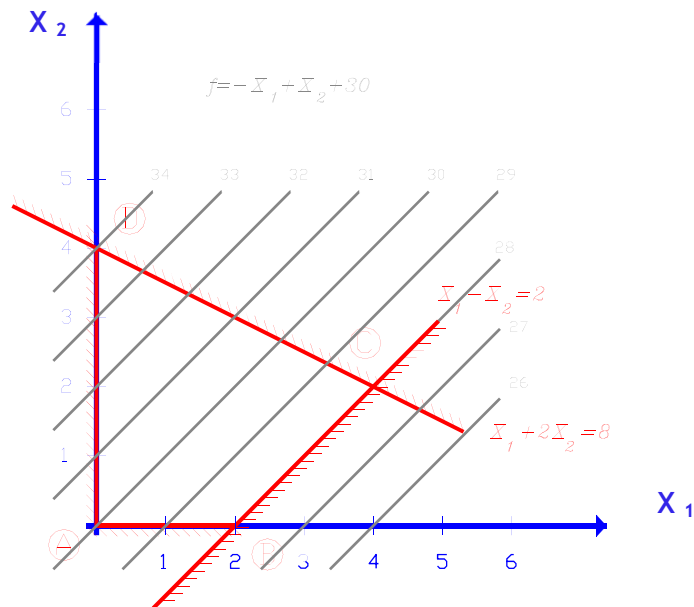


Εικόνα 1-1: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με μοναδική λύση

- **Μοναδική Λύση:** Από το γράφημα προκύπτει ότι η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει αποδεκτές τιμές εντός του πολυέδρου ABCD και ότι η ελάχιστη τιμή της εμφανίζεται όταν η ισοϋψής της βρεθεί στην θέση C. Στο πρόβλημα αυτό υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα  $\{x\}$  για το οποίο ελαχιστοποιείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

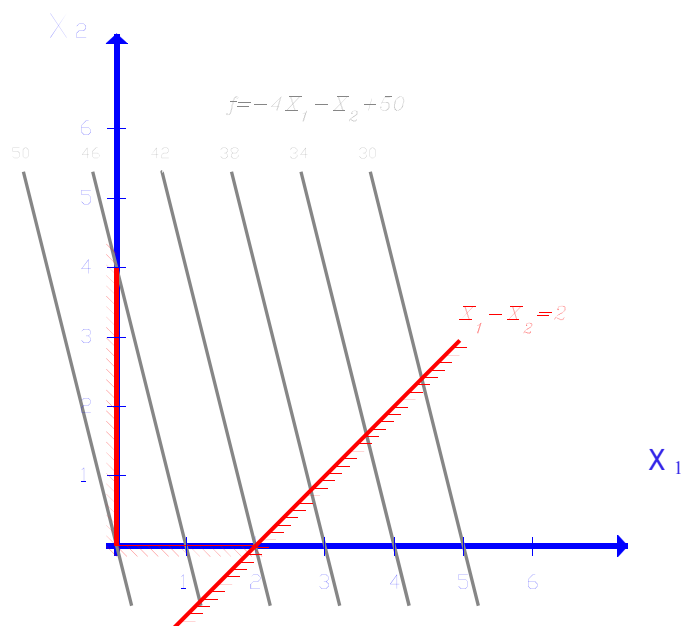
Είναι δυνατόν όμως, ανάλογα με την επιφάνεια σχεδιασμού και την φορά της αντικειμενικής συνάρτησης, να υπάρχουν άπειρες λύσεις ή και καμία αποδεκτή λύση του προβλήματος. Ακολουθεί η συνοπτική ανάλυση των εν λόγω περιπτώσεων.

- Μη μοναδική λύση: Στην περίπτωση αυτή όπως παρουσιάζεται στην εικόνα, η κλίση των ισοϋψών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλη προς το σύνορο κάποιου εκ των περιορισμών. Επομένως, οποιοσδήποτε σχεδιασμός επί του συνόρου του περιορισμού αποτελεί λύση του προβλήματος



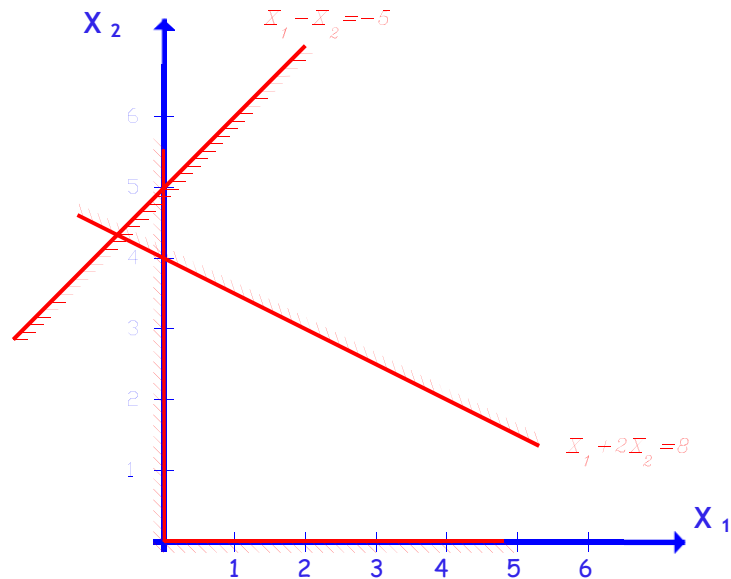
Εικόνα 1-2: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με μη-μοναδική λύση

- Απεριόριστη λύση: Εμφανίζεται όταν οι περιορισμοί δεν δημιουργούν μια κλειστή επιφάνεια στην οποία οριοθετούνται οι τιμές των μεταβλητών το προβλήματος. Επομένως, εάν μια εκ των μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα τότε και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται διαρκώς.



Εικόνα 1-3: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού με απεριόριστη λύση

- Μη επιτρεπτή λύση: Στην περίπτωση αυτή οι ανισοτικές σχέσεις δημιουργούν ένα χώρο λύσεων για τον οποίο δεν υπάρχει σχεδιασμός που να ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς, δηλαδή δεν υπάρχει λύση.



Εικόνα 1-4: Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού χωρίς λύση

#### 1.3.4 ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

Στις περιπτώσεις που η αρχική επιτρεπτή λύση, που απαιτείται, δεν είναι άμεσα διαθέσιμη από τον πίνακα simplex, μπορεί να αξιοποιηθεί η μέθοδος *Simplex δύο φάσεων* που χρησιμοποιεί επαυξημένο πίνακα περιορισμών και επιλύει ένα βοηθητικό Π.Γ.Π. για να βρει μια αρχική βασική εφικτή λύση. Με την συγκεκριμένη τεχνική γίνεται προσπάθεια μετακίνησης σε μια βασική εφικτή λύση η οποία δεν θα περιλαμβάνει τεχνητές μεταβλητές. Αν κάτι τέτοιο είναι δυνατό, τότε η συγκεκριμένη βάση θα περιέχει μόνο μεταβλητές από το αρχικό πρόβλημα οι οποίες θα αντιπροσωπεύουν τη ζητούμενη αρχική βασική εφικτή λύση του.

##### Φάση I

Με την εν λόγω μέθοδο, μετασχηματίζουμε το Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού (Π.Γ.Π). σ' ένα ισοδύναμο που περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα. Οι περιορισμοί του νέου Π.Γ.Π. διαμορφώνονται από τους περιορισμούς του αρχικού στους οποίους προστίθενται μη αρνητικές τεχνητές μεταβλητές. Η εισαγωγή των τεχνητών μεταβλητών διευρύνει το πολύεδρο της εφικτής περιοχής του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε.

Μια εφικτή λύση του αναθεωρημένου προβλήματος είναι εφικτή και για το δοσμένο - αρχικό πρόβλημα, μόνον αν η τιμή όλων των τεχνητών μεταβλητών είναι μηδέν. Με στόχο την εξάλειψη των τεχνητών μεταβλητών ορίζεται τεχνητή αντικειμενική συνάρτηση (artificial cost function) η οποία είναι το άθροισμα του συνόλου των τεχνητών μεταβλητών και η οποία για ένα πρόβλημα  $n$  μεταβλητών και  $m$  περιορισμών γράφεται:

$$W = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}$$

Η ως άνω συνάρτηση πρέπει να ελαχιστοποιηθεί σύμφωνα με τους περιορισμούς:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

Με στόχο την διαμόρφωση της αντικειμενικής συνάρτησης έτσι ώστε να αποτελείται μόνο από τις μη βασικές μεταβλητές σχεδιασμού (σύμφωνα με τις απαιτήσεις του γραμμικού προγραμματισμού), οι βασικές μεταβλητές της  $W$  αντικαθίστανται με την βοήθεια των περιορισμών. Για παράδειγμα, η βασική μεταβλητή  $x_{n+1}$ , σύμφωνα με τον πρώτο περιορισμό διαμορφώνεται σε:

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n$$

Η συνάρτηση  $w$  έτσι όπως διαμορφώνεται μετά τις αντικαταστάσεις εξαρτάται μόνο από τις  $n$  μη βασικές μεταβλητές όπως ακολουθεί:

$$w = \sum_{i=1}^m b_i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}x_j$$

Με την αναγωγή του προβλήματος στην κανονική του μορφή ξεκινά η Φάση I, κατά την οποία η πραγματική αντικειμενική συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως περιορισμός. Καθορίζεται η μη βασική μεταβλητή που θα μετατραπεί σε βασική από τον περισσότερο αρνητικό συντελεστή της τελευταίας γραμμής (τεχνητή συνάρτηση) του πίνακα simplex. Στο τέλος της Φάσης I, όλες οι τεχνητές μεταβλητές έχουν γίνει μη βασικές, συνεπώς έχουν μηδενική τιμή. Έτσι, η τεχνητή συνάρτηση  $w$  γίνεται  $w=0$ , αφού αποτελεί άθροισμα των τεχνητών μεταβλητών.

### Φάση II

Όταν γίνει  $w=0$ , έχουμε μεταπηδήσει σε μια κορυφή του πραγματικού πολύεδρου, οπότε συνεχίζουμε στη Φάση II χωρίς την  $w$ , προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσουμε την  $f$ .

#### 1.3.5 Ο ΔΥΙΣΜΟΣ ΣΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αντιστοιχεί ένα άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο είναι το *δυϊκό* του (dual) Το αρχικό πρόβλημα ονομάζεται *πρωτογενές* (primal). Δεδομένου ότι η λύση του ενός μπορεί να οδηγήσει στην λύση του άλλου προσφέρεται μεγάλη ευελιξία στην επίλυση προβλημάτων αφού αρκεί να λυθεί το πιο εύκολο από τα δύο.

Μεταξύ του πρωτογενούς και του δυϊκού προβλήματος υφίστανται συγκεκριμένες συσχετίσεις:

- Ο αριθμός των δυϊκών μεταβλητών είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτογενών περιορισμών. Αντίστοιχα, ο αριθμός των πρωτογενών μεταβλητών είναι ίσος με τον αριθμό των δυϊκών περιορισμών.
- Η μεγιστοποίηση της πρωτογενούς αντικειμενικής συνάρτησης αντικαθίσταται με την ελαχιστοποίηση της δυϊκής αντικειμενικής συνάρτησης.
- Κάθε επιτρεπτή λύση του πρωτογενούς προβλήματος «φράσσει» την αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού προβλήματος.
- Οι συντελεστές  $ic$  της πρωτογενούς αντικειμενικής συνάρτησης γίνονται σταθεροί όροι των δυϊκών περιορισμών. Αντίστοιχα, οι σταθεροί όροι των πρωτογενών περιορισμών γίνονται συντελεστές της δυϊκής αντικειμενικής συνάρτησης,  $ib$
- Το μητρώο των συντελεστών  $A$  των πρωτογενών περιορισμών είναι το ανάστροφο του μητρώου  $A$  των δυϊκών περιορισμών.
- Στο πρωτογενές πρόβλημα οι περιορισμοί είναι ανισότητες «τύπου  $\leq$ » ενώ στο δυϊκό είναι «τύπου  $\geq$ ».

### 1.3.5.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΩΤΟΓΕΝΟΥΣ ΛΥΣΗΣ ΑΠΟ ΔΥΙΚΗ ΛΥΣΗ

#### Ασθενές Θεώρημα Δυισμού

Για κάθε  $x$  και  $y$  (δυναμικές) λύσεις του πρωτογενούς και δυϊκού προβλήματος αντίστοιχα ισχύει:

$$z_p(x) \leq f_d(y) \quad \text{1-10}$$

Τα διαστήματα που λαμβάνουν τιμές οι αντικειμενικές συναρτήσεις είναι δυνατόν να εκτείνονται μέχρι το άπειρο προς τα αριστερά ή δεξιά για το πρωτογενές και δυϊκό πρόβλημα αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα η συνάρτηση  $z_p$  μπορεί να λάβει τιμές μέχρι  $-\infty$  ενώ, η  $f_d$  μέχρι  $+\infty$



Εικόνα 1-5: Πιθανή διάταξη τιμών αντικειμενικής συνάρτησης πρωτογενούς και δυϊκού προβλήματος

Στις περιπτώσεις που οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων δεν εμφανίζουν κενό μεταξύ τους, η βέλτιστη λύση του πρωτογενούς προβλήματος ταυτίζεται με τη βέλτιστη λύση του δυϊκού.

#### Ισχυρό Θεώρημα Δυισμού

Δεδομένου ότι κατά την παραγωγή της βέλτιστης λύσης ενός πρωτογενούς προβλήματος με την μέθοδο simplex, παράγεται και η βέλτιστη λύση του δυϊκού του με αξιοποίηση της σχέσης  $f_d(x) = z_p(y)$ , στην περίπτωση εκείνη που διανύσματα  $x$  και  $y$  αποτελούν επιτρεπτές λύσεις και του πρωτογενούς και του δυϊκού προβλήματος και ισχύει και η σχέση  $f_d(x) =$

$z_p(y)$ , τότε τα συγκεκριμένα διανύσματα συνιστούν τις βέλτιστες λύσεις και για τα δύο προβλήματα.

- Με το *Ισχυρό Θεώρημα Δυισμού*, διασφαλίζεται βέλτιστη λύση στο δυικό πρόβλημα όταν το πρωτογενές έχει βέλτιστη λύση χωρίς ύπαρξη χάσματος μεταξύ των τιμών της ανικειμενικής τους συνάρτησης
- Στην περίπτωση όμως που το πρωτογενές πρόβλημα έχει απεριόριστη λύση, το δυικό του δεν έχει λύση και αντίστροφα (*Ασθενές Θεώρημα Δυισμού*)

### 1.3.5.2 ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΓΕΝΟΥΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΔΥΪΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Η λύση του πρωτογενούς προβλήματος μπορεί να προκύψει απ' ευθείας από τον πίνακα simplex του δυικού προβλήματος και αντίστροφα.

Στην περίπτωση που το δυικό πρόβλημα ενός πρωτογενούς επιλύεται με την μέθοδο simplex, τότε:

- η τιμή της  $i$  πρωτογενούς μεταβλητής ισούται με τον συντελεστή της βοηθητικής μεταβλητής που αντιστοιχεί στον  $i$  δυικό περιορισμό στην τελευταία γραμμή του (τελικού) πίνακα
- ο συντελεστής που αντιστοιχεί σε μη-βασική, δυική μεταβλητή, ισούται με την τιμή της βοηθητικής μεταβλητής του αντίστοιχου πρωτογενούς περιορισμού.

## 1.4 ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Οι μαθηματικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν συμβάλλουν στον βέλτιστο σχεδιασμό των κατασκευών. Μέσω της διαδικασίας της βελτιστοποίησης μελετώνται η τελική κατάσταση του υπό μελέτη πλαισίου, το οριακό φορτίο που είναι δυνατόν να αναλάβει, οι βέλτιστες διατομές των μελών του και πλήθος άλλων παραμέτρων του προβλήματος. Για τον προσδιορισμό των ανωτέρω μεταβλητών εφαρμόζεται η θεωρία της πλαστικής ανάλυσης.

### 1.4.1 ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η πλαστική ανάλυση λαμβάνει υπόψη τις επιδράσεις της μη γραμμικότητας του υλικού κατά τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων των δράσεων επί του φορέα. Εφαρμόζεται στην περίπτωση που τα μέλη της κατασκευής διαθέτουν επαρκή στροφική ικανότητα στις θέσεις όπου δημιουργούνται πλαστικές αρθρώσεις.

Οι αρθρώσεις αυτές ορίζουν διατομές των οποίων η αντοχή εξαντλείται υπό την επίδραση πλευρικών και κατακόρυφων φορτίων. Η γωνία στροφής της διατομής που οδηγεί στην διαρροή και την αστοχία της προσδιορίζεται από τον ΚΑΝΕΠΕ και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της.

Τα μέλη τα οποία υπόκεινται σε πλαστική ανάλυση ακολουθούν τον νόμο τάσεων-παραμορφώσεων ελαστικό-απολύτως πλαστικό. Στην περιοχή όπου η αναπτυσσόμενη τάση στη διατομή είναι μικρότερη της τάσης διαρροής, η διατομή ακολουθεί το νόμο του Hooke.



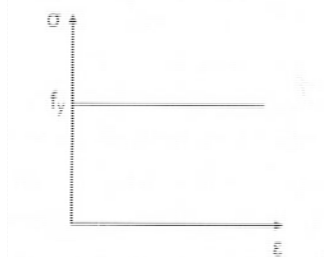
Στην περίπτωση που το υλικό έχει διαρρεύσει η διατομή παραμορφώνεται υπό σταθερή τάση,  $\sigma = f_y$ . Εάν η τάση μειωθεί σε οποιοδήποτε σημείο της πλαστικής περιοχής, η καμπύλη αποφόρτισης είναι ευθεία γραμμή παράλληλη στην αρχική γραμμή  $\sigma$ - $\epsilon$  και η κλίση της ισούται με το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

Με την παραδοχή της απόλυτης πλαστικότητας, αμελούνται τα αποτελέσματα της κράτυνσης μετά την υπέρβαση του ορίου της τάσης διαρροής. Με αυτή την υπόθεση εξασφαλίζεται μεγαλύτερη ασφάλεια κατά τον σχεδιασμό.

Έστω μια διατομή ενός φορέα που υπόκειται σε κάμψη. Εάν, η καμπτική ροπή που αναπτύσσεται είναι μικρή, η τάση και η παραμόρφωση μεταβάλλονται γραμμικά καθ' ύψος της διατομής. Με την αύξηση της φόρτισης του φορέα αυξάνει και η ροπή, οπότε η τάση διαρροής αναπτύσσεται σε μια από τις ακραίες ίνες του πέλματος, ενώ με επιπλέον αύξηση της ροπής η τάση διαρροής φτάνει και στην ακραία ίνα του άλλου πέλματος. Αυξάνοντας επιπλέον τη δρώσα ροπή η διαρροή εξαπλώνεται στο εσωτερικό της διατομής μέχρι οι δυο πλαστικές ζώνες να συναντηθούν. Σε αυτή την περίπτωση, η διατομή αναπτύσσει την πλήρη πλαστική αντοχή της. Η τιμή της ροπής αυτής όταν ενεργεί στην διατομή, την μετατρέπει σε πλαστική άρθρωση. Στην πραγματικότητα, μετατρέπεται σε πλαστική άρθρωση μια μικρή περιοχή της δοκού, εκατέρωθεν της διατομής που υφίσταται την πλήρη πλαστική ροπή.

Με την αύξηση της φόρτισης του φορέα εμφανίζεται διαδοχικά διαρροή και σε άλλες διατομές. Με την διαδικασία αυτή δημιουργείται ένας ικανός αριθμός πλαστικών αρθρώσεων και ο φορέας μετατρέπεται σε μηχανισμό, ο οποίος καταρρέει υπό οποιοδήποτε επιπλέον φορτίο. Η πλαστική ανάλυση συνεπάγεται ανακατανομή των τάσεων καθ' ύψος της διατομής αλλά και ανακατανομή των ροπών κατά μήκος του φορέα. Μέσω αυτής της διαδικασίας σχηματίζονται οι απαιτούμενες πλαστικές αρθρώσεις που οδηγούν στη μετατροπή της κατασκευής σε πλήρη πλαστικό μηχανισμό.

Κατά την εξάπλωση της διαρροής σε μία διατομή, η τιμή της δρώσας καμπτικής δυσκαμψίας της διατομής,  $EI$ , μειώνεται σταδιακά. Στην περίπτωση της εφαρμογής του απόλυτα πλαστικού μοντέλου συμπεριφοράς, η δρώσα τιμή του μέτρου ελαστικότητας του διαρρέοντος υλικού είναι μηδέν.



Εικόνα 1-6: Απόλυτα Πλαστική Συμπεριφορά Υλικού [3]

Με την δημιουργία αυτής της πλαστικής άρθρωσης ο φορέας, σε συνθήκες επιπλέον φόρτισης, θα συμπεριφερθεί σαν να είχε άρθρωση στη θέση αυτή.

Οι διατομές που βρίσκονται εκατέρωθεν των πλαστικών αρθρώσεων μπορούν να υποστούν οποιαδήποτε σχετική στροφή όπως σε μια κοινή άρθρωση. Σε μια κοινή άρθρωση, όμως, η στροφή πραγματοποιείται με μηδενικές επιβαλλόμενες ροπές, σε αντίθεση με την στροφή των πλαστικών αρθρώσεων που συνδέεται με δρώσα ροπή διαρκώς ίση με την πλήρη πλαστική ροπή της διατομής. Οι πλαστικοποιημένες διατομές, παρόλη την επιπλέον αύξηση του φορτίου, δεν μπορούν να παραλάβουν μεγαλύτερη ροπή αλλά στρέφονται με αποτέλεσμα να στρέφεται όλος ο φορέας σε σχέση με τη αρχική του θέση και να αυξάνεται η ροπή με την οποία καταπονούνται τα υπόλοιπα τμήματα του μέλους. Με την διαδικασία της ανακατανομής που περιγράφηκε, δημιουργούνται νέες πλαστικές αρθρώσεις στην κατασκευή, όταν η δρώσα ροπή εξισωθεί πλήρη πλαστική ροπή μιας διατομής.

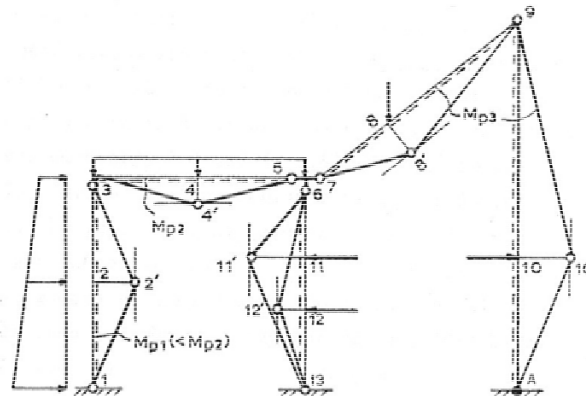
Κάθε φορά που στο πλαίσιο εμφανίζεται μια νέα πλαστική όρθωση μειώνεται η υπερστατικότητα του κατά ένα βαθμό μέχρι να μετατραπεί σε μηχανισμό και να καταρρεύσει.

#### 1.4.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΥ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ

Με την πλαστική ανάλυση προσδιορίζονται οι διατομές που πλαστικοποιούνται και οδηγούν στην κατάρρευση του φορέα καθώς και τα φορτία που οδηγούν σε αυτή. Στην διαδικασία αυτή τα επιβαλλόμενα φορτία λαμβάνονται υπόψη με ένα φορτικό συντελεστή  $\lambda$ , και εκτιμάται η μέγιστη τιμή του κατά την αστοχία. Εξετάζονται μεμονωμένα οι πιθανοί μηχανισμοί κατάρρευσης των μελών του φορέα καθώς και συνδυασμοί τους. Κρίσιμος, κρίνεται ο μηχανισμός για τον οποίο ο φορτικός συντελεστής μεγιστοποιείται. Οι πιθανοί μηχανισμοί κατάρρευσης μιας κατασκευής εξαρτώνται από τον τρόπο επιβολής των φορτίων και παρουσιάζονται στην συνέχεια.

##### 1.4.2.1 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΔΟΚΟΥ

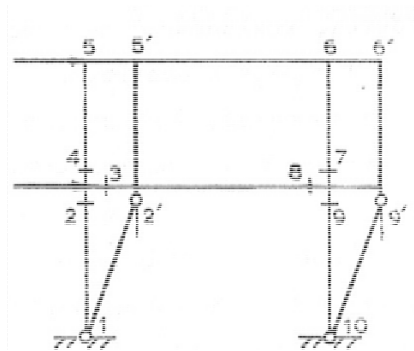
Εμφανίζεται λόγω της επιβολής κατακόρυφου φορτίου επί του μέλους το οποίο προσαυξάνεται μέσω του  $\lambda$  ώστε να δημιουργηθούν πλαστικές αρθρώσεις στα άκρα του μέλους και εκατέρωθεν του σημείου επιβολής του συγκεντρωμένου ή κατανεμημένου φορτίου όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σκαρίφημα:



Εικόνα 1-7: Μηχανισμοί Τύπου Δοκού

### 1.4.2.2 ΠΛΑΓΙΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ

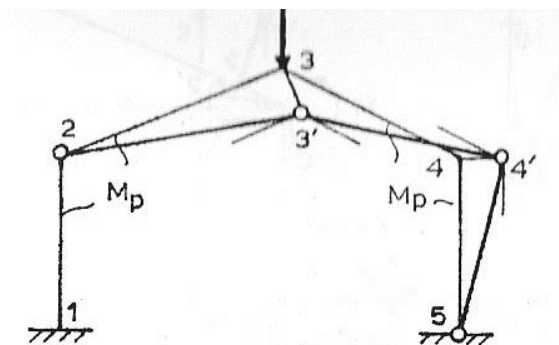
Εμφανίζεται στα κατακόρυφα μέλη μιας κατασκευής (υποστυλώματα) υπό την επίδραση πλευρικών φορτίων. Στην περίπτωση αυτή, κατά την μεγιστοποίηση του φορτίου, τα υποστυλώματα του πλαισίου εμφανίζουν πλαστικές αρθρώσεις στην βάση και στην κορυφή τους.



Εικόνα 1-8: Πλαίσιο  $m$  Ορόφων με  $m$  Πλευρικούς Μηχανισμούς

### 1.4.2.3 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΟΥ ΖΥΓΩΜΑΤΟΣ

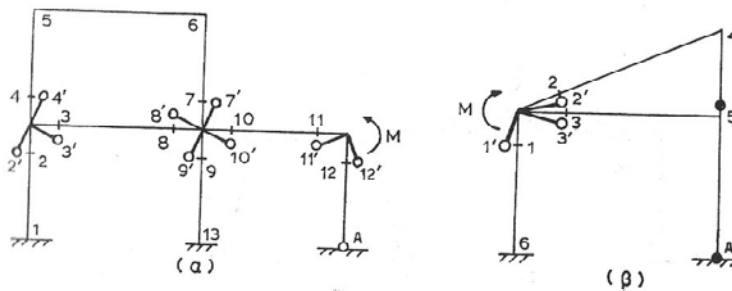
Εμφανίζεται σε φορείς που αποτελούνται από δυο μη παράλληλα μέλη τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με ένα τρίτο. Σε αυτή την περίπτωση η κατασκευή διαθέτει ένα πόλο περιστροφής, ο οποίος ορίζεται από τα δυο μη παράλληλα στοιχεία, και δύναται να στραφεί περί αυτόν εφ' όσον δρουν επ' αυτής φορτία που την εξαναγκάζουν. Όλα τα μέλη στρέφονται είτε κάθετα στην αρχική τους θέση είτε παράλληλα σε αυτή. Όταν η στροφή των μελών λάβει τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της τότε παρουσιάζονται στα άκρα τους πλαστικές αρθρώσεις και λαμβάνεται η τιμή του συντελεστή  $\lambda$ .



Εικόνα 1-9: Τεθλασμένο Ζύγωμα Τριών Ράβδων

1.4.2.4 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΚΟΜΒΟΥ

Λαμβάνεται υπόψη στο στάδιο επαλληλίας των ανωτέρω ανεξάρτητων μηχανισμών. Εμφανίζεται όταν σε ένα κόμβο συντρέχουν περισσότερα από δύο μέλη και πιθανά ενεργεί επ' αυτού εξωτερική ροπή. Εάν τα μέλη εμφανίζουν ίδια αντοχή τότε στρέφονται με τη ίδια γωνία. Σε διαφορετική περίπτωση ο κόμβος έχει δυνατότητα να στραφεί κατά την μέγιστη επιτρεπόμενη γωνία του μέλους με την μικρότερη αντοχή.



Αφού προσδιοριστούν όλοι οι ανεξάρτητοι μηχανισμοί του φορέα, εφαρμόζεται για κάθε έναν τους η αρχή των δυνατών έργων και διατυπώνεται η χαρακτηριστική εξίσωση ισορροπίας τους.

$$\lambda * \sum_{i=1}^n P_i * \delta_i = \sum_{j=1}^m M_{pj} \theta_j \tag{1-11}$$

όπου,

$P_i$ : φορτίο το οποίο προκαλεί τον υπό μελέτη μηχανισμό

$\delta_i$ : η μετατόπιση που προκαλεί η φόρτιση στον φορέα

$M_{pj}$ : πλαστική ροπή στη θέση των κρίσιμων διατομών του φορέα

\*Κρίσιμες θεωρούνται οι διατομές του φορέα που προβλέπεται να αναπτύξουν τοπικά ακρότατες ροπές κάμψης και αποτελούν πιθανές θέσεις πλαστικών αρθρώσεων.

$\theta_j$ : επιβαλλόμενη στροφή του μέλους στη θέση της κρίσιμης διατόμης

Με την επαλληλία των εξισώσεων αυτών για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των επιμέρους μηχανισμών προσδιορίζεται σε κάθε περίπτωση ο φορτικός συντελεστής. Ο συνδυασμός για τον οποίο η τιμή του λ μεγιστοποιείται συνιστά τον μηχανισμό αστοχίας του φορέα και μέσω αυτού προσδιορίζονται οι θέσεις στις οποίες δημιουργούνται πλαστικές αρθρώσεις. Κρίνεται απαραίτητο για τον υπολογισθέντα μεγεθυντικό συντελεστή να ελεγχθεί η δρώσα ροπή και σε άλλες κρίσιμες διατομές του φορέα καθώς υπάρχει πιθανότητα να έχουν πλαστικοποιηθεί.

### 1.4.3 ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Η οριακή ανάλυση υπό τη θεώρηση τελείως πλαστικής συμπεριφοράς μπορεί να διατυπωθεί ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αξιοποιώντας το στατικό και το κινηματικό θεώρημα. Στο πλαίσιο του γραμμικού προγραμματισμού τα δύο αυτά θεωρήματα ορίζουν το πρωτογενές και δυϊκό πρόβλημα προς επίλυση για τον προσδιορισμό της βέλτιστης ζητούμενης λύσης.

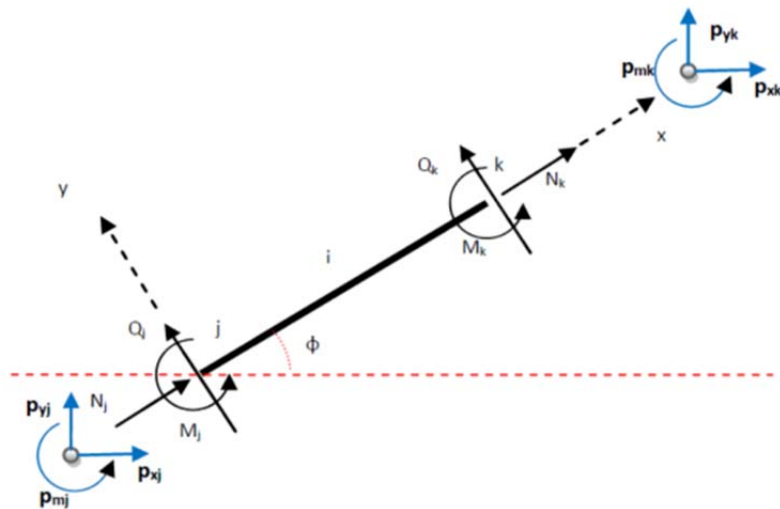
#### 1.4.3.1 ΣΤΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Με τη χρήση του στατικού θεωρήματος, το πρόβλημα του σχεδιασμού ανάγεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και προσδιορίζεται η οριακή λύση του, λαμβάνοντας υπόψη τη θεωρία της πλαστικής ανάλυσης. Παρά το γεγονός ότι ο φορέας είναι υπερστατικός, αγνοείται η ικανοποίηση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων, η οποία λαμβάνεται υπόψη, με την ανάλυση, σύμφωνα με το κινηματικό θεώρημα.

Για τον προσδιορισμό του προβλήματος απαιτείται η εισαγωγή της αντικειμενικής συνάρτησης για την οποία αναζητείται η βέλτιστη τιμή καθώς και ένα πλήθος γραμμικών περιορισμών με μητρική μορφή  $[A]\{x\} = \{b\}$ . Στην περιγραφή μεθοδολογία, η αντικειμενική συνάρτηση είναι η μεγιστοποίηση του φορτικού συντελεστή  $\lambda$ . Οι περιορισμοί ισότητας του προβλήματος είναι το μητρώο ισορροπίας του φορέα και οι ανισοτικοί, τα διαγράμματα αλληλεπίδρασης των διατομών. Λόγω των γραμμικών περιορισμών δημιουργείται πολύγωνο η διαστάσεων στην επιφάνεια του οποίου η αντικειμενική συνάρτηση έχει την δυνατότητα να λάβει όποια τιμή βρίσκεται εντός αυτής, ώστε να βρει αυτήν για την οποία μεγιστοποιείται.

##### 1.4.3.1.1 ΕΥΡΕΣΗ ΜΗΤΡΩΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΦΟΡΕΑ

Η μεθοδολογική προσέγγιση [3], βασίζεται στην παραδοχή ότι δεδομένου ότι ένας φορέας ισορροπεί και κάθε μέλος του ισορροπεί. Αρχικά υπολογίζεται το μητρώο ισορροπίας κάθε μέλους της κατασκευής που θεωρείται αμφίπακτο και στο οποίο δρουν μόνο επικόμβιες φορτίσεις. Στην περίπτωση που μια δοκός φέρει συγκεντρωμένο φορτίο σε κάποιο σημείο της τότε ορίζονται δύο μέλη ώστε να θεωρηθεί η φόρτιση επικόμβια ενώ, εάν φέρει κατανεμημένη φόρτιση ανάγεται στους κόμβους ως αντιδράσεις στήριξης ( $ql/2$ ) και γενικότερα ως ισοδύναμες δράσεις λόγω της κατανεμημένης φόρτισης. Στο άκρο κάθε μέλους λαμβάνονται τα τρία θετικά προσημασμένα εντατικά μεγέθη (ροπή, αξονική, τέμνουσα) και η ισορροπία αυτών:



Εικόνα 1-11: Ακραίες Δράσεις Αμφίπακτου Στοιχείου

$$N_i + N_j = 0$$

$$Q_i + Q_j = 0$$

$$M_i + M_j + Q_i * L = 0 \text{ (L: μήκος της δοκού)}$$

Επιλύονται οι ανωτέρω σχέσεις ως προς  $N_i, M_i, M_j$ , γράφονται σε μητρώικη μορφή και λαμβάνεται το μητρώο  $\{A\}$  ακραίων δράσεων στο τοπικό σύστημα διαστάσεων  $6 \times 1$ .

$$\begin{Bmatrix} N_j \\ Q_j \\ M_j \\ N_k \\ Q_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L_i & 1/L_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L_i & -1/L_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_j \\ M_j \\ M_k \end{Bmatrix}$$

$$\{A\}^i = [E] * \{s\}^i \text{ όπου}$$

$[E]$ :  $(6 \times 3)$  μητρώο συσχέτισης όπως προκύπτει από την ανωτέρω επίλυση

$\{s\}^i$ :  $(3 \times 1)$  περιλαμβάνει τα μεγέθη ως προς τα οποία επιλύθηκαν οι αρχικές εξισώσεις και αποτελεί το διάνυσμα βασικών δράσεων των μελών

Προκειμένου να ληφθεί το μητρώο  $\{A\}^i$  του κάθε μέλους στο καθολικό σύστημα πολλαπλασιάζεται με το μητρώο μετασχηματισμού  $[T]$  διαστάσεων  $6 \times 6$  σύμφωνα με τη σχέση:

$$\{\bar{A}\}^i = [T] * \{A\}^i \text{ ή}$$

$$\{\bar{A}\}^i = \begin{Bmatrix} P_{xj} \\ P_{yj} \\ P_{mj} \\ P_{xk} \\ P_{yk} \\ P_{mk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_j \\ \bar{Q}_j \\ \bar{M}_j \\ \bar{N}_k \\ \bar{Q}_k \\ \bar{M}_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_j \\ Q_j \\ M_j \\ N_k \\ Q_k \\ M_k \end{Bmatrix}$$

Η γωνία  $\varphi$  ορίζεται μεταξύ των αξόνων του καθολικού και τοπικού συστήματος της ράβδου. Τα διανύσματα των ροπών παραμένουν σταθερά δεδομένου ότι είναι κάθετα στο επίπεδο και επομένως είναι ανεξάρτητα από το σύστημα των αξόνων το οποίο στρέφεται εντός επιπέδου του πλαισίου.

**Μητρώο ακραίων δράσεων στο καθολικό σύστημα:**

$$\{\bar{A}\}^i = [T] * \{A\}^i = [T] * [E] * \{s\}^i = [B] * \{s\}^i \text{ ή}$$

$$\{\bar{A}\}^i = [B] \{s\}^i = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{L} & -\frac{\sin \varphi}{L} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{L} & \frac{\cos \varphi}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{L} & \frac{\sin \varphi}{L} \\ -\sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{L} & -\frac{\cos \varphi}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{s\}^i = \begin{bmatrix} B_j^i \\ B_k^i \end{bmatrix} \{s\}^i$$

Το μητρώο  $[B^i]$ , διαστάσεων  $6 \times 3$ , θεωρείται μητρώο ισορροπίας του μέλους του φορέα και εκφράζει τις ακραίες δράσεις στα άκρα του στο καθολικό σύστημα.

Τα επιμέρους μητρώα  $[B_j^i], [B_k^i]$ , διαστάσεων  $3 \times 1$  το καθένα, εκφράζουν τις δράσεις στα άκρα  $j, k$  του κάθε μέλους στο καθολικό σύστημα.

Η αξονική δράση θεωρείται κοινή για τον κόμβο αρχής και τέλους του φορέα. Με τα ανωτέρω στοιχεία είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η ισορροπία για κάθε κόμβο εφαρμόζοντας τη σχέση

$$\sum_i [B_m^i] \{s_m^i\} = [P_m], \text{ όπου}$$

$m$ : ο αριθμός του εξεταζόμενου κόμβου

$i$ : μέλος που συντρέχει στον εξεταζόμενο κόμβο

Η σχέση αυτή εφαρμόζεται για όλα τα μέλη που συντρέχουν στον εξεταζόμενο κόμβο και τις αντίστοιχες ακραίες δράσεις τους. Το μητρώο  $[P^i]$  περιλαμβάνει τις φορτίσεις του κόμβου. Επιπλέον, η σχέση ισορροπίας ισχύει για τους μη δεσμευμένους βαθμούς ελευθερίας κάθε κόμβου. Εάν στον κόμβο ενός μέλος εμφανίζεται άρθρωση λαμβάνεται υπ' όψη στην ισορροπία του μόνο το άθροισμα των ροπών ενώ, σε ένα κόμβο στον οποίο εμφανίζεται κύλιση λαμβάνεται υπ' όψη η ροπή και η οριζόντια δύναμη.

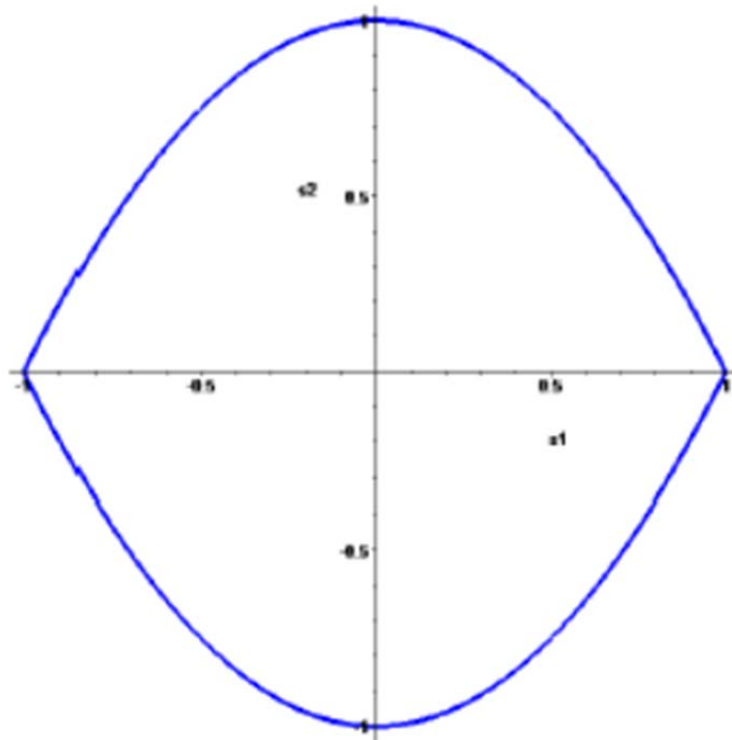
Στο μητρώο ισορροπίας  $[B]$  κάθε μέλους οι γραμμές ορίζουν τους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου. Προκείμενου να καταρτιστεί το μητρώο ισορροπίας ολόκληρου του φορέα, αθροίζονται τα στοιχεία των επιμέρους  $[B^i]$  όλων των μελών που συντρέχουν σε ένα κόμβο ανά βαθμό ελευθερίας. Το μητρώο που προκύπτει είναι διαστάσεων  $d \times 3M$ , όπου  $d$  είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του φορέα και  $M$  ο αριθμός των μελών. Στη συνέχεια, αριθμούνται οι βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου και τοποθετείται σε κάθε έναν από αυτούς η αντίστοιχη επικόμβια δράση όπου υπάρχει. Στην περίπτωση προσδιορισμού του μέγιστου φορτίου που δρα επί της κατασκευής, οι δυνάμεις τοποθετούνται στο μητρώο  $[P]$ , διαστάσεων  $d \times 1$ , ως  $\lambda \cdot P$ . Με τον τρόπο αυτό, αναζητείται η μέγιστη τιμή του συντελεστή  $\lambda$  ώστε να αστοχήσει ο φορέας. Στην συνέχεια ο αλγόριθμος δοκιμάζει άπειρους συνδυασμούς κατανομής των εντατικών μεγεθών στα μέλη του φορέα έως ότου καταλήξει σε μία στατικά αποδεκτή λύση σύμφωνη με την σχέση  $[B]\{s\} = \lambda[P]$ . Για την λύση αυτή δίνεται ένα επιτρεπτό περιθώριο απόκλισης  $\varepsilon=10^{-6}$  στην επαλήθευση της με την εξίσωση ισορροπίας.

#### 1.4.3.1.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ

Τα ενταντικά μεγέθη των μελών που προκύπτουν με την ανωτέρω διαδικασία είναι απαραίτητο να ελεγχθούν ως προς την δυνατότητα να αναληφθούν από τη διατομή στην οποία επιδρούν. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εισαγωγής στον αλγόριθμο των διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης για κάθε διατομή διαφορετικής αντοχής που αποτελεί τον φορέα. Επομένως, εισάγεται ένας επιπλέον γραμμικός περιορισμός στο πρόβλημα. Πρακτικά τα διαγράμματα αυτά προσδιορίζουν τα όρια εκτός των οποίων οι διατομές πλαστικοποιούνται υπό την επίδραση αξονικής φόρτισης και κάμψης.

Για μεταλλικά μέλη η σχέση που συνδέει τα ανηγμένα δρώντα μεγέθη αξονικών δυνάμεων και ροπών στη διατομή, ως προς την αντοχή τους καθορίστηκε από τους Masonet και Save:  $n_2 + |m| \leq 1$ .





Εικόνα 1-12: Αλληλεπίδραση Ροπών & Αξονικών Δυνάμεων (Masonnet - Ssave)

Πρακτικά το πρόγραμμα ελέγχει εάν τα μεγέθη του μητρώου  $\{s\}$  που προκύπτουν από την επαλήθευση του μητρώου ισορροπίας και τα οποία επαλληλίζονται με την σχέση  $n^2 + |m| \leq 1$  συμφωνούν με τους περιορισμούς που επιβάλλουν τα όρια του διαγράμματος αλληλεπίδρασης.

Η μορφή αυτών των διαγραμμάτων είναι μη γραμμική αλλά στο πλαίσιο του αλγορίθμου γραμμικοποιούνται με όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση.



## 2 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΦΟΡΕΑ

### 2.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί ο προσδιορισμός και η επιλογή των βέλτιστων διατομών του υπό μελέτη φορέα. Σε αντίθεση με την περίπτωση της ανάλυσης μιας υφιστάμενης κατασκευής, η οποία στοχεύει στην εύρεση της μέγιστης φόρτισης που δύναται να παραλάβει, η συγκεκριμένη αναζήτηση εστιάζει στην εύρεση διατομών που καθιστούν τον φορέα ικανό να αναλάβει δεδομένη φόρτιση, με κριτήριο τον οικονομικό και ασφαλή σχεδιασμό.

Το δεδομένο πρόβλημα βελτιστοποίησης των διατομών της κατασκευής ανήχθη σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και αναπτύχθηκε σε matlab. Η ανάπτυξη του αλγορίθμου βασίστηκε σε πρόγραμμα σχεδιασμού που είχε διαμορφωθεί στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μαθήματος «Βέλτιστος σχεδιασμός των κατασκευών» από τον Κ. Ανδριώτη Χαράλαμπο.

Η επίλυση του προβλήματος βασίστηκε στη θεωρία της πλαστικής ανάλυσης. Εφαρμόστηκε το στατικό θεώρημα, στο πλαίσιο του οποίου διατυπώθηκαν περιορισμοί που αφορούν στην ισορροπία του φορέα, στην διαρροή των διατομών του και στις κανονιστικές διατάξεις του Ευρωκώδικα 8 για την διασφάλιση της ικανοποίησης του ικανοτικού ελέγχου των κόμβων του φορέα. Τα υπό μελέτη επίπεδα πλαίσια θεωρούνται ότι αποτελούνται από μέλη τα οποία καταπονούνται μόνο από επικόμβιες φορτίσεις. Η πλαστική συμπεριφορά θεωρείται ότι εμφανίζεται σε προεπιλεγμένες θέσεις οι οποίες αποτελούν τα άκρα κάθε μέλους. Η ισορροπία αφορά στην απαραμόρφωτη κατάσταση και τα κριτήρια διαρροής είναι γραμμικοποιημένα.

### 2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

#### 2.2.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η αντικεμενική συνάρτηση αποσκοπεί στη ελαχιστοποίηση του όγκου της κατασκευής ώστε να επιτευχθεί ο σχεδιασμός ελαχίστου βάρους.

$$\min f(A) = \sum_{i=1}^n A^i l^i \quad \underline{2-1}$$

- Περιορισμοί Ισότητας:  $[B]\{s\} = [P]$  || Εξίσωση 1-2
- Περιορισμοί Ανισότητας

$$\checkmark \text{ Διάγραμμα αλληλεπίδρασης: } \frac{\partial \Phi(d^i, s^i)}{(\partial s^i) s^i} - 1 \leq 0 \quad \underline{2-2}$$

Η ανωτέρω σχέση εκφράζει την επιφάνεια διαρροής που υποδεικνύεται από τους Masonet και Save για τις μεταλλικές διατομές. Οι μεταβλητές  $d^i$  εκφράζουν την αντοχή σε κάμψη και αξονική δύναμη της εκάστοτε διατομής.

✓ Ικανοτικός έλεγχος κόμβων πλαισίου:

$$-\sum |M_{R,col}| + 1.3 \sum |M_{R,beam}| \leq 0 \quad \underline{2-3}$$

## 2.2.2 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$$d^i \geq 0$$

Τα δρώντα εντατικά μεγέθη  $\{s\}$  δεν υπόκεινται σε περιορισμό.

## 2.3 ΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στην πορεία της εργασίας υιοθετείται για τα εξεταζόμενα πλαίσια η ακόλουθη σημειολογία:

- *nel*: Αριθμός μελών του πλαισίου
- *nf*: Βαθμοί ελευθερίας του πλαισίου
- *ngr*: Αριθμός ομάδων μελών που έχουν κοινή διατομή
- *nnode*: Αριθμός κόμβων πλαισίου

### 2.3.1 ΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Στόχο της επίλυσης του προβλήματος αποτελεί ο προσδιορισμός μεταβλητών που συνίστανται σε:

- τα ανεξάρτητα δρώντα εντατικά μεγέθη επί της κατασκευής και
- οι διατομές των μελών του πλαισίου για τη φόρτιση που εισάγεται από τον μελετητή.

Επομένως, στο πέρας της ανάλυσης εκτιμάται το μητρώο  $\{s\}$  και οι αντοχές των μελών του πλαισίου.

Το μητρώο  $\{s\}$  περιλαμβάνει την αξονική δύναμη και τις δρώσες ροπές στην αρχή και το πέρας του κάθε μέλους που δρουν επί της κατασκευής. Επομένως, οι διαστάσεις του είναι  $3nel \times 1$ .

Προκειμένου να εκτιμηθούν οι αντοχές των μελών του φορέα, ομαδοποιούνται τα δομικά στοιχεία που θεωρούνται από τον χρήστη ότι διαθέτουν κοινή διατομή. Η αντοχή τους προσδιορίζεται μέσω του υπολογισμού της ελάχιστης απαιτούμενης πλαστικής ροπής αντοχής,  $M_{pl,Rd}$  κάθε ομάδας. Ο αριθμός των μεταβλητών  $M_{pl,Rd}$  ορίζουν ένα διάνυσμα διαστάσεων  $ngr \times 1$ .

Το τελικό μητρώο που περιλαμβάνει τις μεταβλητές

$$[x] = [\{s\}, \{M_{pl,Rd}\}] \quad \underline{2-4}$$

είναι ένα διάνυσμα διαστάσεων  $(3nel + ngr) \times 1$ .

Οι μεταβλητές,  $\{s\}$ ,  $\{M_{pl,Rd}\}$  είναι συνεχείς. Στην πορεία της επίλυσης, οι τιμές των εντατικών μεγεθών είναι δυνατόν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή στο χώρο των πραγματικών αριθμών, σε αντίθεση με τις ροπές αντοχής και τις αντίστοιχες αντοχές τους σε αξονική δύναμη ( $N_{pl,Rd}$ ) που προκύπτουν, οι οποίες λαμβάνουν μη αρνητικές τιμές

### 2.3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

Όπως προκύπτει από την ανωτέρω γενική διατύπωση του προβλήματος, η επιφάνεια διαρροής και η σχέση που συνδέει τα χαρακτηριστικά μεγέθη αντοχών των μελών εντάσσει στο πρόβλημα δυο μη γραμμικούς περιορισμούς. Οι περιορισμοί όμως που εισάγονται στο πρόβλημα οφείλουν να είναι γραμμικοί επομένως, ακολουθείται διαδικασία γραμμικοποίησης των ανωτέρω σχέσεων

#### 2.3.2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΕΙ ΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΑΝΤΟΧΩΝ

Η συσχέτιση των μεγεθών  $M_{pl,Rd}$ ,  $N_{pl,Rd}$  κρίνεται απαραίτητη, ώστε ο αλγόριθμος εκτιμώντας το μέγεθος της απαιτούμενης πλαστικής ροπής αντοχής του μέλους να προσδιορίζει και την αντίστοιχη αντοχή του σε αξονική δύναμη. Επιπλέον, με αυτή τη διαδικασία εισάγονται στους περιορισμούς που υποδεικνύονται από την επιφάνεια διαρροής τα δυο απαιτούμενα μεγέθη αντοχών. Παρά το γεγονός ότι, το διάνυσμα των μεταβλητών δεν εμπεριέχει τις τιμές των  $N_{pl}$ ,  $R_d$ , αυτές, συμπεριλαμβάνονται στους περιορισμούς μέσω της γραμμικής σχέσης που συνδέει την αντοχή σε κάμψη και αξονική.

Η σχέση που συνδέει τα δυο μεγέθη αντοχής των διατομών είναι παραβολή της μορφής:

$$N_{pl,Rd} = aM_{pl,Rd}^2 + bM_{pl,Rd}$$

Προκειμένου να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις περί γραμμικότητας των εισαγόμενων σχέσεων στο πρόγραμμα η ανωτέρω παραβολή λαμβάνει προσεγγιστικά τη μορφή της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων:

$$N_{pl,Rd} = cM_{pl,Rd} \tag{2-5}$$

Ο προσδιορισμός του συντελεστή  $c$  πραγματοποιήθηκε για τις κατηγορίες HEB, HEA, IPE μέσω φύλλου excel. Εισήχθησαν για κάθε κατηγορία πρότυπων διατομών τα μεγέθη  $M_{pl,Rd}$ ,  $N_{pl,Rd}$  και εκτιμήθηκε ο πιο αντιπροσωπευτικός συντελεστής  $c$  μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Μέσω της διαδικασίας αυτής προέκυψαν για κάθε κατηγορία διατομής οι κάτωθι συντελεστές:

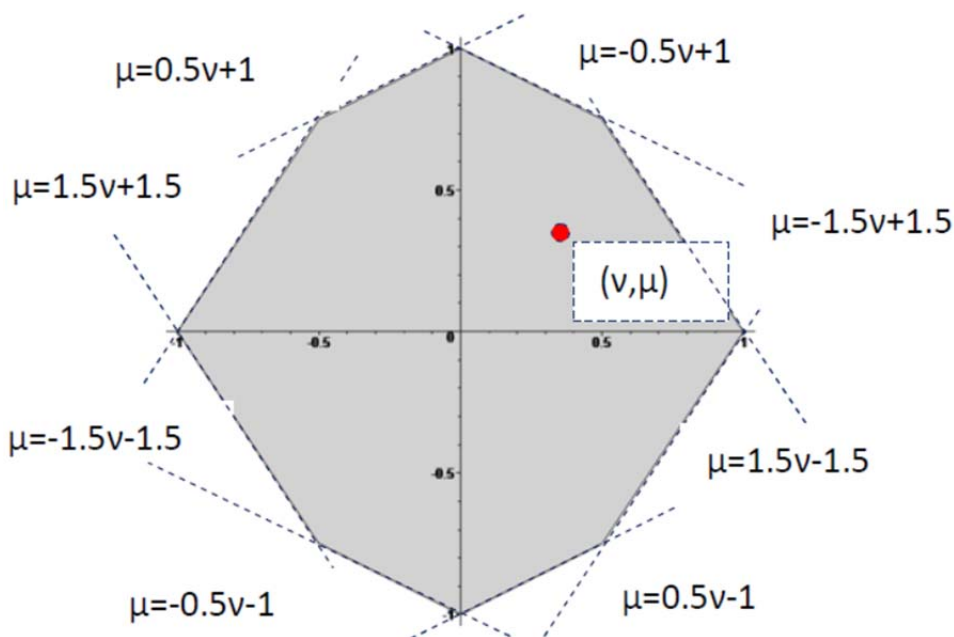
Κατηγορία Πρότυπων Διατομών	Συντελεστής Συσχέτισης $c$
HEB	6,3
HEA	5,7
IPE	7,6

Πίνακας 2-1: Συντελεστές Συσχέτισης ανά Κατηγορία Διατομής

Η ως άνω διαδικασία παρουσιάζεται αναλυτικά, στο παράρτημα Α του παρόντος τεύχους

### 2.3.2.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ

Το διάγραμμα αλληλεπίδρασης που προτείνεται από τους Masonet και Save για μεταλλικές διατομές ορίζει μια μη γραμμική επιφάνεια περιορισμών. Στο πλαίσιο των απαιτήσεων του γραμμικού προγραμματισμού, η συνθήκη διαρροής εκφράστηκε ως ένα σύνολο γραμμικών ανισοτήτων, οι οποίες εκφράζουν γεωμετρικά την τομή ενός πεπερασμένου αριθμού ημικώρων και επιπέδων. Η καμπύλη προσεγγίστηκε με ένα εγγεγραμμένο οχτάγωνο [2].



Εικόνα 2-1: Πολυγωνική Προσέγγιση Χωρίων Αλληλεπίδρασης

Με βάση το ανωτέρω διάγραμμα αλληλεπίδρασης, τα ανηγμένα εντατικά μεγέθη  $\nu$ ,  $\mu$  στα άκρα των μελών οφείλουν να υπακούουν στους εξής 8 περιορισμούς:

$$\pm 1.5\nu + \mu \pm 1.5 \leq 0 \quad \underline{2-6}$$

$$\pm 0.5\nu + \mu \pm 1.0 \leq 0 \quad \underline{2-7}$$

Επομένως, για κάθε αρχή και πέρασ δοκού του πλαισίου διατυπώνονται 16 περιορισμοί. Ο συνολικός αριθμός των ανισοτικών περιορισμών που προκύπτουν από την επιφάνεια διαρροής για όλο το πλαίσιο είναι 16nel

### 2.3.3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΜΗΤΡΩΪΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

#### 2.3.3.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Η ισορροπία του φορέα ανά βαθμό ελευθερίας, εξασφαλίζεται μέσω των ισοτήτων  $[B]\{s\} = [P]$  || Εξίσωση 1-2.

Στην τυπική του μορφή, το μητρώο, όπως έχει αναφερθεί, είναι διαστάσεων  $(nfx3nel)$ . Στο παρόν πρόγραμμα που αναπτύχθηκε, δεδομένου ότι το διάνυσμα των μεταβλητών είναι διαστάσεων  $(3nel+ngr)x1$ , το μητρώο ισορροπίας λαμβάνει διαστάσεις  $nfx(3nel+ngr)$ , ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις πολλαπλασιασμού πινάκων. Οι επιπλέον θέσεις που δημιουργούνται στο μητρώο ισορροπίας έχουν μηδενική τιμή καθώς οι ροπές αντοχής που βρίσκονται στο διάνυσμα, δεν συμμετέχουν στην ισορροπία του φορέα.

Το διάνυσμα των δρώντων δυνάμεων προκύπτει διαστάσεων  $nfx1$ . Στο μητρώο αυτό εισάγονται οι εξωτερικές φορτίσεις που επιβάλλονται ανά βαθμό ελευθερίας του φορέα και επιλέγονται από τον χρήστη. Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής η καταπόνηση του φορέα οφείλεται σε πλευρικές δυνάμεις με μορφή τριγωνικής κατανομής και προσομοιάζουν σεισμικές δράσεις. Αγνοούνται τα κατακόρυφα φορτία λόγω ίδιου βάρους της κατασκευής.

#### 2.3.3.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ

Για την εισαγωγή των ανισοτικών περιορισμών που επιβάλλει το γραμμικοποιημένο διάγραμμα αλληλεπίδρασης, χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις 2-2 και 2-3 με τους αντίστοιχους συντελεστές  $c$  για κάθε κατηγορία διατομής, όπως ορίστηκαν από τον χρήστη. Συγκεκριμένα, επελέγησαν,

- τα υποστυλώματα των πλαισίων κατηγορίας HEB και
- οι δοκοί κατηγορίας IPE
- με συντελεστές  $c_{HEB}=6,3$  και  $c_{IPE}=7,6$  αντίστοιχα.

Με την χρήση της εξίσωσης 2-2, εισήχθη στην επίλυση του προβλήματος, η μεταβλητή  $N_{pl,Rd}$  εξαρτώμενη από την  $M_{pl,Rd}$ , η οποία εμφανίζεται στο διάνυσμα των μεταβλητών και είναι απαραίτητη τιμή για την αλληλεπίδραση των διατομών. Επιπλέον, με αυτό τον τρόπο εξασφαλίστηκε η συσχέτιση των τιμών των αντοχών ώστε να λαμβάνουν τιμές σύμφωνα με τη σχέση που επιβάλλει κάθε κατηγορία διατομής.

Η αλληλεπίδραση εφαρμόστηκε και για τις δοκούς προκειμένου να τεθεί περιορισμός για την αναπτυσσόμενη αξονική δύναμη. Με την κάτωθι επίλυση προκύπτουν οι εξής ανισοτικοί περιορισμοί:

$$\pm 1.5 \frac{N}{N_{pl,Rd}} + \frac{M}{M_{pl,Rd}} \pm 1.5 \leq 0 \quad \underline{2-8}$$

$$\pm 1.5 \frac{N}{cM_{pl,Rd}} + \frac{M}{M_{pl,Rd}} \pm 1.5 \leq 0$$

$$\pm 1.5N + cM \pm 1.5cM_{pl,Rd} \leq 0$$

ομοίως με την επίλυση της σχέσης (εξίσωση 2-7):

$$\pm 0.5N + cM \pm 1.0cM_{pl,Rd} \leq 0 \quad \underline{2-9}$$

Οι τιμές  $M$ ,  $N$  ορίζουν τα εντατικά μεγέθη  $\{S\}$  που δρουν σε κάθε μέλος του φορέα. Η μεταβλητή  $M_{pl,Rd}$ , εκφράζει την ελάχιστη ροπή αντοχής που οφείλουν να έχουν τα μέλη κάθε ομάδας με κοινή διατομή όπως ορίστηκαν στο πρόγραμμα.

Οι περιορισμοί 2-8 και 2-9 εφαρμόστηκαν για κάθε μέλος  $i$ , με κόμβους αρχής και πέρατος  $j, k$  και για κάθε ομάδα μελών με κοινή διατομή  $m$  για όλους τους συνδυασμούς προσήμων των σχέσεων.

Για κάθε μέλος η μητρωϊκή μορφή που λαμβάνουν οι περιορισμοί είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix} 1.5 & c & 0 \\ -1.5 & c & 0 \\ -1.5 & -c & 0 \\ 1.5 & -c & 0 \\ 0.5 & -c & 0 \\ 0.5 & c & 0 \\ -0.5 & c & 0 \\ -0.5 & -c & 0 \\ -1.5 & 0 & c \\ -1.5 & 0 & -c \\ 1.5 & 0 & -c \\ 1.5 & 0 & c \\ 0.5 & 0 & c \\ -0.5 & 0 & c \\ 0.5 & 0 & -c \\ -0.5 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^i \\ M_j^i \\ M_k^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.5c \\ -1.5c \\ -1.5c \\ -1.5c \\ -c \\ -c \\ -c \\ -c \\ -1.5c \\ -1.5c \\ -1.5c \\ -1.5c \\ -c \\ -c \\ -c \\ -c \end{bmatrix} M_{pl,Rd}^m \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{2-10}$$

Μητρωϊκή Μορφή Επιφάνειας Διαρροής Μέλους Πλαισίου

Το συνολικό μητρώο συντελεστών των ανισοτικών σχέσεων,  $A_{ineq}$ , είναι διαστάσεων  $16nel \times (3nel + ngr)$  και το διάνυσμα των μηδενικών στοιχείων  $b_{ineq}$  έχει διαστάσεις  $16nel \times 1$ . Το



μητρώο των συντελεστών των δράσεων τοποθετείται μέσω του αλγορίθμου για κάθε στοιχείο  $i$  του φορέα στις γραμμές  $(16i-15):16i$  και στις στήλες  $(3i-2):3i$ . Αντίστοιχα, οι συντελεστές της ροπής αντοχής της ομάδας  $m$  στην οποία ανήκει το μέλος  $i$  τοποθετούνται στον πίνακα  $A_{ineq}$ , στις γραμμές  $(16i-15):16i$  και στην στήλη  $3nel+m$ .

Θεωρώντας ότι:

- $a(16 \times 3)$  είναι ο πίνακας συντελεστών των δράσεων επί των μελών,
- $b$  το διάνυσμα συντελεστών των πλαστικών ροπών,
- $group(i)$  η ομάδα μελών κοινής διατομής  $m$  στην οποία ανήκει το μέλος  $i$ ,

το συνολικό μητρώο  $A_{ineq}$  προκύπτει μέσω matlab ως εξής:

```
k=0;
for i=1:nel
    n=1;
    for j=16*k+1:16*k+16
        m=1;
        for l=3*k+1:3*k+3
            Aineq(j,l)=a(n,m);
            m=m+1;
        end
        n=n+1;
    end
    n=1;
    for j=16*k+1:16*k+16
        Aineq(j,3*nel+group(i))=b(n);
        n=n+1;
    end
    k=k+1;
end
bineq=zeros(16*nel,1);
```

Εικόνα 2-2: Κατάρτιση Μητρώου  $A_{ineq}$ ,  $b_{ineq}$  σε matlab

### 2.3.3.3 ΜΗΤΡΩΟ ΙΚΑΝΟΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΟΜΒΟΥ

Στο πλαίσιο της παρούσης διπλωματικής εργασίας, κατά τον σχεδιασμό εισήχθη και ο περιορισμός του ικανοτικού ελέγχου των κόμβων δοκών-υποστυλωμάτων που υποδεικνύεται από τον Ευρωκώδικα. Σύμφωνα με τον κανονισμό, το άθροισμα των αντοχών των υποστυλωμάτων που συντρέχουν σε ένα κόμβο οφείλει να είναι τουλάχιστον 30% μεγαλύτερο από το άθροισμα των ροπών αντοχής των δοκών που βρίσκονται στον ίδιο κόμβο (Εξίσωση 3-1). Στόχος του συγκεκριμένου σχεδιασμού είναι να περιορίσει την κατάρρευση του φορέα με μηχανισμό που οφείλεται στη δημιουργία πλαστικών αρθρώσεων στη βάση των υποστυλωμάτων του ισογείου και στα άκρα των δοκών.

Προκειμένου να συμπεριληφθεί ο συγκεκριμένος περιορισμός στον αλγόριθμο, με τη μορφή ανίσωσης καταρτίστηκε μητρώο διαστάσεων  $nnode(3nel+ngr)$ . Για κάθε κόμβο του πλαισίου εντοπίστηκαν τα συμμετέχοντα μέλη και η ομάδα μελών στην οποία ανήκουν. Τοποθετήθηκαν ανάλογα με το είδος του δομικού στοιχείου οι συντελεστές -1 και 1.3 ως συντελεστές των πλαστικών ροπών αντοχής των υποστυλωμάτων και των δοκών αντίστοιχα. Εάν τα μέλη θεωρούνται ότι έχουν κοινή διατομή τότε οι συντελεστές του ικανοτικού σχεδιασμού της απαιτούμενης αντοχής αθροίζονται για τον συγκεκριμένο κόμβο στη στήλη  $3nel+m$ . Οι υπόλοιπες θέσεις του μητρώου και το διάνυσμα του ανισοτικού περιορισμού ( $nnode1$ ) ισούνται με μηδέν.

```

IK=zeros(nnode,nvar);
ik=zeros(nnode,1);
for i=1:nnode
    ne=0;
    d=0;
    u=0;
    for j=1:nel
        if Inods(j,1)==i || Inods(j,2)==i
            h=group(j); (θέση της κατηγορίας διατομής στην οποία ανήκει το μέλος)
            if ds(j)==1 (είδος δομικού στοιχείου- δοκός)
                IK(i,3*nel+h)=IK(i,3*nel+h)-1;
                ne=ne+1;
                d=d+1;
            elseif ds(j)==2(είδος δομικού στοιχείου- υποσύλωμα)
                IK(i,3*nel+h)=IK(i,3*nel+h)+1.3;
                ne=ne+1;
                u=u+1;
            end
        end
    end
    if ne==1 || d==0 || u==0 (αγνοείται ο ικανοτικός σε κόμβους συνέχειας ή στην περίπτωση που συντρέχει ένα μέλος)
        for l=3*nel+1:3*nel+ngr
            IK(i,l)=0;
        end
    end
end
end

```

Εικόνα 2-3: Κατάρτιση Μητρώου IK, ik σε matlab

## 2.3.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

### 2.3.4.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος αποσκοπεί στην ελαχιστοποίηση του βάρους της κατασκευής. Στις μεταβλητές του προβλήματος υπάρχουν οι πλαστικές ροπές αντοχής της διατομής.

Επομένως, ως μεταβλητές της αντικειμενικής συνάρτησης χρησιμοποιούνται οι  $M_{pl,Rd}$  αντί του εμβαδού των διατομών, όπως εμφανίζεται στη 2-1. Η επίλυση δεν επηρεάζεται καθώς

όσο μεταβάλλεται η απαιτούμενη  $M_{pl,Rd}^m$ , μεταβάλλεται το απαιτούμενο εμβαδόν διατομής. Το μήκος  $l^m$  υπολογίζεται για κάθε ομάδα μελών  $m$  και ισούται με το άθροισμα των μηκών των μελών κοινής διατομής του φορέα.

Επομένως, το Διάνυσμα  $[c]$  της αντικειμενικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται στο πρόγραμμα είναι διαστάσεων  $1 \times (3nel + ngr)$ .

Στις θέσεις  $1 \times (3nel)$  οι τιμές του είναι μηδενικές, ενώ στις υπόλοιπες θέσεις τοποθετήθηκαν τα υπολογισμένα  $l^m$  ως συντελεστές των αντίστοιχων  $M_{pl,Rd}^m$ .

$$c(1,1:(3nel + ngr)) = [ \overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{3*nel} : \overbrace{l^1 \quad l^2 \quad \dots \quad l^m}^{ngr} ] \quad 2-11$$

#### 2.3.4.2 ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

##### Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min f(M_{pl,Rd}^m) = \min \sum_{i=1}^m l^i M_{pl,Rd}^i = \min [c] \{x\} \quad 2-12$$

$l^i$ : συνολικό μήκος μελών με κοινή διατομή

##### Περιορισμοί

- Ισότητας:  $[B] \{x\} = [P] \quad 2-13$
- Ανισότητας

$$\diamond \text{ Διάγραμμα αλληλεπίδρασης: } [A_{ineq}] \{x\} \leq \{b_{ineq}\}, \{b_{ineq}\} = \{0\} \quad 2-14$$

$$\diamond \text{ Ικανοτικός έλεγχος κόμβων: } [IK] \{x\} \leq \{ik\}, \{ik\} = \{0\} \quad 2-15$$

##### Περιορισμοί Μεταβλητών:

$$\{s\} \in R, M_{pl,Rd}^m \geq 0$$

#### 2.3.4.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ MATLAB

Η κατάλληλη εντολή επίλυσης μέσω matlab για προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού είναι η linprog. Για την επίλυση του παρόντος προβλήματος εκλήθη η εντολή αυτή και επιλέχθηκε, τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης να προκύψουν μέσω του κώδικα της simplex που διαθέτει η matlab.

```
[x,fval1,exitflag,output,lambda]=...
linprog(c,[Aineq;IK;],[bineq;ik;],[B],[f],[,],[,],[,],option);
```

Εικόνα 2-4: Εντολή Επίλυσης Προβλήματος σε matlab

Αριστερά της ισότητας διατυπώνονται τα αποτελέσματα που είναι επιθυμητό να εμφανίζονται

- $x$ : μητρώο αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος
- $fval1$ : τιμή αποτελέσματος αντικειμενικής συνάρτησης
- $exitflag$ : η μεταβλητή που δηλώνει αν η διαδικασία της επίλυσης ολοκληρώθηκε σωστά
- $lambda$ : επιστρέφει τα αποτελέσματα των πολλαπλασιαστών Lagrange που προέκυψαν από επίλυση των περιορισμών για την εύρεση των βέλτιστων  $x$

Στο δεύτερο μέλος τοποθετούνται η αντικειμενική συνάρτηση, οι ανισοτικοί περιορισμοί και οι περιορισμοί ισότητας. Στην επίλυση του προβλήματος, δεν ελήφθησαν υπόψη ανώτατα και κατώτατα όρια για τις μεταβλητές, ούτε αρχικοποιήθηκαν οι μεταβλητές  $x$ .

## 2.4 ΕΠΙΛΟΓΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ

Από την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος σχεδιασμού που περιγράφηκε προκύπτουν οι ελάχιστες απαιτούμενες τιμές των πλαστικών ροπών αντοχής κάθε ομάδας μελών.

Στην συνέχεια, υπολογίζονται οι αντίστοιχες απαιτούμενες αντοχές σε αξονική δύναμη σύμφωνα με τον συντελεστή συσχέτισης  $c$ , όπως προκύπτει από τον **Error! Reference source not found.** για κάθε κατηγορία διατομής. Με κριτήριο την  $M_{pl,Rd}^m$  ο αλγόριθμος επιλέγει τις πρότυπες διατομές μέσω του φύλλου excel (παράρτημα Α), το οποίο περιλαμβάνει τις πρότυπες διατομές και την αντίστοιχη αντοχή τους σε κάμψη. Έπειτα, ελέγχει αν ικανοποιούνται οι απαιτήσεις της  $N_{pl,Rd}$  για την επιλεχθείσα πρότυπη διατομή. Οι πλαστικές ροπές αντοχής των πρότυπων διατομών καταρτίζουν το μητρώο  $[Mpl]$  διαστάσεων  $n_{gr} \times 1$ .

Η επιλογή πρότυπων διατομών ενέχει τον κίνδυνο κατάργησης του ικανοτικού ελέγχου. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται διότι η επίλυση γίνεται για συνεχείς μεταβλητές οι οποίες επιδιώκεται να διακριτοποιηθούν μέσω του πίνακα πρότυπων διατομών. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που η  $M_{pl,Rd}^m$  που προκύπτει από την επίλυση του σχεδιασμού, οδηγεί στην επιλογή πρότυπης διατομής δοκού με πολύ μεγαλύτερη  $M_{pl,Rd}$ , ενώ για τα υποστυλώματα λαμβάνονται διατομές οι οποίες επαρκούν οριακά.

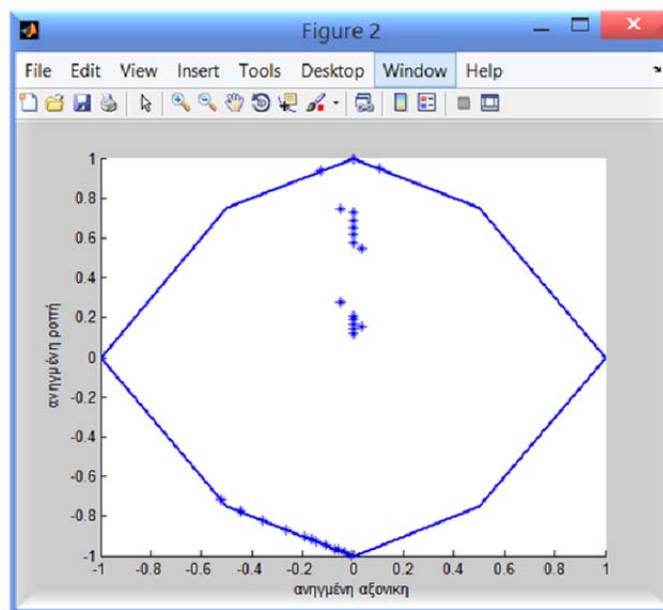
Για την αντιμετώπιση του προβλήματος που παρουσιάστηκε ο αλγόριθμος εντοπίζει τους κόμβους στους οποίους δεν ικανοποιείται ο ικανοτικός υπολογίζοντας το γινόμενο των μητρώων  $[IK] * [\{s\}, \{Mpl\}]$  με δεδομένο ότι τα διανύσματα των  $\{s\}, \{Mpl\}$  είναι γνωστά από την επίλυση και από την επιλογή των πρότυπων διατομών. Για τους κόμβους στους οποίους το γινόμενο των μητρώων δεν έχει αποτέλεσμα μη θετικό αυξάνεται η ροπή αντοχής των συμμετεχόντων υποστυλωμάτων κατά μία κατηγορία. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου το γινόμενο των πινάκων να είναι αρνητικό για τον υπό μελέτη κόμβο, ώστε να ικανοποιείται η απαίτηση του ικανοτικού ελέγχου. Εάν τα υποστυλώματα που υπάγονται στον συγκεκριμένο κόμβο είναι διαφορετικής διατομής τότε εξετάζονται τρεις

περιπτώσεις και επιλέγεται η βέλτιστη. Αυξάνεται η κατηγορία διατομής του κάθε υποστυλώματος ξεχωριστά και οι κατηγορίες διατομής των δύο υποστυλωμάτων ταυτόχρονα και επιλέγεται ο σχεδιασμός για τον οποίο το γινόμενο των μητρώων δίνει κατά απόλυτη τιμή το μικρότερο αρνητικό αποτέλεσμα.

## 2.5 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Η επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού για τον σχεδιασμό των κατασκευών, προσδιορίζει τις εντάσεις που αναπτύσσονται επί των μελών και οι αντίστοιχες βέλτιστες διατομές τους ώστε να επαρκούν σε κάμψη και αξονική δύναμη. Λαμβάνοντας ως δεδομένα τα εκτιμώμενα αυτά μεγέθη, μέσω του αλγορίθμου, υπολογίζονται τα ανηγμένα μεγέθη ροπών αρχής  $\mu_j^i$  και πέρατος  $\mu_k^i$  κάθε μέλους και η ανηγμένη αξονική τους δύναμη  $\nu^i$

Το πρόγραμμα που έχει αναπτυχθεί απεικονίζει τα όρια του οκταγωνικού διαγράμματος αλληλεπίδρασης και τα ζεύγη  $(\nu^i, \mu_j^i), (\nu^i, \mu_k^i)$  για κάθε μέλος  $i$  του φορέα.



Εικόνα 2-5: Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης Βέλτιστων Διατομών Φορέα εξαγόμενο από πρόγραμμα matlab

## 2.6 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΛΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΘΡΩΣΕΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΕΝΟΥ ΦΟΡΕΑ

Για κάθε ζεύγος  $(v^i, \mu_j^i), (v^i, \mu_k^i)$  των μελών της κατασκευής εκτιμάται η θέση του στο διάγραμμα αλληλεπίδρασης προκειμένου να προσδιοριστεί η εξίσωση ευθείας της επιφάνειας διαρροής από την οποία περιορίζονται. Στο πλαίσιο αυτό υπολογίστηκαν οι τιμές  $\arctan(\text{abs}(\mu_j^i / v^i)), \arctan(\text{abs}(\mu_k^i / v^i))$  για κάθε μέλος. Στη συνέχεια, σύμφωνα με το πρόσημο των ανηγμένων ροπών και της ανηγμένης αξονικής δύναμης κάθε στοιχείου, υπολογίστηκαν οι τελικές γωνίες  $\theta_j^i, \theta_k^i$ , που ορίζουν τα ζεύγη  $(v^i, \mu_j^i), (v^i, \mu_k^i)$ . Οι γωνίες αυτές μετρώνται σε ακτίνια και έχουν φορά αντιωρολογιακή, ξεκινώντας από τον θετικό άξονα x.

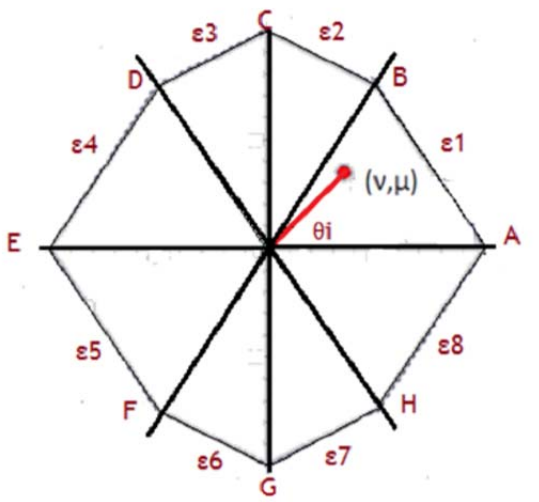
Για να εκτιμηθεί ο περιορισμός στον οποίο υπόκειται κάθε διατομή του φορέα, το διάγραμμα αλληλεπίδρασης χωρίστηκε σε οκτώ χωρία, για τα οποία υπολογίστηκαν τα όρια των γωνιών:

$$AB: \theta_1 \in (0, 0.9828) \quad BC: \theta_2 \in (0.9828, 1.5708)$$

$$CD: \theta_3 \in (1.5708, 2.1588) \quad DE: \theta_4 \in (2.1588, 3.1416)$$

$$EF: \theta_5 \in (3.1416, 4.1244) \quad FG: \theta_6 \in (4.1244, 4.7124)$$

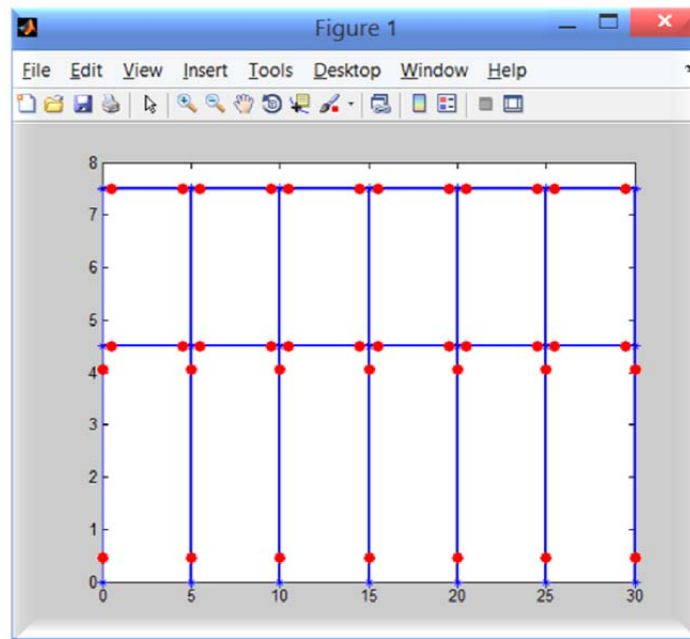
$$GH: \theta_7 \in (4.7124, 5.3004) \quad HA: \theta_8 \in (5.3004, 2\pi)$$



Εικόνα 2-6: Ορισμός Χωρίων Διαγράμματος Αλληλεπίδρασης και Περιορισμών

Αφού προσδιορισθούν τα όρια, εντός των οποίων, βρίσκονται οι γωνίες  $\theta_j^i, \theta_k^i$  κάθε μέλους, επιλύονται οι αντίστοιχες εξισώσεις  $\varepsilon_i$  που φαίνονται στην *Εικόνα 2-7*. Για δεδομένη τιμή της ανηγμένης αξονικής δύναμης, προκύπτει, από την εξίσωση, η μέγιστη ανηγμένη ροπή που δύνανται να παραλάβουν οι διατομές αρχής και πέρατος κάθε στοιχείου του φορέα. Εάν, η δρῶσα ανηγμένη ροπή στις διατομές αυτές εμφανίσει μεγαλύτερη τιμή της υπολογισθείσας

μέγιστης ανηγμένης αντοχής σε κάμψη, τότε ο αλγόριθμος τυπώνει πλαστική άρθρωση στο αντίστοιχο άκρο του μέλους.



Εικόνα 2-7: Μοντέλο Πλαστικών Αρθρώσεων Προγράμματος στην matlab

Με στόχο να διασφαλιστεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων το μοντέλο πλαστικών αρθρώσεων που εμφανίζει το πρόγραμμα έγινε χρήση των συντελεστών Lagrange που προέκυψαν από τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, ελέγχθηκαν οι συντελεστές των ανισοτικών σχέσεων που επιβάλλονται ως περιορισμοί του προβλήματος από την επιφάνεια διαρροής. Οι πολλαπλασιαστές Lagrange των ανισοτικών σχέσεων καθορίζουν εάν ένας περιορισμός είναι ενεργός, δηλαδή εάν έχει μετατραπεί σε σχέση ισότητας. Ενεργός είναι ο περιορισμός για τον οποίον προκύπτει ο πολλαπλασιαστής διάφορος του μηδενός. Στην περίπτωση που για μια από τις οκτώ ανισοτικές σχέσεις που αφορούν το άκρο κάθε μέλους, προέκυπτε τουλάχιστον ένας ενεργός περιορισμός θεωρείται πως η διατομή έχει διαρρεύσει και παρουσιάζεται πλαστική άρθρωση.

Ο έλεγχος αυτός κρίνεται απαραίτητος καθώς, για τη δημιουργία του πρώτου μοντέλου, η πλαστικοποίηση των διατομών που προσδιορίζεται από τη διαφορά της μέγιστης αντοχής σε κάμψη και της δρώσας, για δεδομένη αξονική δύναμη, έχει περιθώρια ανοχής της τάξεως  $10^{-4}$ . Επομένως, ενέχει ο κίνδυνος σχεδιασμού πλαστικών αρθρώσεων σε διατομές που οριακά δεν έχουν πλαστικοποιηθεί.





### 3 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα του προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού πλαισίων, το οποίο περιγράφηκε στο 2ο κεφάλαιο. Στα πλαίσια της παρούσης διπλωματικής εξετάστηκαν πολυώροφα και πολύστυλα μεταλλικά πλαίσια. Οι υπό εξέταση φορείς, είτε σε κάθε όροφο είχαν τον ίδιο αριθμό πλαισίων, είτε στους ορόφους άνω του τετάρτου εμφάνιζαν μικρότερο αριθμό πλαισίων.

Για κάθε ανάλυση που πραγματοποιήθηκε εισήχθησαν οι εξής πληροφορίες:

- Ο αριθμός κόμβων του πλαισίου. Αριθμώνται από τη βάση των υποστυλωμάτων προς την οροφή και από αριστερά προς τα δεξιά.
- Ο αριθμός μελών του πλαισίου. Μετρώνται αρχικά όλα τα υποστυλώματα από τη βάση στην οροφή και από αριστερά προς τα δεξιά και στη συνέχεια οι δοκοί διαδοχικά ανά όροφο.
- Οι συντεταγμένες κόμβων πλαισίου. Τα ανοίγματα θεωρούνται μήκους 5 μέτρων, ο όροφος του ισογείου ύψους 4,5 μέτρων και οι υπόλοιποι όροφοι ύψους 3 μέτρων.
- Οι συνθήκες στήριξης σε κάθε κόμβο (κύλιση, άρθρωση, πάκτωση). Όλοι οι φορείς θεωρήθηκαν πακτωμένοι στη βάση των υποστυλωμάτων του ισογείου.
- Οι κόμβοι αρχή και τέλος κάθε μέλους.
- Τα μέλη με κοινή αντοχή σε κάμψη.
- Η κατηγορία πρότυπης διατομής που θα λάβει κάθε ομάδα μελών με κοινή διατομή.
- Το δομικό στοιχείο που εκπροσωπεί κάθε μέλος του φορέα (υποστύλωμα, δοκός).
- Τα φορτία που καταπονούν την κατασκευή. Η επιβαλλόμενη φόρτιση είναι πλευρική με μέγιστο φορτίο στον κόμβο της οροφής του πλαισίου ίσο με 120kN. Οι κόμβοι των υπολοίπων ορόφων λαμβάνουν τα φορτία που προκύπτουν από την τριγωνική κατανομή για την γεωμετρία του υπό μελέτη φορέα.

Στους φορείς για τους οποίους πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις θεωρείται ότι λαμβάνουν κοινή διατομή οι ακόλουθες ομάδες μελών:

- τα εξωτερικά υποστυλώματα
- το σύνολο των εσωτερικών υποστυλωμάτων και
- οι δοκοί ανά όροφο

Η συγκεκριμένη ομαδοποίηση επιλέχθηκε λαμβάνοντας υπόψη τη μεθοδο με την οποία σχεδιάζονται οι σύγχρονες κατασκευές. Με βάση αυτή, τα υποστυλώματα οφείλουν να λαμβάνουν ενιαία διατομή καθ' ύψος και τα εξωτερικά να αποτελούνται από μέλη διαφορετικής διατομής σε σχέση με τα εσωτερικά. Συγκεκριμένα, για την παραλαβή των σεισμικών δράσεων είναι επιθυμητό τα εξωτερικά υποστυλώματα να διαθέτουν μεγαλύτερη αντοχή από τα εσωτερικά προκειμένου να παραλάβουν τια δρώντα φορτία. Ωστόσο, η παράμετρος αυτή δεν εισήχθη στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, ώστε τα

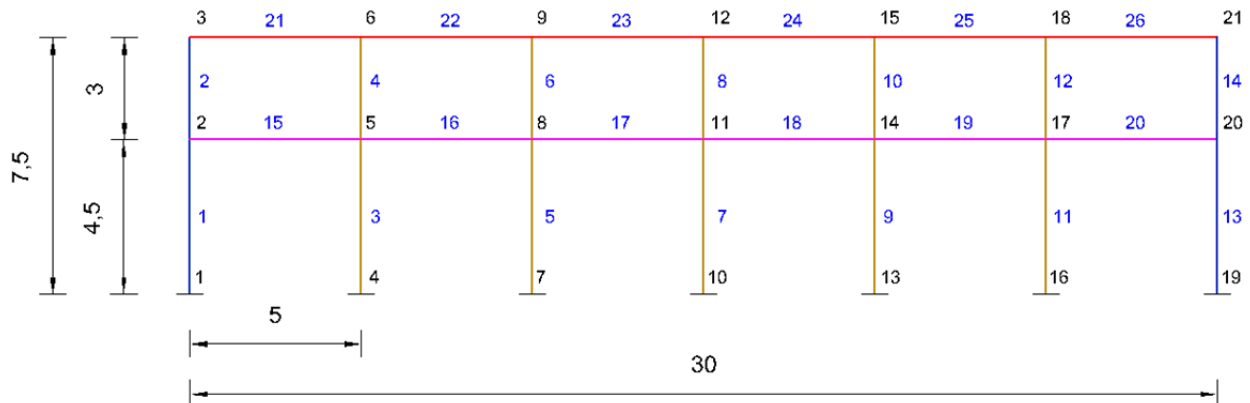
αποτελέσματα από την διαδικασία της βελτιστοποίησης να μην αλλοιώνονται από επιπλέον κατασκευαστικές διατάξεις.

Ο βέλτιστος σχεδιασμός θα οριζόταν στην περίπτωση που κάθε μέλος των υπό μελέτη φορέων λάμβανε διαφορετική διατομή ανάλογα με τις εντάσεις που το καταπονούν. Ωστόσο, η επιλογή οριακών διατομών για όλα τα μέλη είχε σαν αποτέλεσμα να αναπτύσσεται αυξημένος αριθμός πλασικών αρθρώσεων στα άκρα των στοιχείων του φορέα. Επομένως, επιλέχθηκε η περιγραφείσα ομαδοποίηση που εφαρμόζεται στην πλειοψηφία των κατασκευών.

### 3.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

#### 3.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Ο φορέας του παραδείγματος που περιγράφεται στο παρόν κεφάλαιο έχει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σχήματος που ακολουθεί:



Εικόνα 3-1: Γεωμετρικά Στοιχεία Εξεταζόμενου Φορέα

Το απεικονιζόμενο πλαίσιο αποτελείται από 21 κόμβους, 26 μέλη και διαθέτει 42 βαθμούς ελευθερίας. Στους κόμβους 2,3 επιβλήθηκαν πλευρικές φορτίσεις 72 kN, 120 kN αντίστοιχα. Στον φορέα θεωρήθηκαν 4 ομάδες μελών, των οποίων τα συμμετέχοντα στοιχεία λαμβάνουν κοινή διατομή κατά το σχεδιασμό και σημειώνονται στο ανωτέρω σχήμα με διαφορετικό χρώμα.

#### 3.1.1.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Η ανάλυση του συγκεκριμένου πλαισίου με χρήση του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, οδήγησε στα κάτωθι αποτελέσματα ελάχιστων αντοχών σχεδιασμού των διατομών.

ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
Group	1	2	3	4
MPL σχεδιασμού (kNm)	36,38	72,76	44,44	27,98
NPL σχεδιασμού (kN)	229,18	458,36	337,74	212,67
f (τιμή αντικειμενικής συνάρτησης)	6790			

Πίνακας 3-1: Αποτελέσματα Αντοχών Σχεδιασμού

Το μητρώο των μεταβλητών που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος περιέχει, για κάθε μέλος διαδοχικά, την δρώσα αξονική δύναμη και τις επιβαλλόμενες ροπές στην αρχή και στο πέρας του. Επιπλέον, για κάθε ομάδα μελών εμφανίζονται αντίστοιχες βέλτιστες

$$M_{pl,Rd}^m, N_{pl,Rd}^m :$$

Τα υπολογισθέντα εντατικά μεγέθη προέκυψαν από τον επιλύτη *linprog*, ο οποίος επιλέγει από ένα σύνολο τιμών που δοκιμάζει, εκείνες οι οποίες είναι στατικά αποδεκτές και ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος. Η διαδικασία αυτή, αγνοεί το συμβιβαστό των παραμορφώσεων του φορέα.

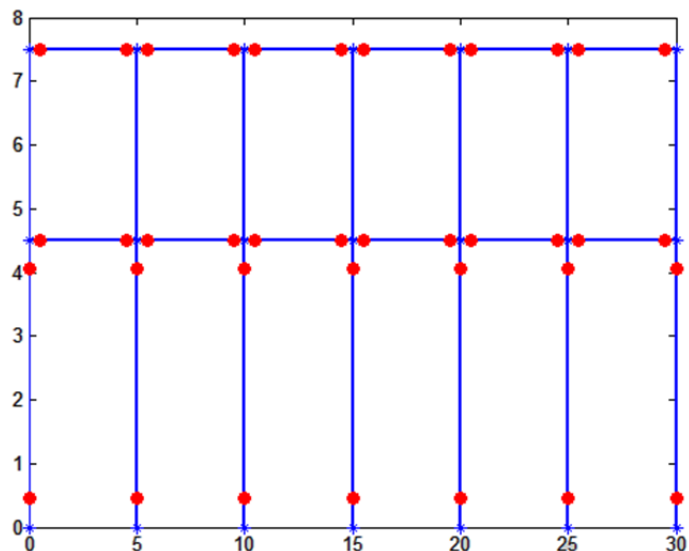
Λόγω της μητρικής επίλυσης οι ροπές στα αμφίπακτα μέλη προκύπτουν ομόσημες. Στα υποστυλώματα, οι ροπές στα άκρα των μελών λαμβάνουν θετικές τιμές ενώ στις δοκούς αρνητικές.

Επιπλέον, από τη επίλυση προέκυψαν αυξημένες αξονικές δυνάμεις στις δοκούς, γεγονός που δεν είναι σύμφωνο με την ρεαλιστική πλαισιακή λειτουργία ενός φορέα. Σε ένα πλαίσιο οι δοκοί θεωρούνται ότι παρουσιάζουν διαφραγματική λειτουργία και δεν εντείνονται αξονικά οπότε διαστασιολογούνται αποκλειστικά έναντι κάμψης. Οι πλευρικές φορτίσεις παραλαμβάνονται σαν τέμνουσα δύναμη και ροπή από τα υποστυλώματα.

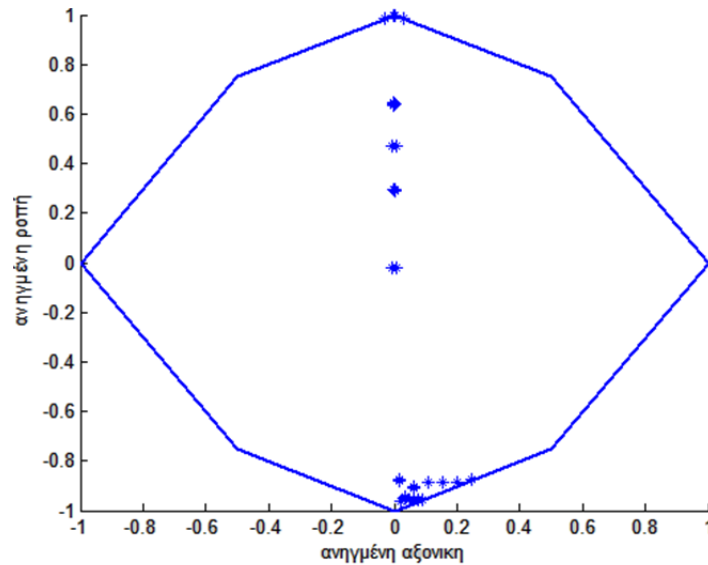
Οι αξονικές δυνάμεις των υποστυλωμάτων, μέσω του επιλύτη *linprog*, έλαβαν μικρές τιμές, γεγονός που οφείλεται στο ότι δεν επιβλήθησαν κατακόρυφες φορτίσεις στην κατασκευή διότι το ίδιο βάρος της αγνοήθηκε κατά τον σχεδιασμό.

### 3.1.1.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Για τον ανωτέρω σχεδιασμό, και με βάση τα δρώντα μεγέθη που προέκυψαν, παρατίθενται οι εικόνες των πλαστικών αρθρώσεων που έχουν αναπτυχθεί στην κατασκευή και το διάγραμμα αλληλεπίδρασης των διατομών.



Εικόνα 3-2: Μηχανισμός Κατάρρευσης Φορέα

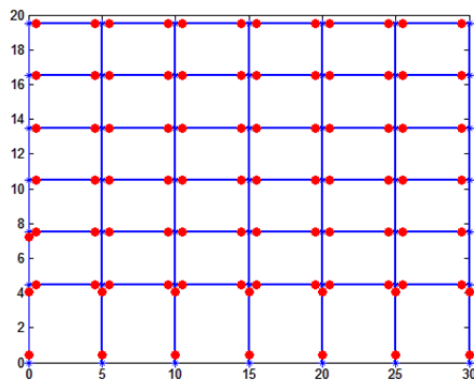


Εικόνα 3-3: Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης Διατομών Φορέα

Στο παρόν παράδειγμα, προέκυψε πως η κατάρρευση του φορέα οφείλεται στην δημιουργία πλαστικών αρθρώσεων στα άκρα των δοκών του πλαισίου και των υποστυλωμάτων του ισόγειου. Η εικόνα αστοχίας του φορέα διαφέρει από την επιθυμητή, που επιβάλλεται από τον Ελληνικό Αντισεισμικό Κανονισμό και προβλέπει την κατάρρευση του, με το σχηματισμό πλαστικών αρθρώσεων στα άκρα των δοκών και στη βάση των υποστυλωμάτων του ισόγειου.

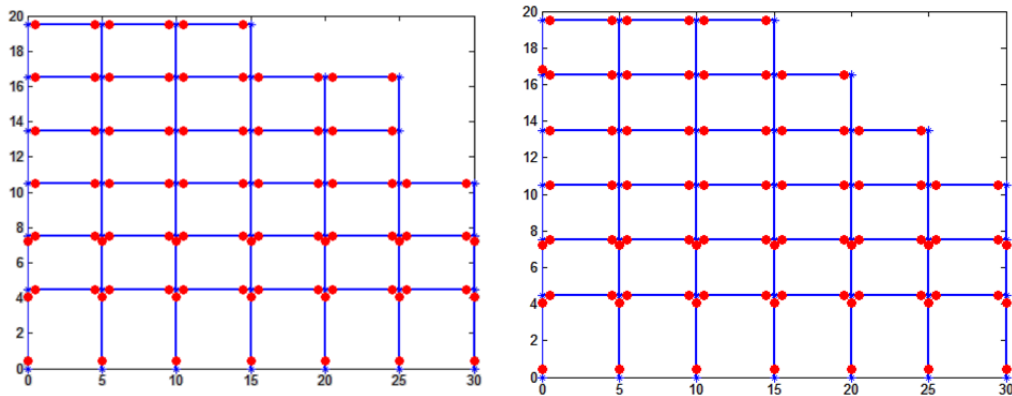
Η ανάπτυξη μηχανισμού ορόφου που παρουσιάστηκε στο ισόγειο της κατασκευής είναι απαραίτητο να αποφεύγεται, διότι το σύνολο των πλαστικών παραμορφώσεων συγκεντρώνεται στα άκρα των υποστυλωμάτων του «μαλακού» ορόφου. Σε αντίθετη περίπτωση, οι παραμορφώσεις κατανέμονται σε όλους τους ορόφους. Εάν αναπτυχθεί μαλακός όροφος, προκειμένου να επιτευχθεί η ίδια μέση ολική παραμόρφωση του κτιρίου οι απαιτούμενες πλαστικές στροφές στα άκρα των υποστυλωμάτων οφείλουν να είναι πολύ μεγάλες. Οι ανάλογα αυξημένες απαιτήσεις τοπικής πλαστικότητας δεν είναι εν γένει εύκολο να επιτευχθούν σε πολυώροφα κτίρια [7].

Παρατηρήθηκε στο σύνολο των αναλύσεων των πλαισίων που μελετήθηκαν, ότι με τη μεθοδολογία σχεδιασμού που εφαρμόζεται εμφανίζεται μηχανισμός μαλακού ορόφου στο ισόγειο.



Εικόνα 3-4: Μηχανισμός Κατάρρευσης Πλαισίου 6 ορόφων

Ιδιαίτερα για τους μη κανονικούς καθ' ύψος φορείς, τα αποτελέσματα προέκυψαν δυσμενέστερα, διότι εμφανίστηκαν πλαστικές αρθρώσεις και σε υποστυλώματα άλλων ορόφων εκτός του ισογείου.



Εικόνα 3-5: Μηχανισμός Κατάρρευσης Πλαισίου με Τυχαία Μορφολογία

Ένεκα αυτού, και με στόχο την βελτίωση του σχεδιασμού των φορέων ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή αστοχία τους, ακολουθεί περαιτέρω διαδικασία διερεύνησης.

## 3.2 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

### 3.2.1 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΤΙΣ ΔΟΚΟΥΣ

Λαμβάνοντας υπόψη πως οι αναπτυσσόμενες αξονικές εντάσεις στα μέλη των δοκών δεν προσομοιώνουν την ρεαλιστική καταπόνηση τους εντός ενός πλαισίου, επιχειρήθηκε ο περιορισμός τους.

Στο πλαίσιο αυτό εισήχθησαν περιορισμοί που αφορούν στις μεταβλητές του προβλήματος. Συγκεκριμένα, απαιτήθηκε οι απόλυτες τιμές των μεταβλητών που περιγράφουν την καταπόνηση των υποστυλωμάτων να λαμβάνουν τιμές μικρότερες από τις αντίστοιχες μέγιστες αντοχές της κατηγορίας των πρότυπων διατομών που υπάγονται. Η ίδια

λογική εφαρμόστηκε και στα μεγέθη καμπτικής έντασης των δοκών. Όσο αφορά στην απόλυτη τιμή της αξονικής δύναμης που αναπτύσσεται στα μέλη των δοκών, θεωρήθηκε ότι ανήκει στο διάστημα  $[0,20]$ kN. Για το πεδίο αποδεκτών αξονικών δυνάμεων που ορίστηκε πραγματοποιήθηκαν διαδοχικές επιλύσεις.

Για τις μεταβλητές των ροπών σχεδιασμού θεωρήθηκε κατώτατο αποδεκτό όριο η τιμή 0. Ως ανώτατο όριο ορίστηκε η μέγιστη καμπτική αντοχή που διαθέτει η επιλεγόμενη κατηγορία πρότυπης διατομής, για κάθε ομάδα μελών κοινής διατομής.

Οι περιορισμοί εισήχθησαν με μητρική μορφή στον επιλύτη linprog. Τα δυο διανύσματα ανώτατων (UB) και κατώτατων (LB) αποδεκτών λύσεων και περιλαμβάνουν τις ανωτέρω τιμές είναι διαστάσεων  $(3nel+ngr) \times 1$ .

```
[x,fval1,exitflag,output,lambda]=...
linprog(c,[Aineq;IK;],[bineq;ik;],[B],[f],LB,UB,[],option);
```

Εικόνα 3-6: Εντολή Επίλυσης Προβλήματος σε matlab

### 3.2.1.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Από την συγκεκριμένη ανάλυση λόγω της ανακατανομής των εντατικών μεγεθών στον φορέα προέκυψε σχεδιασμός ο οποίος δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί σε κατασκευές. Οι εντάσεις επί των δοκών περιορίστηκαν πάρα πολύ και η δρώσα ροπή στα εξωτερικά υποστυλώματα αυξήθηκε ραγδαία, με αποτέλεσμα την υπερδιαστασιολόγηση τους έναντι των υπολοίπων μελών, των οποίων οι διατομές προέκυψαν ελάχιστες.

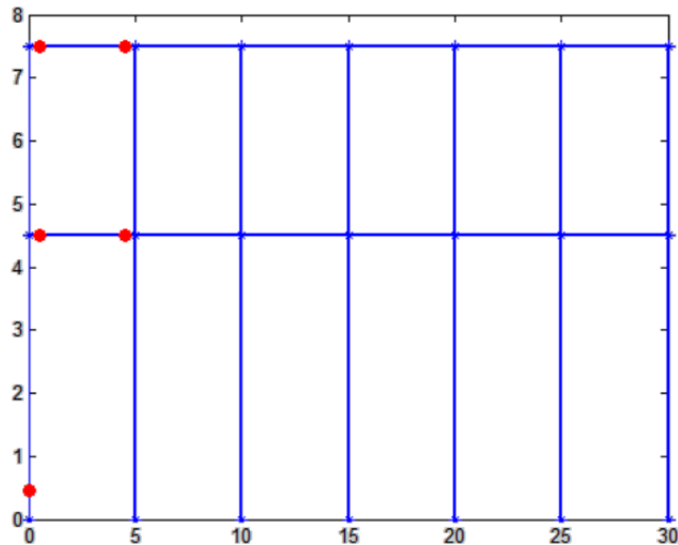
ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
Group	1	2	3	4
MPL σχεδιασμού (kNm)	984,00	6,84	2,63	2,63
NPL σχεδιασμού (kN)	6199,20	43,11	20,00	20,00
f (τιμή αντικειμενικής συνάρτησης)	15253			

Πίνακας 3-2: Αποτελέσματα Αντοχών Σχεδιασμού για Μέγιστη Επιτρεπόμενη Αξονική Δύναμη στις Δοκούς 20 ΚΝ

Με την εφαρμογή αυστηρότερων περιορισμών στην αξονική καταπόνηση των δοκών, προέκυψε δυσμενέστερος σχεδιασμός για τα μέλη και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης διαρκώς μεγαλώνει. Λόγω:

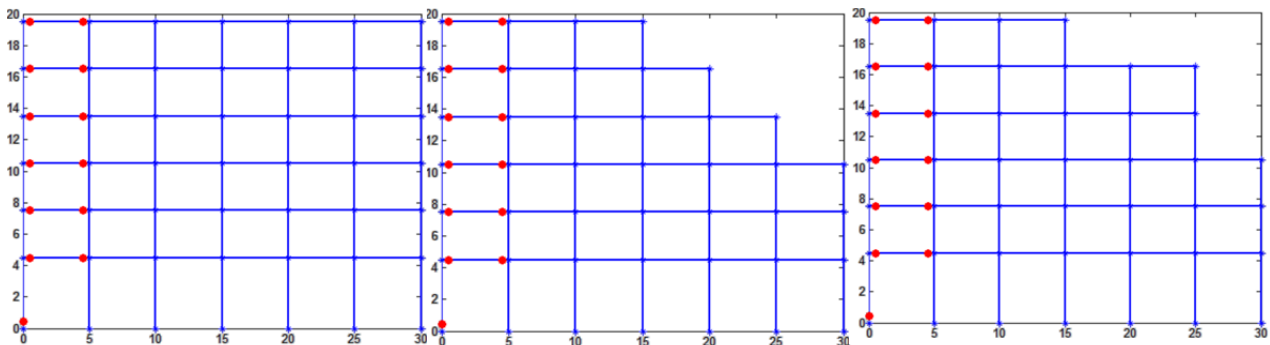
- της υπερδιαστασιολόγησης των εξωτερικών υποστυλωμάτων και
- της υποτίμησης των εντατικών μεγεθών επί των δοκών και των εσωτερικών υποστυλωμάτων

που εφαρμόστηκε από τον αλγόριθμο, οι εξεταζόμενοι φορείς δεν αναπτύσσουν μηχανισμούς κατάρρευσης.



Εικόνα 3-7: Πλαστικές Αρθρώσεις Φορέα

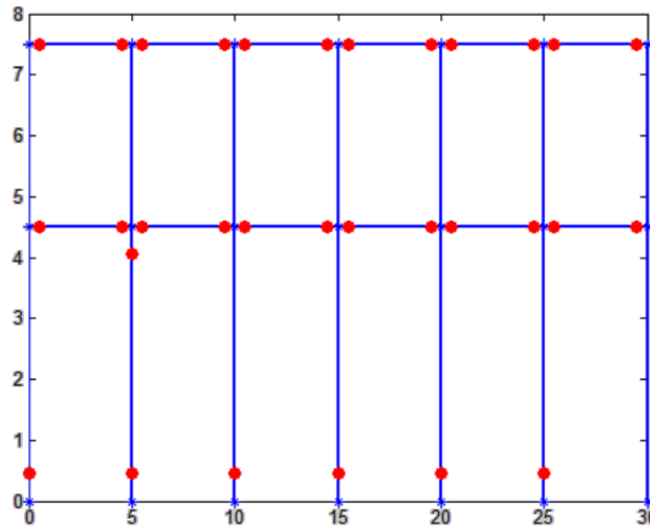
Η εικόνα αυτή, πλαστικών αρθρώσεων, οφείλεται στο γεγονός ότι τα δυσμενέστερα εντατικά μεγέθη, αναπτύχθηκαν επί των μελών που πλαστικοποιούνται και για αυτά διαστασιολογούνται οριακά οι συγκεκριμένες ομάδες μελών. Η εφαρμογή αυστηρότερων ορίων στις δοκούς οδήγησε σε ανάπτυξη λιγότερων πλαστικών αρθρώσεων. Το σύνολο των φορέων που μελετήθηκαν παρουσίασαν κοινή εικόνα πλαστικών αρθρώσεων.



Εικόνα 3-8: Παραδείγματα Πλαστικών Αρθρώσεων Πλαισίων

Με στόχο την βελτίωση των εικόνων των σχηματιζόμενων πλαστικών αρθρώσεων επιχειρήθηκε ανάλυση των πλαισίων, με τις δοκούς να λαμβάνουν διαφορετική διατομή μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα κατανομής των εντατικών μεγεθών και των ροπών αντοχής δεν μετέβαλαν την τάξη μεγέθους τους. Επομένως, τα εξωτερικά υποστυλώματα υπερδιαστασιολογήθηκαν και για τα υπόλοιπα μέλη υπολογίστηκαν πολύ μικρές αντοχές σε κάμψη. Ωστόσο, τα πλαίσια εμφάνισαν περισσότερες πλαστικές αρθρώσεις στις δοκούς διότι διαστασιολογήθηκαν οριακά για τα δρώντα μεγέθη.





Εικόνα 3-9: Παραδείγματα Πλαστικών Αρθρώσεων Πλαισίων

Ανάλογη εικόνα εμφάνισαν όλα τα πλαίσια που μελετήθηκαν. Παρόλο που η πλαστικοποίηση του φορέα προσεγγίζει την επιθυμητή εικόνα κατάρρευσης του, δεν υιοθετήθηκε ο συγκεκριμένος σχεδιασμός λόγω των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν για την αντοχή των διατομών.

### 3.2.2 ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΝΟΜΟΥ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΟΚΟΥΣ

Όπως, αναφέρθηκε οι δοκοί λόγω της λειτουργίας τους εντός του πλαισίου μελετώνται σε κάμψη διότι θεωρείται πως δεν αναπτύσσουν ιδιαίτερα μεγάλη αξονική ένταση. Στο πλαίσιο αυτό, επιλέχθηκε να μην ληφθεί υπόψη ο νόμος της αλληλεπίδρασης που εφαρμόστηκε στο αρχικό πρόβλημα σχεδιασμού.

Οι περιορισμοί που αφορούν τις δοκούς εφαρμόζονται στα άκρα τους και στη δεδομένη περίπτωση είναι οι εξής:

$$s^i \leq M_{pl,Rd}^m \quad \underline{3-1}$$

$$-M_{pl,Rd}^m \leq s^i \quad \underline{3-2}$$

όπου

$s^i$  : εντατικά μεγέθη ροπών αρχής και πέρατος κάθε μέλους

$M_{pl,Rd}^m$  : αντοχή σχεδιασμού σε κάμψη της ομάδας μελών στη οποία ανήκει το εξεταζόμενο στοιχείο

Η μητρική έκφραση του διαγράμματος αλληλεπίδρασης των δοκών που προκύπτει είναι η εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^i \\ M_j^i \\ M_k^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} M_{pl,Rd}^m \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3-3$$

Μητρική Μορφή Επιφάνειας Διαρροής Δοκών Πλαισίου

Επομένως, οι περιορισμοί που περιγράφουν πλέον την διαρροή των μελών του φορέα είναι 4 για κάθε δοκό και 16 για κάθε υποστυλώμα. Το νέο μητρώο ανισοτικών περιορισμών  $A_{ineq}$  που καταρτίστηκε είναι διαστάσεων  $(16np+4dok) \times (3nel+ngr)$  και το διάνυσμα  $b_{ineq}$  διαστάσεων  $(16np+4dok) \times 1$ . Οι συντελεστές των δράσεων επι των δοκών τοποθετούνται μέσω του αλγορίθμου για κάθε στοιχείο  $i$  στις γραμμές  $(16yp+4i-3)$ :  $(16yp+4i)$  και στις στήλες  $(3i-1)$ :  $3i$ . Αντίστοιχα, οι συντελεστές της ροπής αντοχής της ομάδας  $m$  στην οποία ανήκει το μέλος  $i$  τοποθετούνται στον πίνακα  $A_{ineq}$ , στις γραμμές  $(16yp+4i-3)$ :  $(16yp+4i)$  και στην στήλη  $3nel+m$ .

### 3.2.2.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Τα αποτελέσματα της περιγραφείσας διαδικασίας δεν παρουσίασαν αξιοσημείωτες διαφορές σε σχέση με τον αρχικό σχεδιασμό.

ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
Group	1	2	3	4
MPL σχεδιασμού (kNm)	52,92	66,07	50,82	15,18
NPL σχεδιασμού (kN)	333,39	416,24	20,00	115,34
f (τιμή αντικειμενικής συνάρτησης)	7231			

Πίνακας 3-3: Αποτελέσματα Αντοχών Σχεδιασμού

Με την ανάλυση αυτή προέκυψε πως τα εξωτερικά υποστυλώματα του πλαισίου και οι δοκοί του πρώτου ορόφου απαιτούν αυξημένη αντοχή σχεδιασμού σε κάμψη ενώ στα εσωτερικά υποστυλώματα και στις δοκούς του πρώτου ορόφου περιορίστηκε η απαιτούμενη διατομή. Η μεταβολή αυτή στον σχεδιασμό είχε σαν αποτέλεσμα να αυξηθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά 6,5%, σε σχέση με την αυτήν που έλαβε με την επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Επιπλέον, στο παρόν πρόβλημα παρατηρήθηκε ότι οι αξονικές δράσεις επί των δοκών διατηρήθηκαν και σε ορισμένα μέλη αυξήθηκαν, με αποτέλεσμα να μην καθίσταται επιτρεπτή η απαλοιφή της επιφάνειας διαρροής από τα μέλη αυτά.

Το μοντέλο πλαστικών αρθρώσεων που εξήχθη μέσω του προγράμματος δεν διαφοροποιήθηκε από αυτό που προήλθε από τον αρχικό πρόβλημα για τα υπό μελέτη πλαίσια.

Επομένως, οι νέοι περιορισμοί που εισήχθησαν δεν καθιστούν τον σχεδιασμό επαρκέστερο σε σχέση με τον αρχικό.

### 3.2.3 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

#### 3.2.3.1 ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΑΣΤΟΧΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Προκειμένου να εξασφαλιστεί η επιθυμητή αστοχία που υπαγορεύει ο Ε.Α.Κ. επιχειρήθηκε να μειωθεί η αντοχή των διατομών των δοκών. Αυτό επιτεύχθηκε τοποθετώντας συντελεστή βαρύτητας στο συνολικό μήκος των μελών κοινής διατομής των δοκών στην αντικειμενική συνάρτηση. Με τον τρόπο αυτό κατά την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος οι αντοχές σχεδιασμού των δοκών οφείλουν να λάβουν μικρότερες τιμές, δεδομένου ότι διαθέτουν συντελεστή που τις καθιστά αυξητικό παράγοντα.

Στο παρόν παράδειγμα που αναλύεται αναζητήθηκε ο κατάλληλος συντελεστής και προέκυψε ότι πρέπει να ισούται με 2.

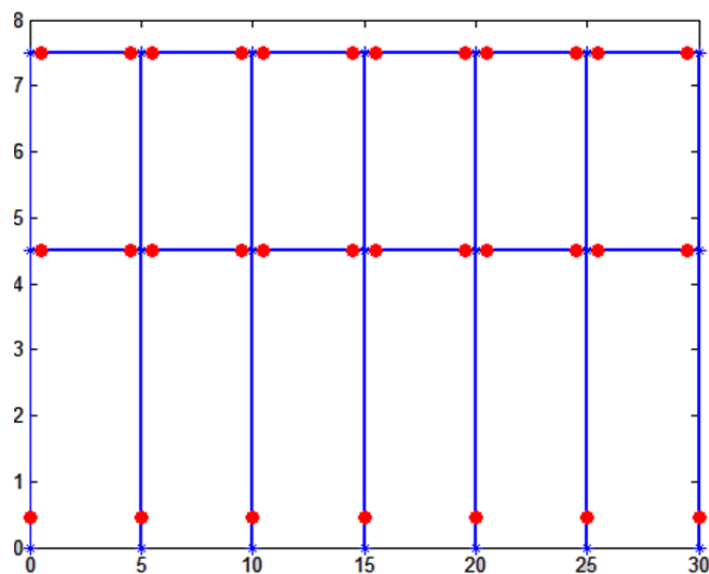
$$c(1,1:(3nel+4)) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 : l^1 \quad l^2 \quad 2l^3 \quad 2l^4]$$

3-4

Διάγραμμα Αντικειμενικής Συνάρτησης

ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
Group	1	2	3	4
MPL σχεδιασμού (kNm)	376,93	30,01	23,09	11,54
NPL σχεδιασμού (kN)	2374,67	189,09	175,47	87,74
f (τιμή αντικειμενικής συνάρτησης)	8165			

Πίνακας 3-4: Αποτελέσματα Αντοχών Σχεδιασμού



Εικόνα 3-10: Μηχανισμός Κατάρρευσης Φορέα

Ο Ε.Α.Κ. σε περίπτωση που δεν είναι δυνατόν να αποφευχθεί ο σχηματισμός μαλακού ορόφου, επιτρέπει να περιοριστούν οι πλαστικές αρθρώσεις στα ενδιάμεσα υποστυλώματα ενός πλαισίου. Προκειμένου να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος μηχανισμός αστοχίας τοποθετήθηκαν συντελεστές βαρύτητας στις ροπές αντοχής σχεδιασμού των μελών των εσωτερικών υποστυλωμάτων και των δοκών. Με την διαδικασία αυτή υποτιμώνται οι μεταβλητές των αντοχών για τα συγκεκριμένα μέλη μέσω της αντικειμενικής συνάρτησης.

Για το υπό μελέτη πλαίσιο προέκυψε πως ο συντελεστής για τον οποίο προκύπτει ο επιθυμητός μηχανισμός είναι κοινός γι' αυτά τα στοιχεία και ισούται με 3.

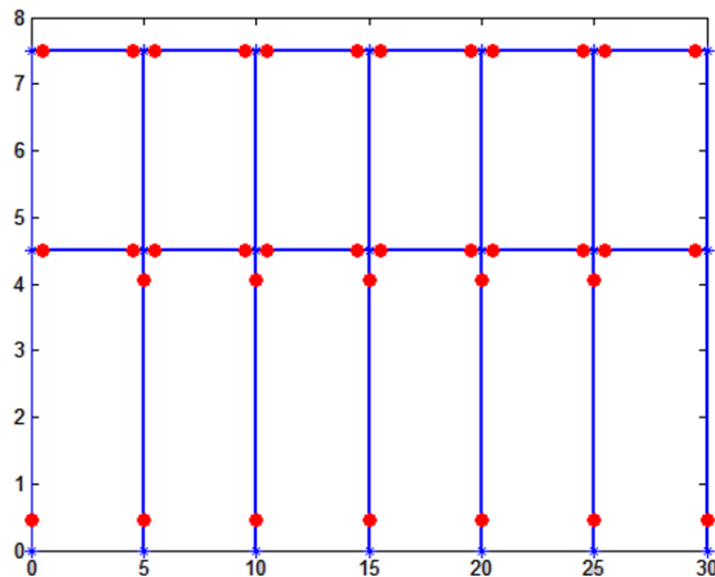
$$c(1,1:(3nel+4)) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0:l^1 \quad 3l^2 \quad 3l^3 \quad 3l^4]$$

3-5

Διάγραμμα Αντικειμενικής Συνάρτησης

ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
Group	1	2	3	4
MPL σχεδιασμού (kNm)	567,51	13,61	10,47	5,24
NPL σχεδιασμού (kN)	3575,34	85,75	79,57	39,79
f (τιμή αντικειμενικής συνάρτησης)	9651			

Πίνακας 3-5: Αποτελέσματα Αντοχών Σχεδιασμού



Εικόνα 3-11: Μηχανισμός Κατάρρευσης Φορέα

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις ανωτέρω διαδικασίες σχεδιασμού οδήγησαν σε υπερδιαστασιολόγηση των εξωτερικών υποστυλωμάτων στο οποίο συμβάλλει και το γεγονός ότι η αντοχή σχεδιασμού τους στην αντικειμενική συνάρτηση δεν έχει αυξητικό παράγοντα. Ιδίως, στην δεύτερη περίπτωση, όπου οι διατομές όλων των υπολοίπων μελών αναγκάζονται

μέσω της αντικειμενικής συνάρτησης να υποτιμηθούν, η διατομή των εξωτερικών υποστυλωμάτων εμφανίζει μεγαλύτερη απαιτούμενη αντοχή σε κάμψη.

Ο σχεδιασμός αυτός υλοποιήθηκε με δεδομένο το μηχανισμό κατάρρευσης. Ωστόσο, οι προτεινόμενες μεθοδολογίες δεν έχουν ευρεία εφαρμογή. Οι συντελεστές που προέκυψαν αφορούν στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Για κάθε φορέα που μελετάται οι συντελεστές διαφέρουν και σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δύσκολο ή και αδύνατο να προσδιοριστούν, ιδιαιτέρως για φορείς με τυχαία μορφολογία.

Οι συντελεστές αυτοί λαμβάνουν οποιαδήποτε θετική τιμή. Επίσης, με την λογική που αναπτύχθηκε, μπορούν να πραγματοποιηθούν άπειροι συνδυασμοί των συντελεστών αυτών (συντελεστής βαρύτητας για τα εξωτερικά υποστυλώματα μικρότερος της μονάδας και συντελεστές μεγαλύτεροι της μονάδας για τα υπόλοιπα μέλη κλπ.).

### 3.2.3.2 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΑΝΤΟΧΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΟΚΩΝ

Ο σχεδιασμός που επιχειρήθηκε σε αυτή τη περίπτωση αποσκοπεί στον περιορισμό των αξονικών εντάσεων που αναπτύσσονται στις δοκούς μέσω της αντικειμενικής συνάρτησης. Στη συνάρτηση, προς ελαχιστοποίηση του προβλήματος, εισήχθησαν και τα μεγέθη αντοχών σε αξονική δύναμη των δοκών. Στόχος είναι μέσω της ελαχιστοποίησης της αντοχής να περιοριστούν και οι αντίστοιχες δρώσες εντάσεις.

Μέσω της εξίσωσης 2-5 η οποία προσδιορίζει την σχέση αντοχών σε κάμψη και αξονική δύναμη των μελών με κοινή διατομή, η αντικειμενική συνάρτηση μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \min f(M_{pl,Rd}^m, N_{pl,Rd}^{m+2}) = \\ \min \sum_{i=1}^2 l^i M_{pl,Rd}^i + \min \sum_{i=3}^m l^i N_{pl,Rd}^i = \\ = \min \sum_{i=1}^2 l^i M_{pl,Rd}^i + \min \sum_{i=3}^m (1+c(i))l^i M_{pl,Rd}^i \end{aligned} \tag{3-6}$$

Επομένως το νέο διάνυσμα της εισαχθείσας αντικειμενικής συνάρτησης έχει τη μορφή:

$$c(1,1:(3nel+4)) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0; \overbrace{l^1 \quad l^2 \quad (1+c(i))l^3 \quad (1+c(i))l^4}^4] \tag{3-7}$$

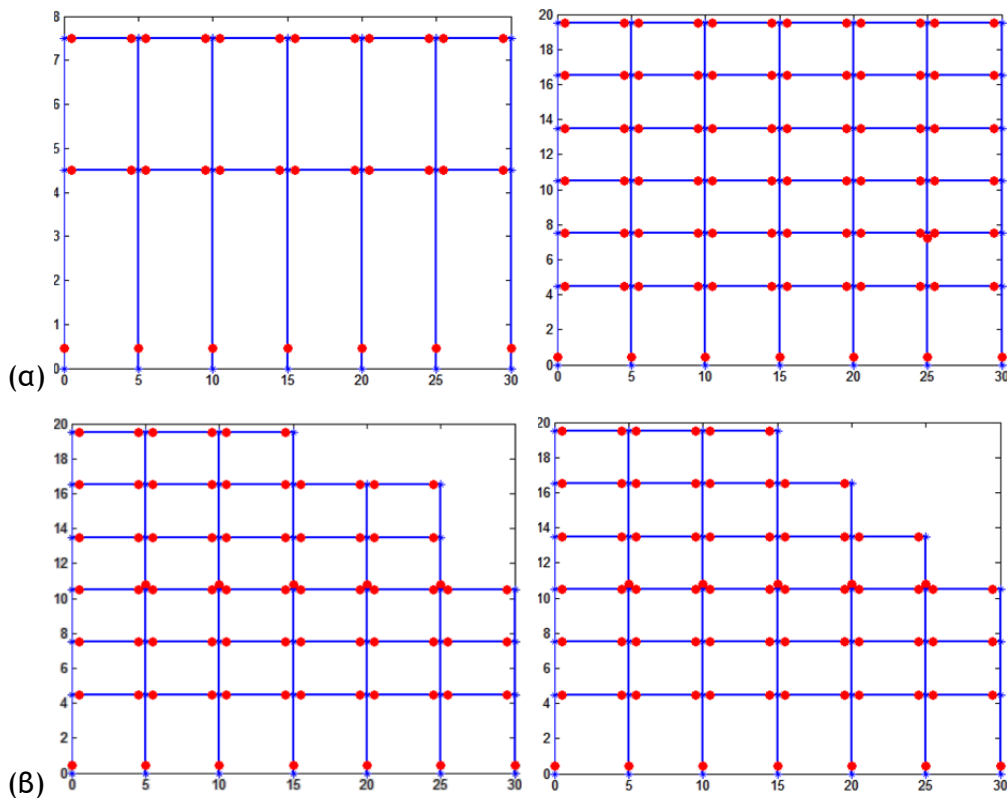
#### Νέο Διάνυσμα Αντικειμενικής Συνάρτησης

ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
Group	1	2	3	4
MPL σχεδιασμού (kNm)	517,56	32,22	4,6X10 <sup>^</sup> (-16)	12,39
NPL σχεδιασμού (kN)	3260,65	203,01	3,54X10 <sup>^</sup> (-15)	94,19
f (τιμή αντικειμενικής συνάρτησης)	12169			

Πίνακας 3-6: Αποτελέσματα Αντοχών Σχεδιασμού

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν οδήγησαν σε ελαχιστοποίηση των αξονικών εντάσεων της μιας ομάδας δοκών ενώ στην άλλη διατήρησαν υψηλές τιμές. Επιπλέον, τα εξωτερικά υποστυλώματα του πλαισίου εμφανίστηκαν υπερδιαστασιολογημένα σε σχέση με τα υπόλοιπα μέλη του φορέα. Σε όλα τα πλαίσια που μελετήθηκαν παρουσιάστηκε η ίδια κατανομή εντατικών μεγεθών και ανάλογων αντοχών. Επομένως, ο αρχικός στόχος δεν επετεύχθη καθώς εμφανίστηκαν ομάδες δοκών οι οποίες αναπτύσσουν αξιοσημείωτες αξονικές εντάσεις.

Ωστόσο, όλοι οι φορείς που διαθέτουν ίδιο αριθμό δοκών και υποστυλωμάτων ανά όροφο (α) και προέκυψαν από τον ανωτέρω σχεδιασμό, εμφάνισαν την επιθυμητή εικόνα κατάρρευσης. Τα πλαίσια που έχουν τυχαία μορφή (β) εμφάνισαν κάποιες πλαστικές αρθρώσεις στη βάση των εσωτερικών υποστυλωμάτων τους που αποτελούν ανεκτή αστοχία από τον Ε.Α.Κ..



Εικόνα 3-12: Μηχανισμοί Κατάρρευσης Φορέα

### 3.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ

Οι ανωτέρω επεμβάσεις που επιχειρήθηκαν στο πρόγραμμα δεν βελτίωσαν τα αποτελέσματα του αλγορίθμου σε σχέση με τις αξονικές εντάσεις που αναπτύχθηκαν στις δοκούς. Επομένως, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη κατά το σχεδιασμό η επιφάνεια διαρροής στις δοκούς.

Επιπλέον, η βέλτιστη εικόνα πλαστικών αρθρώσεων των υπό μελέτη φορέων ελήφθη για περιπτώσεις σχεδιασμού, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να εμφανιστούν σε μια ρεαλιστική

κατασκευή. Επομένως, διατηρείται ο αρχικός σχεδιασμός με τους περιορισμούς που αναπτύχθηκαν στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο.

Οι πλαστικές αρθρώσεις που εμφανίζονται μέσω του αρχικού αλγορίθμου στα μέλη του φορέα, οφείλονται όπως αναφέρθηκε, στο γεγονός ότι τουλάχιστον ένας από τους ανισοτικούς περιορισμούς που επιβάλλει το διάγραμμα αλληλεπίδρασης για κάθε διατομή μετατρέπεται σε ισότητα. Επειδή, από τον σχεδιασμό προκύπτουν οι ελάχιστες απαιτούμενες αντοχές των διατομών παρουσιάζονται πολλές σχέσεις ισότητας και είναι πιθανόν οι πλαστικές αρθρώσεις που εμφανίζονται, να είναι περισσότερες σε αριθμό από τον βαθμό υπερστατικότητας του πλαισίου. Επίσης, είναι απαραίτητο να αναφερθεί πως με την διαδικασία που ακολουθείται δεν είναι γνωστή η σειρά με την οποία πλαστικοποιούνται οι διατομές αυτές, ώστε να παρακολουθείται η διαδοχική κατάρρευση του φορέα. Επομένως, είναι πιθανόν ο φορέας να έχει μετατραπεί σε μηχανισμό με λιγότερες πλαστικές αρθρώσεις από αυτές που προκύπτουν από το πρόγραμμα, δημιουργώντας μηχανισμό μαλακού ορόφου ή τον πλάγιο μηχανισμό κατάρρευσης που υποδεικνύει ο Ε.Α.Κ.. Ο αλγόριθμος παρουσιάζει για τα δεδομένα εντατικά μεγέθη που έχουν αναπτυχθεί το σύνολο των πλαστικοποιημένων διατομών. Προκειμένου, να προκύψει η ρεαλιστική καταπόνηση της κατασκευής και ο μηχανισμός αστοχίας της είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθεί ανάλυση push over. Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν θα προσδιορίσουν ποιες από τις πλαστικοποιημένες διατομές που παρουσιάστηκαν αναπτύσσονται και τον τελικό μηχανισμό κατάρρευσης του φορέα.





#### 4 ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΠΡΟΤΥΠΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ

Ο βέλτιστος σχεδιασμός των υπό μελέτη μεταλλικών πλαισίων, προέκυψε από τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2. Ωστόσο, από τα αποτελέσματα του μηχανισμού κατάρρευσης που αναπτύχθηκε στους ανωτέρω φορείς, αναδείχθηκε η ανάγκη ελέγχου της ορθότητας τους, με αξιοποίηση του προγράμματος SAP. Με το συγκεκριμένο πρόγραμμα διενεργείται ανάλυση push over, επιδιώκεται η εύρεση, του μηχανισμού κατάρρευσης που προκύπτει για κάθε κατασκευή, του μέγιστου φορτίου που δύναται να παραλάβει καθώς και των εντατικών μεγεθών που καταπονούν τα μέλη της. Τα αποτελέσματα αυτά θα κρίνουν την επάρκεια της αναπτυσσόμενης μεθοδολογίας και των παραμέτρων που λαμβάνονται υπ' όψη για τον σχεδιασμό των κατασκευών.

Για την εισαγωγή των φορέων στο SAP επιλέχθηκαν οι βέλτιστες πρότυπες διατομές που αποτελούν τα πλαίσια, μέσω του αλγορίθμου, που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.4. Οι επιλεγείσες πρότυπες διατομές εμφανίζουν μεγαλύτερη αντοχή από τις ελάχιστες απαιτούμενες που προσδιορίστηκαν μέσω της matlab. Γι' αυτό τον λόγο το φορτίο που δύναται να παραλάβουν έως την κατάρρευση τους παρουσιάζει αύξηση σε σχέση με την τριγωνική κατανομή για την οποία σχεδιάστηκαν. Προκειμένου να προσδιοριστεί ο φορτικός συντελεστής  $\lambda$ , ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με τη συνολική αρχική φόρτιση σχεδιασμού οδηγεί στην κατάρρευση των φορέων που αποτελούνται από πρότυπες διατομές, εφαρμόστηκε η μεθοδολογία της οριακής ανάλυσης. Στο πλαίσιο αυτό αναπτύχθηκε αλγόριθμος στην matlab με στόχο την βελτιστοποίηση και συγκεκριμένα την μεγιστοποίηση του όρου  $\lambda$ .

## 4.1 ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1.5.3, στο πρόβλημα οριακής ανάλυσης επιπέδων πλαισίων με στόχο την εύρεση της τιμής  $\lambda$ , οι περιορισμοί που εισάγονται αφορούν σε:

- την ισορροπία των εντάσεων που αναπτύσσονται επί της κατασκευής και των εξωτερικών φορτίσεων ανά βαθμό ελευθερίας και
- το διάγραμμα αλληλεπίδρασης των μελών του φορέα, το οποίο οριοθετείται από τις γραμμικές σχέσεις που διατυπώθηκαν στο Κεφάλαιο 2.3.2.2. [5]

### 4.1.1 ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για την επίλυση του προβλήματος οι αντοχές των μελών κάθε κατασκευής είναι δεδομένες μέσω της αρχικής επίλυσης του προβλήματος σχεδιασμού. Οι μεταβλητές οι οποίες επιδιώκεται να προσδιοριστούν είναι τα εντατικά μεγέθη που καταπονούν τα μέλη του πλαισίου στην οριακή κατάσταση κατάρρευσης του καθώς και ο μέγιστος φορτικός συντελεστής  $\lambda$  που προσδιορίζει τη τιμή του φορτίου κατάρρευσης.

Επομένως, το δάνυσμα των μεταβλητών στην περίπτωση αυτή είναι διαστάσεων  $(3nel+1) \times 1$  και εμφανίζει την κάτωθι μορφή:

$$\{x\}^T = [\{s\}, \lambda] \quad 4-1$$

#### 4.1.1.1 ΟΡΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Για την επίλυση του προβλήματος απαιτήθηκε οι τιμές των εντατικών μεγεθών που θα προσδιοριστούν για κάθε μέλος  $[N^i \ M_j^i \ M_k^i]$ , να μην ξεπερνούν, κατά απόλυτη τιμή, την αντίστοιχη αντοχή σε κάμψη και αξονική δύναμη που υπαγορεύει η πρότυπη διατομή που έχει επιλεγεί για το υπό μελέτη στοιχείο του φορέα. Τα μέλη των πλαισίων για την επίλυση αυτού του προβλήματος διατήρησαν την ομαδοποίηση που ορίστηκε κατά τον σχεδιασμό τους. Η παράμετρος αυτή εμφανίζεται στο παρόν πρόβλημα καθώς τα στοιχεία του φορέα που ανήκουν στην ομάδα μελών κοινής διατομής έλαβαν την ίδια πρότυπη διατομή.

Επιπλέον, όσο αφορά στο συντελεστή  $\lambda$  απαιτήθηκε να λαμβάνει θετικές τιμές και δόθηκε τυπικά άνω όριο, για το οποίο θεωρήθηκε η τιμή 150.

Με τη διαδικασία αυτή συντάχθηκαν δυο μητρώα διαστάσεων  $(3nel+1) \times 1$  που περιέχουν τις κατώτατες (lb) και ανώτατες (ub) τιμές των μεταβλητών.

$$ub^T = [\overbrace{\{N_{pl,Rd}^m \ M_{pl,Rd}^m \ M_{pl,Rd}^m\}}^{3*nel}, 150] \quad 4-2$$

$$lb^T = [\overbrace{\{-N_{pl,Rd}^m \ -M_{pl,Rd}^m \ -M_{pl,Rd}^m\}}^{3*nel}, 0] \quad 4-3$$

Ο δείκτης  $m$  χαρακτηρίζει την ομάδα μελών κοινής διατομής, ώστε να ληφθούν οι αντίστοιχες αντοχές της πρότυπης διατομής που την αποτελούν.

#### 4.1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΜΗΤΡΩΪΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

##### 4.1.2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Η εξίσωση ισορροπίας  $[B]\{s\} = [P]$  (εξίσωση 1.2) που ελήφθη κατά τον σχεδιασμό του φορέα στην παρούσα επίλυση έλαβε τη μορφή:

$$[B]\{s\} = \lambda[P] \quad 4-4$$

Στην μεθοδολογία που αναπτύσσεται στο παρόν κεφάλαιο, η φόρτιση δεν θεωρείται δεδομένη και επιδιώκεται να προσδιοριστεί. Το μητρώο  $[P]$  λαμβάνει διαστάσεις  $nfx1$  και ενδεικτικές τιμές φορτίων στους βαθμούς ελευθερίας που δρουν. Συγκεκριμένα, στην παρούσα διαδικασία το διάνυσμα των δράσεων έλαβε τις τιμές της τριγωνικής φόρτισης με την οποία θεωρήθηκε πως καταπονείται κάθε κατασκευή κατά την επίλυση του αρχικού προβλήματος σχεδιασμού. Με τον τρόπο αυτό, κατά την τελική επίλυση, προσδιορίστηκε το επιπλέον φορτίο που είναι δυνατόν να παραλάβει ο φορέας που αποτελείται από πρότυπες διατομές, σε σχέση με τον αρχικό φορέα του οποίου τα μέλη διαθέτουν τις ελάχιστες απαιτούμενες αντοχές, όπως υποδείχθηκαν από την επίλυση του προβλήματος σχεδιασμού.

Το μητρώο ισορροπίας  $[B]$ , του οποίου η κατάρτιση περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 1.5.3.1.1 είναι διαστάσεων  $nfx3nel$ . Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη τις διαστάσεις του διανύσματος των μεταβλητών και τις απαιτήσεις περί πολλαπλασιασμού πινάκων, στο παρόν πρόβλημα δημιουργήθηκε το επαυξημένο μητρώο  $[B']$ , διαστάσεων  $nfx(3nel+1)$ . Στην τελευταία στήλη του μητρώου εισήχθησαν οι φορτίσεις που περιλαμβάνονται στον πίνακα  $[P]$  ως  $[-P]$ . Επομένως, για κάθε βαθμό ελευθερίας του φορέα το γινόμενο των μητρώων  $[B']$ ,  $[x]^T$  ορίζουν τις εξισώσεις:

$$\{B\}\{s\} - \lambda\{P\} = 0 \quad 4-5$$

όπου:  $\{B\}$  ( $1x3nel$ ),  $\{s\}$  ( $3nelx1$ ),  $\{P\}$  ( $1x1$ )

Η τελική σχέση που ελήφθη ως περιορισμός για την ισορροπία των υπό μελέτη φορέων είναι η εξής:

$$[B]\{x\}^T = \{b\}, \{b\} = 0 \quad 4-6$$

Το μητρώο  $\{b\}$  ορίζει το μηδενικό διάνυσμα διαστάσεων  $nfx1$ .

##### 4.1.2.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ

Στην παρούσα διαδικασία, η αλληλεπίδραση των εντατικών μεγεθών των μελών των πλαισίων, υπόκειται στους γραμμικούς περιορισμούς που αναπτύχθηκαν και παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2.3.2.2 και εκφράζονται με τις εξισώσεις 2-7 και 2-8.

Στο συγκεκριμένο στάδιο του αλγορίθμου, οι τιμές των αντοχών των μελών του φορέα που μελετάται είναι γνωστές. Επομένως, είναι δυνατόν για κάθε μέλος να υπολογιστούν οι συντελεστές των εντατικών μεγεθών  $a_m = \frac{1}{N_{pl,Rd}^m}, c_m = \frac{1}{M_{pl,Rd}^m}$ . Με την διαδικασία αυτή προέκυψαν 16 ανισοτικοί περιορισμοί, για κάθε στοιχείο του εξεταζόμενου φορέα, με την κάτωθι μητρωϊκή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1.5a_m & c_m & 0 \\ -1.5a_m & c_m & 0 \\ -1.5a_m & -c & 0 \\ 1.5a_m & -c_m & 0 \\ 0.5a_m & -c_m & 0 \\ 0.5a_m & c_m & 0 \\ -0.5a_m & c_m & 0 \\ -0.5a_m & -c_m & 0 \\ -1.5a_m & 0 & c_m \\ -1.5a_m & 0 & -c_m \\ 1.5a_m & 0 & -c_m \\ 1.5a_m & 0 & c_m \\ 0.5a_m & 0 & c_m \\ -0.5a_m & 0 & c_m \\ 0.5a_m & 0 & -c_m \\ -0.5a_m & 0 & -c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^i \\ M_j^i \\ M_k^i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4-7

Μητρωϊκή Μορφή Επιφάνειας Διαρροής Μέλους Πλαισίου

$$[Aineq^i] \{s\} \leq \{bineq^i\}$$

4-8

Το συνολικό μητρώο συντελεστών των δράσεων όλου του πλαισίου  $[Aineq]$ , στο παρόν πρόβλημα προκύπτει διαστάσεων  $16nel \times (3nel)$  και περιλαμβάνει το σύνολο των συντελεστών των επιμέρους  $[Aineq^i]$  κάθε μέλους. Ο συνολικός πίνακας καταρτίστηκε μέσω του αλγορίθμου τοποθετώντας για κάθε στοιχείο  $i$  του φορέα στις γραμμές  $(16i-15):16i$  και στις στήλες  $(3i-2):3i$  τα επιμέρους μητρώα συντελεστών. Επειδή, στο παρόν πρόβλημα το διάνυσμα των μεταβλητών είναι διαστάσεων  $(3nel+1) \times 1$  εισήχθη στο συνολικό μητρώο των συντελεστών των ανισοτικών περιορισμών μια επιπλέον μηδενική στήλη ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του πολλαπλασιασμού πινάκων. Το επαυξημένο μητρώο  $[Aineq]$  του προβλήματος οριακής ανάλυσης προέκυψε διαστάσεων  $(16nel+1) \times 3nel$ .

Το διάνυσμα  $\{bineq\}$  περιλαμβάνει διαδοχικά τα μητρώα  $\{bineq^i\}$  και προκύπτει διαστάσεων  $16nel \times 1$ .

Η τελική σχέση που ελήφθη ως περιορισμός για την διαρροή των μελών στους υπό μελέτη φορείς είναι η εξής:

$$[A_{ineq}]\{x\}^T \leq \{b_{ineq}\} \quad 4-9$$

#### 4.1.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

##### 4.1.3.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος αποσκοπεί στην μεγιστοποίηση του μεγεθυντικού συντελεστή  $\lambda$ .

Εφ' όσον, το σύνολο των μεταβλητών του προβλήματος είναι  $3nel+1$  το Διάνυσμα  $[c]$  της αντικειμενικής συνάρτησης που χρησιμοποιήθηκε στο πρόγραμμα οφείλει να είναι διαστάσεων  $1 \times (3nel+1)$ .

Στις θέσεις  $1 \times (3nel)$  οι τιμές που εισήχθησαν είναι μηδενικές, ενώ στην θέση  $3nel+1$  τοποθετήθηκε ο συντελεστής  $-1$ . Τοποθετώντας στο μητρώο  $[c]$ , στη θέση του συντελεστή της μεταβλητής  $\lambda$  αρνητική τιμή, μετατρέπεται η διαδικασία ελαχιστοποίησης σε μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την επίλυση, ο αλγόριθμος αναζητά την ελάχιστη αρνητική τιμή με αποτέλεσμα να αυξάνει διαρκώς, κατά απόλυτη τιμή την μεταβλητή  $\lambda$ .

$$c(1,1:(3nel+1)) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -1] \quad 4-10$$

##### 4.1.3.2 ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

###### Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min(-\lambda) = \min[c]\{x\}^T \quad 4-11$$

###### Περιορισμοί

- Ισότητας:  $[B]\{x\}^T = \{b\}, \{b\} = 0$  [4-6]
- Ανισότητας:  $[A_{ineq}]\{x\}^T \leq \{b_{ineq}\}$  [4-9]

###### Περιορισμοί Μεταβλητών:

$$\{s\} \in R, \lambda \geq 0$$

#### 4.1.3.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ MATLAB

Για την επίλυση του προβλήματος οριακής ανάλυσης μέσω γραμμικού προγραμματισμού εκλήθη ο επιλυτής linprog που διαθέτει η matlab.

```
[y,fy,EXITFLAG,OUTPUT,lambda1] = ...
linprog(c,Aineq,bineq,B,b,lb,ub,[]);
```

Εικόνα 4-1: Εντολή Επίλυσης Προβλήματος σε matlab

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2.3.4.3, στο αριστερό τμήμα της ισότητας διατυπώνονται τα επιθυμητά αποτελέσματα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι τιμές των μεταβλητών που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος εισήχθησαν στο μητρώο  $y$  και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εκχωρήθηκε στην μεταβλητή  $fy$ . Στο δεύτερο μέλος τοποθετούνται τα μητρώα της αντικειμενικής συνάρτησης, των ανισοτικών περιορισμών, των περιορισμών ισότητας καθώς και των ανώτατων και κατώτατων επιτρεπτών ορίων των μεταβλητών. Στην επίλυση του προβλήματος, δεν απαιτήθηκε η αρχικοποίηση των μεταβλητών.

#### 4.1.4 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΦΟΡΕΑ

##### 4.1.4.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ

Μέσω της επίλυσης του προβλήματος οριακής ανάλυσης με χρήση του γραμμικού προγραμματισμού, προσδιορίζονται οι εντάσεις που αναπτύσσονται επί των μελών των μελετώμενων πλαισίων. Λαμβάνοντας υπόψη τα μεγέθη αντοχών των μελών και τις εκτιμώμενες εντάσεις που περιγράφουν την καταπόνηση των κατασκευών, υπολογίστηκαν, μέσω του αλγορίθμου, τα ανηγμένα μεγέθη ροπών αρχής  $\mu_j^i$  και πέρατος  $\mu_k^i$  κάθε μέλους και η ανηγμένη αξονική τους δύναμη  $\nu^i$ . Οι υπολογιζόμενοι όροι απεικονίστηκαν με την αντίστοιχη διαδικασία που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.5 στο οκταγωνικό διάγραμμα αλληλεπίδρασης που εφαρμόστηκε στα μέλη των πλαισίων.

##### 4.1.4.2 ΠΛΑΣΤΙΚΕΣ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε εμφανίζει το μοντέλου πλαστικών αρθρώσεων του φορέα που μελετάται. Παρουσιάζει τον μηχανισμό κατάρρευσης των πλαισίων για το οριακό φορτίο που υπολογίστηκε μέσω της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Προκείμενου να εμφανιστούν τα επιθυμητά αποτελέσματα, ελέγχτηκαν οι συντελεστές Lagrange των ανισοτικών σχέσεων που επιβάλλονται ως περιορισμοί του προβλήματος από την επιφάνεια διαρροής. Για τις περιπτώσεις που οι πολλαπλασιαστές, οι οποίοι προέκυψαν από την διαδικασία βελτιστοποίησης, εμφάνισαν τιμή διαφορετική του μηδενός για μια τουλάχιστον από τις οκτώ ανισοτικές σχέσεις που αφορούν τις διατομές των άκρων κάθε μέλους, το

πρόγραμμα παρουσίασε πλαστικές αρθρώσεις στις θέσεις αυτές, με την ίδια λογική που διατυπώθηκε στο Κεφάλαιο 2.6.

## 4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ PUSH OVER

Για τα πλαίσια με τις βέλτιστες πρότυπες διατομές, όπως προέκυψαν από την διαδικασία του σχεδιασμού, εκτιμήθηκαν με την ανωτέρω διαδικασία τα οριακά φορτία κατάρρευσής τους και οι αντίστοιχοι μηχανισμοί που δημιουργήθηκαν. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε, για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων οι ίδιοι φορείς εισήχθησαν στο λογισμικό SAP και πραγματοποιήθηκε ανάλυση push over [6].

Με την μεθοδολογία αυτή, δημιουργείται η καμπύλη ικανότητας της κατασκευής που μελετάται, η οποία εκφράζει τη μη γραμμική σχέση μεταξύ του οριζόντια επιβαλλόμενου φορτίου και της ανελαστικής μετακίνησης ενός σημείου αναφοράς του πλαισίου. Συνήθως, ως σημείο αναφοράς επιλέγεται το κέντρο μάζας του ανωτέρου ορόφου. Για την δεδομένη κατανομή της επιβαλλόμενης φόρτισης (πχ. τριγωνική) λαμβάνονται διάφορες τιμές της συνολικής δρώσας δύναμης και εκτιμάται η αντίστοιχη μετακίνηση.

Σε κάθε βήμα της ανωτέρω διαδικασίας αυξάνεται η τέμνουσα βάση και πραγματοποιούνται εκ νέου στατικές επιλύσεις λαμβάνοντας υπόψη τη μειωμένη δυσκαμψία των στοιχείων του φορέα που έχουν διαρρεύσει. Όπως έχει αναφερθεί, λαμβάνοντας το απολύτως πλαστικό διάγραμμα  $M-\theta$  για κάθε διατομή, κάθε μέλος όταν διαρρεύσει δεν δύναται να παραλάβει επιπλέον ένταση αλλά παραμορφώνεται μέχρι την αστοχία του. Επομένως, κατά την στατική επίλυση του φορέα, στις θέσεις όπου έχουν αναπτυχθεί πλαστικές αρθρώσεις το διάγραμμα των ροπών κάμψης λαμβάνει σταθερά τη μέγιστη τιμή της πλαστικής ροπής αντοχής των συγκεκριμένων διατομών. Οποιαδήποτε επιπλέον φόρτιση λαμβάνεται από τις πλαστικοποιημένες διατομές ως στροφή, με αποτέλεσμα να πραγματοποιείται ανακατανομή της έντασης στο μέλος λόγω της παραμόρφωσης του. Στην περίπτωση όπου οι διατομές πλαστικοποιούνται λόγω της αλληλεπίδρασης των επιβαλλόμενων μεγεθών κάμψης και αξονικής δύναμης, τότε τα εντατικά μεγέθη σταθεροποιούνται στην μέγιστη τιμή που έλαβαν οι διατομές κατά τη διαρροή τους.

Με την διαδοχική πλαστικοποίηση των διατομών του φορέα καθορίζεται το μέγιστο φορτίο που είναι δυνατόν να παραλάβει η κατασκευή. Τα πλαίσια που μελετώνται καταρρέουν είτε επειδή ο αριθμός των αναπτυσσόμενων πλαστικών αρθρώσεων ξεπερνά τον βαθμό υπερστατικότητας του πλαισίου, είτε επειδή έχει αναπτυχθεί μηχανισμός ορόφου, ή πλάγιος μηχανισμός στην εκάστοτε κατασκευή που μελετάται. Η ανάπτυξη ενός τέτοιου μηχανισμού έχει σαν αποτέλεσμα το φορτίο να παραλαμβάνεται από τις πλαστικές αρθρώσεις που δημιουργήθηκαν μέχρι την αστοχία τους και κατ' επέκταση του φορέα.

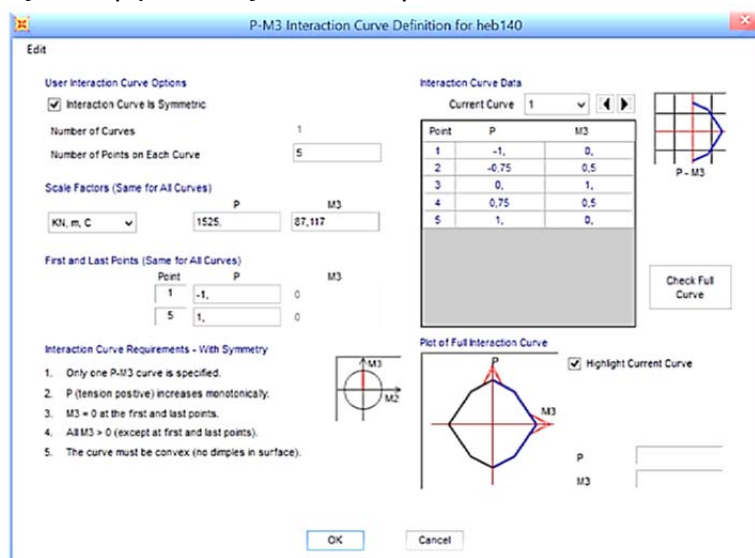
### 4.2.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Προκειμένου τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το SAP να είναι συγκρίσιμα με αυτά που προέκυψαν από την διαδικασία της οριακής ανάλυσης στη matlab πρέπει να εισαχθούν κοινές παράμετροι στα δεδομένα των δυο προβλημάτων.

Για τον λόγο αυτό, στο λογισμικό διαμορφώθηκαν οι εξεταζόμενοι φορείς με συνδέσεις ροπής μεταξύ των μεταλλικών μελών τους και πακτώσεις στη βάση του πλαισίου. Τα μέλη έλαβαν τις πρότυπες διατομές οι οποίες προέκυψαν από τον σχεδιασμό του πλαισίου και θεωρήθηκε ότι το υλικό που τις αποτελεί είναι χάλυβας κατηγορίας S355. Το διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων του επιλεγόμενου χάλυβα ελήφθη χωρίς κλάδο κράτυνσης.

Τα φορτία που εισήχθησαν στο πρόγραμμα ισούνται με τις δρώσες δυνάμεις που περιλαμβάνονται στο μητρώο  $[P]$  και τοποθετήθηκαν στους αντίστοιχους κόμβους. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ο μεγεθυντικός συντελεστής  $\lambda$  που προέκυψε από το sap και να συγκριθεί με τον αντίστοιχο που υπολογίστηκε από την οριακή ανάλυση που πραγματοποιήθηκε μέσω matlab.

Για την διεξαγωγή της επιθυμητής ανάλυσης ορίστηκαν στα άκρα των μελών οι περιορισμοί στους οποίους υπόκεινται οι διατομές όπως εισήχθησαν στον αλγόριθμο της matlab. Συγκεκριμένα, σε κάθε διατομή του εξεταζόμενου φορέα απαιτήθηκε τα ανηγμένα εντατικά μεγέθη να αλληλεπιδρούν με βάση την γραμμικοποιημένη οκταγωνική επιφάνεια διαρροής που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.3.2.2. Για κάθε πρότυπη διατομή του φορέα ορίστηκαν οι αντοχές σε κάμψη και αξονική δύναμη.

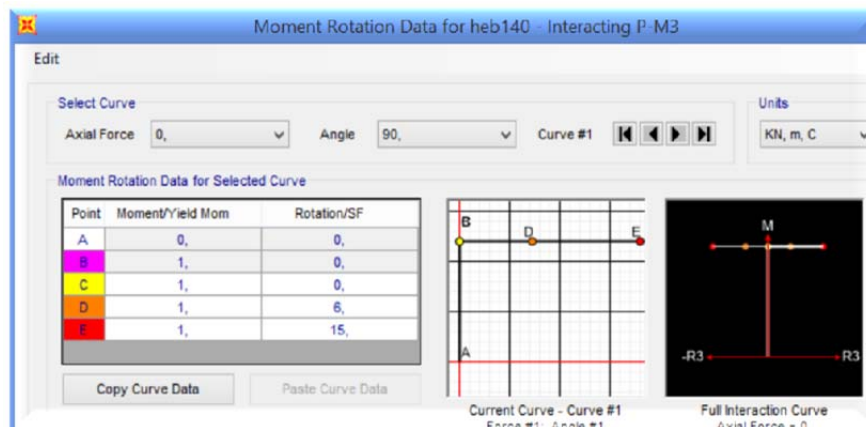


Εικόνα 4-2: Διάγραμμα Αλληλεπίδρασης SAP

Επιπλέον, από την περιγραφή της ανάλυσης προέκυψε πως για κάθε διατομή του πλαισίου είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οι χαρακτηριστικές τιμές των γωνιών στροφής διαρροής και αστοχίας. Επειδή, η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στη matlab βασίστηκε στο



στατικό θεώρημα το οποίο αγνοεί τις παραμορφώσεις του φορέα οι παράγοντες αυτοί τροποποιήθηκαν καταλλήλως. Η στροφή διαρροής για κάθε διατομή ορίστηκε μηδενική ώστε μοναδικό κριτήριο για την διαρροή των διατομών να αποτελεί η αναπτυσσόμενη ροπή επί του στοιχείου του μέλους και το διάγραμμα αλληλεπίδρασης. Η ροπή που δύναται να παραλάβει κάθε διατομή μετά τη διαρροή της λαμβάνει σταθερή τιμή μικρότερη ή ίση με την πλαστική ροπή αντοχής της (λόγω της αλληλεπίδρασης με την αξονική δύναμη) μέχρι την αστοχίας της. Με τα αντίστοιχα κριτήρια προσδιορίστηκε η διαρροή των άκρων των μελών και στον αλγόριθμο της matlab που αναπτύχθηκε. Επίσης, η στροφή αστοχίας σε όλα τα μέλη έλαβε ίδια τιμή καθώς η αστοχία των πλαστικών διατομών του φορέα δεν αποτελεί απαραίτητη πληροφορία για την σύγκριση των μεθοδολογιών.



Εικόνα 4-3: Διάγραμμα M-G Διατομών στο SAP

Το πρόγραμμα sap πραγματοποιεί μη γραμμική ανάλυση για τον εκάστοτε φορέα και εκτιμά με βάση την ασκούμενη επ' αυτού δύναμη την αντίστοιχη μετακίνηση του σημείου που θεωρείται ο κόμβος αναφοράς. Σε κάθε βήμα της ανάλυσης όπου το φορτίο αυξάνεται ο φορέας παραμορφώνεται. Ανάλογα με την στροφή που λαμβάνουν οι διατομές των μελών του και σύμφωνα τους νόμους περί διαρροής που διατυπώθηκαν προκύπτουν οι πλαστικές αρθρώσεις. Ωστόσο η υπολογιζόμενη μετακίνηση δεν ανταποκρίνεται σε ρεαλιστική πληροφορία καθώς οι οριακές τιμές των γωνιών που εισήχθησαν δεν ανταποκρίνονται στις πραγματικές.

Στο πρόγραμμα δίνεται η εντολή να εκτελέσει μια ανάλυση push over για μετακίνηση κατασκευής 2 μέτρων. Στόχος αυτού του περιθωρίου που δίνεται είναι να επιτραπούν στις κρίσιμες διατομές να λάβουν την απαιτούμενη στροφή διαρροής και να παρατηρηθεί η αλληλουχία με την οποία δημιουργούνται οι πλαστικές αρθρώσεις στον φορέα. Στην περίπτωση που σε κάποιο από τα βήματα δημιουργηθεί μηχανισμός ορόφου, ή πλάγιος μηχανισμός ή εάν ο αριθμός των πλαστικών αρθρώσεων έχει ξεπεράσει τον βαθμό υπερστατικότητας της κατασκευής, το πλαίσιο θεωρείται ότι αποτελεί μηχανισμό. Στο σημείο

αυτό λαμβάνεται ο πλαστικός μηχανισμός που αναπτύσσει ο φορέας και ο οποίος συγκρίνεται με τον αντίστοιχο της matlab καθώς και το οριακό φορτίο που τον προκαλεί. Για τις αναπτυσσόμενες πλαστικές αρθρώσεις η στάθμη επιτελεστικότητας είναι δυνατόν να ποικίλει καθώς η παραμόρφωση των διατομών διαφέρει αλλά η πληροφορία αυτή δεν είναι χρήσιμη στην παρούσα μελέτη. Για το λόγο αυτό, δεν ορίστηκαν συγκεκριμένες γωνίες στροφής των διατομών για τις υπόλοιπες στάθμες.

Η καμπύλη ικανότητας πέραν της παρούσης κατάστασης παρουσιάζει ένα πλατώ στο οποίο η τέμνουσα βάσης παραμένει σταθερή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι προκύπτει μηχανισμός του οποίου οι πλαστικές αρθρώσεις δεν εμφανίζουν κλάδο κράτυνσης, επομένως η κατασκευή δεν δύναται να φορτιστεί περαιτέρω. Στην περίπτωση που παρουσιαζόταν κλάδος κράτυνσης η κατασκευή θα μπορούσε να παραλάβει επιπλέον φορτίο μέσω του μηχανισμού και την διαρκή παραμόρφωση των πλαστικοποιημένων διατομών. Στην παρούσα ανάλυση το οριακό αυτό φορτίο παραλαμβάνεται ως επιπλέον στροφή από τις αρθρώσεις του φορέα, οι οποίες τείνουν προς την αστοχία τους, λόγω της συνεχούς παραμόρφωσης τους. Αποτέλεσμα της συμπεριφοράς του φορέα είναι τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών μόλις αναπτυχθεί ο μηχανισμός κατάρρευσης να διατηρούνται σταθερά. Το πρόγραμμα δεν διακόπτει την ανάλυση μέχρις ότου η κατασκευή λάβει την προκαθορισμένη μετακίνηση 2 μέτρων ή χάσει την ικανότητα της να παραλαμβάνει φορτίσεις λόγω της διαδοχικής αστοχίας των πλαστικών αρθρώσεων εντός των περιθωρίων μετακίνησης που έχουν οριστεί. Ωστόσο, να σημειωθεί εκ νέου ότι τα αποτελέσματα για την συνολική μετακίνηση που προέκυψαν από την καμπύλη push over δεν ανταποκρίνονται στην πραγματική συμπεριφορά των υπό μελέτη κατασκευών αφού η στροφή των μελών που ορίζει την αστοχία τους δεν είναι ρεαλιστική, καθώς η παράμετρος αυτή δεν προσδιορίστηκε κατά την ανάλυση των πλαισίων στον κώδικα της matlab.

## 5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων που προκύπτουν, για ορισμένα από τα υπό μελέτη μεταλλικά πλαίσια με πρότυπες διατομές, από τις μεθοδολογίες της οριακής ανάλυσης σε matlab και της ανάλυσης push over μέσω του λογισμικού sar για τις παραμέτρους που αναπτύχθηκαν στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο.

Οι φορείς που εισάγονται λαμβάνουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που αναφέρονται στο κεφάλαιο του βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών και τα μέλη τους λαμβάνουν τις πρότυπες διατομές που προέκυψαν από αυτή τη διαδικασία.

Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν για κάθε κατασκευή είναι:

- Οι πρότυπες διατομές που λαμβάνουν τα μέλη της μέσω του σχεδιασμού.
- Το οριακό φορτίο, η υπεραντοχή που ανέπτυξε σε σχέση με τον βέλτιστο σχεδιασμό λόγω της εισαγωγής πρότυπων διατομών στον φορέα ( $\lambda$ ) και ο μηχανισμός κατάρρευσης που προκύπτει για κάθε μια μέσω της οριακής ανάλυσης στον αλγόριθμο της matlab.
- Το οριακό φορτίο, ο μηχανισμός κατάρρευσης που προκύπτει για κάθε μια μέσω της ανάλυσης push over.

*Τα εντατικά μεγέθη που προέκυψαν μέσω του επιλυτή linprog θα σχολιαστούν ως προς την πραγματική καταπόνηση της κατασκευής που παρουσιάστηκε μέσω του sar.*

Οι αναλύσεις push over για τους υπό μελέτη φορείς κατέδειξαν διαφορετικούς μηχανισμούς κατάρρευσης. Για τον λόγο αυτό, τα πλαίσια θα παρουσιαστούν ομαδοποιημένα με κριτήριο τον πλαστικό μηχανισμό που αναπτύσσουν.

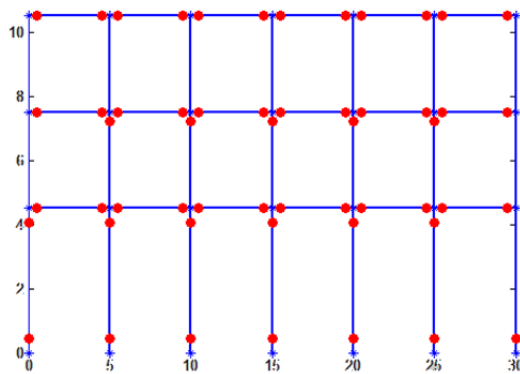
## 5.1.1 ΦΟΡΕΑΣ 1

Με την διαδικασία σχεδιασμού του πλαισίου, που εφαρμόστηκε, προέκυψε ότι τα μέλη του συγκεκριμένου φορέα λαμβάνουν τις εξής πρότυπες διατομές:

ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ	
εξωτερικά μέλη	HEB 180
εσωτερικά μέλη	HEB 160

ΔΟΚΟΙ	
1ος όροφος	IPE 200
2ος όροφος	IPE 180
3ος όροφος	IPE 160

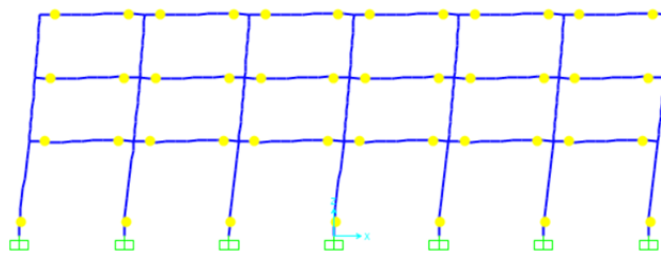
Η οριακή ανάλυση του πλαισίου για τις δεδομένες διατομές κατέδειξε ότι το μέγιστο δυνατό φορτίο που δύναται να παραλάβει η κατασκευή είναι  $P_{0p}=388.904$  kN ( $\lambda=1.3$ ) και οι διατομές που θα διαρρέυσουν υπό την επίδραση του είναι οι εξής:



Εικόνα 5-1: Μηχανισμός Κατάρρευσης από matlab

Το σύνολο των πλαστικών αρθρώσεων που αναπτύσσονται ταυτίζεται με τον βαθμό υπερστατικότητας του πλαισίου. Επομένως, το πλαίσιο έχει μετατραπεί σε μηχανισμό. Ο μηχανισμός αυτός με την ανάπτυξη πλαστικών αρθρώσεων στη οροφή των υποστυλωμάτων του ισογείου τείνει να λάβει την μορφή μηχανισμού ορόφου. Ωστόσο, παραμένει ένας πλάγιος μηχανισμός του οποίου έχουν αναπτυχθεί δυσμενώς πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα.

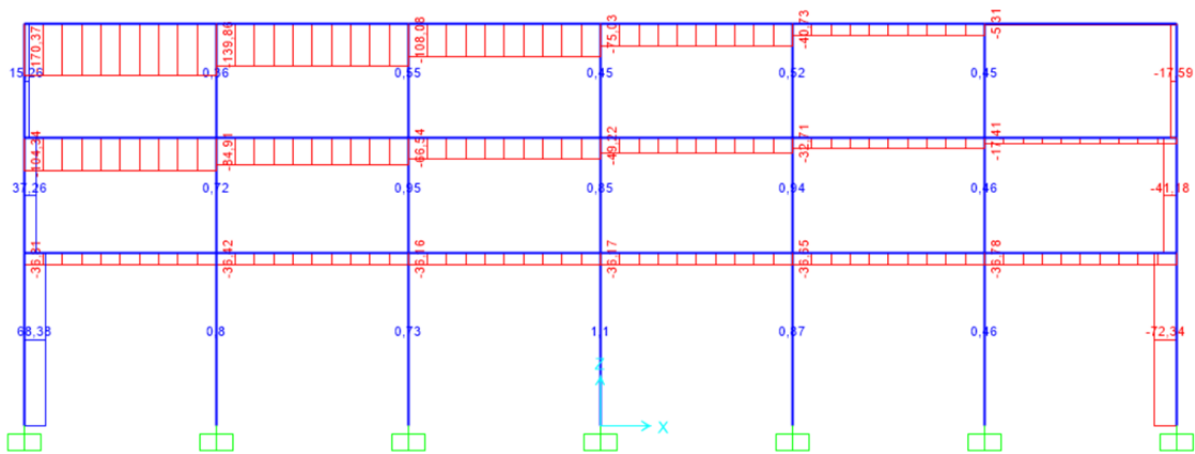
Για το ίδιο πλαίσιο μέσω της ανάλυσης push over εκτιμήθηκε πως το μέγιστο φορτίο που μπορεί να παραλάβει η κατασκευή μέχρι την ανάπτυξη μηχανισμού είναι  $P=371,106$  kN. Ο μηχανισμός που αναπτύχθηκε είναι ο πλάγιος με διαδοχική διαρροή των διατομών των υποστυλωμάτων του ισογείου και των δοκών ανά όροφο.



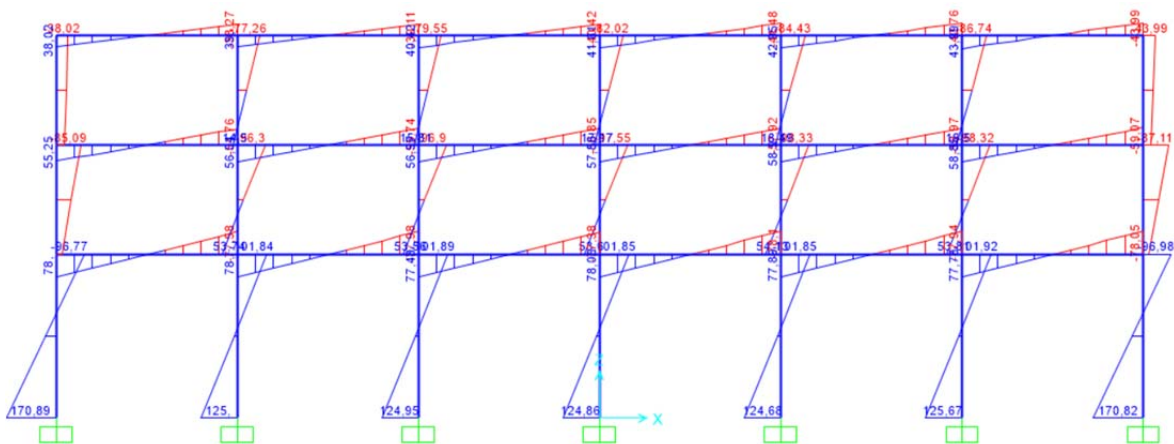
Εικόνα 5-2: Μηχανισμός Κατάρρευσης από SAP

Η διαφορά μεταξύ των δύο μηχανισμών οφείλεται στο γεγονός ότι με την μεθοδολογία push over η διαδοχική ανάπτυξη των πλαστικών αρθρώσεων οδήγησε στον πλάγιο. Πέραν αυτού του σημείου η κατασκευή δεν δύναται να παραλάβει επιπλέον φορτίο μέχρι την αστοχία της και τα εντατικά μεγέθη επ’ αυτής σταθεροποιούνται. Η φόρτιση λαμβάνεται ως επιπλέον παραμόρφωση στους κόμβους που έχουν διαρρεύσει. Επομένως, δεν πραγματοποιείται ανακατανομή της έντασης στα μέλη του φορέα ώστε να πλαστικοποιηθούν οι διατομές που υποδεικνύονται από την οριακή ανάλυση.

Τα μεγέθη ροπών και αξονικών εντάσεων όπως προέκυψαν από την ανωτέρω ανάλυση στο βήμα που ο φορέας μετατρέπεται σε μηχανισμό είναι τα εξής:



Εικόνα 5-3: Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα



Εικόνα 5-4: Διάγραμμα Ροπών Κάμψης του φορέα

Οι διατομές που διέρρευσαν λαμβάνουν σταθερά τη μέγιστη τιμή των εντάσεων που αναπτύσσονται σε αυτές τη στιγμή της διαρροής τους από τη στιγμή που πλαστικοποιήθηκαν μέχρι την κατάρρευση τους.

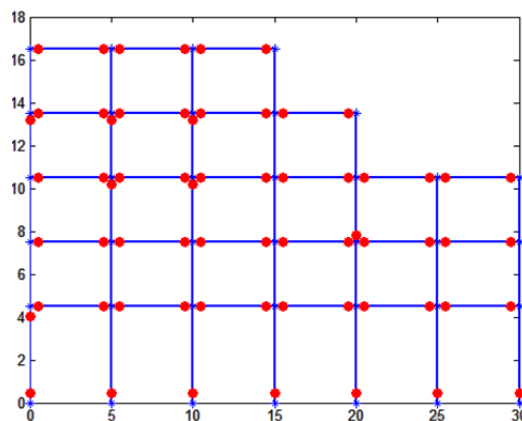
Τα εντατικά μεγέθη που προέκυψαν από την επίλυση της οριακής ανάλυσης παρουσίασαν παρόμοια κατανομή έντασης του φορέα με αυτή του SAP. Παρατηρήθηκε, ότι στις κοινές για τα δυο προγράμματα διατομές, όπου αναπτύχθηκαν πλαστικές αρθρώσεις, τα μεγέθη των αναπτυσσόμενων εντάσεων ήταν ίσα, κυρίως των καμπτικών. Στις αξονικές εντάσεις εμφανίστηκαν ορισμένες αποκλίσεις ιδίως στις περιπτώσεις των δοκών. Οι διατομές των μελών που δεν διέρρευσαν παρουσίασαν αποκλίσεις ως προς την εκτιμώμενη έντασή τους, μεταξύ των δύο μεθοδολογιών. Αυτές οι διαφορές αποδόθηκαν στο γεγονός ότι η διαδικασία της οριακής ανάλυσης μέσω matlab δεν λαμβάνει υπόψη της την ανακατανομή της έντασης των εντατικών μεγεθών στον φορέα, όταν εμφανίζονται διατομές που διαρρέουν. Επίσης, παρατηρήθηκε πως οι διατομές που δεν διέρρευσαν όπως υπέδειξε η οριακή ανάλυση, μέσω της ανάλυσης push over, είχαν αναπτύξει αυξημένες εντάσεις πλησίον της αντοχής τους. Επομένως, εάν ο φορέας δεν ανέπτυξε μηχανισμό και η κατασκευή παραλάμβανε επιπλέον φορτίο, θα αποτελούσαν εν δυνάμει πλαστικές αρθρώσεις του φορέα.

### 5.1.2 ΦΟΡΕΑΣ 2

Για το πλαίσιο που παρουσιάζονται τα παρακάτω αποτελέσματα, προέκυψε μέσω της διαδικασίας σχεδιασμού ότι τα μέλη του λαμβάνουν τις κάτωθι πρότυπες διατομές:

ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
εξωτερικά μέλη	HEB 180	1,2,4 όροφοι	IPE 220
εσωτερικά μέλη	HEB 180	3ος όροφος	IPE 180
		5ος όροφος	IPE 160

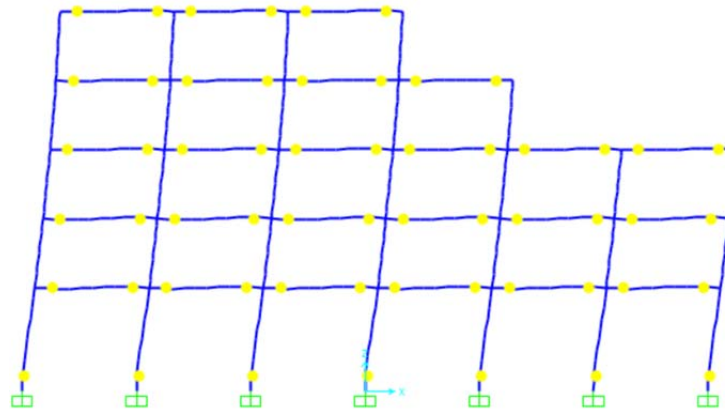
Το οριακό φορτίο που εκτιμήθηκε πως μπορεί να λάβει η συγκεκριμένη κατασκευή για τις πρότυπες διατομές που επελέγησαν είναι  $P_{or}=443.1\text{kN}$  ( $\lambda=1.11$ ) και ο μηχανισμός που αναπτύσσεται γι 'αυτή τη φόρτιση είναι ο εξής:



Εικόνα 5-5: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω matlab

Το ανωτέρω πλαίσιο ανέπτυξε πλάγιο μηχανισμό και εμφάνισε και ορισμένες μη επιθυμητές πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα του.

Μέσω της ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε στο sap προέκυψε ότι ο αναπτυσσόμενος μηχανισμός για τον συγκεκριμένο φορέα είναι πλάγιος και το φορτίο που μπορεί να παραλάβει μέχρι την πλαστικοποίησή του είναι  $P=436.075\text{kN}$ .



Εικόνα 5-6: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω SAP

Μέσω της ανάλυσης push over ο υπό μελέτη φορέας ανέπτυξε πλάγιο μηχανισμό προτού δημιουργηθούν οι πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα που υπέδειξε η οριακή ανάλυση. Επομένως, τα εντατικά μεγέθη επί των μελών σταθεροποιήθηκαν και δεν είναι δυνατόν οι εντάσεις στις συγκεκριμένες διατομές των υποστυλωμάτων να αναπτυχθούν, ώστε να διαρρεύσουν.

## 5.2 ΠΛΑΓΙΟΣ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΜΕ ΠΛΑΣΤΙΚΕΣ ΑΡΘΡΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ

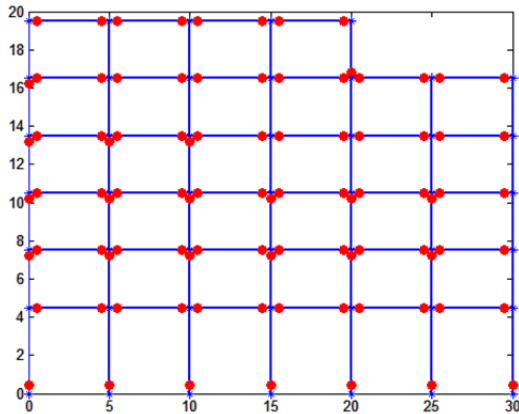
Όπως, έχει αναφερθεί ο Ε.Α.Κ. επιτρέπει σε περιπτώσεις κτιρίων που δεν είναι δυνατόν να αποφευχθούν οι πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα τους να περιοριστούν στα εσωτερικά μέλη τους. Από την ανάλυση για μη κανονικά -καθ' ύψος- πλαίσια, που διαθέτουν πολλούς ορόφους ανέκυψε ο συγκεκριμένος μηχανισμός κατάρρευσης.

### 5.2.1 ΦΟΡΕΑΣ 3

Για το πλαίσιο που θα παρουσιαστεί στο συγκεκριμένο παράδειγμα προέκυψαν από τη διαδικασία σχεδιασμού οι εξής πρότυπες διατομές για τα μέλη του:

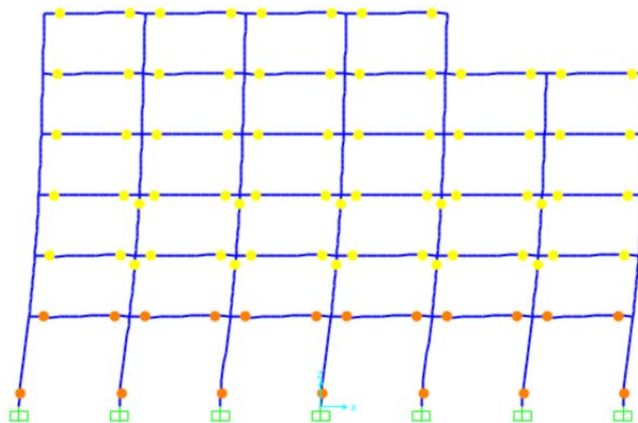
ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
εξωτερικά μέλη	HEB 180	1,2,3,4 όροφοι	IPE 220
εσωτερικά μέλη	HEB 180	5ος όροφος	IPE 180
		6ος όροφος	IPE 120

Το οριακό φορτίο που υπολογίστηκε για το φορέα με τις ανωτέρω διατομές είναι  $P_{or}=471.47\text{kN}$  ( $\lambda=1.12$ ) του οποίου η επιβολή οδηγεί σύμφωνα με τον αλγόριθμο της matlab στην ανάπτυξη πλάγιου μηχανισμού κατάρρευσης και στην δημιουργία πλαστικών αρθρώσεων σε ορισμένα υποστυλώματα του.



Εικόνα 5-7: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω matlab

Η ανάλυση push over που πραγματοποιήθηκε για το ίδιο πλαίσιο οδήγησε διαδοχικά σε διαρροή τις διατομές στη βάση των υποστυλωμάτων του ισογείου, τις δοκούς του ισογείου και του πρώτου ορόφου και στη συνέχεια την ταυτόχρονη πλαστικοποίηση των διατομών οροφής των εσωτερικών υποστυλωμάτων των δυο ορόφων και των υπολοίπων δοκών μέχρι την δημιουργία του πλάγιου μηχανισμού. Ο μηχανισμός αυτός αναπτύχθηκε υπό την επιβολή του μέγιστου φορτίου  $P=482\text{kN}$ .



Εικόνα 5-8: Μηχανισμός Κατάρρευσης μέσω SAP

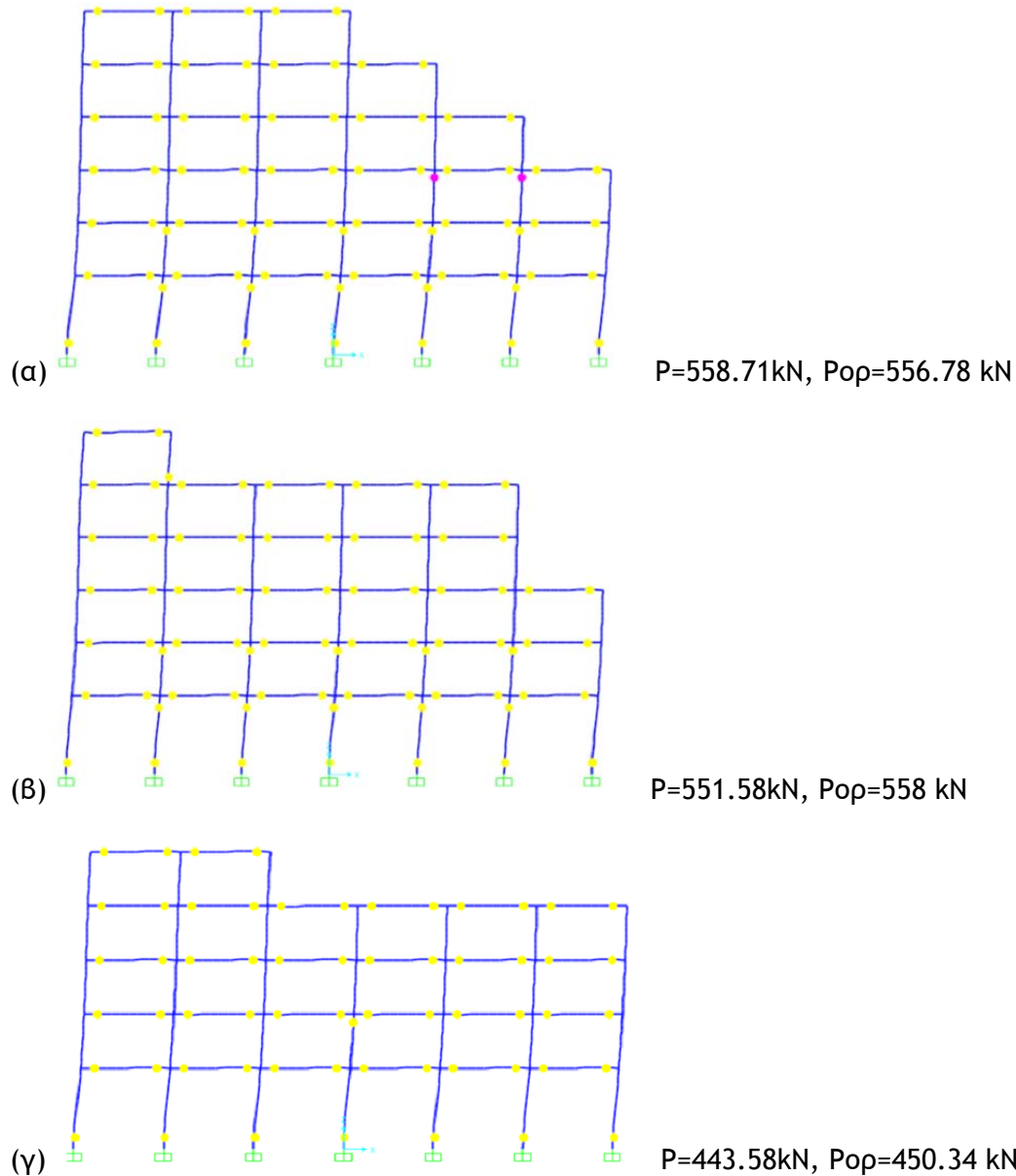
Οι πλαστικές αρθρώσεις που αναπτύχθηκαν στα υποστυλώματα του πρώτου και δεύτερου ορόφου προέκυψαν και από τις δυο μεθοδολογίες. Οι επιπλέον διατομές που παρουσιάζονται να έχουν διαρρεύσει μέσω της οριακής ανάλυσης στο sap δεν πλαστικοποιούνται διότι λόγω της δημιουργίας του πλάγιου μηχανισμού δεν αυξάνονται τα εντατικά μεγέθη επί των μελών επομένως, δεν δύνανται να πλαστικοποιηθούν.

Στο πλαίσιο αυτό είναι απαραίτητο να σημειωθεί πως οι κόμβοι δοκών υποστυλωμάτων που διέρρευσαν ικανοποιούσαν τον ικανοτικό έλεγχο.

$$\text{Ικανοτικός έλεγχος κόμβων: } 1,3\sum M_{Rb} = 2 * 101.3 * 1.3 = 263.38 < \sum M_{Rc} = 2 * 170.9 = 341.8$$



Η πλειοψηφία των πλαισίων που μελετήθηκαν με τις πρότυπες διατομές που προήλθαν από το σχεδιασμό οδήγησαν στο συγκεκριμένο μηχανισμό κατάρρευσης όπως παρουσιάζεται στα παρακάτω παραδείγματα.



Εικόνα 5-9: παραδείγματα πλάγιων μηχανισμών κατάρρευσης πλαισίων με πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα

Παρόμοια εικόνα εμφάνισαν και οι πλαστικές αρθρώσεις των πλαισίων μέσω του αλγορίθμου της matlab παρουσιάζοντας περισσότερες πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα.

### 5.3 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΟΡΟΦΟΥ

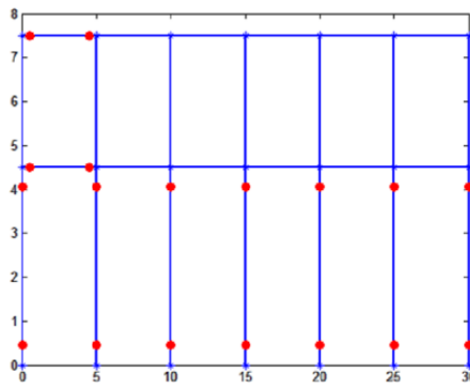
Σε κάποια από τα πλαίσια για τα οποία πραγματοποιήθηκαν οι ανωτέρω αναλύσεις παρουσιάστηκαν πλαστικές αρθρώσεις στη βάση και την οροφή των υποστυλωμάτων του ισογείου δημιουργώντας μηχανισμό ορόφου ο οποίος δεν αποτελεί επιθυμητή μορφή κατάρρευσης του φορέα.

#### 5.3.1 ΦΟΡΕΑΣ 4

Από την διαδικασία σχεδιασμού του διώροφου πλαισίου προέκυψε ότι οι πρότυπες διατομές από τις οποίες αποτελούνται τα μέλη του είναι οι εξής:

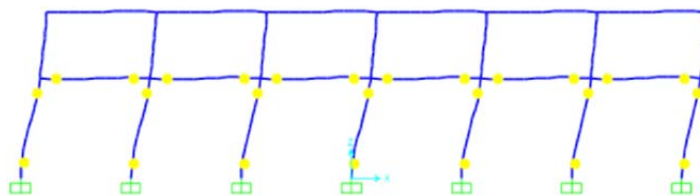
ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
εξωτερικά μελη	HEB 120	1ος όροφος	IPE 180
εσωτερικά μελη	HEB 140	2ος όροφος	IPE 140

Μέσω του αλγορίθμου της matlab προέκυψε πως το οριακό φορτίο που είναι ικανή να παραλάβει αυτή η κατασκευή είναι  $P_{or}=245$  kN ( $\lambda=1.28$ ) και ο μηχανισμός κατάρρευσης που εξήχθη για τη συγκεκριμένη φόρτιση είναι ο κάτωθι:



Εικόνα 5-10: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab

Ο μηχανισμός κατάρρευσης που προκύπτει είναι ο μη επιθυμητός μηχανισμός μαλακού ορόφου. Τα ίδια αποτελέσματα παρουσιάστηκαν μέσω της ανάλυσης push over για μέγιστο επιβαλλόμενο φορτίο επί της κατασκευής  $P=244,6$  kN.



Εικόνα 5-11: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP

Τα εντατικά μεγέθη στις δοκούς του πλαισίου διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ των δύο αναλύσεων. Στην περίπτωση του μοντέλου των πλαστικών αρθρώσεων που εξήχθη από την οριακή ανάλυση οι δοκοί του πρώτου ορόφου δεν εμφανίζουν πλαστικές αρθρώσεις γιατί η αλληλεπίδραση των εντατικών μεγεθών αποκλίνει ελάχιστα από την διαρροή των διατομών. Επιπλέον, όσο αφορά στην δοκό του δεύτερου ορόφου που εμφανίζει πλαστικές αρθρώσεις μέσω της ανάλυσης του sap προέκυψε πως καταπονείται από αυξημένα εντατικά μεγέθη που προσεγγίζουν την διαρροή των άκρων της. Ωστόσο, με την εμφάνιση του μηχανισμού στο sap οι εντάσεις επί των μελών σταθεροποιήθηκαν επομένως με αποτέλεσμα να μην διαρρεύσουν οριακά.

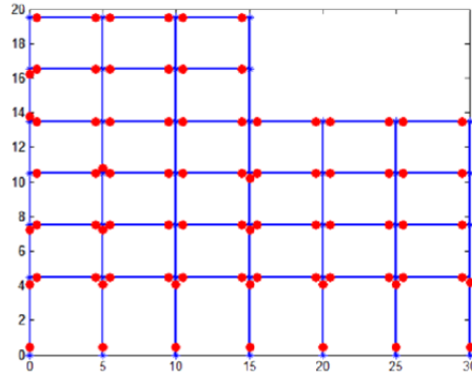
### 5.3.2 ΦΟΡΕΑΣ 5

Αντίστοιχα μηχανισμός μαλακού ορόφου προέκυψε και για τον φορέα του οποίου τα μέλη έλαβαν τις εξής πρότυπες διατομές:

ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ		ΔΟΚΟΙ	
εξωτερικά μελη	HEB 180	1,2,3,5 όροφοι	IPE 240
εσωτερικά μελη	HEB 180	4,6 όροφοι	IPE 180

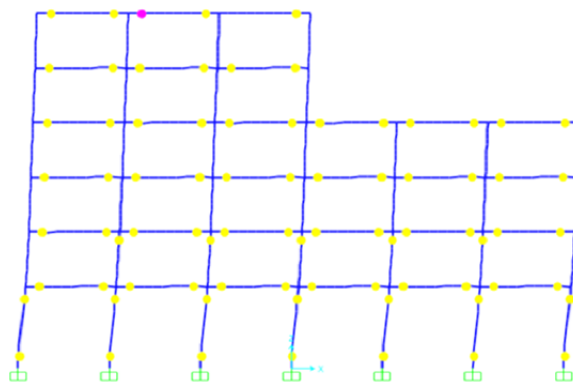
Είναι απαραίτητο να σχολιαστεί πως ο βέλτιστος σχεδιασμός πριν από την επιλογή πρότυπων διατομών κατέδειξε πως τα εξωτερικά υποστυλώματα του συγκεκριμένου πλαισίου οφείλουν να διαθέτουν μεγαλύτερη αντοχή από τα εσωτερικά. Ωστόσο, με την διαδικασία της διακριτοποίησης των μεταβλητών αντοχής μέσω της επιλογής πρότυπων διατομών, επελέγησαν κοινά υποστυλώματα διότι η αντοχή της συγκεκριμένης πρότυπης διατομής ικανοποιούσε τις απαιτήσεις και των δυο ομάδων. Με την διαδικασία αυτή παρακάμφθηκε η απαίτηση για αυξημένη δυσκαμψία των εξωτερικών μελών που προέκυψε από τον σχεδιασμό. Επομένως, η ένταση ισο-κατανέμεται στα μέλη των υποστυλωμάτων και με δεδομένη την κοινή αντοχή που εμφανίζουν, τα μέλη αυτά διαρρέουν στα άκρα τους. Ενώ, εάν τα εξωτερικά υποστυλώματα εμφάνιζαν μεγαλύτερη δυσκαμψία θα παραλάμβαναν μεγαλύτερη δύναμη, με αποτέλεσμα αυτή η κατανομή να λειτουργεί ευεργετικά για τα εσωτερικά υποστυλώματα και λόγω αυξημένης αντοχής τα εξωτερικά δεν θα ανέπτυσαν πλαστικές αρθρώσεις στην οροφή τους.

Για τις πρότυπες διατομές που παρουσιάστηκαν εφαρμόστηκε η διαδικασία της οριακής ανάλυσης από την οποία προέκυψε πως το οριακό φορτίο που δύναται να παραλάβει η κατασκευή είναι  $P_{op}=512.2$  kN ( $\lambda=1.22$ ) και ο μηχανισμός κατάρρευσης που εξήχθη για τη δεδομένη φόρτιση είναι ο κάτωθι:



Εικόνα 5-12: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab

Η μεθοδολογία αυτή κατέδειξε πως ο φορέας καταρρέει λόγω πλαστικών αρθρώσεων που δημιουργήθηκαν στα υποστυλώματα του ισογείου μετατρέποντας το ισόγειο σε μαλακό όροφο. Ο ίδιος μηχανισμός προέκυψε με την ανάλυση push over καθώς αναπτύχθηκε μηχανισμός ορόφου προτού δημιουργηθεί ο πλάγιος. Το φορτίο για το οποίο πλαστικοποιήθηκε η κατασκευή είναι  $P=523,52$  kN.



Εικόνα 5-13: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP

## 5.4 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Η εισαγωγή των πρόσθετων κατασκευαστικών περιορισμών κρίθηκε απαραίτητη για τη βελτίωση των φορέων που αναπτύσσουν μηχανισμό ορόφου ή πλάγιο μηχανισμό με την εμφάνιση πλαστικών αρθρώσεων σε κάποια από τα υποστυλώματά τους.

Όπως παρατηρήθηκε στο παράδειγμα του Φορέα 5, η διαδικασία επιλογής πρότυπων διατομών, οι οποίες ικανοποιούν τις απαιτήσεις ελάχιστων αντοχών των μελών, μπορεί σε περιπτώσεις μελών για τα οποία απαιτείται διαφορετική δυσκαμψία να καταλήξει σε κοινές πρότυπες διατομές. Επιπλέον, στις περιπτώσεις των ανωτέρω μηχανισμών, η χρήση εξωτερικών υποστυλωμάτων μικρότερης αντοχής από των εσωτερικών λειτούργησε δυσμενώς.

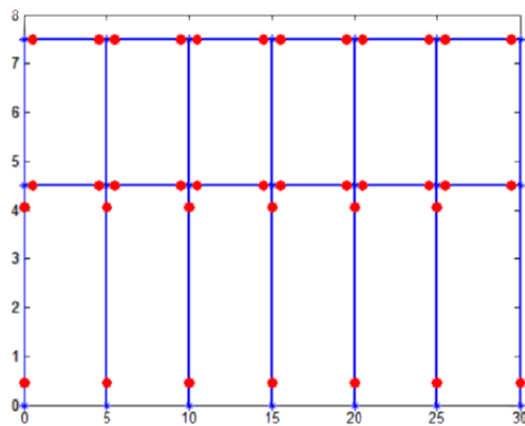
Για να περιοριστούν τα ανωτέρω, εισήχθησαν επιπλέον περιορισμοί στο πρόβλημα σχεδιασμού που αφορούν στην αντοχή των μελών. Επιλέχθηκε διαφορετική ομαδοποίηση των μελών που είναι επιθυμητό να λαμβάνουν κοινή διατομή. Εξετάστηκαν δυο επιπλέον περιπτώσεις:

- Τα υποστυλώματα να λαμβάνουν κοινή διατομή σε όλο το φορέα και οι δοκοί διαφορετικές διατομές ανά όροφο.
- Τα μέλη του φορέα να λαμβάνουν κοινή διατομή ανάλογα με το είδος του δομικού στοιχείου που αποτελούν.

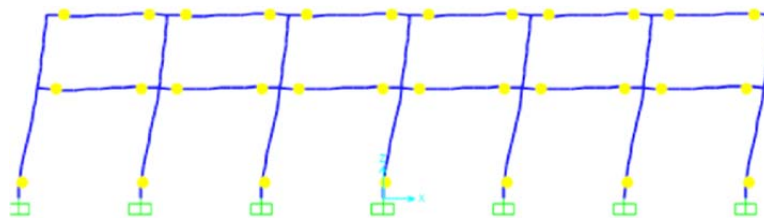
### 5.4.1 ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ ΜΕ ΚΟΙΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

Η συγκεκριμένη ομαδοποίηση των μελών βελτίωσε τον μηχανισμό κατάρρευσης στους φορείς οι οποίοι από τον αρχικό σχεδιασμό προέκυψε πως η αντοχή των εξωτερικών υποστυλωμάτων είναι μικρότερη από αυτή των εσωτερικών. Με τον παρόντα σχεδιασμό οι φορείς που εμφάνιζαν μηχανισμό ορόφου παρουσίασαν σαν μηχανισμό κατάρρευσης τον πλάγιο.

Για το πλαίσιο 4 προέκυψαν με τον σχεδιασμό αυτό ότι το σύνολο των υποστυλωμάτων λαμβάνουν κατηγορία διατομής HEB 140. Με την διαδικασία της οριακής ανάλυσης περιορίστηκαν οι αρχικές πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα του ισογείου με αποτέλεσμα να μην καταδεικνύουν μηχανισμό ορόφου ( $P_{op}=245$  kN). Ίδιος μηχανισμός αναπτύχθηκε και μέσω της ανάλυσης push over ( $P=258.8$  kN).



Εικόνα 5-14: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab

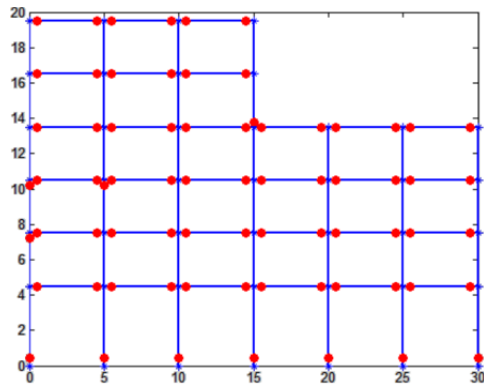


Εικόνα 5-15: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP

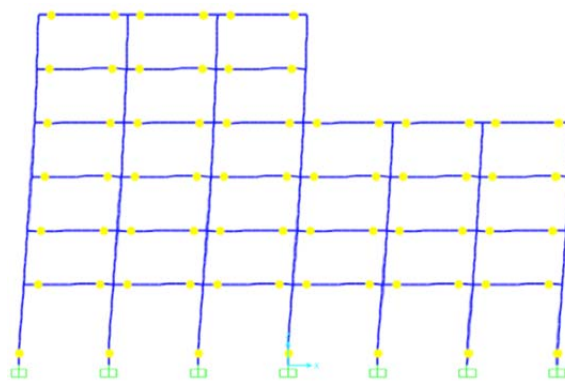
#### 5.4.2 ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ ΚΟΙΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ

Η συγκεκριμένη ομαδοποίηση, εμφάνισε τον επιδιωκόμενο μηχανισμό κατάρρευσης στους φορείς που μελετήθηκαν. Περίορισε τον σχηματισμό μηχανισμού ορόφου καθώς και τις αναπτυσσόμενες πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα των πλάγιων μηχανισμών. Παρατηρήθηκε πως για το σύνολο των φορέων που εμφάνισαν μηχανισμό ορόφου ή πλάγιο μηχανισμό με πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα ο σχεδιασμός αυτός υπέδειξε ως μηχανισμό αστοχίας τον πλάγιο μηχανισμό.

Ενδεικτικά παρατίθεται το παράδειγμα του φορέα 5 για τον οποίο προέκυψαν με τον σχεδιασμό αυτό ότι το σύνολο των υποστυλωμάτων λαμβάνουν κατηγορία διατομής HEB 220 και των δοκών IPE220. Με την διαδικασία της οριακής ανάλυσης περιορίστηκαν οι αρχικές πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα του ισογείου με αποτέλεσμα να μην παρουσιάζεται ανάπτυξη μηχανισμού ορόφου ( $P_{or}=550.8\text{kN}$ ). Ίδιος μηχανισμός αναπτύχθηκε και μέσω της ανάλυσης push over ( $P=563.8\text{kN}$ ).

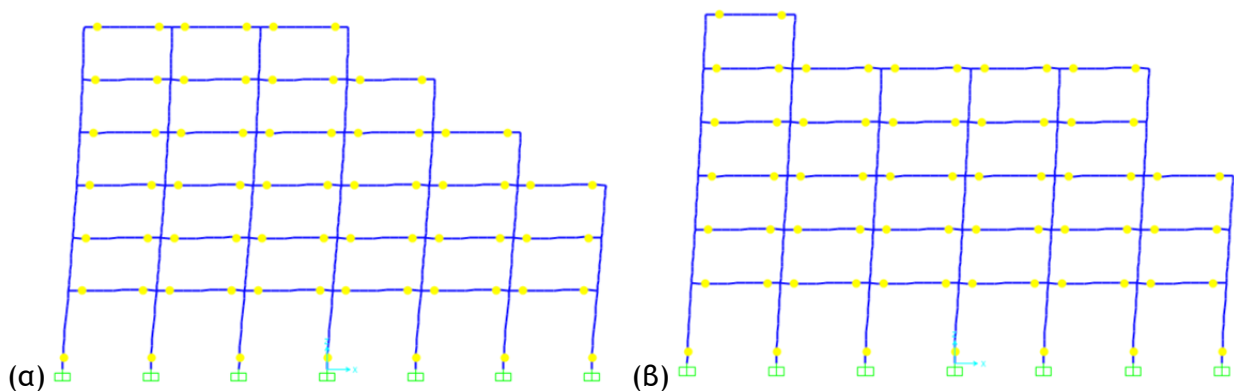


Εικόνα 5-16: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω matlab



Εικόνα 5-17: Μηχανισμός κατάρρευσης μέσω SAP

Για τους επιπρόσθετους περιορισμούς που τέθηκαν στο πρόβλημα τα παραδείγματα των φορέων που εμφανίζονται στο κεφάλαιο 5.2 παρουσίασαν τον επιθυμητό πλάγιο μηχανισμό κατάρρευσης.



Εικόνα 5-18: Παραδείγματα Μηχανισμών Κατάρρευσης με επιπρόσθετες παραμέτρους στον σχεδιασμό





## 6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η διαδικασία που περιγράφηκε στο 6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο κατέδειξε πως οι μεθοδολογίες πλαστικής οριακής ανάλυσης και push over που εφαρμόστηκαν στο σύνολο των πλαισίων που μελετήθηκαν, είχαν σαν αποτέλεσμα ότι η κατάρρευση τους οφείλεται στην ίδιο αναπτυσσόμενο μηχανισμό. Ωστόσο, είναι απαραίτητο να σημειωθεί ότι μέσω του αλγορίθμου της matlab υπερεκτιμήθηκε ο αριθμός των διατομών που διέρρευσαν. Οι πλαστικές αρθρώσεις που εξήχθησαν για τα πλαίσια μέσω της ανελαστικής ανάλυσης ταυτίζονται με αυτές που προέκυψαν από την οριακή ανάλυση με τη διαφορά ότι η δεύτερη μεθοδολογία παρουσίασε επιπλέον πλαστικοποιημένες διατομές. Παρ' όλα αυτά, στις περιπτώσεις που αναπτύχθηκε πλάγιος μηχανισμός μέσω της push over ανάλυσης, η οριακή δεν οδήγησε στην διαρροή του συνόλου των υποστυλωμάτων του ισογείου ώστε να προκύψει το συμπέρασμα πως ο αναπτυσσόμενος μηχανισμός είναι αυτός του μαλακού ορόφου. Το σύνολο των πλαστικών αρθρώσεων που εμφανίστηκαν στα εσωτερικά υποστυλώματα των πλαισίων που ανέπτυξαν πλάγιο μηχανισμό κατάρρευσης παρουσιάστηκαν στους αντίστοιχους ορόφους και στα ίδια υποστυλώματα και από τις δυο μεθοδολογίες. Επομένως, ο προσδιορισμός του αναπτυσσόμενου μηχανισμού μέσω των δυο μεθόδων ήταν επιτυχής.

Ωστόσο, επειδή παρουσιάζεται μέσω της οριακής ανάλυσης πλεόνασμα πλαστικών αρθρώσεων κρίνεται απαραίτητη η ανάλυση μέσω του sap προκειμένου να εντοπιστούν αυτές που πραγματικά αναπτύσσονται από την ρεαλιστική ένταση της κατασκευής. Οι αποκλίσεις αυτές οφείλονται στο γεγονός ότι η κατανομή των εντατικών μεγεθών μέσω του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στη matlab δεν ταυτίζεται ακριβώς με αυτή που προκύπτει με την ανάλυση βήμα προς βήμα. Ο επιλύτης linprog από τον οποίον προκύπτουν αυτά τα μεγέθη δίνει τυχαία τιμές στις εντάσεις οι οποίες ορίζουν μια στατικά αποδεκτή λύση για τα μέλη του φορέα και ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος. Για τον προσδιορισμό των αναπτυσσόμενων εντατικών μεγεθών το κριτήριο από το οποίο προκύπτουν είναι το μητρώο ισορροπίας του φορέα. Με τη διαδικασία της οριακής ανάλυσης τα μελετώμενα πλαίσια δέχονται μια συγκεκριμένη μονότονη φόρτιση και προκύπτουν μέσω του επιλύτη τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη ο βαθμός υπερστατικότητας τους και η ανακατανομή των εντάσεων που προκύπτει μέσω της σταδιακής σεισμικής φόρτισης. Επομένως, ο αλγόριθμος λαμβάνει ως μοναδικό περιορισμό για την αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου την διαρροή των μελών. Η αύξηση του συντελεστή λ σταματάει όταν η στατική επίλυση οδηγήσει στην κατάλυση τουλάχιστον ενός εκ των ανισοτικών περιορισμών της επιφάνειας διαρροής. Μέχρι εκείνη την στιγμή ο αλγόριθμος λαμβάνει την αύξηση του φορτίου και τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη που προκύπτουν και πλαστικοποιεί τις διατομές των οποίων οι ανισοτικές σχέσεις που επιβάλλει το διάγραμμα αλληλεπίδρασης μετατρέπονται σε σχέσεις ισότητας.

Επομένως, μέσω του αλγορίθμου της matlab αγνοούνται οι πλαστικές αρθρώσεις και η διαδοχή με την οποία αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα βήματα της βελτιστοποίησης και τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη επί της κατασκευής. Με αυτό τον τρόπο παρακάμπτεται το βήμα στο οποίο αναπτύσσεται ο μηχανισμός για τον οποίο θεωρείται πως η κατασκευή δεν μπορεί

να παραλάβει άλλο φορτίο, καθώς το κριτήριο για την μορφή του αναπτυσσόμενου μηχανισμού κατάρρευσης δεν έχει εισαχθεί στο πρόγραμμα. Επιπλέον, δεν λαμβάνεται υπόψη στο παρόν βήμα πως οι διατομές που διέρρευσαν για μικρότερο φορτικό συντελεστή έχουν λάβει τη μέγιστη δυνατή αξονική δύναμη και ροπή με τις οποίες δύνανται να καταπονηθούν, ώστε να παραμένουν αυτές οι εντάσεις σταθερές στην επίλυση του μητρώου ισορροπίας.

Τα αποτελέσματα των ανωτέρω, είναι εμφανή μέσω της σύγκρισης των εντατικών μεγεθών που προέκυψαν από τις δύο επιλύσεις. Η κατανομή των εντάσεων μέσω του επιλύτη `linprog` είναι επιτυχής αλλά οι δύο μεθοδολογίες δεν παρουσιάζουν τα ίδια εντατικά μεγέθη. Μόνο για τις διατομές που έχουν διαρρεύσει μέσω των δύο μεθοδολογιών τα μεγέθη που αφορούν στην αναπτυσσόμενη κάμψη είναι ίσα. Ενώ, για αυτές που ανέπτυξαν πλαστικές αρθρώσεις μέσω της οριακής ανάλυσης παρατηρήθηκε πως μέσω της `push over` δεν ανέπτυξαν τις οριακές τιμές των αντοχών τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κατασκευή ανέπτυξε μηχανισμό κατάρρευσης και τα εντατικά μεγέθη σταθεροποιήθηκαν με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατόν η ανακατανομή να οδηγήσει στη διαρροή τους. Ωστόσο, είναι απαραίτητο να σημειωθεί πως εμφανίζουν ιδιαίτερα αυξημένες εντάσεις που οδηγεί στο συμπέρασμα πως αν η κατασκευή δεν πλαστικοποιούταν θα διέρρεαν στα επόμενα βήματα της ανάλυσης. Για τον λόγο αυτό, η `matab` που δεν αντιλαμβάνεται το σχηματιζόμενο μηχανισμό, τις παρουσιάζει να πλαστικοποιούνται καθώς συνεχίζει στο επόμενο βήμα.

Επίσης, παρατηρήθηκε πως για τα υπό μελέτη πλαίσια τα φορτία κατάρρευσης που εκτιμήθηκαν από τις ανωτέρω μεθοδολογίες δεν αποκλίνουν σημαντικά. Στην πλειοψηφία των φορέων η οριακή ανάλυση οδήγησε σε οριακό φορτίο ελάχιστα μεγαλύτερο από την ανάλυση `push over`, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι ο μεγεθυντικός συντελεστής αυξάνεται με την περιγραφείσα διαδικασία. Στις περιπτώσεις όπου ο αριθμός των διατομών που διέρρευσαν μέσω της οριακής ανάλυσης προσεγγίζει αυτές που προέκυψαν μέσω της `push over` τα οριακά φορτία σχεδόν ταυτίζονται.

Στην κατεύθυνση περιορισμού του προβλήματος της οριακής ανάλυσης προτείνεται, ως επιπλέον διερεύνηση, να εισαχθεί το δυϊκό πρόβλημα του στατικού θεωρήματος που αποτελεί το κινηματικό θεώρημα. Το πρόβλημα του κινηματικού θεωρήματος στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του αντίστοιχου συντελεστή  $\lambda$ . Ο τελικός συντελεστής  $\lambda$  θα είναι αυτός για τον οποίον θα επιλύονται και τα δυο προβλήματα. Επομένως, το δυϊκό πρόβλημα θα αποτελέσει άνω όριο για την αντικειμενική συνάρτηση του πρωτογενούς. Σκοπός σίτος της διαδικασίας είναι να περιοριστεί το επιβαλλόμενο φορτίο κατάρρευσης και κατ'επέκταση ο αριθμός των πλαστικών αρθρώσεων που εκτιμώνται μέσω του αλγορίθμου της `matlab`.

Μια επιπλέον σημαντική παρατήρηση που προέκυψε μέσω των αναλύσεων είναι πως ο σχεδιασμός των πλαισίων μέσω της πλαστικής ανάλυσης, λαμβάνοντας υπόψη αποκλειστικά τους περιορισμούς που αφορούν στην ένταση και την αντοχή των μελών τους, δεν οδήγησε στον επιθυμητό πλάγιο μηχανισμό κατάρρευσης τους. Κάποιοι φορείς ανέπτυξαν δυσμενώς πλαστικές αρθρώσεις στα εσωτερικά τους υποστυλώματα ενώ άλλοι εμφάνισαν μηχανισμό ορόφου. Ωστόσο, για το σύνολο των κόμβων των πλαισίων κατά τον βέλτιστο σχεδιασμό

εισήχθη ο παράγοντας του ικανοτικού ελέγχου. Επίσης και στην διαδικασία επιλογής πρότυπων διατομών πραγματοποιήθηκε έλεγχος ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη που επιβάλλει ο ικανοτικός έλεγχος. Παρ' όλα αυτά οι κόμβοι εμφάνισαν μη επιθυμητές πλαστικές αρθρώσεις στα υποστυλώματα. Κατά την φόρτιση της κατασκευής σε αυτές τις περιπτώσεις οι πλαστικές αρθρώσεις εμφανίστηκαν αρχικά στα άκρα των δοκών και στη συνέχεια των υποστυλωμάτων. Η διαρροή των υποστυλωμάτων επέρχεται προτού αναπτυχθεί ο πλάγιος μηχανισμός στην κατασκευή. Διαπιστώθηκε επομένως, πως ο ικανοτικός έλεγχος δεν επαρκεί για να περιοριστεί η διαρροή των διατομών των υποστυλωμάτων. Για τον λόγο αυτό προτείνεται να εισαχθούν κατά τον σχεδιασμό των πλαισίων οι παράμετροι των στροφών διαρροής των μελών και οι πλαστικότητες τους. Συγκεκριμένα, προτείνεται η διερεύνηση της απαιτούμενης στροφής διαρροής που οφείλουν να έχουν τα μετέχοντα υποστυλώματα στους κρίσιμους κόμβους ώστε να αναπτύξουν επαρκή αντίσταση κατά την παραμόρφωση της κατασκευής.

Επιπλέον, για την αποφυγή ανάπτυξης μη επιθυμητών μηχανισμών κατάρρευσης των υπό μελέτη κατασκευών εισήχθησαν κατά τον σχεδιασμό επιπλέον κατασκευαστικοί παράμετροι που αφορούν στην ομαδοποίηση των μελών τους. Συγκεκριμένα, απαιτήθηκε αρχικά όλα τα υποστυλώματα να διαθέτουν την ίδια αντοχή και στη συνέχεια προστέθηκε ο επιπλέον περιορισμός ώστε όλα τα μέλη των δοκών να λαμβάνουν κοινή διατομή. Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίστηκε η επιθυμητή αναπτυσσόμενη ένταση επί των μελών ώστε τα εξωτερικά υποστυλώματα να μην λαμβάνουν μικρότερες διατομές από τα εσωτερικά στις περιπτώσεις των μη επιθυμητών μηχανισμών κατάρρευσης. Επιπλέον, αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα που ανέκυψε στις περιπτώσεις των φορέων που ενώ η ελάχιστη απαιτούμενη αντοχή των εξωτερικών υποστυλωμάτων είναι μεγαλύτερη των εσωτερικών τα μέλη αυτά κατά την επιλογή των πρότυπων διατομών έλαβαν κοινή αντοχή. Οι αναλύσεις που προέκυψαν λαμβάνοντας υπόψη και τις επιπλέον απαιτήσεις οδήγησαν το σύνολο των φορέων που είχαν αναπτύξει μη επιθυμητό μηχανισμό αστοχίας να καταρρεύσουν με πλάγιο μηχανισμό. Επομένως, ο αντισεισμικός σχεδιασμός των κατασκευών που απαιτεί να εφαρμόζονται οι ανωτέρω παράμετροι που εισήχθησαν στο πρόβλημα, οδηγεί σε πλάγιο μηχανισμό κατάρρευσης των φορέων. Αυτή η μεθοδολογία αποκλίνει από την αρχική προσέγγιση με την οποία επιδιώκεται η αντοχή των μελών να προσδιορίζεται από την ένταση που τους προσδίδει ο αλγόριθμος. Όμως, ο αλγόριθμος κατανέμει την ένταση με τυχαίο τρόπο στον φορέα γι' αυτό τον λόγο δεν προκύπτουν σε όλες τις περιπτώσεις τα εξωτερικά υποστυλώματα να διαθέτουν μεγαλύτερη αντοχή από τα εσωτερικά. Επομένως, εμφανίζονται περιπτώσεις στις οποίες οι κατασκευές δεν μπορούν να παραλάβουν με επιθυμητό τρόπο τα φορτία. Κρίνεται επομένως, απαραίτητο να εισαχθεί κατά τον σχεδιασμό επιπλέον περιορισμός που αφορά στη συγκριτική απαίτηση των αντοχών των ομάδων των υποστυλωμάτων. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται κατά την επίλυση του προβλήματος η κατανομή των εντάσεων επί της κατασκευής.

Για την διαδικασία της διερεύνησης που πραγματοποιήθηκε για τον σχεδιασμό πλαισίων υπό την επίδραση σεισμικών δράσεων μέσω του γραμμικού προγραμματισμού είναι απαραίτητο να σχολιαστεί πως εμφανίζονται αρκετές αβεβαιότητες. Αποτελεί μια εναλλακτική

μεθοδολογία προσέγγισης του προβλήματος με την οποία είναι δυνατόν να δοθούν πολλές διαφορετικοί διέξοδοι μέσω της εισαγωγής και εξέτασης πολλών διαφορετικών παραμέτρων και να προκύψουν τα αντίστοιχα συμπεράσματα. Σε καμία περίπτωση δεν δύναται να αντικαταστήσει τον σχεδιασμό των φορέων μέσω της στατικής επίλυσης και του υπολογισμού των απαιτούμενων αντοχών των μελών.

**7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

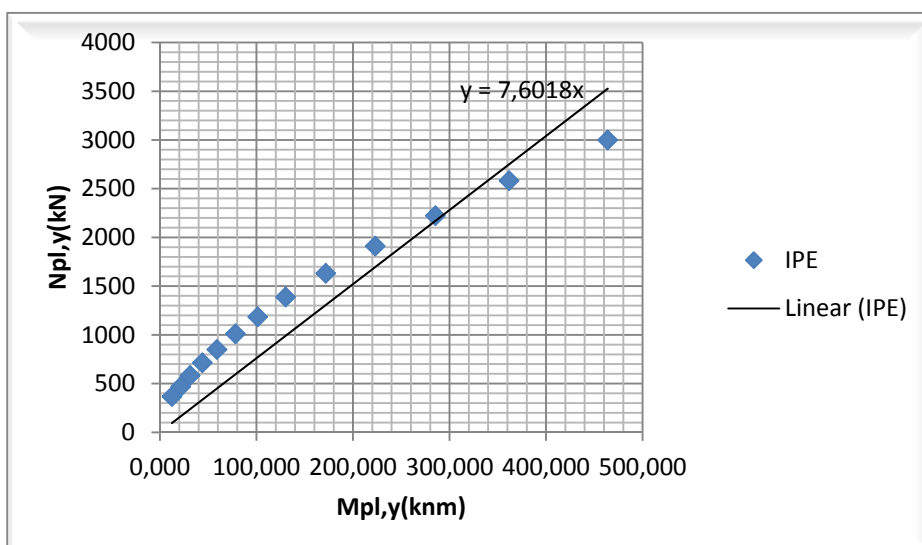
- [ 1 ] Parkinson, A.R., Balling, R., and J.D. Hedengren (2013). «Optimization Methods for Engineering Design» , Brigham Young University.
- [ 2 ] Βλ. Κουμούσης (2013). «Βέλτιστος Σχεδιασμός των Κατασκευών - Σημειώσεις Μαθήματος», Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών ΕΜΠ.
- [ 3 ] Βλ. Κουμούσης (2013).«Οριακή Ανάλυση Ολόσωμων Επιπέδων Πλαισίων-Σημειώσεις Μαθήματος», Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών ΕΜΠ.
- [ 4 ] Ιωάννης Κ.Βάγιας, Ιωάννης Χ.Ερμόπουλος, Γεώργιος Ι.Ιωαννίδης. (2013), «Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα με Παραδείγματα Εφαρμογής», «Εκδόσεις Κλειδάριθμος».
- [ 5 ] Μαρίνα-Μυρτώ Σ. Μανωλά (2015). Διδακτορική Διατριβή «Οριακή και Παραμορφωσιακή Ανάλυση Πλαισιωτών Κατασκευών με χρήση μεθόδων Μαθηματικού Προγραμματισμού», ΕΜΠ
- [ 6 ] Γιάννης Ν. Ψυχάρης (2016). «Σημειώσεις Αντισεισμικής Τεχνολογίας», Εργαστήριο Αντισεισμικής Τεχνολογίας ΕΜΠ
- [ 7 ] «ΕΑΚ 2000». Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός 2000



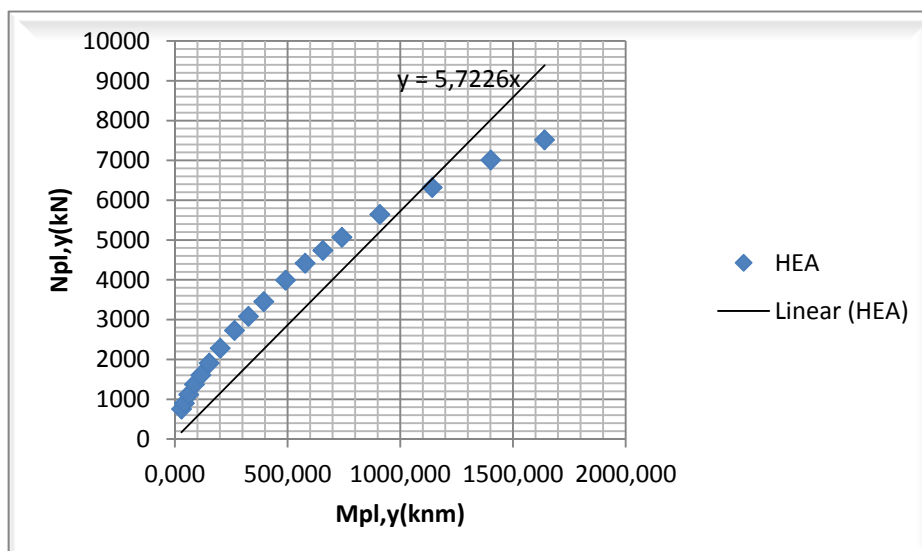
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΡΟΠΩΝ & ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ

Αποτελέσματα για κατηγορία χάλυβα S355

IPE				
Διατομή	$A_i(\text{cm}^2)$	$W_{pl,y}(\text{cm}^3)$	$M_{pl,y,l}(\text{kNm})$	$N_{pl}(\text{kN})$
100	10,32	34,91	12,393	366
120	13,21	60,73	21,559	469
140	16,43	88,34	31,361	583
160	20,09	123,9	43,985	713
180	23,95	166,4	59,072	850
200	28,48	220,6	78,313	1011
220	33,37	285,4	101,317	1185
240	39,12	366,6	130,143	1389
270	45,95	484	171,820	1631
300	53,81	628,4	223,082	1910
330	62,61	804,3	285,527	2223
360	72,72	1019	361,745	2582
400	84,46	1307	463,985	2998
450	98,82	1702	604,210	3508
500	115,5	2194	778,870	4100
550	134,4	2787	989,385	4771
600	156	3512	1246,760	5538



HEA				
Διατομή	Ai(cm <sup>2</sup> )	Wpl,γi(cm <sup>3</sup> )	Mply,I (kNm)	Npl (kN)
100	21,24	83,01	29,469	754
120	25,34	119,5	42,423	900
140	31,42	173,5	61,593	1115
160	38,77	245,1	87,011	1376
180	45,25	324,9	115,340	1606
200	53,83	429,5	152,473	1911
220	64,34	568,5	201,818	2284
240	76,84	744,6	264,333	2728
260	86,82	919,8	326,529	3082
280	97,26	1112	394,760	3453
300	112,5	1383	490,965	3994
320	124,4	1628	577,940	4416
340	133,5	1850	656,750	4739
360	142,8	2088	741,240	5069
400	159	2562	909,510	5645
450	178	3216	1141,680	6319
500	197,5	3949	1401,895	7011
550	211,8	4622	1640,810	7519
600	226,5	5350	1899,250	8041
650	241,6	6136	2178,280	8577
700	260,5	7032	2496,360	9248
800	285,8	8699	3088,145	10146
900	320,5	10810	3837,550	11378
1000	346,8	12820	4551,100	12311





HEB				
Διατομή	Ai(cm <sup>2</sup> )	Wpl,yi(cm <sup>3</sup> )	Mply,I (kNm)	Npl (kN)
100	26,04	104,2	36,991	924
120	34,01	165,2	58,646	1207
140	42,96	245,4	87,117	1525
160	54,25	354	125,67	1926
180	66,25	481,4	170,897	2352
200	78,08	642,5	228,0875	2772
220	91,04	827	293,585	3232
240	106	1053	373,815	3763
260	118,4	1283	455,465	4203
280	131,4	1534	544,57	4665
300	149,1	1869	663,495	5293
320	161,3	2149	762,895	5726
340	170,9	2408	854,84	6067
360	180,6	2683	952,465	6411
400	197,8	3232	1147,36	7022
450	218	3982	1413,61	7739
500	238,6	4815	1709,325	8470
550	254,1	5591	1984,805	9021
600	270	6425	2280,875	9585
650	286,3	7320	2598,6	10164
700	306,4	8327	2956,085	10877
800	334,2	10230	3631,65	11864
900	371,3	12580	4465,9	13181
1000	400	14860	5275,3	14200

