

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες

Τεχνολογίες και την Οικονομία

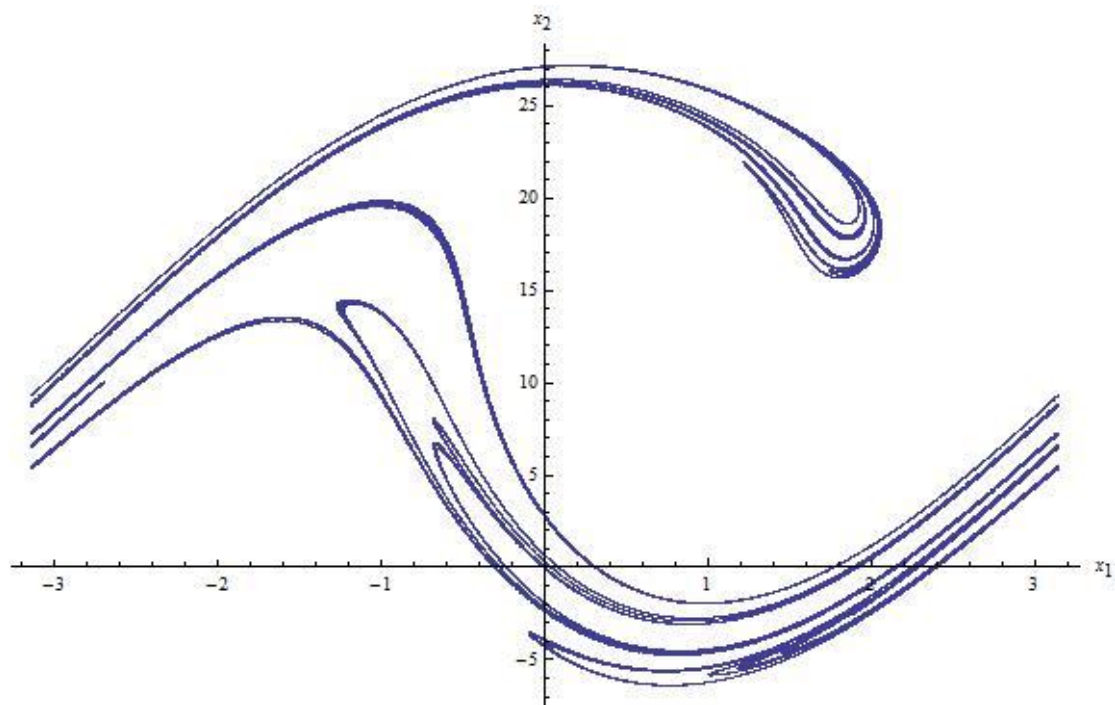
Κατεύθυνση: Τεχνολογίες Αιχμής



Μεταπτυχιακή Εργασία

**Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov σε μη γραμμικά δυναμικά
συστήματα με διχρωματική διέγερση**

Ζήσης Κώστας



Επιβλέπων Καθηγητής: Σπύρου Κωνσταντίνος

Αθήνα 2016

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σπύρου Κωνσταντίνο, καθηγητή και κοσμήτορα της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με την πολύ ενδιαφέρουσα και απαιτητική περιοχή της μη γραμμικής δυναμικής.

Επίσης, θερμές ευχαριστίες εκφράζονται προς τον κ. Κοντολέφα Ιωάννη, υποψήφιο διδάκτορα της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, για τις συζητήσεις μας επί του μαθηματικού πακέτου, Mathematica, καθώς επίσης και για τους υπολογισμούς που σχετίζονται με την εξαγωγή Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (Lagrangian Coherent Structures, LCSs) - μέθοδοι FTLE, FSLE και αλγόριθμος FCM - για αντιπαραβολή με τα δικά μου αποτελέσματα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο μελέτης της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι το φαινόμενο surf-riding το οποίο περιγράφει μια κατάσταση κατά την οποία ένα κύμα μεγάλης οξύτητας με μήκος συγκρίσιμο του μήκους του πλοίου επιταχύνει το πλοίο και το εξαναγκάζει να κινηθεί με την ταχύτητα φάσης του. Η τελευταία είναι μία ευσταθής κατάσταση λειτουργίας κατά την οποία το πλοίο παραμένει κοντά στην κοιλάδα του κύματος. Η σημασία του εν λόγω φαινομένου οφείλεται στο ότι η εμφάνισή του προηγείται του broaching, ενός τύπου αστάθειας που εκδηλώνεται με μια ξαφνική απόκλιση από την επιθυμητή πορεία του πλοίου η οποία μπορεί να οδηγήσει μέχρι και στην ανατροπή του. Έτσι, με αποφυγή του φαινομένου surf-riding μπορεί να αποφευχθεί το broaching.

Πιο συγκεκριμένα, στοχεύουμε στο να προσδιορίσουμε το κατώφλι πάνω από το οποίο η έλξη προς το surf-riding είναι καθολική δηλαδή, από κάθε αρχική συνθήκη, για ένα ιαπωνικό αλιευτικό (Purse Seiner) που λειτουργεί σε διχρωματικό περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Έχει αποδειχθεί ότι η ανωτέρω κατάσταση αντιστοιχεί σε ένα φαινόμενο ομοκλινικής διακλάδωσης. Συνεπώς, για την εύρεση του παραπάνω ορίου χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Melnikov, η οποία χρησιμοποιείται κατά κόρον στη βιβλιογραφία, για την εύρεση αυτού του τύπου διακλάδωσης. Η εφαρμογή της μεθόδου Melnikov έχει σαν αποτέλεσμα τον διαχωρισμό του θεωρούμενου παραμετρικού χώρου σε δύο περιοχές επί των οποίων στη μεν πρώτη να αποκλείεται η πιθανότητα χαοτικής κίνησης στη δε δεύτερη αυτή να αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο. Το όριο μεταξύ των δύο περιοχών συμπίπτει με αυτό που αναζητούμε. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι πως η παραμικρή διαταραχή επί του θεωρούμενου αδιατάραχτου συστήματος (το αδιατάραχτο σύστημα μαζί με τη διαταραχή συνιστούν το υπό μελέτη σύστημα) έχει σαν αποτέλεσμα τη διασταύρωση των πολλαπλοτήτων των υπερβολικών τροχιών (αντίστοιχες των υπερβολικών στάσιμων σημείων στην περίπτωση του αδιατάραχτου συστήματος) γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει στην εκδήλωση χαοτικής κίνησης χωρίς ωστόσο το σύστημα να εμφανίζει χαοτική απόκριση, όπως προκύπτει με προσδιορισμό των εκθετών Lyapunov, αλλά και μέσω προσομοιώσεων.

Ακόμη, εφαρμόζουμε τη μέθοδο Melnikov στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς υποθέτοντας περιοδική διέγερση και στην περίπτωση του ταλαντωτή Duffing-Holmes υποθέτοντας οιονεί περιοδική διέγερση (δύο αρμονικοί όροι) για λόγους εξοικείωσης με αυτήν. Τα προκύπτοντα αποτελέσματα υποστηρίζονται μέχρι ενός βαθμού μέσω προσομοιώσεων και προσδιορισμού των αντίστοιχων τομών Poincare στην πρώτη περίπτωση, ενώ στη δεύτερη πέραν αυτών υποστηρίζονται και από τον προσδιορισμό των εκθετών Lyapunov και την εφαρμογή των μεθόδων FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM.

ABSTRACT

The object of study of this postgraduate thesis is the surf-riding phenomenon which describes a situation where a wave with large steepness and a wavelength comparable to the ship's length accelerates the ship and forces it to move with its wave celerity. The latter is a stable operation mode in which the ship remains near the wave trough. The importance of this phenomenon is due to the fact that its occurrence precedes broaching which is a type of instability that is manifested with a sudden divergence from the ship's desirable course that may lead even to capsizing. Thus, avoiding the surf-riding phenomenon broaching can be avoided too.

More specifically, we aim to predict the threshold above which attraction to surf-riding is global, i.e., from any initial condition, for a Japanese fishing vessel (Purse Seiner) which operates in a bichromatic wave environment where waves approach the ship from the stern (following seas). It had been proved that the aforementioned condition corresponds to a homoclinic bifurcation. Consequently, in order to determine the above threshold we use Melnikov's method, a method that is used extensively in the literature for the detection of such a bifurcation. Application of Melnikov's method results in the separation of the considered parametric space in two regions where in the first one the possibility of chaotic motion is excluded, while in the second one it constitutes a possible outcome. The boundary between the two regions coincides with the threshold that we're looking for. The conclusion is that the slightest perturbation upon the considered unperturbed system (the unperturbed system along with the perturbation constitute the system under study) results in the intersection of the manifolds of the hyperbolic trajectories (the counterparts of the hyperbolic fixed points in the case of the unperturbed system) which is a fact that may lead to the onset of chaotic motion. However, the system does not exhibit chaotic responses as evidenced by the computation of the Lyapunov exponents and through simulations.

Furthermore, in order to become familiar with Melnikov's method, we apply it in the case of the simple pendulum assuming periodic excitation and in the case of the Duffing-Holmes oscillator assuming quasiperiodic excitation (two harmonic terms). The results obtained in the first case are confirmed to a certain extent through simulations and the computation of the corresponding Poincaré sections, while in the latter they are confirmed by similar computations and also the computation of the Lyapunov exponents, the implementation of the FTLE and FSLE methods and finally, from the execution of the FCM algorithm.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	li
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	0x
ABSTRACT	vkk
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
2 ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ	4
3 ΣΤΟΧΟΙ	8
4 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ	9
4.1 Η μέθοδος Melnikov	9
4.2 Εκθέτες Lyapunov	13
4.3 Η μέθοδος FTLE	15
4.4 Η μέθοδος FSLE	17
4.5 Ο αλγόριθμος FCM.....	17
5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	19
5.1 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στο απλό εκκρεμές με περιοδική διέγερση....	20
5.2 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στον ταλαντωτή Duffing-Holmes με οιονεί περιοδική διέγερση (δύο αρμονικοί όροι).....	27
5.2.1 Εφαρμογή των μεθόδων των εκθετών Lyapunov, FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM	35
5.2.2 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στην περίπτωση που τα πλάτη των δύο αρμονικών όρων είναι άνισα.....	44
5.3 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov σε ένα ιαπωνικό αλιευτικό (Purse Seiner) με διχρωματική κυματική διέγερση.....	47
5.3.1 Εξέταση ως προς την ύπαρξη χαοτικών αποκρίσεων του υπό μελέτη πλοίου με τη μέθοδο των εκθετών Lyapunov	55
5.3.2 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στην περίπτωση που το μήκος του ενός κύματος είναι ίσο με το μήκος του υπό μελέτη πλοίου	60
5.3.2.1 Εξέταση ως προς την ύπαρξη χαοτικών αποκρίσεων του υπό μελέτη πλοίου με τη μέθοδο των εκθετών Lyapunov	61
6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	68
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	70

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική ευστάθεια ενός πλοίου αποτελεί θεμελιώδες ζήτημα ασφάλειας το οποίο πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη κατά τη διάρκεια σχεδιασμού και λειτουργίας του. Διάφορα ατυχήματα που έχουν συμβεί κατά το παρελθόν ως αποτέλεσμα ασταθειών στην κίνηση του πλοίου επέβαλλαν και συνέβαλλαν στην ανάπτυξη της σχετικής επιστημονικής περιοχής.

Μεταξύ των τύπων αστάθειας που έχουν αναγνωριστεί είναι και το broaching το οποίο είναι ένα είδος κατευθυντικής αστάθειας. Πιο συγκεκριμένα, χαρακτηρίζεται ως μία αιφνίδια και ανεξέλεγκτη στροφή, παρά τον ενεργό έλεγχο του πηδαλίου, η οποία μπορεί κάποιες φορές να συνοδεύεται από μία επικίνδυνη κλίση στη διεύθυνση roll γεγονός που ίσως οδηγήσει σε ανατροπή [1-3]. Το broaching σχετίζεται κυρίως με τη λειτουργία σε εκείνες τις καταστάσεις της θάλασσας όπου τα κύματα προσπίπτουν στην πρύμνη του πλοίου και πιο συγκεκριμένα σε περιπτώσεις ακολουθούντων (following seas) ή μικρής γωνίας πλευρικών κυματισμών (stern-quartering seas) με πιθανότερη την εκδήλωσή του στη δεύτερη περίπτωση. Τέλος, αυτού του είδους το πρόβλημα έχουν να αντιμετωπίσουν συνήθως τα αλιευτικά και τα υψηλής ταχύτητας, μιας γάστρας, επιβατηγά πλοία [3,4].

Το ανωτέρω είδος αστάθειας συχνά έπεται ενός φαινομένου που ονομάζεται surf-riding το οποίο αποτελεί και το αντικείμενο μελέτης μας. Πρόκειται για μια κατάσταση κατά την οποία ένα κύμα μεγάλης οξύτητας και με μήκος συγκρίσιμο του υποκείμενου πλοίου «παγιδεύει» το τελευταίο στην κοιλάδα του και το εξαναγκάζει, αφού πρώτα το επιταχύνει, στο να κινηθεί με την ταχύτητα φάσης του. Η τελευταία είναι μια στάσιμη κατάσταση ως προς το συγκεκριμένο κύμα η οποία είναι το αποτέλεσμα ισοροπίας των δυνάμεων των ασκούμενων (κατά τη διαμήκη διεύθυνση) επί του πλοίου. Το συγκεκριμένο φαινόμενο παρατηρείται σε κυματικό περιβάλλον, όπως αυτό που περιγράφεται παραπάνω για το broaching, ενώ δεν αποτελεί πρόβλημα για τα μεγάλα πλοία (μήκους μεγαλύτερου των 200 m), καθώς τα κύματα τα οποία θα ήταν ικανά να οδηγήσουν στην εκδήλωσή του έχουν πολύ πιο μεγάλη ταχύτητα από εκείνη του πλοίου. Τέλος, μπορούμε να προβλέψουμε αν θα εκδηλωθεί το φαινόμενο surf-riding παρακολουθώντας την κίνηση του πλοίου, καθώς το φαινόμενο αυτό πραγματοποιείται όταν η τιμή της ταχύτητας του πλοίου φτάσει εκείνη της ταχύτητας του κύματος [1,3].

Η σημασία του surf-riding εμφανίζεται από το γεγονός πως ο διεθνής ναυτιλιακός οργανισμός (International Maritime Organization, IMO) στην πορεία προς την ανάπτυξη κριτηρίων για την άθικτη ευστάθεια που δεν θα βασίζονται πλέον σε εμπειρικές και στατιστικές προσεγγίσεις, αλλά στη φυσική των υποκείμενων δυναμικών ασταθειών, χρησιμοποιεί την πιθανότητα εμφάνισής του ως βάση για τη διατύπωση κριτηρίων ευπάθειας για το broaching, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση όσον αφορά την εκδήλωση των δύο φαινομένων. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε πως το broaching, όπως αφήσαμε να εννοηθεί παραπάνω, μπορεί να συμβεί και χωρίς να προηγηθεί surf-riding ωστόσο, σε αυτές τις περιπτώσεις το γεγονός ότι το πλοίο

κινείται με, γενικά, χαμηλή ταχύτητα έχει σαν αποτέλεσμα να μην υπάρχει ουσιαστικός κίνδυνος για ανατροπή του [3,5].

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία έχουμε ως κύριο στόχο τον προσδιορισμό του κατωφλιού του καθολικού surf-riding για ένα ιαπωνικό αλιευτικό (Purse Seiner) που λειτουργεί σε διχρωματικό περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Για τον προσδιορισμό του κατωφλιού αυτού χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Melnikov. Η επιλογή αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία ως ένα εργαλείο για τον εντοπισμό φαινομένων ομοκλινικής διακλάδωσης σε συνδυασμό με το ότι το καθολικό surf-riding έχει αποδειχθεί πως αντιστοιχεί σε ένα τέτοιο φαινόμενο [1,6]. Επίσης, μια που η ικανοποίηση του κριτηρίου Melnikov αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης εξετάζουμε κατά πόσο το υπό μελέτη πλοίο εμφανίζει χαοτικές αποκρίσεις με προσδιορισμό των εκθετών Lyapunov, αλλά και μέσω προσομοιώσεων [7].

Ας δούμε όμως αναλυτικά παρακάτω πως έχει δομηθεί η εργασία. Καταρχάς, η εργασία περιλαμβάνει έξι κεφάλαια. Στο 2^ο κεφάλαιο κάνουμε μια κριτική ανασκόπηση που αφορά το φαινόμενο surf-riding και μια σύντομη αναφορά σχετικά με την ανάπτυξη της μεθόδου Melnikov, τις αδυναμίες και τα πεδία εφαρμογής της.

Στο 3^ο κεφάλαιο εκθέτουμε τους στόχους της εργασίας.

Στο 4^ο κεφάλαιο αναφερόμαστε με συντομία σε στοιχεία από τη θεωρία της μη γραμμικής δυναμικής προκειμένου να καθίσταται δυνατή η παρακολούθηση της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, στην παράγραφο 4.1 παραθέτουμε λίγα θεωρητικά στοιχεία για τη μέθοδο Melnikov και τις δυο εκφράσεις αυτής που χρησιμοποιούμε. Στην παράγραφο 4.2 αναφέρουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των εκθετών Lyapunov. Τέλος, στις υπόλοιπες τρεις παραγράφους αναφέρουμε με συντομία το θεωρητικό υπόβαθρο για τις μεθόδους FTLE, FSLE και τον αλγόριθμο FCM που χρησιμοποίησε ο κ. Ιωάννης Κοντολέφας προκειμένου να γίνει σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων μας.

Στο 5^ο κεφάλαιο παραθέτουμε τα αποτελέσματα της εργασίας τα οποία έχουν προκύψει (συμπεριλαμβανομένων των αποτελεσμάτων του κ. Κοντολέφα) με χρήση του μαθηματικού πακέτου Mathematica 9.0.1.0. Πιο αναλυτικά, στην εισαγωγή του κεφαλαίου 5 αναφέρουμε ποια είναι τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε μαζί με τους λόγους για τους οποίους προηγείται η εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στις περιπτώσεις του απλού εκκρεμούς και του ταλαντωτή Duffing-Holmes. Στην παράγραφο 5.1 γίνεται εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στο απλό εκκρεμές με περιοδική διέγερση. Η παράγραφος 5.2 αφορά την εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στον ταλαντωτή Duffing-Holmes με διέγερση δύο αρμονικούς όρους που έχουν ίσα πλάτη. Κατόπιν, στην παράγραφο 5.2.1 γίνεται εφαρμογή των μεθόδων των εκθετών Lyapunov, FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM και σύγκριση των μεταξύ τους αποτελεσμάτων προκειμένου να ελέγξουμε την ισχύ του αποτελέσματος της μεθόδου Melnikov που προέκυψε στην παράγραφο 5.2. Ακόμη, για λόγους πληρότητας παρουσιάζουμε στην παράγραφο 5.2.2 το αποτέλεσμα εφαρμογής της μεθόδου Melnikov στην περίπτωση που τα πλάτη των δύο αρμονικών όρων δεν είναι ίσα.

Έπειτα, στην παράγραφο 5.3 περνάμε στο κύριο πρόβλημα που μας απασχολεί και εφαρμόζουμε, όπως προαναφέραμε, τη μέθοδο Μελνίκον σε ένα αλιευτικό που λειτουργεί σε διχρωματικό περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Στην παράγραφο αυτή το ένα εκ των δύο κυμάτων (εκείνο που έχει περιληφθεί στο θεωρούμενο ως αδιατάραχτο σύστημα) έχει μήκος διπλάσιο του μήκους του αλιευτικού και ο $Fr = 0.4$. Ακολούθως, στην παράγραφο 5.3.1 εξετάζουμε αν το υπό μελέτη αλιευτικό εμφανίζει χαστικές αποκρίσεις με προσδιορισμό των εκθετών Lyapunov, αλλά και μέσω προσομοιώσεων. Τέλος, στις παραγράφους 5.3.2 και 5.3.2.1 πραγματοποιούμε αντίστοιχους υπολογισμούς με αυτούς στις παραγράφους 5.3 και 5.3.1 μόνο που αυτή τη φορά το κύμα που περιλαμβάνεται στο αδιατάραχτο σύστημα έχει μήκος ίσο με το μήκος του αλιευτικού και ο $Fr = 0.31$.

Κλείνουμε με το κεφάλαιο 6 στο οποίο αναφέρουμε τα συμπεράσματά μας και μια πρόταση για μελλοντική έρευνα.

2 ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά κάνουμε μια σύντομη κριτική ανασκόπηση για το φαινόμενο surf-riding και έπειτα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε σχέση με τη μέθοδο Melnikov.

Όσον αφορά λοιπόν το φαινόμενο surf-riding έχουμε να σημειώσουμε τα ακόλουθα: το 1948 ο Davidson ασχολήθηκε με την εξέταση της κατευθυντικής ευστάθειας ενός πλοίου σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Απέδειξε ότι ένα πλοίο που λειτουργεί σε ένα τέτοιο περιβάλλον μπορεί να παρουσιάσει αδυναμία στο να διατηρήσει τη σταθερή επιθυμητή πορεία του παρά το ότι αυτό είναι εφικτό σε ήρεμο νερό [4]. Το 1951 ο Grim διαπίστωσε πως απότομοι και μεγάλου μήκους ακολουθούντες είτε πλευρικοί, αλλά μικρής γωνίας, πρυμναίοι κυματισμοί μπορούν να καταστούν ικανοί στο να πυροδοτήσουν την εκδήλωση του φαινομένου surf-riding [1,3,4]. Οι Du Cane και Goodrich (1962) ήταν οι πρώτοι που παρατήρησαν πειραματικά το φαινόμενο surf-riding, καθώς πέτυχαν την αναπαραγωγή του διεξάγοντας πειράματα με μοντέλα σε ακολουθούντες κυματισμούς [8,9]. Με τη βοήθεια των παραπάνω ερευνητών αναγνωρίστηκε έτσι, ένα νέο φαινόμενο, το surf-riding.

Στα τέλη της δεκαετίας του '80 ο Kan μελέτησε το φαινόμενο surf-riding σε ακολουθούντες κυματισμούς μέσω πειραμάτων, αλλά και μέσω προσομοιώσεων και ανάλυσης του χώρου φάσεων κάνοντας χρήση ενός μοντέλου για την κίνηση του πλοίου κατά το διάμηκες. Τα αποτελέσματα των ερευνών του ήταν πολύ σημαντικά, καθώς (μεταξύ άλλων) έδειξαν ότι αυξανόμενης της ονομαστικής ταχύτητας του πλοίου (ή ισοδύναμα του αριθμού Froude) υπάρχουν δύο κρίσιμες τιμές της, όπου

1. κάτω από την πρώτη μόνο το περιοδικό surging είναι το εφικτό είδος κίνησης
2. μεταξύ των δύο υπάρχει συνύπαρξη δύο ειδών κίνησης, περιοδικό surging και surf-riding, αναλόγως των αρχικών συνθηκών και
3. πάνω από τη δεύτερη μόνο το surf-riding είναι εφικτό, ενώ

οδήγησαν και στον φαινομενολογικό κανόνα που δηλώνει ότι το surf-riding συμβαίνει όταν η ταχύτητα του πλοίου φτάσει την ταχύτητα του κύματος ο οποίος επιβεβαιώθηκε και πειραματικά και μέσω προσομοιώσεων [8].

Στα μέσα της δεκαετίας του '90 ο Σπύρου απέδειξε ότι η έλξη προς το surf-riding από κάθε αρχική συνθήκη (καθολικό surf-riding) είναι αποτέλεσμα μιας ομοκλινικής διακλάδωσης που οδηγεί σε εξαφάνιση του περιοδικού surging από τον χώρο φάσεων. Πιο συγκεκριμένα, διαλέγοντας ένα τρόπο απεικόνισης για το χώρο φάσεων κατά τον οποίο το περιοδικό surging αναπαρίσταται ως κλειστή τροχιά ξεκινά από μια χαμηλή τιμή του αριθμού Froude και δείχνει ότι αυξανόμενης της τιμής του συμβαίνουν τα ακόλουθα:

1. αρχικά η τιμή του αριθμού Froude είναι αρκετά χαμηλή, έτσι ώστε να μην επιτρέπει την ύπαρξη στάσιμων σημείων με αποτέλεσμα το σύστημα να έχει περιοδική απόκριση (ύπαρξη μιας κλειστής τροχιάς)

2. για μια μεγαλύτερη τιμή του εμφανίζεται κι ένα στάσιμο σημείο το οποίο στη συνέχεια διασπάται σε ένα ευσταθές (κοντά στην κοιλάδα του κύματος) κι ένα σαγματικό σημείο (κοντά στην κορυφή του κύματος) που αποτελούν τις στάσιμες καταστάσεις του surf-riding
3. καθώς η τιμή του αριθμού Froude αυξάνεται από την κρίσιμη τιμή της εμφάνισης των δύο στάσιμων σημείων αυτό που παρατηρείται είναι ότι η κλειστή τροχιά πλησιάζει ολοένα και περισσότερο το σάγμα, ενώ ταυτόχρονα παραμορφώνεται τείνοντας να γίνει εφραπτόμενη στις πολλαπλότητες του τελευταίου μέχρι την κρίσιμη τιμή κατά την οποία συγκρούονται οδηγώντας στο σχηματισμό μίας ομοκλινικής σύνδεσης (σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης)
4. αυξάνοντας περαιτέρω την τιμή του η ομοκλινική σύνδεση καταστρέφεται κι έτσι κάθε αρχική συνθήκη οδηγείται προς το surf-riding [1].

Οι παραπάνω ερευνητές συνέβαλλαν στην ανάδειξη και την κατανόηση του φαινομένου surf-riding στην περίπτωση αρμονικών κυμάτων (regular waves) ωστόσο, η υιοθέτηση μιας ρεαλιστικής περιγραφής για την κατάσταση της θάλασσας υποθέτοντας ένα πολυσυχνοτικό πεδίο κυμάτων (irregular sea) αποτελεί διαφορετική περίπτωση που απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση, καθώς πλέον το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει το φαινόμενο εξαρτάται ρητά από το χρόνο. Παρακάτω θα αναφερθούμε σε προσπάθειες που κινούνται προς αυτή την κατεύθυνση.

Μια τέτοια προσπάθεια είναι αυτή του Grim το 1963 κατά την οποία επιβεβαίωσε την εικασία διασύνδεσης των surf-riding και broaching και βρήκε ότι το πρώτο αποτελεί την πιο σημαντική προηγηθείσα κατάσταση για το δεύτερο. Το τελευταίο φαίνεται να υποστηρίζεται από τα υπό ανάπτυξη κριτήρια άθικτης αστάθειας για το broaching όπου στα δύο πρώτα από τα τρία στάδια αξιολόγησης της ευστάθειας ενός πλοίου για το broaching (κριτήρια ευπάθειας επιπέδου 1 και 2) χρησιμοποιείται ως βάση το surf-riding [3,5,10].

Σε μια προσπάθεια επέκτασης της φαινομενολογικής προσέγγισης που ισχύει για την περίπτωση των αρμονικών κυμάτων σ' αυτή ενός περιβάλλοντος στοχαστικών κυμάτων οι Σπύρου et al. (2012, 2013, 2014a, 2014b) επέκτειναν την έννοια της ταχύτητας του κύματος ούτως ώστε αυτή να βρίσκει εφαρμογή σε περιβάλλοντα όπως τα τελευταία. Πιο συγκεκριμένα, ένας από τους ορισμούς την ήθελε να είναι η ταχύτητα διάδοσης μιας τοπικής ιδιότητας του κυματικού προφίλ, όπως είναι για παράδειγμα μια συγκεκριμένη κλίση. Όμως, η τελευταία δεν είναι εν γένει μια ομαλή και φραγμένη καμπύλη. Έτσι, ανέπτυξαν έναν άλλον ορισμό τοπικής ταχύτητας κύματος με βάση το σημείο εκείνο που έχει τοπικά τη μεγαλύτερη κλίση και βρίσκεται στην κοντινότερη, ως προς το πλοίο, κατωφέρεια του κύματος ο οποίος για τις λίγες περιπτώσεις που θεωρήθηκαν έδειξε να χρησιμεύει, δηλαδή, να σηματοδοτεί την «παγίδευση» στο surf-riding. Ωστόσο και ο τελευταίος ορισμός δεν είναι ελεύθερος προβλημάτων. Μία τέτοια περίπτωση είναι αυτή της δημιουργίας και εξαφάνισης κορυφών η οποία χαρακτηρίζεται από έντονη διακύμανση και άλματα

στο άπειρο ειδικά στην περίπτωση κυματικών φασμάτων μεγάλου εύρους συχνοτήτων (bandwidth). Αυτό οδήγησε σε έναν καινούριο ορισμό βασιζόμενο στην έννοια της στιγμιαίας συχνότητας (όρος της ανάλυσης σημάτων) ο οποίος έχει σαν αποτέλεσμα ομαλότερες καμπύλες ταχύτητας κύματος [11-14].

Το 2012 οι Belenky et al. προσπάθησαν να ερμηνεύσουν την «παγίδευση» και την «απελευθέρωση» από το surf-riding σε πολυσυχνотικό περιβάλλον κυματισμών σε σχέση με την ύπαρξη «σημείων ισορροπίας surf-riding» δηλαδή, θέσεων του πλοίου επί του κύματος όπου πραγματοποιείται εξισορρόπηση μεταξύ των δυνάμεων που ασκούνται επί του πλοίου κατά το διάμηκες. Η επιτυχία των προσπαθειών τους για τις περιπτώσεις που μελέτησαν οδήγησε στην υπόθεση ότι η ύπαρξη «σημείων ισορροπίας surf-riding» μπορεί να διατυπωθεί σαν ένα upcrossing πρόβλημα της διαφοράς μεταξύ της κυματικής δύναμης και της δύναμης αντίστασης σε ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κύματος. Το τελευταίο αποτελεί ένα βήμα προς την κατεύθυνση εκτίμησης της πιθανότητας ανατροπής έπειτα από broaching ακολουθούμενο από surf-riding [2].

Στις εργασίες των Σπύρου et al. (2014b) και Κοντολέφα και Σπύρου (2016) προτείνονται μέθοδοι οι οποίες συμβάλλουν σε μεγαλύτερη κατανόηση των φαινομένων surf-riding και broaching σε πολυσυχνотικά περιβάλλοντα κυματισμών. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη εργασία, προτείνεται η περιγραφή της εξέλιξης ενός συστήματος μέσω της παρακολούθησης κάποιων χαρακτηριστικών αντικειμένων του προβλήματος (Feature Flow Field method, FFF method). Στην περίπτωση της εξίσωσης του surge τέτοια χαρακτηριστικά αντικείμενα είναι τα σημεία του χώρου φάσεων που μηδενίζουν την επιτάχυνση και τη χρονική παράγωγο της μερικά εκ των οποίων συσχετίζονται με το surf-riding. Στη δεύτερη εργασία γίνεται χρήση της ανωτέρω μεθόδου σε συνδυασμό με μια μέθοδο εξαγωγής Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (Lagrangian Coherent Structures, LCSs), την μέθοδο FTLE (Finite Time Lyapunov Exponent method). Οι Λαγκρανζιανές Συνεκτικές Δομές είναι γενικά επιφάνειες οι οποίες έχουν ένα ρόλο οργανωτή της φασικής ροής και γενικεύουν τις έννοιες των ασταθών και ευσταθών πολλαπλοτήτων [14,15,16].

Όσον αφορά τώρα τη μέθοδο Melnikov έχουμε να αναφέρουμε τα παρακάτω: αυτό που κάνει η μέθοδος Melnikov είναι να εξάγει πληροφορίες για την απόσταση μεταξύ ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων δεδομένου ότι η απόλυτη τιμή της τελευταίας, σε πρώτη τάξη, αποδεικνύεται πως είναι ευθέως ανάλογη της απόλυτης τιμής της συνάρτησης Melnikov. Στην προσπάθεια αναζήτησης για την ανάπτυξη της μεθόδου Melnikov εντοπίσαμε πως, ίσως, ο πρώτος που ασχολήθηκε με το διαχωρισμό ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων ήταν ο Poincare στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Βασιζόμενος σ' αυτές τις εργασίες ο Melnikov (1963) ανέπτυξε τη μέθοδο που σήμερα πλέον φέρει το όνομά του. Έπειτα, ερευνητές όπως οι Arnold (1964), Chirikov, Holmes (1979), Chow, Hale (1980), Holmes & Marsden (1982), Guckenheimer & Holmes (1983), Wiggins (1986, 1987, 1988), Salam (1987), Liu & Gu (1989) και Frey & Simiu (1993) επέκτειναν τη μέθοδο ούτως ώστε να καλύπτει ένα μεγάλο εύρος συστημάτων τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους π.χ. ως προς τη

διάσταση, τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας, το αν περιλαμβάνεται όρος απόσβεσης, το αν το σύστημα είναι στοχαστικό κλπ. Για παράδειγμα ο Salam επέκτεινε την τεχνική ούτως ώστε να αντιμετωπίζει συστήματα σε περιπτώσεις που οι όροι απόσβεσης έχουν μεγάλη τιμή σε σχέση με τους υπόλοιπους όρους της υποκείμενης διαφορικής εξίσωσης, ενώ ως γνωστόν η αρχική μέθοδος απαιτεί οι τιμές της απόσβεσης και της διέγερσης να λαμβάνουν μικρές τιμές και οι Liu & Gu ανέπτυξαν τη μέθοδο (τύπου) Melnikov δεύτερης τάξης. Το να λαμβάνουν οι όροι απόσβεσης και διέγερσης μικρές τιμές αποτελεί μία αδυναμία της αρχικής μεθόδου η οποία αίρεται για τις περιπτώσεις που το υπό μελέτη σύστημα μπορεί να υπαχθεί στη «μέθοδο Salam» αν και ο Simiu και οι Ling & Bao αναφέρουν πως οι προβλέψεις της εξακολουθούν να ισχύουν και για διαταραχές που λαμβάνουν τιμές αρκετά μεγάλες, όπως είναι αυτές που ενδιαφέρουν στις εφαρμογές. Τέλος, η μέθοδος Melnikov βρίσκει ευρεία εφαρμογή σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι για παράδειγμα η μηχανική των ρευστών, η δυναμική των συστημάτων ισχύος (power system dynamics), η δυναμική των στερεών σωμάτων (rigid body dynamics), η φυσική συμπυκνωμένης ύλης (condensed matter physics) κ.ά. [7,17-27].

3 ΣΤΟΧΟΙ

Οι στόχοι της εργασίας αυτής είναι:

1. Ο προσδιορισμός του άνω ορίου του surf-riding (ισοδύναμα του κατωφλιού πάνω από το οποίο η έλξη προς το surf-riding είναι καθολική δηλαδή, από κάθε αρχική συνθήκη), με εφαρμογή της μεθόδου Melnikov, για ένα ιαπωνικό αλιευτικό (Purse Seiner) που λειτουργεί σε διχρωματικό περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών.
2. Η εξοικείωση με τη μέθοδο γι' αυτό και προηγείται η εφαρμογή της στην περίπτωση του απλού εκκρεμούς με περιοδική διέγερση και του ταλαντωτή Duffing-Holmes με οιονεί περιοδική διέγερση (δύο αρμονικοί όροι).
3. Η εξέταση ως προς την ύπαρξη χαοτικών αποκρίσεων του υπό μελέτη πλοίου στην περίπτωση διχρωματικής κυματικής διέγερσης με προσδιορισμό των εκθετών Lyapunov.

4 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

4.1 Η μέθοδος Melnikov

Η ομοκλινική ή ετεροκλινική διακλάδωση είναι ένας τύπος καθολικής διακλάδωσης που συμβαίνει όταν δημιουργείται ή καταστρέφεται μία ομοκλινική ή ετεροκλινική σαγματική σύνδεση, καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι που υπεισέρχονται στη διαφορική εξίσωση που διέπει το εκάστοτε υπό μελέτη δυναμικό σύστημα. Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εξέταση των δυναμικών συστημάτων ως προς το αν εμφανίζουν ομοκλινικές ή ετεροκλινικές διακλαδώσεις είναι και η μέθοδος Melnikov. Το αποτέλεσμα εφαρμογής της μεθόδου Melnikov σε ένα δυναμικό σύστημα είναι η παραγωγή μιας σχέσης μεταξύ των παραμέτρων του συστήματος με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να καθορίσουμε τις περιοχές του παραμετρικού χώρου για τις οποίες εμφανίζεται ή όχι ένας τέτοιος τύπος διακλάδωσης. Όπως προαναφέραμε αυτός ο τύπος διακλάδωσης είναι καθολικός, δηλαδή αφορά εκτεταμένη περιοχή του χώρου φάσεων και συνεπώς η πραγματοποίησή της συνεπάγεται σημαντικές αλλαγές επί αυτού, όπως είναι για παράδειγμα η εμφάνιση χάους. Επομένως, από την άποψη των εφαρμογών η μέθοδος Melnikov μας βοηθάει στο να προσδιορίσουμε, αν υπάρχουν, περιοχές του χώρου φάσεων οι οποίες θα εξασφαλίζουν την επιθυμητή λειτουργία του υπό μελέτη συστήματός μας [24].

Το θεώρημα Melnikov, όπως αυτό διατυπώνεται από τον Simiu, έχει ως εξής: Θεωρούμε το σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ και $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^T$. Αν το αδιατάραχτο σύστημα ($\varepsilon = 0$) είναι Χαμιλτονιανό δηλαδή, $f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2}$, $f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$, όπου H είναι μια βαθμωτή, επαρκώς ομαλή συνάρτηση, η Χαμιλτονιανή και έχει μία ομοκλινική¹ τροχιά $\mathbf{x}_h = (x_{h1}, x_{h2})^T$ με ένα σαγματικό σημείο στην αρχή, $0 < \varepsilon \ll 1$ και οι \mathbf{f} και \mathbf{g} είναι φραγμένες και C^r , $r \geq 2$ τότε, σε πρώτη τάξη, η απόσταση Melnikov είναι ανάλογη της απόλυτης τιμής της συνάρτησης Melnikov $M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}[\mathbf{x}_h(\zeta)] \wedge \mathbf{g}[\mathbf{x}_h(\zeta), \zeta + t_0] d\zeta$, όπου το σύμβολο \wedge δηλώνει το σφηνοειδές γινόμενο [7].

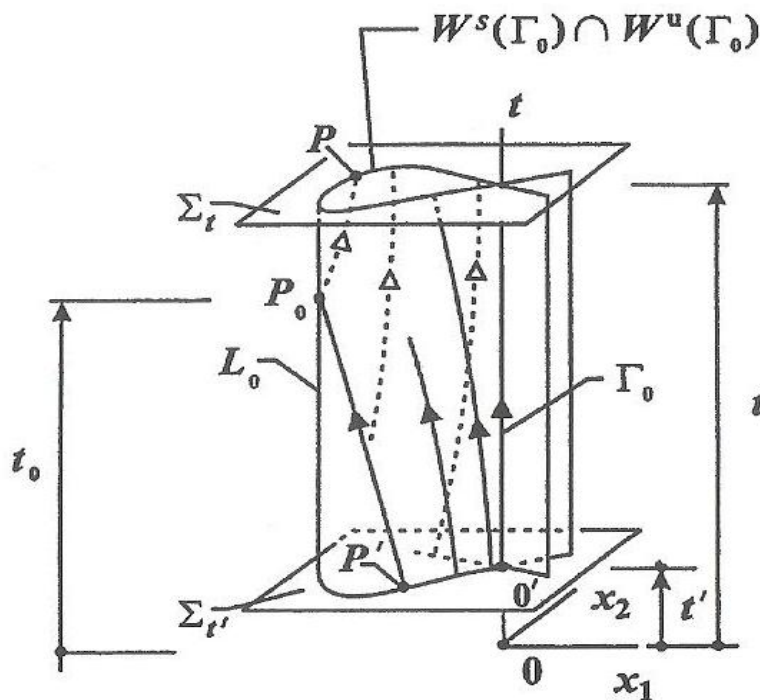
Το σφηνοειδές γινόμενο των διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} συμβολιζόμενο ως $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ είναι μία βαθμωτή ποσότητα που ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi$, όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των \mathbf{a} και \mathbf{b} . Αν τώρα υποθέσουμε πως έχουμε τα αλγεβρικά διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$ τότε το σφηνοειδές γινόμενό τους μπορεί να υπολογιστεί και ως $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ [7, 24].

Στο σημείο αυτό θα δείξουμε ποια είναι η απόσταση Melnikov που αναφέρεται στο ανωτέρω θεώρημα και παράλληλα θα αναφερθούμε σε κάποιες έννοιες που συμβάλλουν στην κατανόηση της εργασίας που επιτελεί η συνάρτηση Melnikov.

Αρχικά χρειάζεται να έχουμε μια εικόνα των πολλαπλοτήτων του αδιατάραχτου συστήματος στο χώρο $\{x_1, x_2, t\}$. Για το λόγο αυτό επικαλούμαστε το σχήμα 1. Εξ ορισμού η ολικά ευσταθής (αντίστοιχα ασταθής) πολλαπλότητα, έχοντας κατά νου το

¹ Τα όσα αναφέρουμε για ομοκλινική τροχιά ισχύουν και για ετεροκλινική τροχιά.

χώρο φάσεων $x_1 - x_2$, είναι το σύνολο των σημείων του \mathbb{R}^2 για τα οποία οι τροχιές που ξεκινούν από αυτά καταλήγουν στο στάσιμο σημείο (εδώ το σάγμα $(0,0)$), καθώς ο χρόνος $t \rightarrow +\infty$ (αντίστοιχα $t \rightarrow -\infty$) και επομένως εν προκειμένω, στο χώρο $\{x_1, x_2, t\}$, οι πολλαπλότητες ταυτίζονται και αποτελούνται από εκείνες τις ολοκληρωτικές καμπύλες των οποίων η προβολή στο επίπεδο φάσεων $x_1 - x_2$ είναι η ομοκλινική τροχιά (εδώ αριστερή) του συγκεκριμένου σαγματικού σημείου. Προκειμένου να αναφερόμαστε σε ολοκληρωτικές καμπύλες και σημεία επί της επιφάνειας που συνιστούν οι πολλαπλότητες θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα 1. Θεωρούμε, αυθαίρετα, μία ευθεία αναφοράς L_0 η οποία είναι παράλληλη στον άξονα των t και περιέχεται στις πολλαπλότητες. Με αυτόν τον τρόπο μία ολοκληρωτική καμπύλη που ανήκει στις πολλαπλότητες θα χαρακτηρίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τη χρονική συντεταγμένη t_0 του σημείου P_0 επί του οποίου αυτή εφάπτεται στην L_0 , ενώ ένα σημείο P επί αυτής θα χαρακτηρίζεται επιπλέον της t_0 και από την συντεταγμένη $t - t_0$ η οποία αντιπροσωπεύει τη χρονική απόσταση μεταξύ των P_0 και P . Τώρα οι συντεταγμένες των P_0 και P στο επίπεδο $x_1 - x_2$ είναι, αντίστοιχως, $x_h(t_0 - t_0) = x_h(0)$ και $x_h(t - t_0)$.



Σχήμα 1 Πολλαπλότητες του αδιατάραχτου συστήματος και το σύστημα αναφοράς τους (Simiu, 2002)

Στο σχήμα 2 φαίνεται η επίδραση που επιφέρει η διαταραχή στις πολλαπλότητες του αδιατάραχτου συστήματος, δηλαδή το διαχωρισμό των τελευταίων. Στο σχήμα 3 απεικονίζεται μια επίπεδη τομή $\Sigma_{t'}$, κάθετη στον άξονα των t στην τεταγμένη t' , του σχήματος 2. Οι συνεχείς γραμμές του σχήματος 3 αναπαριστούν τις πολλαπλότητες του αδιατάραχτου συστήματος, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές αναπαριστούν τις

πολλαπλότητες του διαταραγμένου συστήματος. Στο ίδιο σχήμα με Γ_0 συμβολίζεται ο άξονας των t και με Γ_ε η καμπύλη στην οποία μετασχηματίζεται λόγω της διαταραχής. Το σημείο P' του ίδιου σχήματος ανήκει στην ολοκληρωτική καμπύλη που συνδέει τα σημεία P_0 και P που αναφέραμε παραπάνω και επομένως αυτό χαρακτηρίζεται βάσει των ανωτέρω από τις συντεταγμένες t_0 και $t' - t_0$ με συντεταγμένες $\mathbf{x}_h(t' - t_0)$ στο επίπεδο $x_1 - x_2$. Το σημείο P ανήκει στην επίπεδη τομή Σ_t κάθετη στον άξονα των t στη συντεταγμένη t (βλ. σχήματα 1, 2 και 3). Με N συμβολίζεται η ευθεία γραμμή που είναι κάθετη στο σημείο P' στην ομοκλινική τροχιά που αποτελεί το σύνολο των κοινών σημείων μεταξύ της επίπεδης τομής $\Sigma_{t'}$ και των αδιατάραχτων πολλαπλοτήτων. Θεωρούμε τώρα δύο ολοκληρωτικές καμπύλες που περιέχονται η πρώτη στην ευσταθή διαταραγμένη πολλαπλότητα και τέμνει την N και την επίπεδη τομή Σ_t , αντιστοίχως, στα σημεία A' και $\mathbf{x}^s(t; t_0, t', \varepsilon) = [x_1^s(t; t_0, t', \varepsilon), x_2^s(t; t_0, t', \varepsilon)]^T$ και η δεύτερη στην ασταθή διαταραγμένη πολλαπλότητα η οποία τέμνει την N και την επίπεδη τομή Σ_t , αντιστοίχως, στα σημεία A'' και $\mathbf{x}^u(t; t_0, t', \varepsilon) = [x_1^u(t; t_0, t', \varepsilon), x_2^u(t; t_0, t', \varepsilon)]^T$.

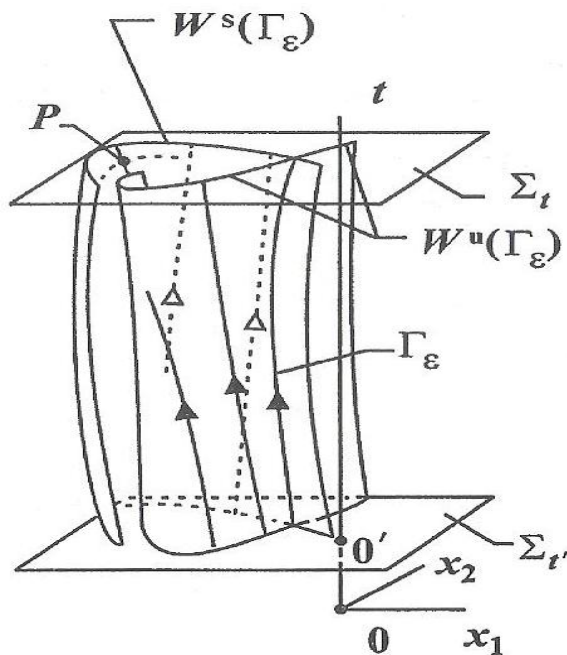
Ορίζεται τώρα μία συνάρτηση απόστασης στην επίπεδη τομή Σ_t σύμφωνα με τη σχέση $\Delta_\varepsilon(t; t_0, t') = \mathbf{f}[\mathbf{x}_h(t - t_0)] \wedge [\mathbf{x}^u(t; t_0, t', \varepsilon) - \mathbf{x}^s(t; t_0, t', \varepsilon)]$. Αν πάμε στην εξίσωση $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ και θέσουμε $\varepsilon = 0$ τότε προκύπτει ότι το διάνυσμα $\mathbf{f}(\mathbf{x}_h(t - t_0))$ εφάπτεται στο σημείο P επί της ομοκλινικής τροχιάς στην επίπεδη τομή Σ_t η οποία ορίζεται από την τομή της τελευταίας με τις αδιατάραχτες πολλαπλότητες. Επίσης, αν εφαρμόσουμε τον ορισμό του σφηνοειδούς γινομένου η συνάρτηση απόστασης λαμβάνει τη μορφή $\Delta_\varepsilon(t; t_0, t') = |\mathbf{f}[\mathbf{x}_h(t - t_0)]| |\mathbf{x}^u(t; t_0, t', \varepsilon) - \mathbf{x}^s(t; t_0, t', \varepsilon)| \sin \lambda$, όπου λ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{f}[\mathbf{x}_h(t - t_0)]$ και $[\mathbf{x}^u(t; t_0, t', \varepsilon) - \mathbf{x}^s(t; t_0, t', \varepsilon)]$. Η απόλυτη τιμή της ποσότητας $|\mathbf{x}^u(t; t_0, t', \varepsilon) - \mathbf{x}^s(t; t_0, t', \varepsilon)| \sin \lambda$ που αποτελεί τη συνιστώσα του διανύσματος $[\mathbf{x}^u(t; t_0, t', \varepsilon) - \mathbf{x}^s(t; t_0, t', \varepsilon)]$ επί της καθέτου στο διάνυσμα $\mathbf{f}[\mathbf{x}_h(t - t_0)]$ ορίζεται ως η απόσταση Melnikov σημείο P (βλ. Σχήμα 2). Αν θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση απόστασης στην επίπεδη τομή $\Sigma_{t'}$ αρκεί να θέσουμε στον παραπάνω ορισμό όπου t το t' και επομένως η απόλυτη τιμή της θα είναι ίση με $|\mathbf{f}[\mathbf{x}_h(t' - t_0)]|$ φορές την απόσταση Melnikov στο σημείο P' , όπου η τελευταία είναι εξ ορισμού ίση με την απόσταση $A'A''$ (βλ. Σχήμα 3).

Αποδεικνύεται τελικά πως ισχύει η σχέση $\Delta_\varepsilon(t'; t_0, t') = \varepsilon M(t_0) + O(\varepsilon^2)$ (1). Στο σημείο αυτό σημειώνουμε πως η αλλαγή της μεταβλητής t_0 (δεδομένου ότι αυτή καθορίζει και μια συγκεκριμένη ολοκληρωτική καμπύλη) θα άλλαζε τη θέση του αντίστοιχου του P' σημείου κατά μήκος της ομοκλινικής τροχιάς επί του νέου πλέον θεωρούμενου επιπέδου t' και ακολουθώντας όλα τα παραπάνω θα παίρναμε πάλι μία σχέση σαν την (1), αλλά για το καινούριο t_0 . Συνεπώς, η αλλαγή της t_0 συνεπάγεται την ταυτόχρονη αλλαγή της t' και με αυτό τον τρόπο η συνάρτηση Melnikov λόγω ισχύος της (1) είναι μέτρο της απόστασης των διαταραγμένων πολλαπλοτήτων σε κάθε επίπεδο t' .

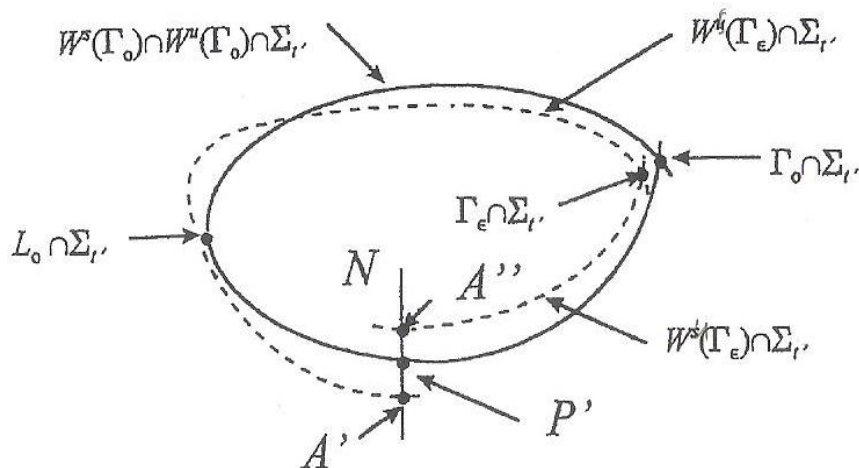
Ένα σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο χρησιμοποιούμε παρακάτω είναι το εξής: αν η συνάρτηση Melnikov έχει απλές ρίζες, τότε οι πολλαπλότητες του διαταραγμένου

συστήματος τέμνονται εγκάρσια (transversally). Το να έχει η συνάρτηση Melnikov απλές ρίζες αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης [7].

Τέλος, αναφέρουμε πως στην περίπτωση που το αδιατάραχτο σύστημα είναι μη Χαμιλτονιανό η συνάρτηση Melnikov υπολογίζεται από τη σχέση $M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[x_h(\zeta)] \wedge g[x_h(\zeta), \zeta + t_0] \left\{ \exp \left[- \int_0^\zeta \text{Trace} Df(x_h(s)) ds \right] \right\} d\zeta$, όπου $\text{Trace} Df(x_h(s))$ είναι το ίχνος του Ιακωβιανού πίνακα του $f(x_h(s))$ [28].



Σχήμα 2 Πολλαπλότητες του διαταραγμένου συστήματος (Simiu, 2002)



Σχήμα 3 Τομές του Γ_0 , $W^s(\Gamma_0) \cap W^u(\Gamma_0)$, L_0 , Γ_ε , $W^s(\Gamma_\varepsilon)$ και $W^u(\Gamma_\varepsilon)$ με το επίπεδο $\Sigma_{t'}$. Το ευθύγραμμο τμήμα $A'A''$ είναι η απόσταση Melnikov στο σημείο P' των αδιατάραχτων πολλαπλοτήτων (Simiu, 2002).

4.2 Εκθέτες Lyapunov

Οι εκθέτες Lyapunov παρέχουν ένα μέτρο του μέσου εκθετικού ρυθμού απόκλισης ή σύγκλισης δύο γειτονικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος και χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση χαοτικών αποκρίσεων του τελευταίου. Ως γνωστόν, ένα n -διάστατο αυτόνομο δυναμικό σύστημα έχει n εκθέτες Lyapunov [29].

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό όλων των εκθετών Lyapunov ενός n -διάστατου, αυτόνομου δυναμικού συστήματος συνεχούς χρόνου. Περιοριζόμαστε στα αυτόνομα συστήματα γιατί, ως γνωστόν, ένα μη αυτόνομο σύστημα ανάγεται εύκολα σε αυτόνομο με την προσθήκη επιπλέον της εξίσωσης $\dot{t} = 1$ και της συνθήκης $t(t_0) = t_0$ [30].

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε το n -διάστατο σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ και ότι $\mathbf{f}^t: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ είναι η ροή που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} . Ακόμη υποθέτουμε πως \mathbf{x}_0 και $\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0$ είναι δύο σημεία του χώρου φάσεων σε χρόνο t_0 που βρίσκονται σε απειροστή απόσταση μεταξύ τους, δηλαδή το \mathbf{u}_0 είναι ένα διάνυσμα που έχει ως μέτρο μια πολύ μικρή τιμή. Μετά από την παρέλευση χρόνου t τα ανωτέρω σημεία θα έχουν απεικονιστεί, αντιστοίχως, στα $\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0)$. Στη χρονική στιγμή t η απόσταση μεταξύ τους είναι $\|\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0) - \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0)\| \approx \|D_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0\|$ λόγω γραμμικοποίησης της \mathbf{f}^t γύρω από το \mathbf{x}_0 με το σύμβολο $\|\cdot\|$ να δηλώνει το μέτρο του θεωρούμενου διανύσματος. Επομένως, ο μέσος εκθετικός ρυθμός απόκλισης ή σύγκλισης των δύο τροχιών ορίζεται από τη σχέση

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0) - \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{u}_0\|} \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|D_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|}.$$

Εάν το τελευταίο όριο είναι ένας θετικός (αντίστοιχα αρνητικός) αριθμός τότε έχουμε εκθετική απόκλιση (αντίστοιχα σύγκλιση) των τροχιών. Το παραπάνω όριο όμως, όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις ύπαρξης του στο \mathbb{R} (βλ. 31), ισούται με το μεγαλύτερο εκθέτη Lyapunov, έστω λ_1 αν υποθέσουμε πως ταξινομούμε τους εκθέτες Lyapunov σε φθίνουσα σειρά $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, ενώ εμείς ενδιαφερόμαστε να τους προσδιορίσουμε όλους.

Χρειάζεται επομένως να γίνει επέκταση του ανωτέρω ορισμού για τους εκθέτες Lyapunov που αφορούν διανύσματα οι οποίοι καλούνται και εκθέτες Lyapunov τάξης 1. Μια τέτοια επέκταση είναι αυτή των εκθετών Lyapunov τάξης p με $1 \leq p \leq n$, οι οποίοι περιγράφουν το ρυθμό μεταβολής ενός p -διάστατου όγκου του χώρου φάσεων. Οι εκθέτες Lyapunov τάξης p ορίζονται από τη σχέση $\lambda^p(\mathbf{x}_0, U_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left[\text{Vol}^p \left(D_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}^t(U_0) \right) \right]$ (1), όπου U_0 είναι ένας πίνακας με στήλες τα p διανύσματα u_1, \dots, u_p που αντιπροσωπεύουν διαταραχές του σημείου \mathbf{x}_0 και Vol^p είναι ο p -διάστατος όγκος που ορίζεται στο χώρο φάσεων από τα διανύσματα στήλες του πίνακα $D_{\mathbf{x}_0} \mathbf{f}^t(U_0)$ αν αυτά θεωρηθούν ως ακμές ενός παραλληλεπίπεδου. Η σχέση που συνδέει τους εκθέτες Lyapunov τάξης p με εκείνους τάξης 1 είναι η $\lambda^p(\mathbf{x}_0, U_0) = \lambda_1 + \dots + \lambda_p$ (2).

Προκειμένου να υπολογίσουμε τώρα όλους τους εκθέτες Lyapunov του $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ χρειάζεται να θεωρήσουμε αρχικά μια διαταραχή $\Phi_t(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0))$ της αρχικής συνθήκης \mathbf{x}_0 της οποίας η εξέλιξη στο χρόνο προκύπτει από την επίλυση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \Phi_t(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \Phi_t(\mathbf{x}_0) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \Phi_{t_0}(\mathbf{x}_0) = I_n \end{array} \right\}$ (3). Το επόμενο βήμα σύμφωνα με τον Oseledec (1968) είναι να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\Phi_T^*(\mathbf{x}_0) \cdot \Phi_T(\mathbf{x}_0)$ και να αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι κάθε μία από αυτές έχει μία συμπεριφορά τύπου $e^{2T\lambda_i}$, όπου $\Phi_T^*(\mathbf{x}_0)$ είναι ο συμπληρωματικός (adjoint) πίνακας του $\Phi_T(\mathbf{x}_0)$ και λ_i οι ζητούμενοι εκθέτες Lyapunov. Όμως, εν προκειμένω υπάρχει πρόβλημα ευστάθειας λόγω του ότι για μεγάλο T , ο πίνακας $\Phi_T(\mathbf{x}_0)$ είναι γενικά ένας πίνακας κακής κατάστασης με αποτέλεσμα τον πιθανό εσφαλμένο υπολογισμό όλων των εκθετών Lyapunov. Το πρόβλημα αυτό όμως αίρεται αν γίνει χρήση του αλγορίθμου των Benettin et al. (1980) ο οποίος κάνει χρήση του ορισμού των εκθετών Lyapunov τάξης p και της μεθόδου ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt.

Ως γνωστόν το θεώρημα που αφορά τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt (βλ. 32) δηλώνει ότι κάθε Ευκλείδειος ή ορθομοναδιαίος χώρος έχει μία τουλάχιστον ορθοκανονική βάση και πως αν $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ είναι μία βάση αυτού τότε το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}, \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 \\ &\dots \\ \mathbf{v}_p &= \frac{\mathbf{w}_p}{\|\mathbf{w}_p\|}, \mathbf{w}_p = \mathbf{u}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i, \end{aligned} \quad (4)$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι η απεικόνιση εσωτερικό γινόμενο, είναι επίσης ορθοκανονική βάση του. Ο όγκος του παραλληλεπίπεδου που έχει για ακμές τα διανύσματα του συνόλου $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ είναι $Vol\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\} = \|\mathbf{w}_1\| \dots \|\mathbf{w}_p\|$ (5).

Με βάση λοιπόν τον αλγόριθμο των Benettin et al. διαλέγουμε μία αρχική συνθήκη \mathbf{x}_0 και έναν τυχαίο $p \times p$ πίνακα $U_0 = [\mathbf{u}_1^0, \dots, \mathbf{u}_p^0]$. Στη συνέχεια αντιστοιχίζουμε τον U_0 σε έναν πίνακα $V_0 = [\mathbf{v}_1^0, \dots, \mathbf{v}_p^0]$ του οποίου τα διανύσματα στήλες είναι ορθομοναδιαία χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4) και ακολούθως ολοκληρώνουμε το (3) για αρχική συνθήκη $\{\mathbf{x}_0, V_0\}$ και για ένα χρονικό διάστημα $T s$ (για την επιλογή της τιμής του T βλ. στο τέλος της παραγράφου). Κατά αυτόν τον τρόπο αποκτούμε τα $\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_0)$ και $U_1 \equiv [\mathbf{u}_1^1, \dots, \mathbf{u}_p^1] = D_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f}^T(U_0) = \Phi_T(\mathbf{x}_0) \cdot [\mathbf{u}_1^0, \dots, \mathbf{u}_p^0]$. Έπειτα, αφού προσδιορίσουμε τον αντίστοιχο του U_1 πίνακα V_1 χρησιμοποιούμε το $\{\mathbf{x}_1, V_1\}$ ως αρχική συνθήκη για την ολοκλήρωση του (3) για $T s$ προκειμένου να αποκτήσουμε τα \mathbf{x}_2 και U_2 . Συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία. Το ερώτημα όμως είναι: πόσες φορές; Αν λοιπόν λάβουμε υπόψη τα προηγούμενα σε

συνδυασμό με τον ορισμό (1) και ότι για τον υπολογισμό του αντίστοιχου όγκου στο i βήμα χρησιμοποιούμε τη σχέση (5) για τα ορθογώνια διανύσματα του i βήματος $\mathbf{w}_1^i, \dots, \mathbf{w}_p^i$ που υπολογίζονται όπως υποδεικνύουν οι (4) τότε ο εκθέτης Lyapunov τάξης p υπολογίζεται θεωρητικά από την $\lambda^p(\mathbf{x}_0, U_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^k \ln(\|\mathbf{w}_1^i\| \dots \|\mathbf{w}_p^i\|)$. Αν επιπλέον αφαιρέσουμε τον λ^{p-1} από τον λ^p λαμβάνοντας υπόψη τη (2) αποκτούμε τον p εκθέτη Lyapunov τάξης 1, $\lambda_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT} \sum_{i=1}^k \ln\|\mathbf{w}_p^i\|$. Προφανώς όμως δε γίνεται να εκτελέσουμε την προηγούμενη διαδικασία άπειρες φορές και γι' αυτό έστω ότι την εκτελούμε K φορές. Το αποτέλεσμα θα είναι η προηγούμενη σχέση να λάβει τη μορφή $\lambda_p \approx \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln\|\mathbf{w}_p^i\|$. Με βάση την τελευταία οι p εκθέτες Lyapunov τάξης 1 θα υπολογιστούν από τις σχέσεις $\lambda_j \approx \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^K \ln\|\mathbf{w}_j^i\|$ για $j = 1, 2, \dots, p$. Κλείνουμε λοιπόν λέγοντας πως οι τιμές των T και K θα επιλεχθούν, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση των τελευταίων p σχέσεων. Τέλος, για να υπολογίσουμε τους n εκθέτες Lyapunov τάξης 1 αρκεί να θέσουμε $p = n$ [31].

4.3 Η μέθοδος FTLE

Η μέθοδος FTLE (Finite Time Lyapunov Exponent method), όπως προαναφέραμε είναι μια μέθοδος εξαγωγής Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (Lagrangian Coherent Structures, LCSs) οι οποίες έχουν έναν ρόλο οργανωτή της ροής στο χώρο φάσεων και ο εντοπισμός τους βασίζεται στον υπολογισμό της χωρικής κατανομής των μέγιστων εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου. Οι εκθέτες Lyapunov πεπερασμένου χρόνου παρέχουν ένα μέτρο του μέσου λογαριθμικού ρυθμού απόκλισης δύο αρχικά γειτονικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος με την απόκλιση αυτή να αφορά ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Παρακάτω δείχνουμε πως ορίζονται οι εκθέτες Lyapunov πεπερασμένου χρόνου.

Θεωρούμε γι' αυτό το σκοπό το δυναμικό σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ και τη ροή $\mathbf{F}_{t_0}^t : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο \mathbf{f} . Επίσης, θεωρούμε σε χρόνο t_0 δύο γειτονικά σημεία του χώρου φάσεων \mathbf{x}_0 και $\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_0$, όπου $\boldsymbol{\xi}_0$ είναι το διάνυσμα διαχωρισμού τους. Μετά από την παρέλευση χρόνου t τα ανωτέρω σημεία θα έχουν απεικονιστεί, αντιστοίχως, στα $\mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0)$. Στη χρονική στιγμή t η απόσταση μεταξύ τους είναι $|\mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0) - \mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0)| \approx |\nabla \mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\xi}_0|$ λόγω γραμμικοποίησης της $\mathbf{F}_{t_0}^t$ γύρω από το \mathbf{x}_0 με το σύμβολο $|\cdot|$ να δηλώνει την Ευκλείδεια νόρμα του θεωρούμενου διανύσματος. Ο παράγοντας έκτασης ή συντελεστής διαστολής μεταξύ των δύο σημείων συμβολιζόμενος ως sf ορίζεται από τη σχέση $sf = \frac{|\nabla \mathbf{F}_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\xi}_0|}{|\boldsymbol{\xi}_0|}$ όταν το $|\boldsymbol{\xi}_0|$ είναι αρκετά μικρό. Αν τώρα λάβουμε υπόψη την έκφραση που ισχύει για την Ευκλείδεια νόρμα $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$, την ιδιότητα $(A B)^T = B^T A^T$ και ότι $\mathbf{e} = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}_0|} \boldsymbol{\xi}_0$ είναι το

μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του ξ_0 τότε η τελευταία σχέση γράφεται ως

$$sf = \frac{\sqrt{e^T \cdot [\nabla F_{t_0}^t(x_0)]^T \cdot \nabla F_{t_0}^t(x_0) \cdot e} |\xi_0|}{|\xi_0|} = \sqrt{e^T \cdot [\nabla F_{t_0}^t(x_0)]^T \cdot \nabla F_{t_0}^t(x_0) \cdot e}.$$

Θεωρούμε τώρα το δεξιό τανυστή παραμόρφωσης Cauchy-Green $C(x_0, t_0, t) = [\nabla F_{t_0}^t(x_0)]^T \cdot \nabla F_{t_0}^t(x_0)$. Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του αριθμημένες σε φθίνουσα σειρά συμβολίζονται με $\lambda^i(x_0, t_0, t)$ και ότι τα αντίστοιχα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα τους συμβολίζονται με $e^i(x_0, t_0, t)$. Αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις $[[\nabla F_{t_0}^t(x_0)]^T \cdot \nabla F_{t_0}^t(x_0)] \cdot e^i = \lambda^i \cdot e^i$ και $(e^i)^T \cdot e^i = 1$ τότε ο παράγοντας έκτασης ως προς την i ιδιοκατεύθυνση θα δίνεται από τη σχέση $sf = \sqrt{\lambda^i(x_0, t_0, t)}$.

Οι εκθέτες Lyapunov πεπερασμένου χρόνου ορίζονται από τη σχέση $\Lambda^i(x_0, t_0, t) = \frac{1}{|t-t_0|} \ln \sqrt{\lambda^i(x_0, t_0, t)}$, όπου $|t-t_0|$ είναι το χρονικό διάστημα (χρόνος ολοκλήρωσης) κατά το οποίο συνέβη αυτή η έκταση. Ο μέγιστος εξ αυτών Λ^1 αναφέρεται συχνά χωρίς διάκριση ως ο εκθέτης Lyapunov πεπερασμένου χρόνου, Λ .

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην περιγραφή της υπολογιστικής διαδικασίας για την εξαγωγή των LCSs. Αρχικά θεωρούμε ένα πλέγμα, συνήθως δομημένο, αρχικών συνθηκών σε χρόνο t_0 . Μετά ολοκληρώνουμε το πλέγμα αυτό για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $T = t - t_0$ με μια μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης. Με το που υπολογιστούν οι τελικές θέσεις του πλέγματος υπολογίζεται η κλίση παραμόρφωσης ($\nabla F_{t_0}^t$) σε κάθε σημείο του χρησιμοποιώντας ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών. Έπειτα, υπολογίζεται η μεγαλύτερη ιδιοτιμή και συνακόλουθα ο μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov πεπερασμένου χρόνου κάθε κλίσης παραμόρφωσης, παίρνοντας τελικά τη χωρική κατανομή των εκθετών Lyapunov πεπερασμένου χρόνου. Σημειώνουμε πως η διαδικασία αυτή παρέχει τη χωρική κατανομή των FTLE στη χρονική στιγμή t_0 και επομένως αποκαλύπτει τα LCSs σ' αυτή τη χρονική στιγμή. Τα τελευταία εμφανίζονται ως τοπικές επιφάνειες (καμπύλες στην περίπτωση δισδιάστατων συστημάτων) μεγιστοποίησης της χωρικής κατανομής των FTLE. Τέλος, αναφέρουμε πως η ολοκλήρωση προς μεγαλύτερους χρόνους αποκαλύπτει απωστικά LCSs, ενώ η ολοκλήρωση προς μικρότερους χρόνους αποκαλύπτει ελκτικά LCSs.

Όσον αφορά τώρα το χρόνο ολοκλήρωσης T αυτό που ισχύει στη γενική περίπτωση είναι ότι μεταβάλλοντας τον τα LCSs μπορούν να αποκαλυφθούν σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό. Ακραίες περιπτώσεις είναι η εξαφάνιση είτε η εμφάνισή τους. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να επιλέγεται, έτσι ώστε να εμφανίζονται όλα τα LCSs στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό ή αν αυτό δεν είναι εφικτό στο να εμφανίζονται τουλάχιστον αυτά που έχουν τον κυρίαρχο ρόλο στην οργάνωση της φασικής ροής. Επίσης, στον καθορισμό του μπορεί να παίξουν ρόλο και παράγοντες, όπως το υπολογιστικό κόστος ή η διαθεσιμότητα δεδομένων για τις τροχιές. Τέλος,

αναφέρουμε πως στη βιβλιογραφία προτείνονται διάφορες μέθοδοι για τον καθορισμό του [16].

4.4 Η μέθοδος FSLE

Η μέθοδος FSLE (Finite Size Lyapunov Exponent method) είναι κι αυτή μια μέθοδος εξαγωγής Λαγκρανζιανών Συνεκτικών Δομών (Lagrangian Coherent Structures, LCSs).

Η υπολογιστική διαδικασία για την εξαγωγή των LCSs σ' αυτή την περίπτωση έχει ως ακολούθως. Αρχικά θεωρούμε ένα δομημένο πλέγμα αρχικών συνθηκών σε χρόνο t_0 . Μετά θεωρούμε N σωματίδια γύρω από το κάθε σημείο του πλέγματος και υπολογίζουμε την αρχική τυπική ακτίνα τους σύμφωνα με τη σχέση $R(t_0) = \sqrt{\langle\langle |\mathbf{x}_i(t) - \langle\langle \mathbf{x}_i(t) \rangle\rangle|^2 \rangle\rangle}$, όπου $\langle\langle \mathbf{x}_i(t) \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i(t)$. Καθορίζουμε την τελική τυπική ακτίνα να είναι ίση με $r R(t_0)$ και ολοκληρώνουμε για κάθε ένα από αυτά τα N σωματίδια κάθε σημείου του πλέγματος έως ότου σε κάποια χρονική στιγμή $\tau + t_0$ η τυπική ακτίνα $R(\tau + t_0)$ γίνει ίση με $r R(t_0)$. r είναι ένας παράγοντας που εκφράζει την ανάπτυξη του διαχωρισμού στο χρονικό διάστημα τ . Έπειτα, υπολογίζεται η τιμή FSLE σε κάθε σημείο του πλέγματος ως $\lambda = \frac{\ln r}{\tau}$. Αν η τελική τυπική ακτίνα δεν παίρνει ποτέ την τιμή $r R(t_0)$, τότε θέτουμε ως τιμή FSLE την τιμή 0. Η διαδικασία αυτή παρέχει τη χωρική κατανομή των FSLE στη χρονική στιγμή t_0 και επομένως αποκαλύπτει τα LCSs σ' αυτή τη χρονική στιγμή. Τα LCSs εμφανίζονται κι εδώ ως τοπικές επιφάνειες μεγιστοποίησης της χωρικής κατανομής των FSLE. Τέλος, αναφέρουμε πως η ολοκλήρωση προς μεγαλύτερους χρόνους αποκαλύπτει απωστικά LCSs, ενώ η ολοκλήρωση προς μικρότερους χρόνους αποκαλύπτει ελκτικά LCSs [33].

Για την απόκτηση αποτελεσμάτων «ακριβείας» από τη διαδικασία υπολογισμού της κατανομής FSLE χρειάζεται κατάλληλη επιλογή των υπολογιστικών παραμέτρων (π.χ. πόσο πυκνό θα 'ναι το πλέγμα, τιμές αριθμού σωματιδίων, αρχικής-τελικής τυπικής ακτίνας και χρόνου ολοκλήρωσης).

4.5 Ο αλγόριθμος FCM

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε μια αριθμητική μέθοδο για την εξαγωγή συνεκτικών δομών του χώρου φάσεων η οποία βασίζεται σε χωρο-χρονική, «μαλακή» ομαδοποίηση (soft clustering) τροχιών. Το ισχυρότερο πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου, έναντι των περισσότερων άλλων που προτείνονται στη βιβλιογραφία για την επιτέλεση της συγκεκριμένης εργασίας, είναι ότι αυτή παρέχει χρήσιμα αποτελέσματα ακόμα και σε περιπτώσεις που το διαθέσιμο σύνολο δεδομένων παρουσιάζει οποιασδήποτε μορφής ατέλεια, όπως είναι π.χ. τα κενά στις παρατηρήσεις που θα μπορούσαν να προκύψουν λόγω της βλάβης κάποιου αισθητήρα είτε γιατί εκ σχεδιασμού επιτρέπει τη λήψη συγκεκριμένου αριθμού παρατηρήσεων σε ορισμένο χρόνο. Το πλεονέκτημα αυτό σε συνδυασμό με την ευκολία της στην εφαρμογή, την υψηλή ταχύτητα εκτέλεσης και τη δυνατότητα χρήσης της σε δεδομένα οποιασδήποτε διάστασης την καθιστούν ως ένα εργαλείο το

οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια πρώτη ανάλυση ακόμα και σε εκείνες τις περιπτώσεις που η γνώση μας για το πρόβλημα επιτρέπει τη χρήση κάποιας ακριβέστερης και πολυπλοκότερης μεθόδου.

Παρακάτω θα περιγράψουμε τη μέθοδο για ένα πεπερασμένο πλήθος τροχιών που δειγματοληπτείται σε ένα πεπερασμένο πλήθος χρονικών στιγμών. Ωστόσο, η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και όταν το πλήθος των τροχιών ή/και το πλήθος των χρόνων δειγματοληψίας είναι συνεχές.

Θεωρούμε ότι ο συμβολισμός $\mathbf{x}_{i,t}$ παριστάνει το σημείο της i τροχιάς στη χρονική στιγμή t και ότι αυτό έχει διάσταση d με κάθε συνιστώσα να λαμβάνει τιμές στο \mathbb{R} . Ακόμη θεωρούμε πως το πλήθος των τροχιών είναι n και εκείνο των χρονικών στιγμών είναι $T + 1$. Έπειτα, συνθέτουμε όλα τα σημεία της i τροχιάς σε ένα διάνυσμα σύμφωνα με τον τύπο $\mathbf{X}_i = (\mathbf{x}_{i,0}, \mathbf{x}_{i,1}, \dots, \mathbf{x}_{i,T})$ το οποίο είναι προφανώς διάστασης $d(T + 1)$. Η ομαδοποίηση πραγματοποιείται στο χώρο $\mathbb{R}^{d(T+1)}$ ελαχιστοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση $\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n u_{k,i}^m \|\mathbf{X}_i - \mathbf{C}_k\|^2 = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n u_{k,i}^m \sum_{t=0}^T \|\mathbf{x}_{i,t} - \mathbf{c}_{k,t}\|^2$ (1) υπό τους περιορισμούς (i) $\sum_{k=1}^K u_{k,i} = 1$ για όλα τα i και (ii) $u_{k,i} \geq 0$ για όλα τα k και για όλα τα i , όπου K είναι ο αριθμός των ομάδων, $u_{k,i}$ είναι ο βαθμός συμμετοχής της i τροχιάς στην k ομάδα, m είναι ο συντελεστής ασαφοποίησης, $\mathbf{C}_k = (\mathbf{c}_{k,0}, \mathbf{c}_{k,1}, \dots, \mathbf{c}_{k,T}) \in \mathbb{R}^{d(T+1)}$, όπου κάθε $\mathbf{c}_{k,t} \in \mathbb{R}^d$ είναι το k κέντρο ομάδας και $\|\cdot\|$ είναι η ευκλείδια νόρμα. Ο αλγόριθμος FCM (Fuzzy C-Means) για την περίπτωση που έχουμε ένα πλήρες σύνολο δεδομένων τροχιών περιλαμβάνει τα βήματα του κλασσικού αλγόριθμου FCM που έχουν περιληπτικά ως εξής:

Βήμα 1: Αρχικοποίηση των βαθμών συμμετοχής $u_{k,i}$

Βήμα 2: Υπολογισμός των κέντρων \mathbf{C}_k με βάση μία ορισμένη σχέση

Βήμα 3: Ενημέρωση των βαθμών συμμετοχής $u_{k,i}$ με βάση μία ορισμένη σχέση²

Βήμα 4: Υπολογισμός της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (1). Εάν η βελτίωση είναι μικρότερη από ένα κατώφλι, προχωρούμε στο βήμα 5, αλλιώς πάμε πίσω στο βήμα 2.

Βήμα 5: Εξαγωγή των κέντρων των ομάδων \mathbf{C}_k και των βαθμών συμμετοχής $u_{k,i}$ [34].

Όσον αφορά την περίπτωση που το σύνολο των δεδομένων των τροχιών δεν είναι πλήρες, την αναγνώριση ψευδώς θετικών αποτελεσμάτων (false positives) ή πιθανώς ανακριβών αποτελεσμάτων, καθώς και τον τρόπο επιλογής παραμέτρων, όπως του χρονικού βήματος, της συνολικής χρονικής διάρκειας T και του συντελεστή ασαφοποίησης m παραπέμπουμε στη βιβλιογραφική αναφορά 34.

² Οι σχέσεις στα βήματα 2 και 3 προκύπτουν από την επιβολή συγκεκριμένων συνθηκών επί της αντικειμενικής συνάρτησης (1) (βλ. 34).

5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα εφαρμογής της μεθόδου Melnikov σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

1. την περίπτωση του απλού εκκρεμούς
2. την περίπτωση του ταλαντωτή Duffing-Holmes και
3. την περίπτωση ενός ιαπωνικού αλιευτικού (Purse Seiner).

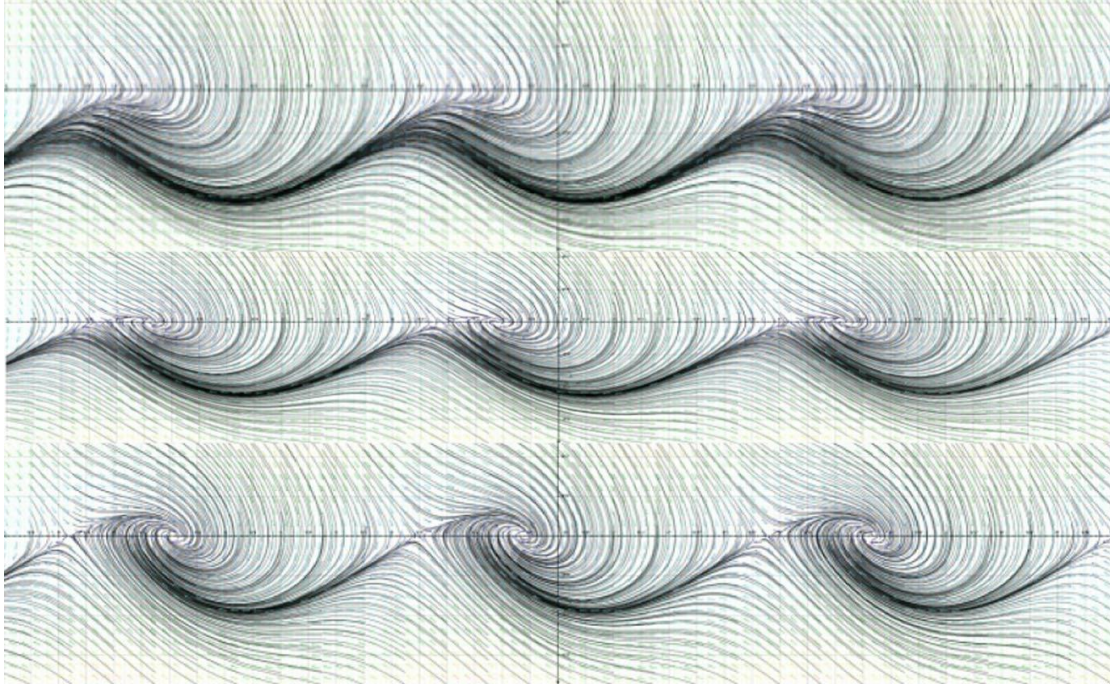
Στην περίπτωση του ταλαντωτή Duffing-Holmes ελέγχουμε επίσης κατά πόσο το προσδιορισθέν όριο μεταξύ της περιοχής που αποκλείεται η εκδήλωση χαοτικής κίνησης και εκείνης επί της οποίας αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο υποστηρίζεται και από την εφαρμογή των μεθόδων των εκθετών Lyapunov, FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM³.

Στην τρίτη περίπτωση γίνεται και εξέταση ως προς την ύπαρξη χαοτικών αποκρίσεων του υπό μελέτη πλοίου με τη μέθοδο των εκθετών Lyapunov.

Η εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στις δύο πρώτες περιπτώσεις έγινε για λόγους εξοικείωσης με τη μέθοδο, ενώ επιλέξαμε συγκεκριμένα το απλό εκκρεμές και τον ταλαντωτή Duffing-Holmes για τους εξής λόγους:

1. το απλό εκκρεμές με διέγερση μια σταθερή ροπή και όρο απόσβεσης περιγράφει τη δυναμική του surf-riding. Στο σχήμα 4 φαίνονται από πάνω προς τα κάτω τα πορτραίτα φάσεων αυτού για μειούμενες τιμές της ροπής ξεκινώντας από μία μέτρια προς μεγάλη τιμή αυτής. Τα εμφανιζόμενα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν σε καταστάσεις surf-riding. Στην περίπτωση του πλοίου ωστόσο η κλιμάκωση της διέγερσης λειτουργεί αντίστροφα [12]. Το τελευταίο το δείχνουμε κιόλας στην παράγραφο 5.3 (βλ. σχήματα 37, 38 και 39). Τέλος, αναφέρουμε πως εμείς χρησιμοποιήσαμε ως διέγερση έναν αρμονικό όρο.
2. ο ταλαντωτής Duffing-Holmes με διέγερση δυο αρμονικών όρων χρησιμοποιήθηκε ως εισαγωγική περίπτωση σε εκείνη του κυρίως προβλήματός μας δηλαδή, τη μελέτη της δυναμικής της εξίσωσης κίνησης ενός πλοίου κατά το διάμηκες με διχρωματική κυματική διέγερση.

³ Τα αποτελέσματα των μεθόδων FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM έχουν προκύψει από τον κ. Ιωάννη Κοντολέφα.



Σχήμα 4 Πορτραίτα φάσεων του απλού εκκρεμούς με διέγερση μια σταθερή ροπή. Η τιμή της μειώνεται από πάνω προς τα κάτω. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε τη γωνία του εκκρεμούς και στον κατακόρυφο τη γωνιακή ταχύτητά του (Spyrou et al., 2014a)

5.1 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στο απλό εκκρεμές με περιοδική διέγερση

Η εξίσωση του απλού εκκρεμούς με όρο απόσβεσης και περιοδική διέγερση είναι:

$$\ddot{x} + \gamma \sin x = \varepsilon (-\beta \dot{x} + \alpha \cos(\Omega t)), \alpha, \beta, \gamma, \Omega > 0, 0 \leq \varepsilon \ll 1 \quad (1).$$

Αν θέσουμε $x_1 = x$ και $x_2 = \dot{x}$, τότε η (1) γράφεται

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma \sin x_1 + \varepsilon (\alpha \cos(\Omega t) - \beta x_2) \end{cases} \quad (2).$$

Το (2) γράφεται στη μορφή $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, αν θέσουμε $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2, -\gamma \sin x_1)^T$ και $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = (0, \alpha \cos(\Omega t) - \beta x_2)^T$ οπότε

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\gamma \sin x_1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \cos(\Omega t) - \beta x_2 \end{pmatrix} \quad (3).$$

Το αδιατάραχτο σύστημα του (3) είναι το

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\gamma \sin x_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

το οποίο γράφεται στη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\gamma \sin x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, το (4) είναι Χαμιλτονιανό με Χαμιλτονιανή

$$H(x_1, x_2) = -\gamma \cos x_1 + \frac{x_2^2}{2}.$$

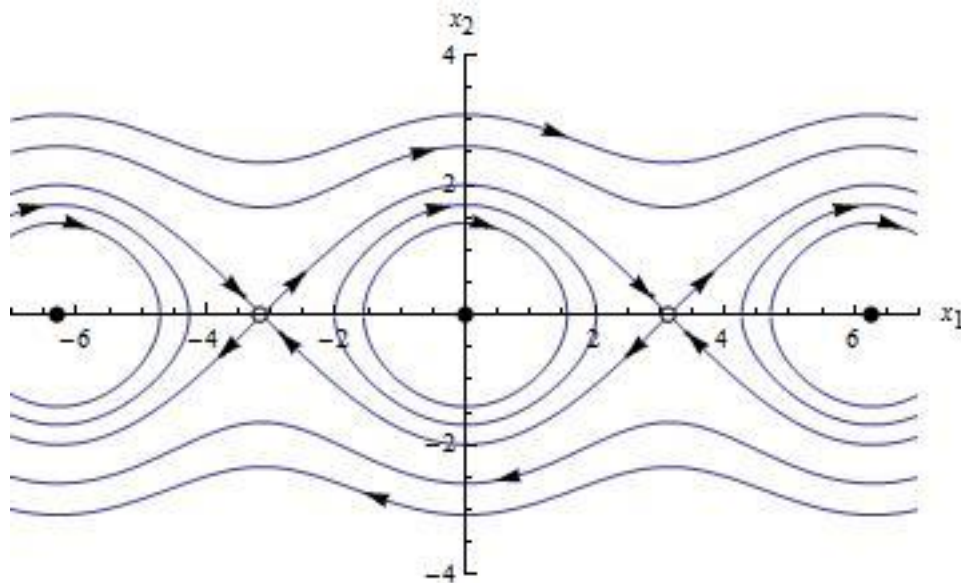
Τα στάσιμα σημεία του αδιατάραχτου συστήματος είναι της μορφής: $(x_1^*, x_2^*)^T = (k\pi, 0)^T, k \in \mathbb{Z}$. Τα στάσιμα σημεία $(r\pi, 0)$, όπου $r = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ είναι κέντρα, ενώ τα στάσιμα σημεία $(s\pi, 0)$, όπου $s = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ είναι σαγματικά σημεία.

Τα εύρη ενδιαφέροντος των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \Omega$ είναι τα εξής:

- $\alpha, \gamma: 0 - 1$
- $\beta: 0.1 - 0.4$ και
- $\Omega: 0 - 1.2$.

Θεωρούμε ότι $\beta = 0.2, \gamma = 1$ και αναζητούμε έναν μερισμό του παραμετρικού χώρου των α και Ω σε δύο περιοχές επί των οποίων στη μεν πρώτη να αποκλείεται η πιθανότητα χαοτικής κίνησης του εκκρεμούς στη δε δεύτερη αυτή να είναι πιθανό ενδεχόμενο. Η αρχική τιμή των α και Ω είναι 0.1, ενώ τα βήματα μεταβολής τους είναι 0.015625 και 0.009375, αντιστοίχως.

Το πορτραίτο φάσεων του (4) για $\gamma = 1$ είναι το ακόλουθο:

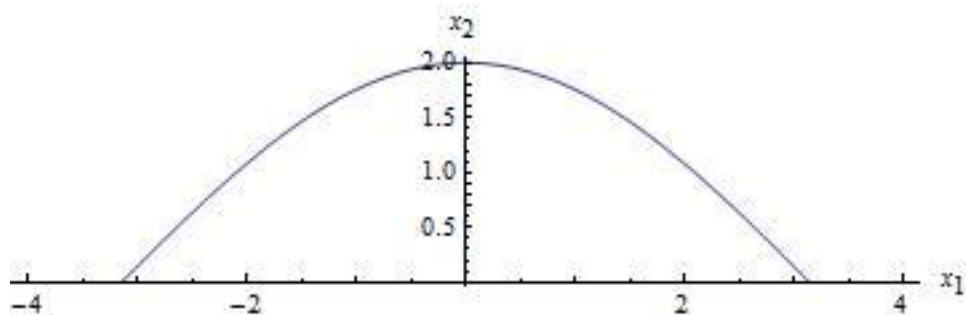


Σχήμα 5 Πορτραίτο φάσεων του αδιατάραχτου συστήματος για $\gamma = 1$

Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους, του Ιακωβιανού πίνακα του (4) για τα στάσιμα σημεία $(\pm\pi, 0)$ είναι, αντιστοίχως, $\{-\sqrt{\gamma}, \sqrt{\gamma}\}$ και $\left\{ \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}, 1 \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, 1 \right\} \right\}$.

Εξετάζουμε τώρα ως προς την ύπαρξη πιθανών σημείων τομής μεταξύ της ασταθούς πολλαπλότητας του αριστερού σαγματικού σημείου και της ευσταθούς πολλαπλότητας του δεξιού σαγματικού σημείου. Για το σκοπό αυτό απαιτείται ο προσδιορισμός της άνω ετεροκλινής ημιτροχιάς (βλ. Σχήμα 6) [24]. Για την εύρεσή

της ολοκληρώνουμε το σύστημα (4) με αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (-\pi + 0.001, 0.0009)$, κοντά στο σάγμα και την ιδιοδιεύθυνση που ορίζει το δεύτερο από τα ανωτέρω ιδιοδιανύσματα και συνθήκη τερματισμού $|x_2(t)| \leq 10^{-2}$.



Σχήμα 6 Άνω ετεροκλινική ημιτροχιά

Η διαδικασία που ακολουθούμε παρακάτω γίνεται με σκοπό να διαχωρίσουμε τις συναρτήσεις Melnikov σε εκείνες που έχουν απλές ρίζες και τις υπόλοιπες, διαχωρισμός, που θα μας οδηγήσει στον επιθυμητό μερισμό του παραμετρικού χώρου $\alpha - \Omega$ που αναφέραμε παραπάνω.

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στον ορισμό της συνάρτησης Melnikov είναι: $f(x_h(\zeta)) \wedge g(x_h(\zeta), \zeta + t_0) = \alpha \cos(\Omega(\zeta + t_0)) \cdot x_{h2}(\zeta) - \beta x_{h2}^2(\zeta)$ (5).

Υπολογίζουμε για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και Ω τις αντίστοιχες συναρτήσεις Melnikov σε μορφή διατεταγμένων ζευγών $(t_0, M(t_0))$, όπου το t_0 λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi/\Omega]$ με βήμα $2\pi/200\Omega$. Εν προκειμένω οι συναρτήσεις Melnikov είναι περιοδικές γι' αυτό και περιοριζόμαστε στη μελέτη τους σε διάστημα μιας περιόδου τους. Το βήμα επιλέγεται, έτσι ώστε

1. να έχουμε καλή προσέγγιση των ριζών των συναρτήσεων Melnikov που υπολογίζονται παρακάτω με γραμμική παρεμβολή
2. το πολυώνυμο παρεμβολής που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της όποιας συνάρτησης Melnikov απαιτείται να συλλαμβάνει πολύ καλά τη συμπεριφορά της. Αναφέρουμε εδώ πως διαπιστώθηκε ότι οι συναρτήσεις Melnikov έχουν «καλή» μορφή και μπορούν να προσεγγιστούν από παρεμβολικά πολυώνυμα.

Για τον υπολογισμό των $M(t_0)$ ολοκληρώνουμε την (5) ως προς ζ στο διάστημα $[0, 14.34]$, όπου 14.34 είναι η τιμή του χρόνου t για την οποία ικανοποιείται η συνθήκη τερματισμού $|x_2(t)| \leq 10^{-2}$ κατά τον υπολογισμό της άνω ετεροκλινικής ημιτροχιάς.

Έπειτα, χωρίζουμε τις συναρτήσεις Melnikov σε εκείνες που έχουν μια τουλάχιστον ρίζα περιττής πολλαπλότητας και στις υπόλοιπες. Αυτό γίνεται παρατηρώντας την αλλαγή προσήμου στις τιμές $M(t_0)$ κάθε συνάρτησης Melnikov. Πιο συγκεκριμένα, αν δεν παρατηρείται καμιά αλλαγή προσήμου, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση Melnikov κατηγοριοποιείται στην κατηγορία “υπόλοιπες”, αλλιώς στην

άλλη. Εδώ εκμεταλλευόμαστε το γεγονός πως, όταν μια συνάρτηση έχει ρίζα άρτιας πολλαπλότητας, τότε το γράφημά της αριστερά και δεξιά αυτής (τοπικά) παραμένει προς την ίδια πλευρά του άξονα των τετμημένων, ενώ στην περίπτωση ρίζας περιττής πολλαπλότητας το γράφημα αριστερά και δεξιά αυτής (τοπικά) βρίσκεται σε διαφορετικές πλευρές του άξονα των τετμημένων.

Για όσες από αυτές έχουν μια τουλάχιστον ρίζα περιττής πολλαπλότητας εξετάζουμε το πρόσημο των διαδοχικών τιμών $M(t_0)$ κι όταν διαπιστώνουμε αλλαγή προσήμου διατηρούμε τα διατεταγμένα ζεύγη $(t_0, M(t_0))$ με διαφορετικό πρόσημο δημιουργώντας έτσι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη για κάθε μία από αυτές.

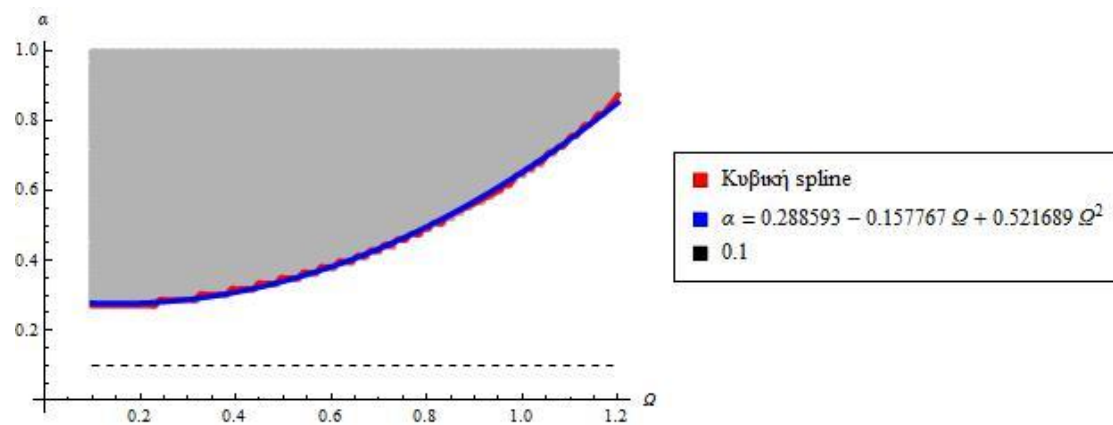
Προσδιορίζουμε τις ρίζες καθεμιάς από τις ανωτέρω συναρτήσεις Melnikov εκτελώντας γραμμική παρεμβολή σύμφωνα με τον τύπο:

$$t_{0i} = \frac{M(t_{0i}) - M(t_{01})}{\frac{M(t_{02}) - M(t_{01})}{t_{02} - t_{01}}} + t_{01}, \text{ όπου } M(t_{0i}) = 0$$

χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα σύνολα διατεταγμένων ζευγών που δημιουργήσαμε προηγουμένως.

Προσδιορίζουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής για κάθε σύνολο δεδομένων $(t_0, M(t_0))$ που αφορά τις ανωτέρω συναρτήσεις Melnikov το οποίο παραγωγίζουμε και υπολογίζουμε με τη βοήθειά του τις τιμές που λαμβάνει στις αντίστοιχες, ανωτέρω προσδιορισθείσες, ρίζες προκειμένου να διαπιστώσουμε αν αυτές είναι απλές ή όχι. Πιο συγκεκριμένα, αν η τιμή της παραγώγου ήταν μεγαλύτερη από μια ανοχή 10^{-6} η ρίζα εθεωρείτο απλή. Σε περίπτωση που η τιμή της ήταν μικρότερη από 10^{-6} θα χρησιμοποιούσαμε κάποιο πιο περίπλοκο σχήμα προκειμένου να αυξήσουμε την αξιοπιστία του αποτελέσματος ότι η συγκεκριμένη ρίζα ήταν όντως, ρίζα με πολλαπλότητα, αλλά αυτό δε χρειάστηκε ούτε εδώ ούτε και στις περιπτώσεις των Duffing-Holmes και του αλιευτικού.

Για όσες από τις συναρτήσεις Melnikov οι προσδιορισθείσες ρίζες είναι απλές διατηρούμε το ζεύγος (Ω, α) και τελικά παίρνουμε το ακόλουθο διάγραμμα:



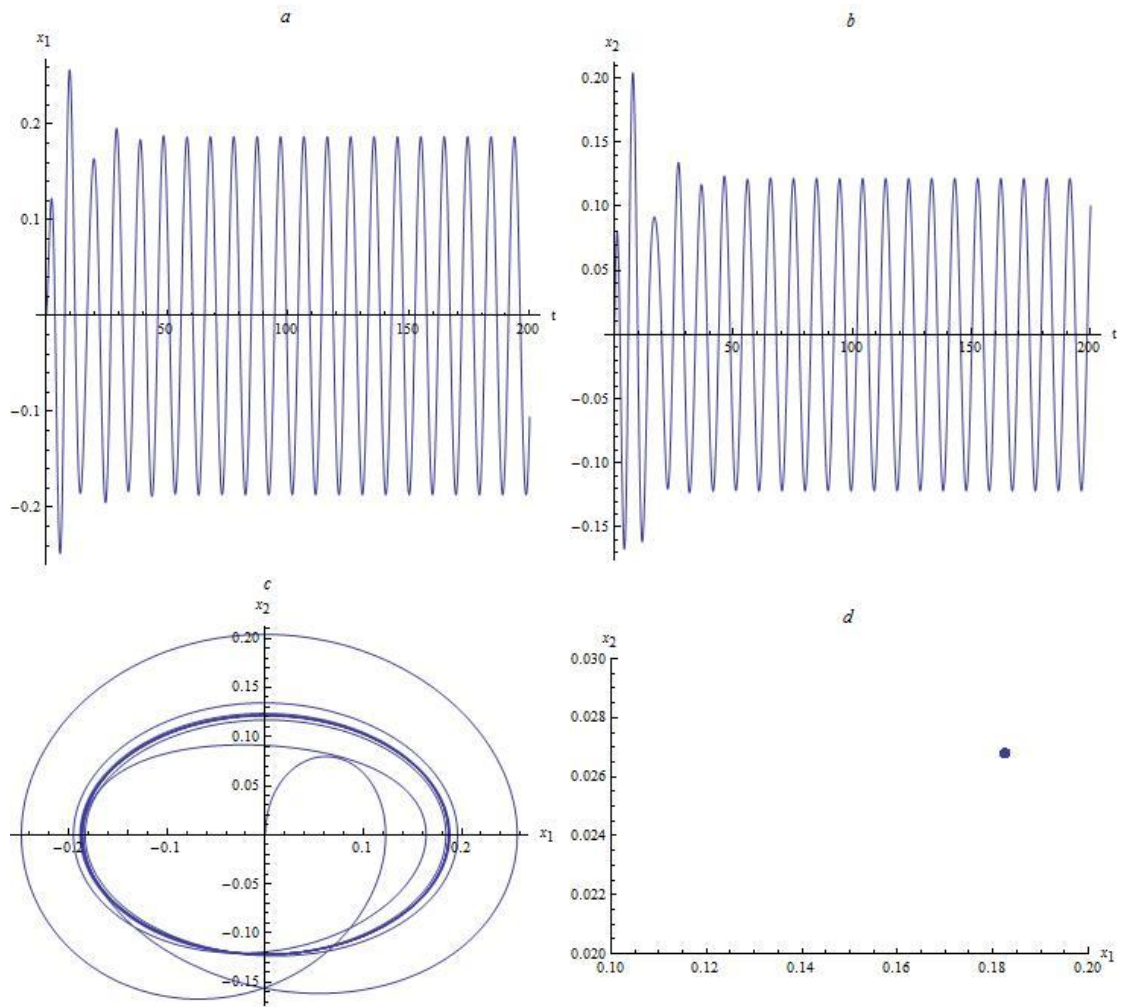
Σχήμα 7 Διατεταγμένα ζεύγη (Ω, α) (γκρι) τα οποία ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης.

Στο σχήμα 7 δείχνουμε πως προσεγγίζεται το όριο των δύο περιοχών από την κυβική spline (κόκκινο) και ένα προσεγγιστικό πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού (μπλε). Η διακεκομμένη, μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στην αρχική τιμή του a .

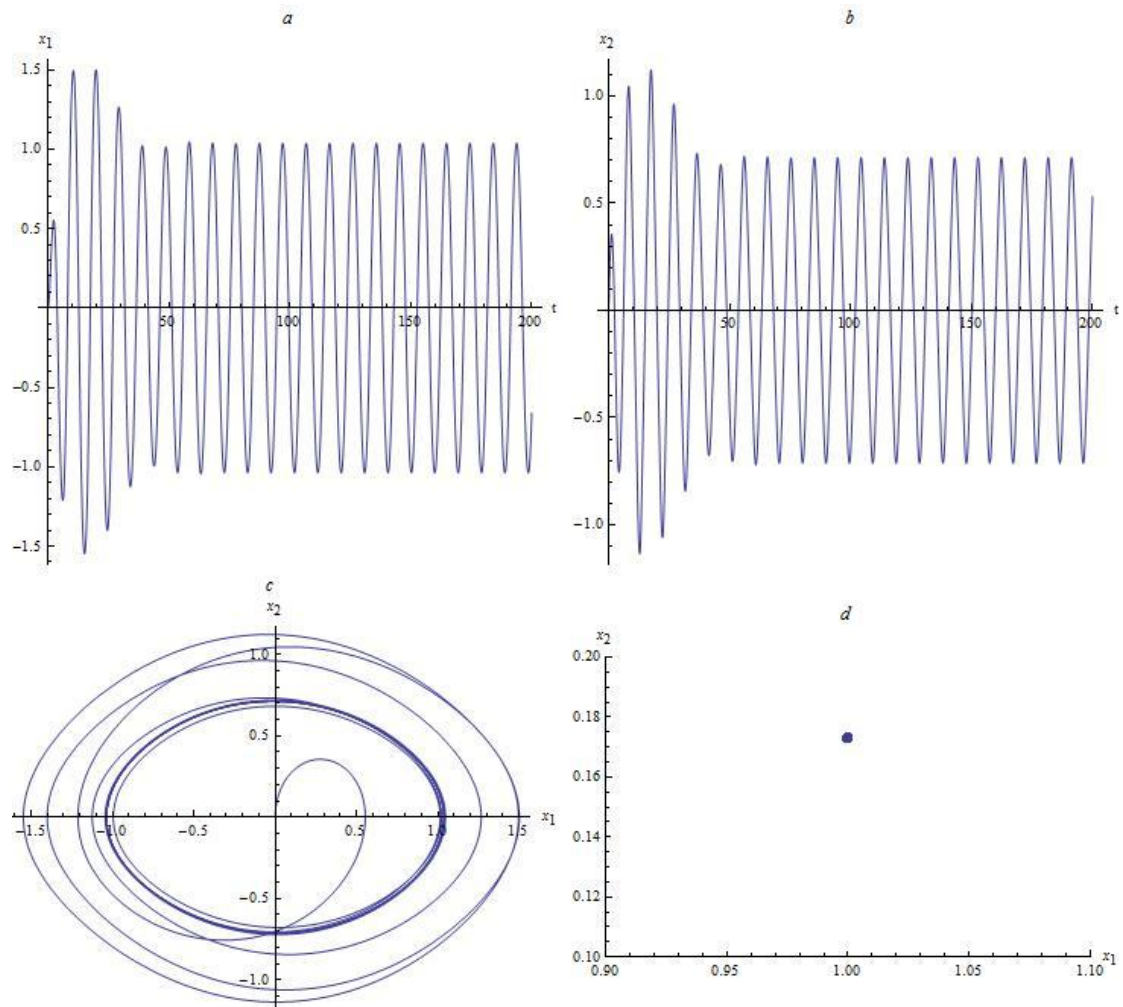
Στη συνέχεια διαλέγουμε τρία σημεία, ένα κάτω και δύο πάνω από το όριο για την επιβεβαίωση του ανωτέρω αποτελέσματος. Αναφέρουμε πως έχουμε επαναλάβει την ακόλουθη διαδικασία και για άλλους συνδυασμούς σημείων με θετικά αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση και πως απλώς επιλέξαμε να δείξουμε τα αποτελέσματα που αφορούν τα συγκεκριμένα. Τα σημεία αυτά είναι τα $(\Omega, a) = (0.65, 0.11)$, $(\Omega, a) = (0.65, 0.49)$ και $(\Omega, a) = (0.65, 0.571)$. Στα σχήματα 8, 9 και 10 βλέπουμε, αντιστοίχως, τη θέση και την ταχύτητα έναντι του χρόνου, τη θέση έναντι της ταχύτητας και μια τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$.

Στο σημείο κάτω από το όριο έχουμε, όπως αναμενόταν, περιοδική απόκριση του συστήματος. Αυτό υποστηρίζεται (1) από τη μορφή που παίρνουν τα γραφήματα της θέσης και της ταχύτητας έναντι του χρόνου μετά από μια αρχική μεταβατική κατάσταση η οποία αντιστοιχεί και στις δύο περιπτώσεις σε γράφημα περιοδικής συνάρτησης (2) το γεγονός ότι η προβολή της τροχιάς στο επίπεδο $x_1 - x_2$ (το επίπεδο $x_1 - x_2$ δεν αποτελεί χώρο φάσεων αφού το σύστημα είναι μη αυτόνομο) τείνει τελικά σε μία κλειστή τροχιά και (3) το ότι στην τομή Poincare παρατηρούμε ένα σημείο (τα σημεία όσον αφορά τις τιμές των x_1 και x_2 , διαφέρουν στο 7^ο δεκαδικό ψηφίο), ενώ έχει πραγματοποιηθεί δειγματοληψία σε ένα μεγάλο πλήθος χρονικών στιγμών.

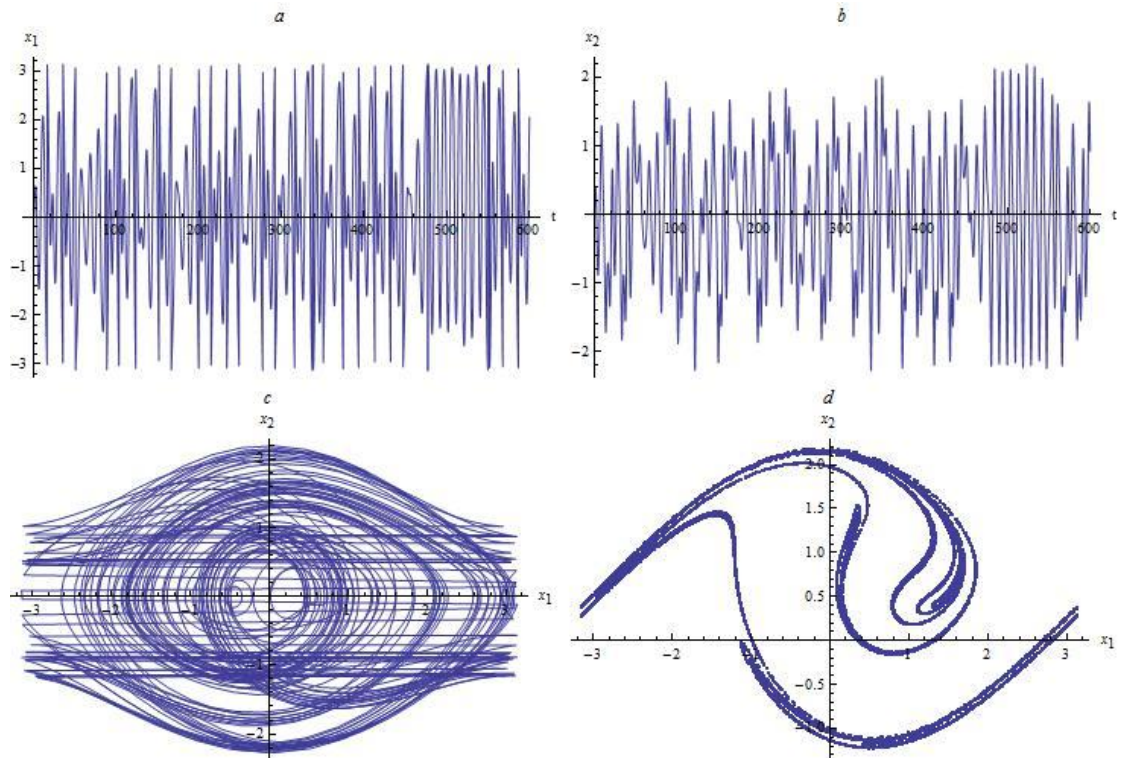
Στη γκρι περιοχή πάνω από το όριο, επί της οποίας η εκδήλωση χαοτικής κίνησης αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο, διαπιστώνουμε πέραν της περιοδικής και χαοτικής απόκριση του συστήματος σε συμφωνία με αυτό που αναμέναμε. Το ότι η απόκριση είναι χαοτική όσον αφορά την περίπτωση που $(\Omega, a) = (0.65, 0.571)$ προκύπτει π.χ. από την ακανόνιστη συμπεριφορά της θέσης και της ταχύτητας έναντι του χρόνου (βλ. Σχήμα 10 *a*, *b*), καθώς και από την ευαισθησία της απόκρισης του συστήματος από τις αρχικές συνθήκες, καθώς βλέποντας το σχήμα 11 παρατηρούμε να διαχωρίζονται οι δύο καμπύλες που αφορούν τη θέση στο *a*) και την ταχύτητα στο *b*) πέραν ενός χρονικού σημείου για μόλις μία διαφορά στο $x_2(0)$ ίση με 10^{-3} .



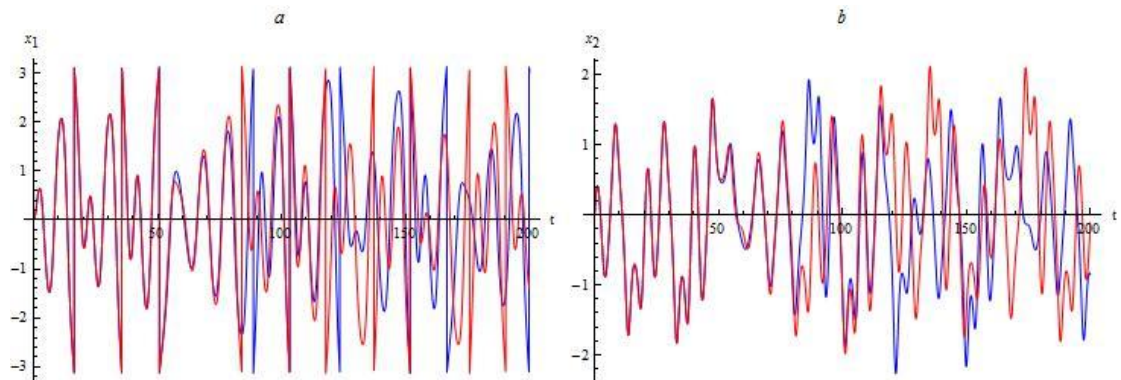
Σχήμα 8 *a)* Θέση έναντι του χρόνου, *b)* ταχύτητα έναντι του χρόνου, *c)* x_1 έναντι x_2 και *d)* τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ και $(\Omega, \alpha) = (0.65, 0.11)$



Σχήμα 9 *a)* Θέση έναντι του χρόνου, *b)* ταχύτητα έναντι του χρόνου, *c)* x_1 έναντι x_2 και *d)* τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ και $(\Omega, \alpha) = (0.65, 0.49)$



Σχήμα 10 α) Θέση έναντι του χρόνου, β) ταχύτητα έναντι του χρόνου, γ) x_1 έναντι x_2 και δ) τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ και $(\Omega, \alpha) = (0.65, 0.571)$



Σχήμα 11 α) Θέση έναντι του χρόνου και β) ταχύτητα έναντι του χρόνου για αρχικές συνθήκες $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ (μπλε) και $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0.001)$ (κόκκινο)

5.2 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στον ταλαντωτή Duffing-Holmes με οιονεί περιοδική διέγερση (δύο αρμονικοί όροι)

Ο ταλαντωτής Duffing-Holmes με όρο απόσβεσης και οιονεί περιοδική διέγερση περιγράφεται από τη Δ.Ε. [7]:

$$\ddot{x} + V'(x) = \varepsilon (\lambda \sin(\Omega t) + \Delta \lambda \sin(\omega t) - \beta x_2),$$

$$V(x) = -\frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{b}{4} x^4, \quad \alpha, b, \lambda, \Delta \lambda, \Omega, \omega, \beta > 0, 0 \leq \varepsilon \ll 1 \quad (1)$$

Αν θέσουμε $x_1 = x$ και $x_2 = \dot{x}$, τότε η (1) γράφεται

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -V'(x_1) + \varepsilon (\lambda \sin(\Omega t) + \Delta\lambda \sin(\omega t) - \beta x_2) \end{cases} \quad (2).$$

Το (2) γράφεται στη μορφή $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, αν θέσουμε $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2, -V'(x_1))^T$ και $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = (0, \lambda \sin(\Omega t) + \Delta\lambda \sin(\omega t) - \beta x_2)^T$ οπότε

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \sin(\Omega t) + \Delta\lambda \sin(\omega t) - \beta x_2 \end{pmatrix} \quad (3).$$

Το αδιατάραχτο σύστημα του (3) είναι το

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

το οποίο γράφεται στη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -V'(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, το (4) είναι Χαμιλτονιανό με Χαμιλτονιανή

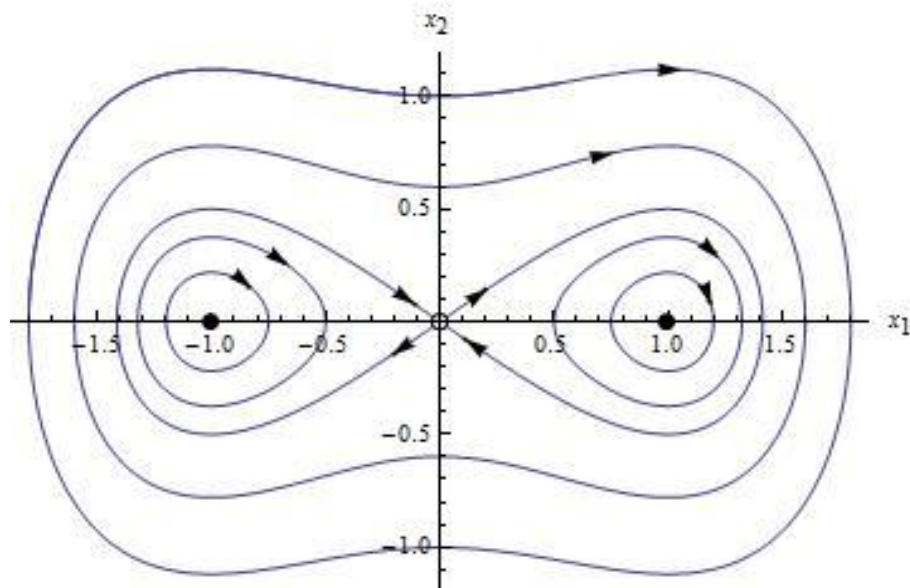
$$H(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{x_2^2}{2}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha = b = 1/2$, τότε τα στάσιμα σημεία του αδιατάραχτου συστήματος είναι τα $(-1,0), (0,0), (1,0)$. Τα στάσιμα σημεία $(\pm 1,0)$ είναι κέντρα, ενώ το στάσιμο σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Ακόμη υποθέτουμε ότι:

1. $\lambda = \Delta\lambda$ και τις μεταβάλλουμε από 10^{-3} έως 0.5 με βήμα = 0.0078125
2. $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{135 \cdot 10^{-1}} \approx 0.1048, \beta = 0.1$ και
3. το ω μεταβάλλεται από $\frac{\sqrt{3}}{1710} \approx 0.001$ έως $\frac{\sqrt{3}}{1710} + 131 \frac{\sqrt{3}}{190} \approx 1.195$ με βήμα $\frac{\sqrt{3}}{190} \approx 0.009$

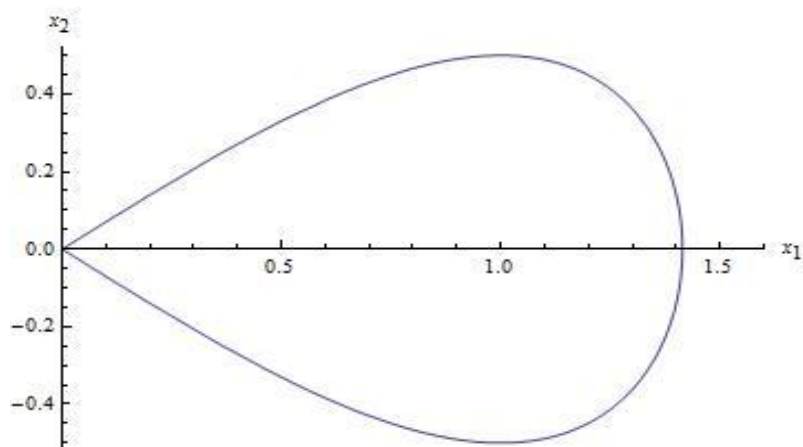
Το πορτραίτο φάσεων του (4) είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 12 Πορτραίτο φάσεων του αδιατάραχτου συστήματος

Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους, του Ιακωβιανού πίνακα του (4) για το στάσιμο σημείο $(0,0)$ είναι, αντιστοίχως, $\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ και $\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{a}}, 1\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{a}}, 1\right\}\right\}$.

Εξετάζουμε τώρα ως προς την ύπαρξη πιθανών σημείων τομής μεταξύ της ασταθούς και της ευσταθούς πολλαπλότητας του σαγματικού σημείου. Για το σκοπό αυτό απαιτείται ο προσδιορισμός μιας ομοκλικής τροχιάς (βλ. Σχήμα 13). Για την εύρεσή της ολοκληρώνουμε το σύστημα (4) με αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (10^{-8.9475}, \frac{\sqrt{2}}{2} 10^{-8.9475})$, κοντά στο σάγμα και επί της ιδιοδιεύθυνσης που ορίζει το δεύτερο από τα ανωτέρω ιδιοδιανύσματα και συνθήκη τερματισμού $|x_1(t)| \leq 10^{-4.3695}$.



Σχήμα 13 Δεξιά ομοκλική τροχιά

Παρακάτω ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε και στην περίπτωση του εκκρεμούς προκειμένου να επιτύχουμε κι εδώ έναν μερισμό του παραμετρικού χώρου $\lambda - \omega$ σε δύο περιοχές επί των οποίων στη μεν πρώτη να αποκλείεται η πιθανότητα χαοτικής κίνησης στη δε δεύτερη αυτή να αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο, γι' αυτό και θα αναφέρουμε μόνο τις απαραίτητες πληροφορίες.

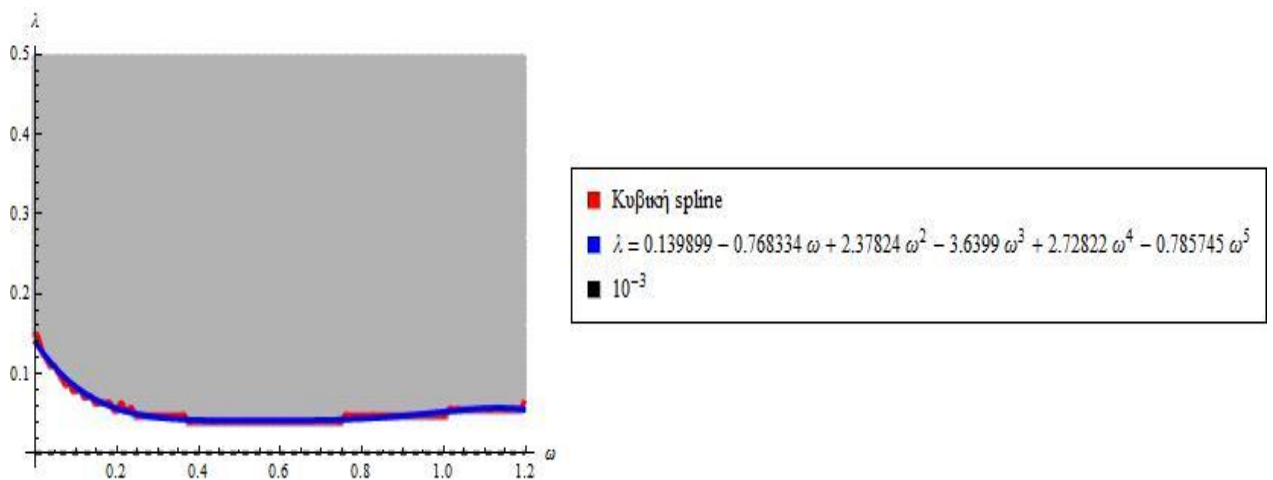
Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στον ορισμό της συνάρτησης Melnikov εδώ είναι:

$$f(x_h(\zeta)) \wedge g(x_h(\zeta), \zeta + t_0) = \frac{-\beta x_{h2}^2(\zeta) + \lambda x_{h2}(\zeta) \sin(\Omega(\zeta + t_0)) + \Delta \lambda x_{h2}(\zeta) \sin(\omega(\zeta + t_0))}{\Delta \lambda x_{h2}(\zeta) \sin(\omega(\zeta + t_0))} \quad (5).$$

Εδώ, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων λ και ω , οι συναρτήσεις Melnikov υπολογίζονται στο διάστημα $[0, 900]$ με βήμα 0.26. Η τιμή 900 είναι τέτοια, ώστε οι συναρτήσεις Melnikov να έχουν εκδηλώσει τη συμπεριφορά τους και το βήμα 0.26 τέτοιο, ώστε να έχουμε καλή προσέγγιση των ριζών τους και καλή σύλληψη της συμπεριφοράς τους από τα παρεμβολικά πολυώνυμα στις όσες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται.

Οι τιμές $M(t_0)$ προκύπτουν ολοκληρώνοντας την (5) ως προς ζ στο διάστημα $[0, 41.79]$, όπου 41.79 είναι η τιμή του χρόνου t για την οποία ικανοποιείται η συνθήκη τερματισμού $|x_1(t)| \leq 10^{-4.3695}$ κατά τον υπολογισμό της δεξιάς ομοκλιτικής τροχιάς.

Το διάγραμμα που παίρνουμε τελικά είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 14 Διατεταγμένα ζεύγη (ω, λ) (γκρι) τα οποία ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης.

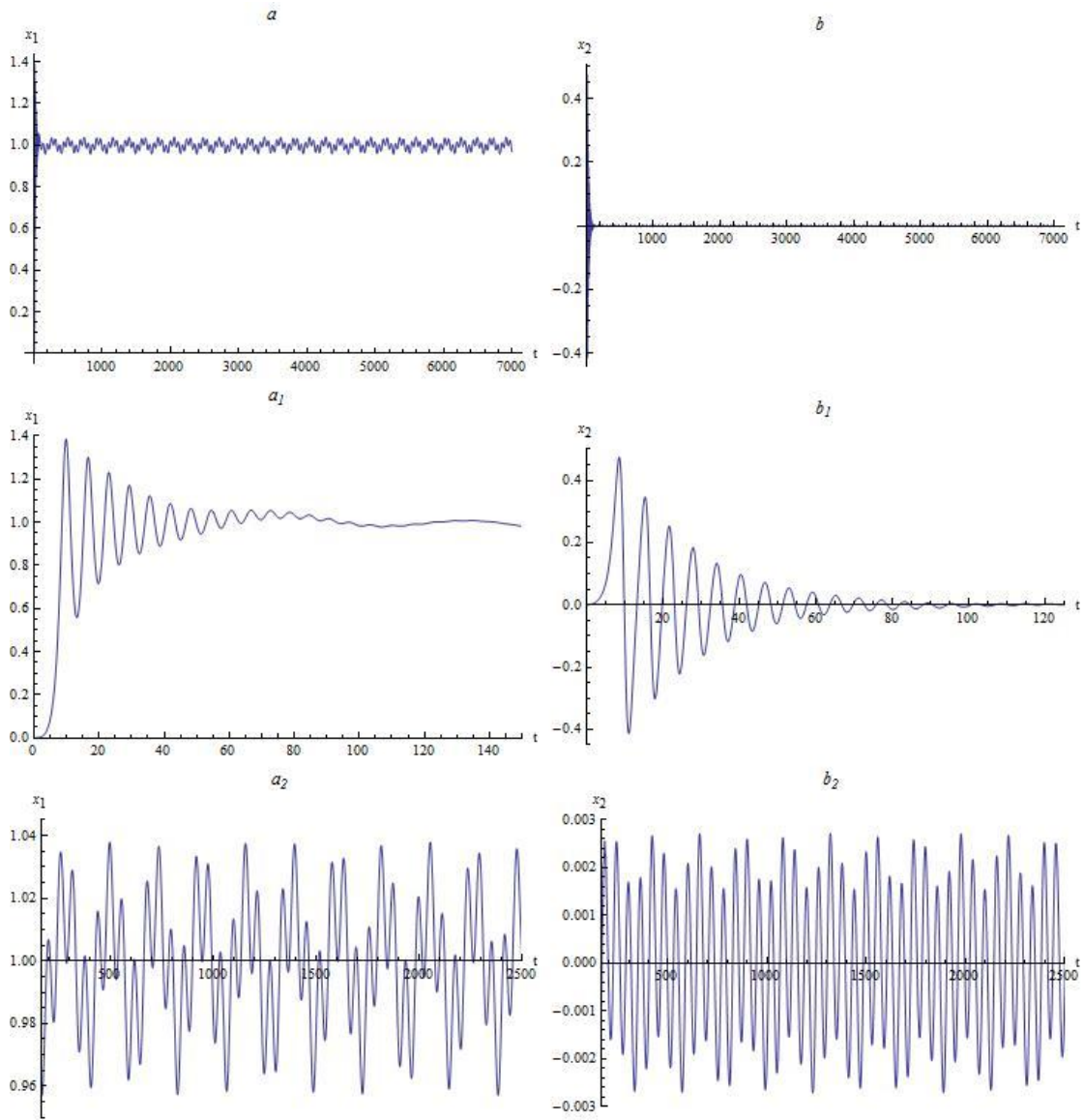
Στο σχήμα 14 δείχνουμε πως προσεγγίζεται το όριο των δύο περιοχών από την κυβική spline (κόκκινο) και ένα προσεγγιστικό πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού (μπλε). Η διακεκομμένη, μαύρη γραμμή αντιστοιχεί στην αρχική τιμή του λ .

Στη συνέχεια διαλέγουμε τρία σημεία, ένα κάτω και δύο πάνω από το όριο για την επιβεβαίωση του ανωτέρω αποτελέσματος. Αναφέρουμε πως έχουμε επαναλάβει την ακόλουθη διαδικασία και για άλλους συνδυασμούς σημείων με θετικά αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση και πως απλώς επιλέξαμε να δείξουμε τα αποτελέσματα που

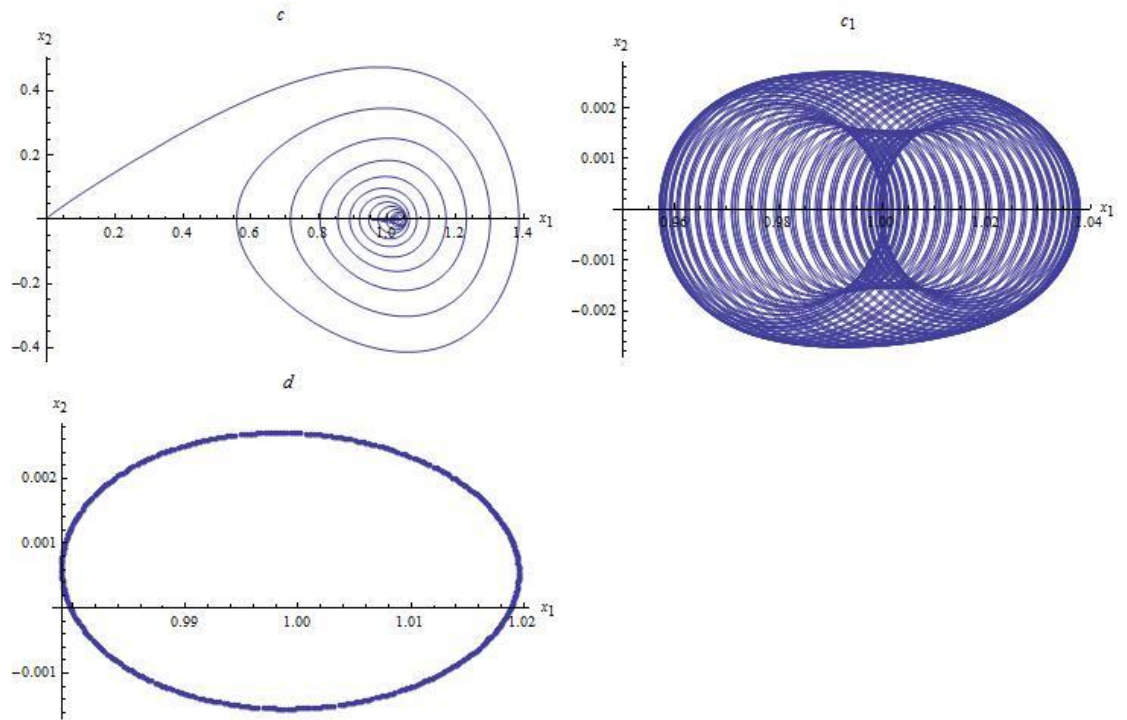
αφορούν τα συγκεκριμένα. Τα σημεία αυτά είναι τα $(\omega, \lambda) = (\frac{\sqrt{3}}{1710} + 3 \frac{\sqrt{3}}{190}, 0.02)$, $(\omega, \lambda) = (\frac{\sqrt{3}}{1710} + 55 \frac{\sqrt{3}}{190}, 0.125)$ και $(\omega, \lambda) = (\frac{\sqrt{3}}{1710} + 114 \frac{\sqrt{3}}{190}, 0.1)$. Στα σχήματα 15^{1,2}, 16 και 18 βλέπουμε, αντιστοίχως, τη θέση και την ταχύτητα έναντι του χρόνου, τη θέση έναντι της ταχύτητας και μια τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$.

Στο σημείο κάτω από το όριο δεν έχουμε, όπως αναμενόταν, χαοτική απόκριση του συστήματος. Πρόκειται για μια οιονεί περιοδική κίνηση δύο περιόδων, όπως μαρτυρά το γεγονός ότι στην τομή Poincare τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μία κλειστή τροχιά [24, pp. 514-520]. Στο c_1 του σχήματος 15² βλέπουμε τον οιονεί περιοδικό ελκυστή. Στα σχήματα a_1, a_2 και b_1, b_2 του σχήματος 15¹ βλέπουμε, αντιστοίχως, τη θέση και την ταχύτητα έναντι του χρόνου σε δύο επιλεγμένα χρονικά διαστήματα προκειμένου να έχουμε καλύτερη εικόνα για τη συμπεριφορά τους. Παρατηρούμε πως αν εξαιρέσουμε τις αρχικές μεταβατικές καταστάσεις a_1 και b_1 τα γραφήματα αντιστοιχούν σε συναρτήσεις σχεδόν περιοδικές.

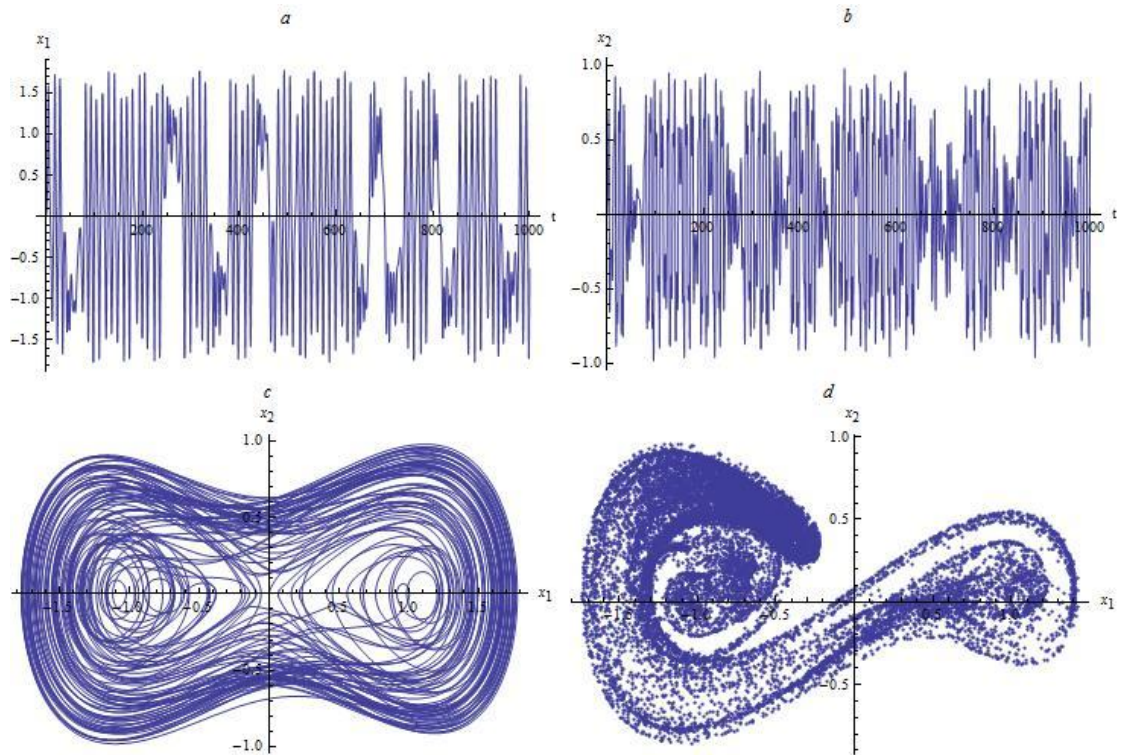
Στη γκρι περιοχή πάνω από το όριο, επί της οποίας η εκδήλωση χαοτικής κίνησης αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο, διαπιστώνουμε πέραν της οιονεί περιοδικής και χαοτική απόκριση του συστήματος σε συμφωνία με αυτό που αναμέναμε. Στην τομή Poincare του σχήματος 18 παρατηρούμε πάλι ότι τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μία κλειστή τροχιά. Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε πως δεν υπάρχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες αφού οι δύο καμπύλες που αφορούν τη θέση στα a, a_1 και την ταχύτητα στα b, b_1 ταυτίζονται, με εξαίρεση ένα μικρό χρονικό διάστημα στην αρχή, για μία διαφορά στο $x_2(0)$ ίση με 10^{-3} . Το ότι η απόκριση είναι χαοτική όσον αφορά την περίπτωση που $(\omega, \lambda) = (\frac{\sqrt{3}}{1710} + 55 \frac{\sqrt{3}}{190}, 0.125)$ προκύπτει π.χ. από την ακανόνιστη συμπεριφορά της θέσης και της ταχύτητας έναντι του χρόνου (βλ. Σχήμα 16 a, b)), καθώς και από την ευαισθησία της απόκρισης του συστήματος από τις αρχικές συνθήκες, καθώς βλέποντας το σχήμα 17 παρατηρούμε να διαχωρίζονται οι δύο καμπύλες που αφορούν τη θέση στο a) και την ταχύτητα στο b) πέραν ενός χρονικού σημείου για μόλις μία διαφορά στο $x_2(0)$ ίση με 10^{-3} .



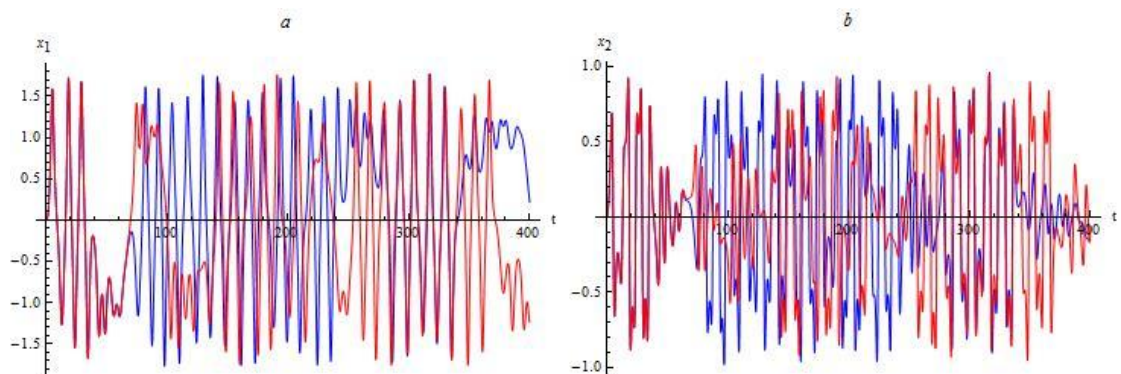
Σχήμα 15¹ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$) Θέση έναντι του χρόνου και b, b_1, b_2) ταχύτητα έναντι του χρόνου για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ και $(\omega, \lambda) = (\frac{\sqrt{3}}{1710} + 3 \frac{\sqrt{3}}{190}, 0.02)$



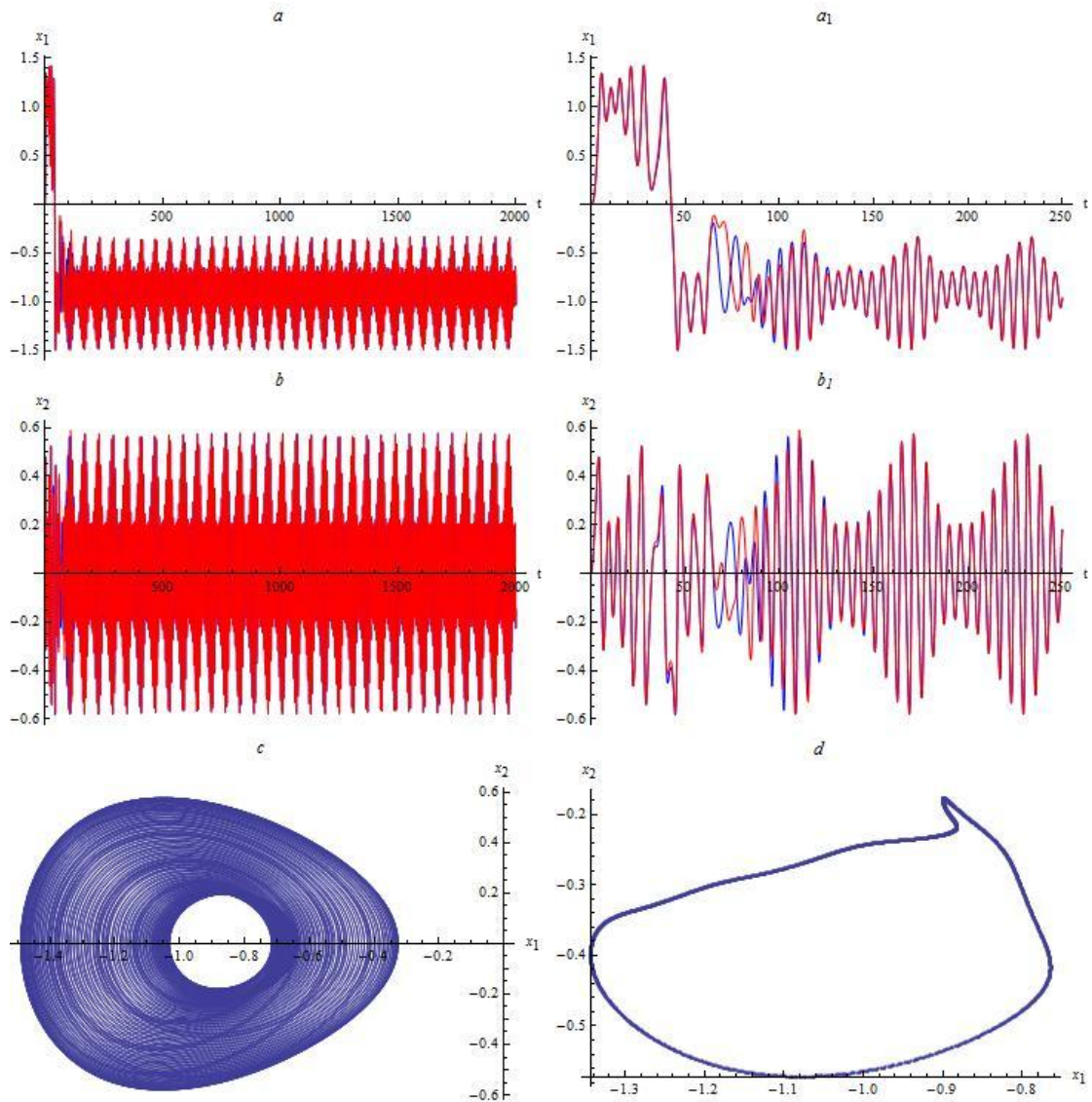
Σχήμα 15² *c*, *c*₁) x_1 έναντι x_2 και *d*) τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ και $(\omega, \lambda) = \left(\frac{\sqrt{3}}{1710} + 3\frac{\sqrt{3}}{190}, 0.02\right)$



Σχήμα 16 *a)* Θέση έναντι του χρόνου, *b)* ταχύτητα έναντι του χρόνου, *c)* x_1 έναντι x_2 και *d)* τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ και $(\omega, \lambda) = \left(\frac{\sqrt{3}}{1710} + 55 \frac{\sqrt{3}}{190}, 0.125\right)$



Σχήμα 17 *a)* Θέση έναντι του χρόνου και *b)* ταχύτητα έναντι του χρόνου για αρχικές συνθήκες $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ (μπλε) και $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0.001)$ (κόκκινο)



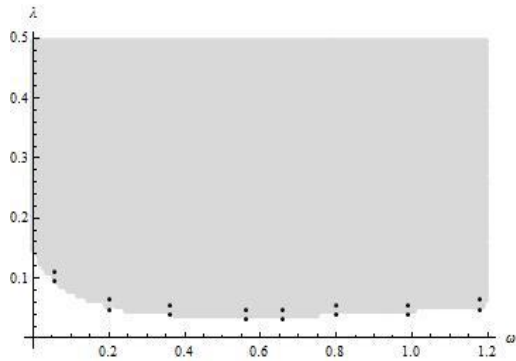
Σχήμα 18 a, a_1) Θέση έναντι του χρόνου και b, b_1) ταχύτητα έναντι του χρόνου για αρχικές συνθήκες $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ (μπλε) και $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0.001)$ (κόκκινο) c) οιονεί περιοδικός ελκυστής και d) τομή Poincare για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$ με $(\omega, \lambda) = (\frac{\sqrt{3}}{1710} + 114 \frac{\sqrt{3}}{190}, 0.1)$

5.2.1 Εφαρμογή των μεθόδων των εκθετών Lyapunov, FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM

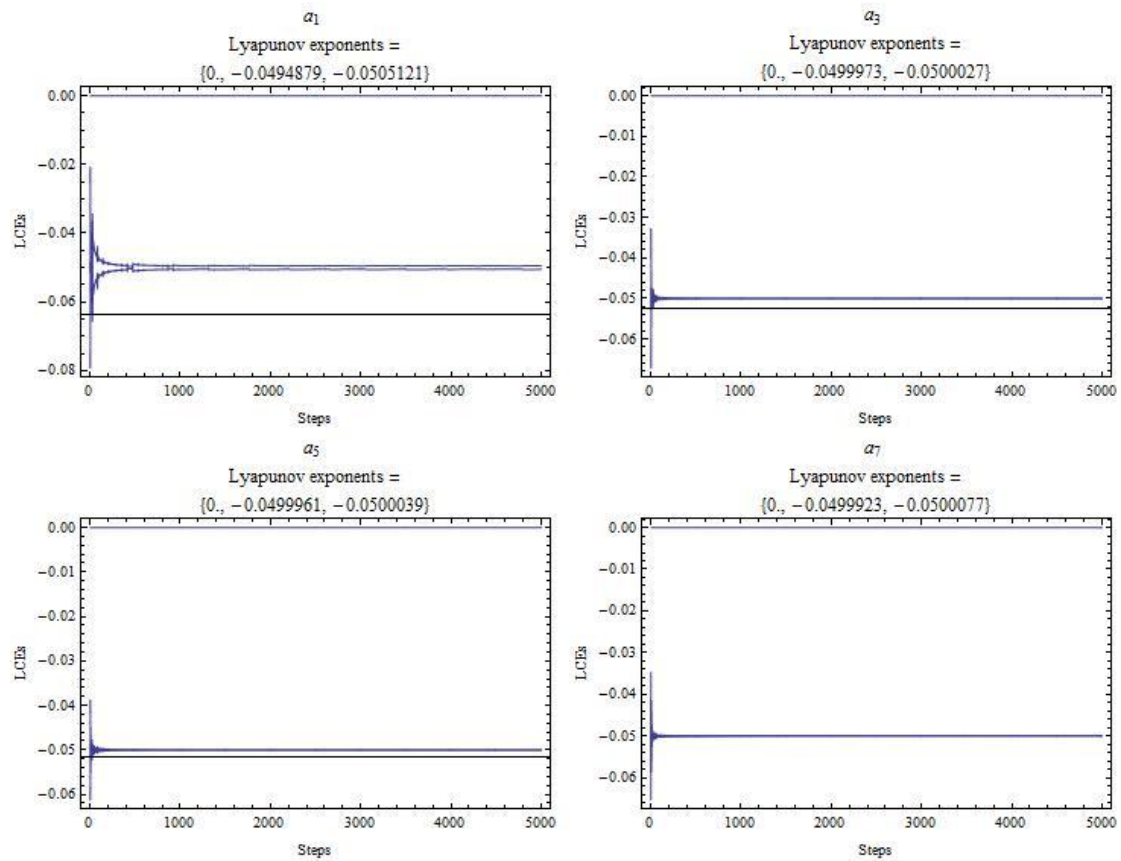
Στην παράγραφο αυτή ελέγχουμε κατά πόσο το προσδιορισθέν όριο μεταξύ της περιοχής που αποκλείεται η εκδήλωση χαοτικής κίνησης και εκείνης επί της οποίας αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο υποστηρίζεται και από την εφαρμογή των μεθόδων των εκθετών Lyapunov, FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM.

Για αυτό το σκοπό θεωρούμε τα σημεία (μαύρες κουκκίδες) που φαίνονται στο σχήμα 19 τα οποία αριθμούμε από το 1 έως το 16, έτσι ώστε τα σημεία που ανήκουν στη λευκή περιοχή να αριθμούνται με τους περιττούς αριθμούς $\{1,3,5, \dots, 15\}$. Για τα παραπάνω σημεία υπολογίζουμε τους εκθέτες Lyapunov. Σε κάθε περίπτωση

παίρνουμε τρεις εκθέτες Lyapunov εκ των οποίων ο ένας είναι πάντα 0. Ο τελευταίος αντιστοιχεί στην εξίσωση $\dot{t} = 1$. Στα σχήματα 20 και 21 δείχνουμε τους εκθέτες Lyapunov και τα διαγράμματα σύγκλισης που αφορούν τα σημεία της λευκής περιοχής. Για κάθε ένα απ' αυτά οι άλλοι δύο εκθέτες Lyapunov είναι αρνητικοί. Επίσης, η μέθοδος Melnikov σ' αυτή την περιοχή δεν προβλέπει διασταυρώσεις των πολλαπλοτήτων. Συνεπώς, και οι δύο προβλέπουν την απουσία χάους.

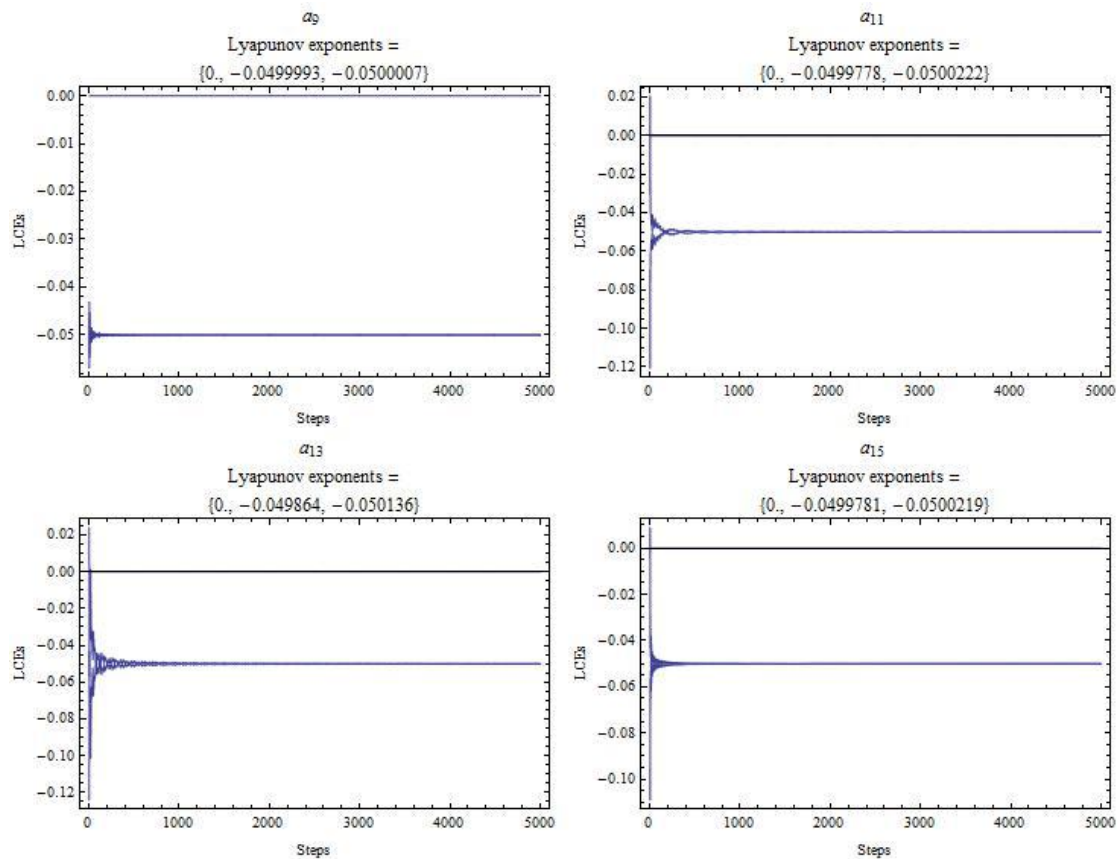


Σχήμα 19 Διατεταγμένα ζεύγη (ω, λ) (μαύρες κουκκίδες) επί του παραμετρικού χώρου $\omega - \lambda$ για τα οποία υπολογίζονται οι εκθέτες Lyapunov.



Σχήμα 20 Εκθέτες Lyapunov για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$, $T = 2$ s, βήματα = 5000, $TR = 600$ βήματα⁴, βήμα Runge-Kutta = 0.01 s

⁴ Το σύμβολο TR υποδηλώνει τον αριθμό των αρχικών βημάτων που αποκλείονται υποθέτοντας ότι αυτά αντιστοιχούν στο μεταβατικό φαινόμενο.



Σχήμα 21 Εκθέτες Lyapunov για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$, $T = 2$ s, βήματα = 5000, $TR = 600$ βήματα, βήμα Runge-Kutta = 0.01 s

Στη συνέχεια θεωρούμε τα σημεία (μαύρες κουκκίδες) που φαίνονται στο σχήμα 22 τα οποία αριθμούμε από το 1 έως το 12, έτσι ώστε τα σημεία που ανήκουν στη λευκή περιοχή να αριθμούνται με τους περιττούς αριθμούς $\{1,3,5, \dots, 11\}$. Για τα παραπάνω σημεία υπολογίζουμε τα πεδία FTLE, FSLE και εκτελούμε τον αλγόριθμο FCM.

Τα αποτελέσματα που δείχνουμε αφορούν τα σημεία 1 (βλ. σχήματα 23 και 24), 7 (βλ. σχήματα 26 και 27) και 10 (βλ. σχήματα 28, 29, 30 και 31). Η μέθοδος Melnikov φαίνεται πως συμφωνεί με τις άλλες τρεις μεθόδους σε όλα τα σημεία εκτός από το σημείο 1. Η διαπίστωση της συμφωνίας ή μη των τεσσάρων μεθόδων βασίζεται στο αν όλες τους προβλέπουν ή όχι σημεία τομής μεταξύ των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το ελκτικό LCS αντιστοιχεί σε ασταθή πολλαπλότητα και το απωστικό LCS σε ευσταθή πολλαπλότητα. Για το σημείο 1, λόγω της αναφερθείσας ασυμφωνίας, υπολογίσαμε και τους εκθέτες Lyapunov (βλ. Σχήμα 25). Πέραν του μηδενικού, οι άλλοι δύο εκθέτες ήταν αρνητικοί. Επίσης, η μέθοδος Melnikov σ' αυτό το σημείο δεν προβλέπει διασταυρώσεις των πολλαπλοτήτων. Συνεπώς, γι' αυτό το σημείο και οι δύο προβλέπουν την απουσία χάους.

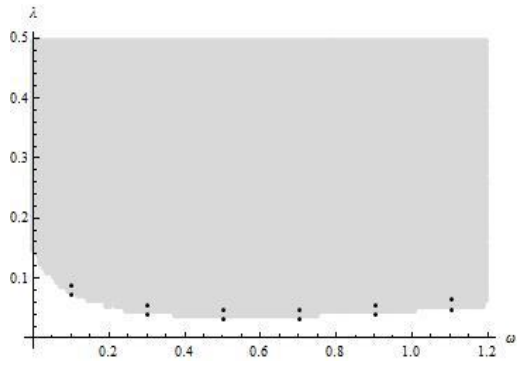
Το ελκτικό LCS προσδιορίζεται σε κάθε περίπτωση υπολογίζοντας το πεδίο FSLE(-)⁵, καθώς τα πεδία FTLE(-) ήταν αναποτελεσματικά γι' αυτό το σκοπό για το δεδομένο σύστημα. Το απωστικό LCS προσδιορίζεται σε κάθε περίπτωση υπολογίζοντας το πεδίο FTLE(+). Στις περιπτώσεις των σημείων 2, 9 και 10 το πεδίο FTLE(+) ήταν αναποτελεσματικό στην εξαγωγή «σαφών» απωστικών LCSs γι' αυτό σ' αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε και το πεδίο FSLE(+). Βλέπουμε το πρόβλημα αυτό για το σημείο 9 στα σχήματα 28 και 29. Στα σχήματα 30 και 31 φαίνεται ξεκάθαρα η υπεροχή του πεδίου FSLE(+) έναντι του πεδίου FTLE(+) για τη συγκεκριμένη περίπτωση. Ωστόσο, αναφέρουμε πως σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα ως προς το αν τέμνονται η ασταθής (ελκτικό LCS - πεδίο FSLE(-)) με την ευσταθή πολλαπλότητα (απωστικό LCS - πεδίο FTLE(+)) χωρίς τη χρήση του πεδίου FTLE(+), καθώς ως μια προσέγγιση της τελευταίας μπορεί να θεωρηθεί το όριο μεταξύ των ομάδων που προβλέπει ο αλγόριθμος FCM (αναφορά στο σχήμα 29).

Για τον υπολογισμό των πεδίων FSLE(-) χρησιμοποιήθηκε, σε κάθε περίπτωση, ένα πλέγμα 700×700 , 3 δοκιμαστικά σωματίδια ανά κόμβο, ένας χρόνος ολοκλήρωσης ίσος με $-4 (2\pi/\Omega)$, μία αρχική τυπική ακτίνα $R(t_0) = 10^{-3}$ και ένας παράγοντας ανάπτυξης $r = 275$. Για τον υπολογισμό των πεδίων FTLE(+) χρησιμοποιήθηκε, σε κάθε περίπτωση, ένα πλέγμα 1000×1000 και ένας χρόνος ολοκλήρωσης ίσος με $3 (2\pi/\Omega)$. Η εκτέλεση του αλγορίθμου FCM(+) έγινε σε κάθε περίπτωση για ένα πλέγμα 700×700 , χρόνο ολοκλήρωσης ίσο με $1.5 (2\pi/\Omega)$ και συντελεστή (ή εκθέτη) ασαφοποίησης 1.1 λαμβάνοντας 15 δείγματα ανά τροχιά. Τέλος, τα πεδία FSLE(+), για τις περιπτώσεις των σημείων 2, 9 και 10, υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα 700×700 , 3 δοκιμαστικά σωματίδια ανά κόμβο, ένα χρόνο ολοκλήρωσης ίσο με $4 (2\pi/\Omega)$ μία αρχική τυπική ακτίνα $R(t_0) = 10^{-3}$ και ένα παράγοντα ανάπτυξης $r = 100$.

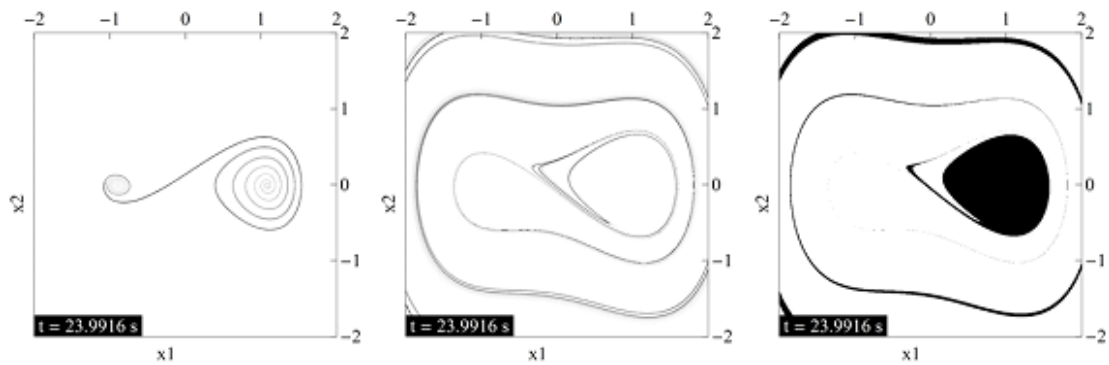
Αναφέρουμε ακόμη πως προσδιορίστηκαν η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητες του αδιατάραχτου συστήματος Duffing-Holmes με την κλασσική διαδικασία (ολοκλήρωση προς τα πίσω και προς τα μπρος, αντίστοιχα, με αρχική συνθήκη πολύ κοντά στο σαγματικό σημείο) προκειμένου να γίνει έλεγχος της επίδοσης των μεθόδων FTLE και FSLE με σύγκριση των μεταξύ τους αποτελεσμάτων.

Για την απόκτηση αποτελεσμάτων «ακριβείας» από τη διαδικασία υπολογισμού του πεδίου FSLE χρειάζεται κατάλληλη επιλογή των υπολογιστικών παραμέτρων. Επιπλέον, η μέθοδος FSLE είναι υπολογιστικά πιο απαιτητική από τη μέθοδο FTLE, αφού στην πρώτη έχουμε πολλά δοκιμαστικά σωματίδια ανά σημείο πλέγματος για τα οποία χρειάζεται να παρακολουθούμε τις μεταξύ τους αποστάσεις σε σχέση με το χρόνο. Αυτός είναι και ο λόγος που η μέθοδος FSLE χρησιμοποιούταν μόνο όταν αποτύγχανε η μέθοδος FTLE.

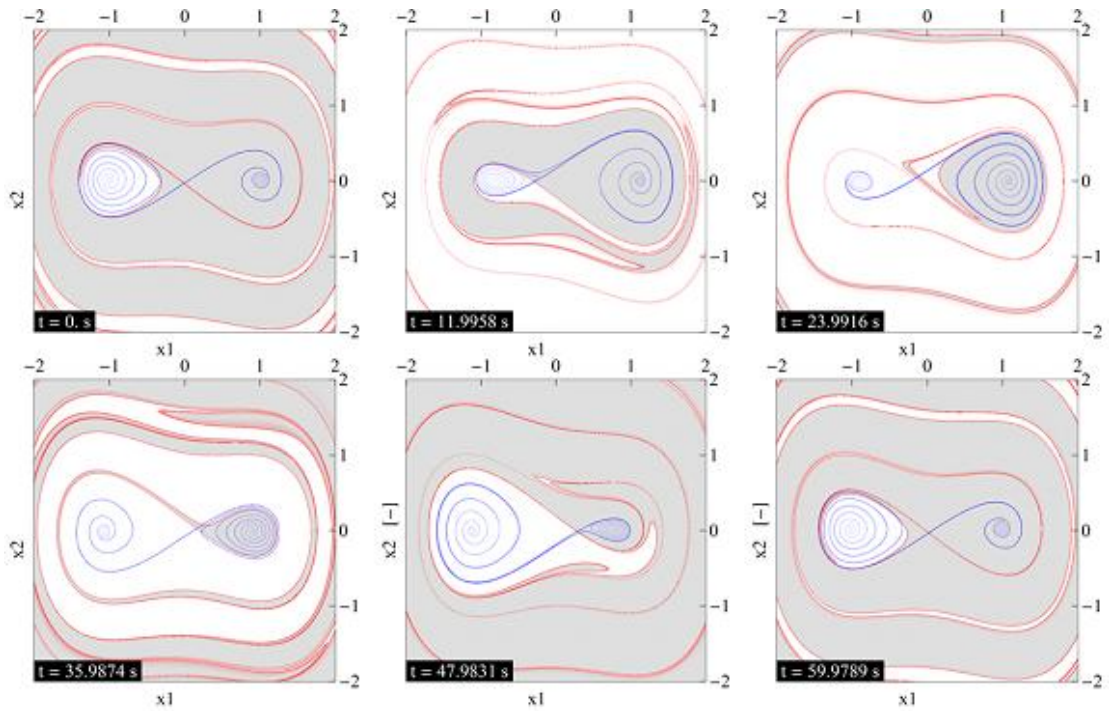
⁵ Τα πρόσημα -, + εντός παρένθεσης δίπλα από τα σύμβολα FTLE, FSLE και FCM υποδεικνύουν, αντιστοίχως, ολοκλήρωση προς μικρότερους και μεγαλύτερους χρόνους.



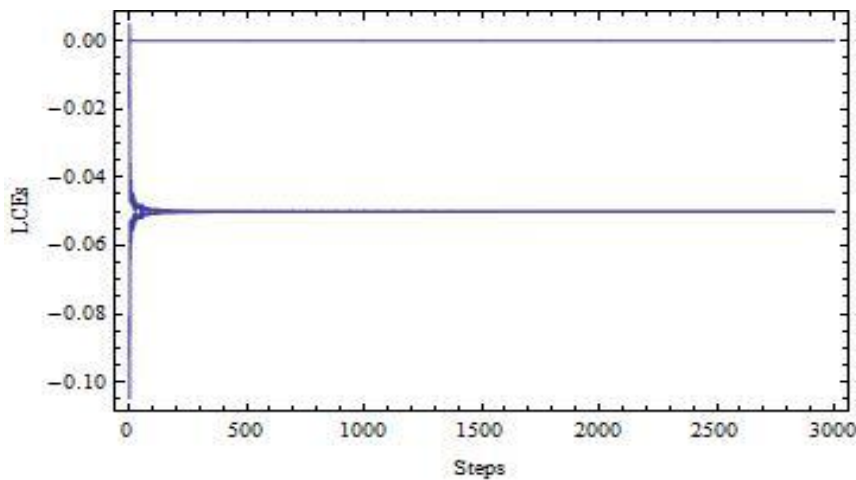
Σχήμα 22 Διατεταγμένα ζεύγη (ω, λ) (μαύρες κουκκίδες) επί του παραμετρικού χώρου $\omega - \lambda$ για τα οποία υπολογίζονται τα πεδία FTLE, FSLE και εκτελείται ο αλγόριθμος FCM για μια ομαδοποίηση των τροχιών σε δύο ομάδες.



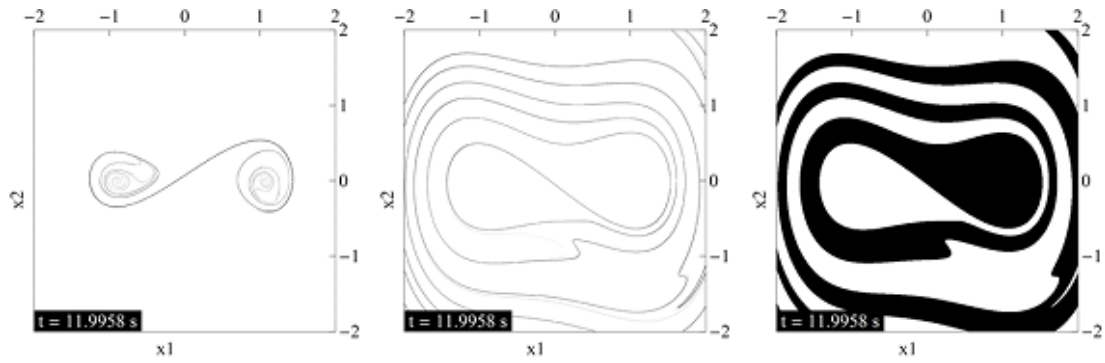
Σχήμα 23 Από αριστερά προς τα δεξιά: πεδίο FSLE(-) , πεδίο FTLE(+) και βαθμοί συμμετοχής σε μια FCM(+) ομαδοποίηση των τροχιών σε δύο ομάδες (σημείο 1 του σχήματος 22)



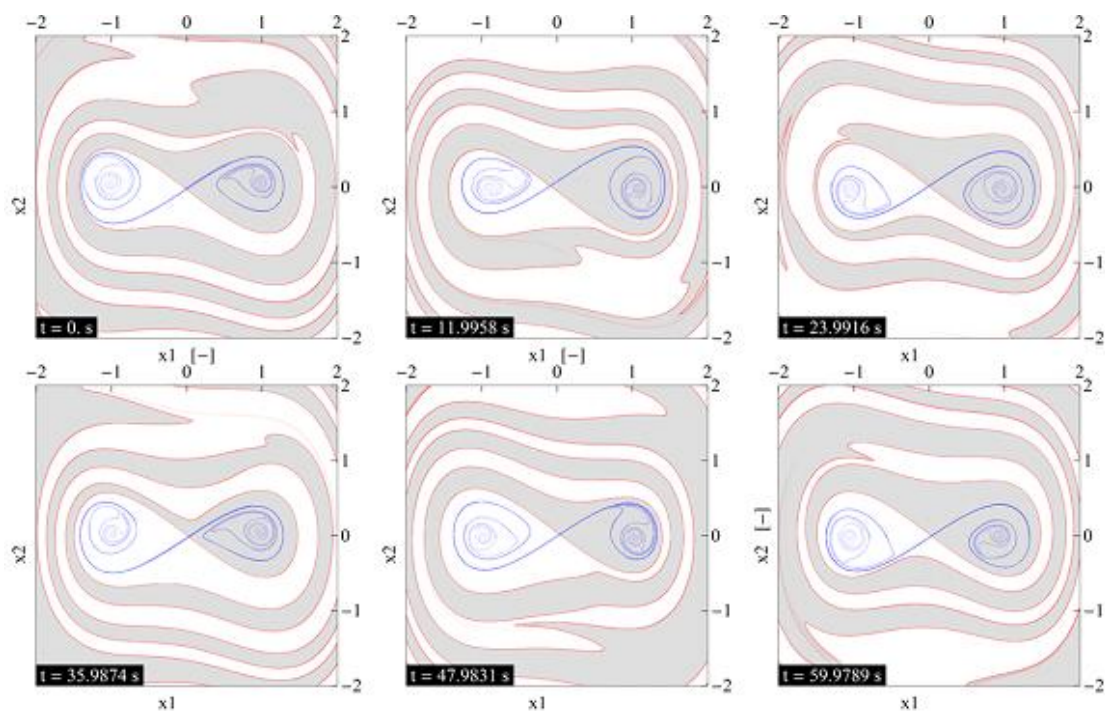
Σχήμα 24 Συνδυασμός των αποτελεσμάτων FSLE, FTLE και FCM. Ελκτικό (μπλε) και απωστικό (κόκκινο) LCSs προσδιορισμένα με τα πεδία FSLE(-) και FTLE(+), αντιστοίχως. Έξι ισαπέχουσες χρονικά τομές από 0 έως $2\pi/\Omega$. (σημείο 1 του σχήματος 22)



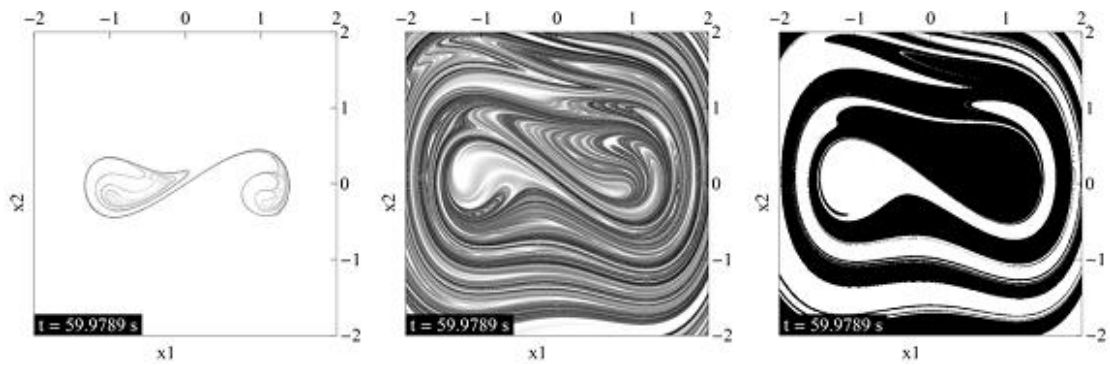
Σχήμα 25 Εκθέτες Lyapunov για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$, $T = 1$ s, βήματα = 3000, $TR = 600$ βήματα, βήμα Runge-Kutta = 0.01 s (σημείο 1 του σχήματος 22)



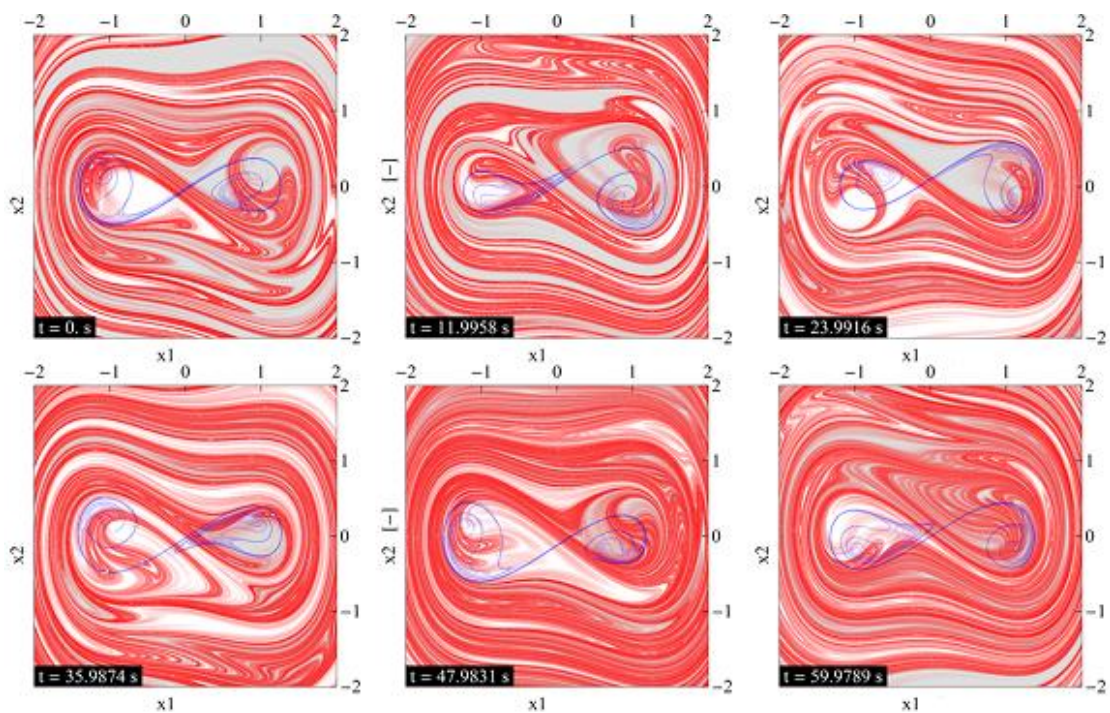
Σχήμα 26 Από αριστερά προς τα δεξιά: πεδίο FSLE(-) , πεδίο FTLE(+) και βαθμοί συμμετοχής σε μια FCM(+) ομαδοποίηση των τροχιών σε δύο ομάδες (σημείο 7 του σχήματος 22)



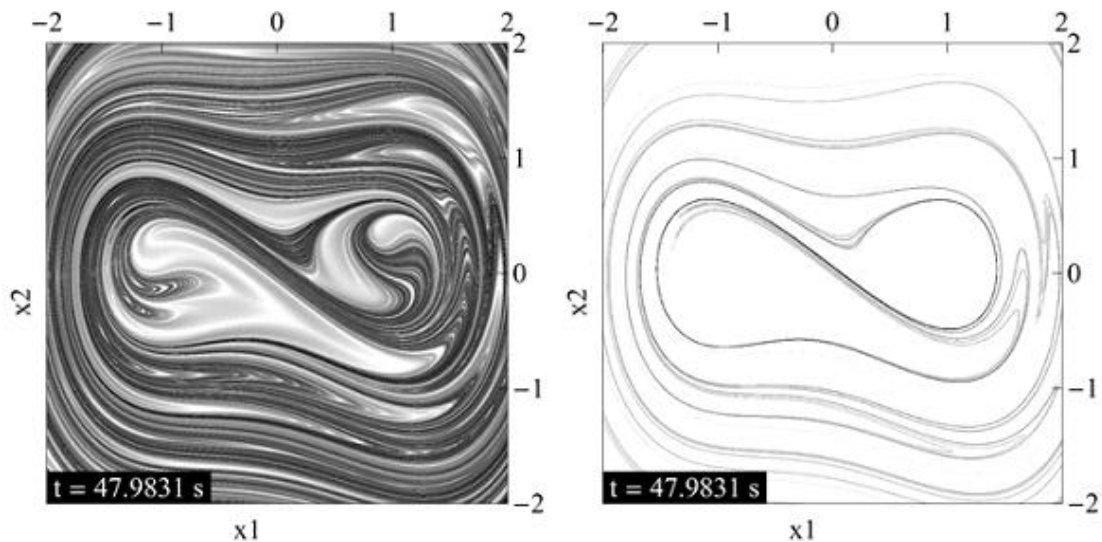
Σχήμα 27 Συνδυασμός των αποτελεσμάτων FSLE, FTLE και FCM. Ελκτικό (μπλε) και απωστικό (κόκκινο) LCSs προσδιορισμένα με τα πεδία FSLE(-) και FTLE(+), αντιστοίχως. Έξι ισαπέχουσες χρονικά τομές από 0 έως $2\pi/\Omega$. (σημείο 7 του σχήματος 22)



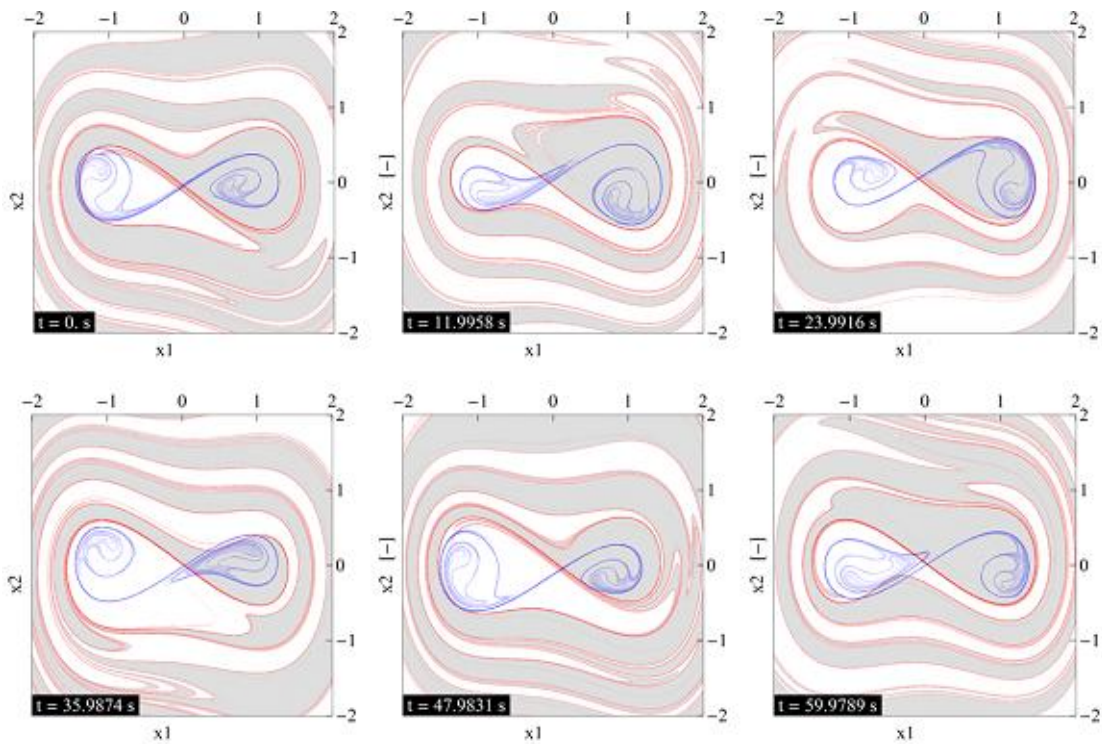
Σχήμα 28 Από αριστερά προς τα δεξιά: πεδίο FSLE(-), πεδίο FTLE(+) και βαθμοί συμμετοχής σε μια FCM(+) ομαδοποίηση των τροχιών σε δύο ομάδες (σημείο 10 του σχήματος 22)



Σχήμα 29 Συνδυασμός των αποτελεσμάτων FSLE, FTLE και FCM. Ελκτικό (μπλε) και απωστικό (κόκκινο) LCSs προσδιορισμένα με τα πεδία FSLE(-) και FTLE(+), αντιστοίχως. Έξι ισαπέχουσες χρονικά τομές από 0 έως $2\pi/\Omega$. (σημείο 10 του σχήματος 22)



Σχήμα 30 Αριστερά: FTLE(+) και Δεξιά: FSLE(+) (σημείο 10 του σχήματος 22)



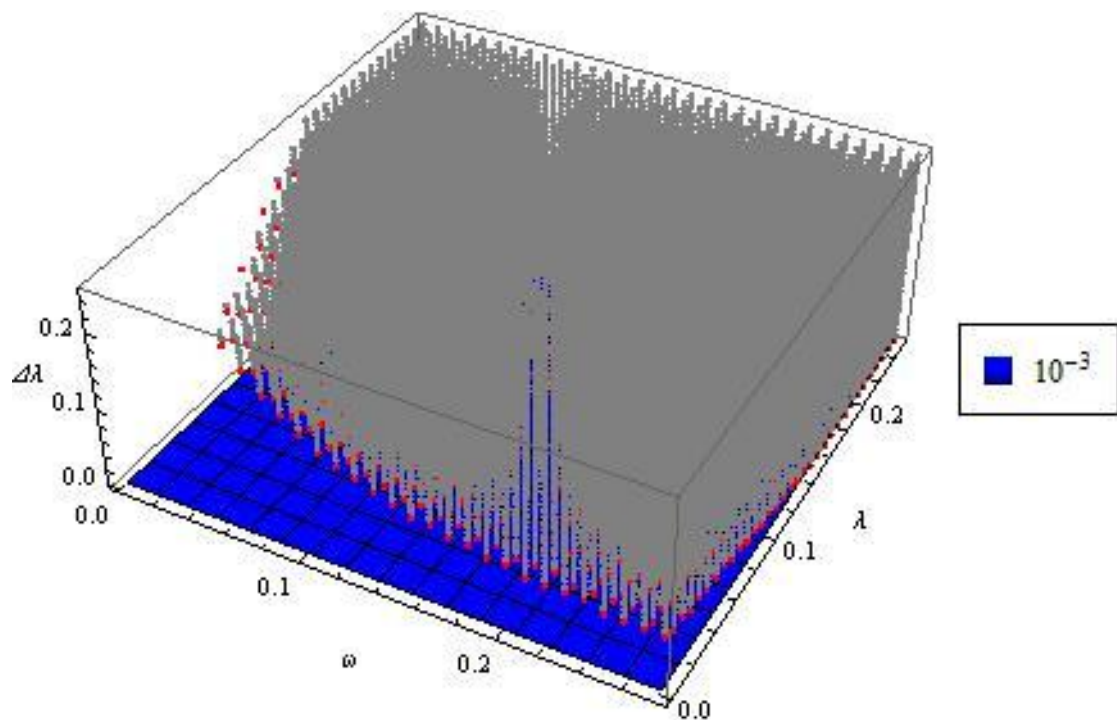
Σχήμα 31 Συνδυασμός των αποτελεσμάτων FSLE, FTLE και FCM. Ελκτικό (μπλε) και απωστικό (κόκκινο) LCSs προσδιορισμένα με τα πεδία FSLE(-) και FTLE(+), αντιστοίχως. Έξι ισαπέχουσες χρονικά τομές από 0 έως $2\pi/\Omega$. (σημείο 10 του σχήματος 22)

5.2.2 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov στην περίπτωση που τα πλάτη των δύο αρμονικών όρων είναι άνισα

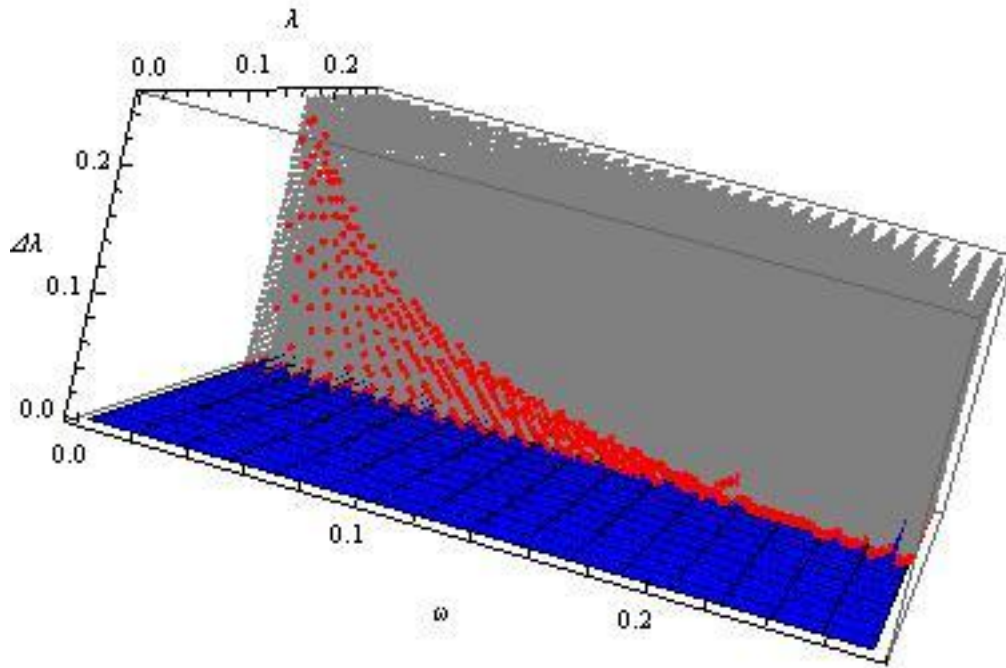
Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε για λόγους πληρότητας και το αποτέλεσμα εφαρμογής της μεθόδου Melnikov στην περίπτωση που τα πλάτη των δύο αρμονικών όρων είναι άνισα, αλλά για μικρότερο εύρος τιμών τους σε σχέση με πριν, για λόγους υπολογιστικού κόστους. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι:

1. $\lambda \neq \Delta\lambda$ και τις μεταβάλλουμε από 10^{-3} έως $32 \cdot 0.0078125$ με βήμα $= 0.0078125$
2. $\Omega = \frac{\sqrt{2}}{135 \cdot 10^{-1}} \approx 0.1048, \beta = 0.1$ και
3. το ω μεταβάλλεται από $\frac{\sqrt{3}}{1710} \approx 0.001$ έως $\frac{\sqrt{3}}{1710} + 30 \frac{\sqrt{3}}{190} \approx 0.274$ με βήμα $\frac{\sqrt{3}}{190} \approx 0.009$

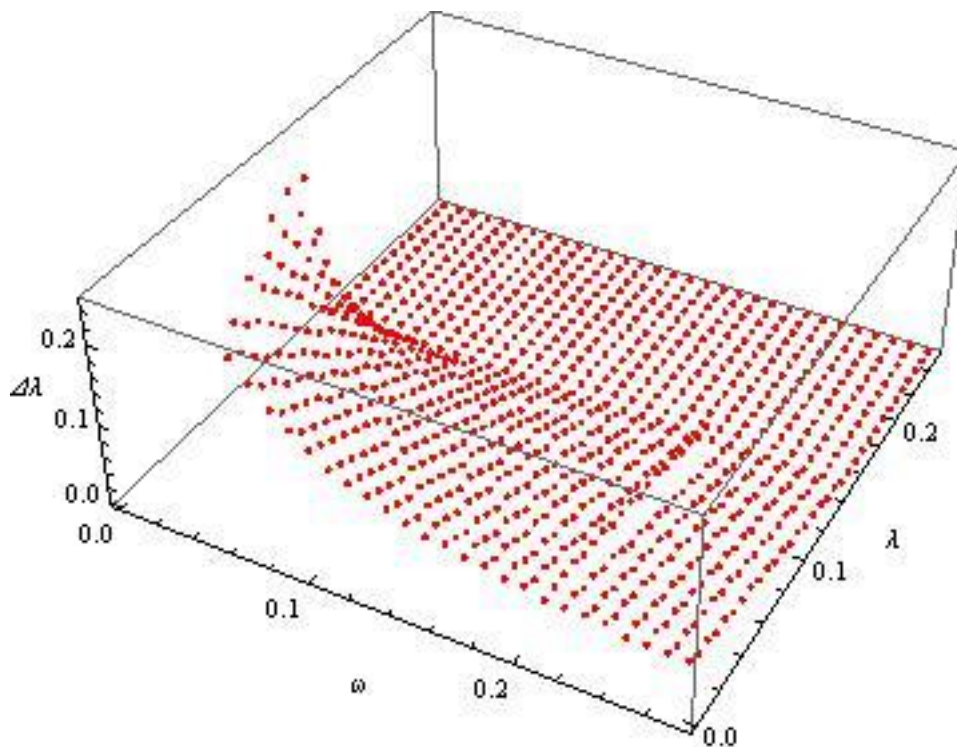
και εκτελέσουμε την προηγούμενη διαδικασία, τότε παίρνουμε το ακόλουθο διάγραμμα:



Σχήμα 32 Διατεταγμένες τριάδες $(\omega, \lambda, \Delta\lambda)$ (γκρι και κόκκινο) οι οποίες ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης.



Σχήμα 33 Διατεταγμένες τριάδες $(\omega, \lambda, \Delta\lambda)$ (γκρι και κόκκινο) οι οποίες ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης (μια άλλη όψη).



Σχήμα 34 Διατεταγμένες τριάδες $(\omega, \lambda, \Delta\lambda)$ οι οποίες ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης (κάτω όριο).

5.3 Εφαρμογή της μεθόδου Melnikov σε ένα ιαπωνικό αλιευτικό (Purse Seiner) με διχρωματική κυματική διέγερση

Στην παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Melnikov προκειμένου να προσδιορίσουμε το άνω όριο του surf-riding, δηλαδή του ορίου πάνω από το οποίο η έλξη προς το surf-riding είναι καθολική, δηλαδή, από κάθε αρχική συνθήκη, για την περίπτωση ενός αλιευτικού που λειτουργεί σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Αυτό είναι εφικτό να γίνει με αυτή τη μέθοδο γιατί, όπως προαναφέραμε, το καθολικό surf-riding αντιστοιχεί σε ένα φαινόμενο ομοκλινικής διακλάδωσης και αυτή χρησιμοποιείται ως ένα εργαλείο για τον εντοπισμό τέτοιων φαινομένων.

Η εξίσωση κίνησης του υπό μελέτη πλοίου κατά το διάμηκες περιγράφεται από τη Δ.Ε. [15]:

$$(m - X_{\dot{u}}) \ddot{\xi} = \frac{\{(\tau_0 n^2 + \tau_1 n \dot{\xi} + \tau_2 \dot{\xi}^2) - (r_1 \dot{\xi} + r_2 \dot{\xi}^2 + r_3 \dot{\xi}^3) + f_1 \sin(k_1 \xi - \omega_1 t) + f_2 \sin(k_2 \xi - \omega_2 t)\}}{f_1 \sin(k_1 \xi - \omega_1 t) + f_2 \sin(k_2 \xi - \omega_2 t)}, \quad (1)$$

όπου ξ είναι η απόσταση ενός σταθερού σημείου αναφοράς του πλοίου σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς το οποίο είναι τοποθετημένο στη γη, m είναι η μάζα του πλοίου, $-X_{\dot{u}}$ είναι η πρόσθετη μάζα, n είναι οι στροφές της προπέλας, $f_i = A_i RAO_i$, όπου A_i είναι το πλάτος του i κύματος και RAO_i είναι ο response-amplitude-operator της κυματικής δύναμης που αντιστοιχεί στο i κύμα, $k_i = 2\pi/\lambda_i$ είναι ο κυματαριθμός του i κύματος με λ_i το αντίστοιχο μήκος του και ω_i είναι η γωνιακή συχνότητα του i κύματος. Τα $\tau_0, \tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ και r_3 είναι σταθερές του μοντέλου, ενώ η τελεία δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο t . Από το μαθηματικό μοντέλο που αναφέρεται στη βιβλιογραφική αναφορά 13 έχουμε αγνοήσει την τυχαία φάση $\varepsilon_i^{(r)}$ του i κύματος και τη φάση ε_{fi} της i κυματικής δύναμης, ενώ παράλληλα έχουμε θεωρήσει την περίπτωση δύο μόνο κυμάτων.

Αν θέσουμε $x_1 = x$ και $x_2 = \dot{x}$, τότε η (1) γράφεται

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (m - X_{\dot{u}})^{-1} \{(\tau_0 n^2 + \tau_1 n x_2 + \tau_2 x_2^2) - (r_1 x_2 + r_2 x_2^2 + r_3 x_2^3) + f_1 \sin(k_1 x_1 - \omega_1 t) + f_2 \sin(k_2 x_1 - \omega_2 t)\} \end{cases} \quad (2).$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τους μετασχηματισμούς $x_1 = x_1^W + c_1 t$ και $x_2 = x_2^W + c_1$, όπου $c_i = \omega_i/k_i$ είναι η i ταχύτητα κύματος (wave celerity), τότε μπορούμε να απαλείψουμε το χρόνο t από τον πρώτο αρμονικό όρο στη (2). Στους προαναφερθέντες μετασχηματισμούς, x_1^W και x_2^W είναι, αντιστοίχως, η θέση και η ταχύτητα του πλοίου κατά το διάμηκες σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς τοποθετημένο στην κορυφή ενός κύματος το οποίο κινείται με την ταχύτητα c_1 . Έτσι, η (2) λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^w = x_2^w \\ \dot{x}_2^w = (m - X_{\dot{u}})^{-1} \left\{ \tau_0 n^2 + \tau_1 n c_1 + \tau_2 c_1^2 + (\tau_1 n + 2 \tau_2 c_1) x_2^w + \tau_2 (x_2^w)^2 \right. \\ \quad \left. - \left[r_1 (x_2^w + c_1) + r_2 (x_2^w + c_1)^2 + r_3 (x_2^w + c_1)^3 \right] + f_1 \sin(k_1 x_1^w) \right. \\ \quad \left. + f_2 \sin\left(k_2 x_1^w + \left(\frac{c_1}{c_2} - 1\right) \omega_2 t\right) \right\} \end{cases} \quad (3).$$

Το (3) γράφεται στη μορφή $\dot{\mathbf{x}}^w = \mathbf{f}(\mathbf{x}^w) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}^w, t)$, $\mathbf{x}^w = (x_1^w, x_2^w)^T$ (4), αν θέσουμε

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^w) = \begin{pmatrix} x_2^w, \\ (m - X_{\dot{u}})^{-1} \left\{ \tau_0 n^2 + \tau_1 n c_1 + \tau_2 c_1^2 + (\tau_1 n + 2 \tau_2 c_1) x_2^w + \tau_2 (x_2^w)^2 \right. \\ \quad \left. - \left[r_1 (x_2^w + c_1) + r_2 (x_2^w + c_1)^2 + r_3 (x_2^w + c_1)^3 \right] + f_1 \sin(k_1 x_1^w) \right\} \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^w, t) = (m - X_{\dot{u}})^{-1} \left(0, f_2 \sin\left(k_2 x_1^w + \left(\frac{c_1}{c_2} - 1\right) \omega_2 t\right) \right)^T.$$

Αναφέρουμε εδώ πως πλέον το ρόλο του ε αναλαμβάνει το πλάτος του δεύτερου κύματος.

Το αδιατάραχτο σύστημα του (4) είναι το $\dot{\mathbf{x}}^w = \mathbf{f}(\mathbf{x}^w)$ (5) το οποίο δεν είναι Χαμιλτονιανό αφού το σύστημα

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}^w) = \frac{\partial H}{\partial x_2^w} \\ f_2(\mathbf{x}^w) = -\frac{\partial H}{\partial x_1^w} \end{cases} \quad (6)$$

είναι μη συμβιβαστό (η μία εξίσωση αντικρούει την άλλη).

Για την πραγματοποίηση των υπολογισμών μας χρησιμοποιούμε τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα:

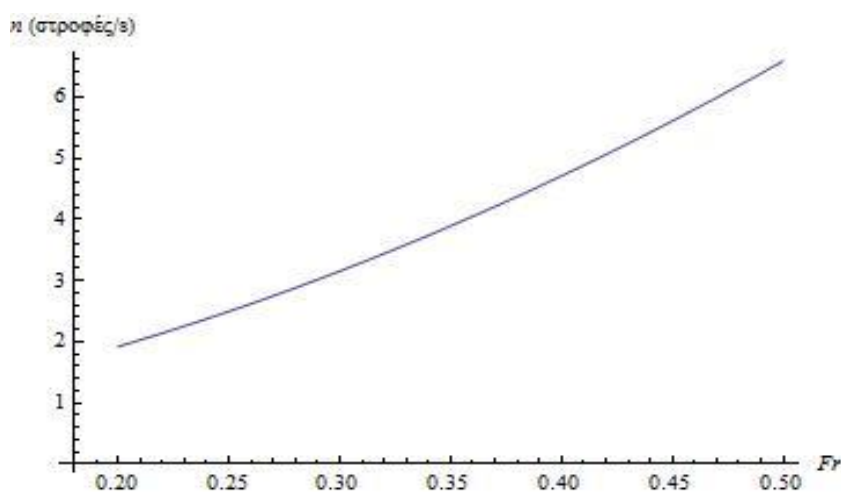
Πίνακας 1 Δεδομένα προβλήματος

m [t]	435.65
$X_{\dot{u}}$ [t]	-21.803
τ_0 [t m]	12.8856
τ_1 [t]	-2.7517
τ_2 [t m ⁻¹]	-0.533343
r_1 [t s ⁻¹]	5.99096
r_2 [t m ⁻¹]	-2.33425
r_3 [t m ⁻² s]	0.60978
L [m]	34.5
λ_1 [m]	69
g [m s ⁻²]	9.81
Fr	0.4

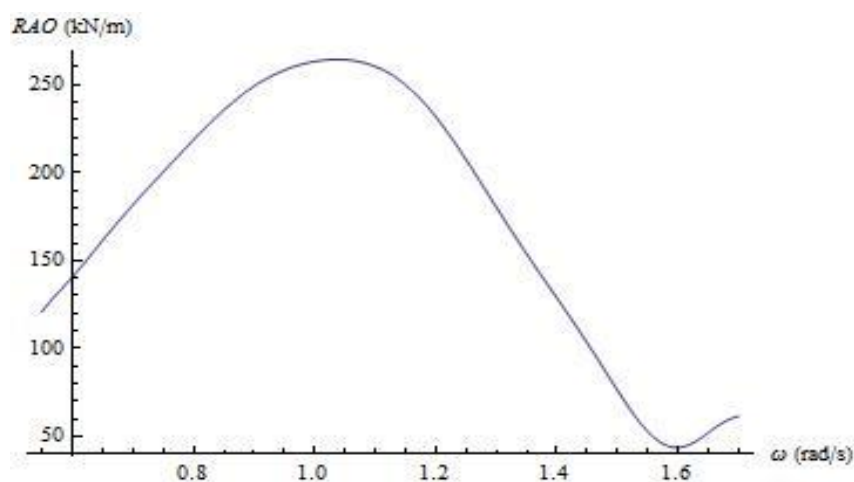
Στον παραπάνω πίνακα L είναι το μήκος του πλοίου, g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και $Fr = U/\sqrt{gL}$ είναι ο αριθμός Froude. Στην τελευταία σχέση U είναι η ονομαστική ταχύτητα του πλοίου.

Επίσης, αναφέρουμε πως ο αριθμός στροφών της προπέλας n , υπολογίζεται από ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς τον αριθμό Froude, ενώ το $RAO(\omega)$ είναι ένα πολυώνυμο 13^{ου} βαθμού. Οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται, αντιστοίχως, στα σχήματα 35 και 36.

Ακόμη, αναφέρουμε πως για κάθε αρμονική κυματική συνιστώσα θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση διασποράς γραμμικών κυμάτων που ισχύει για βαθύ νερό δηλαδή, την $\omega^2 = gk$.



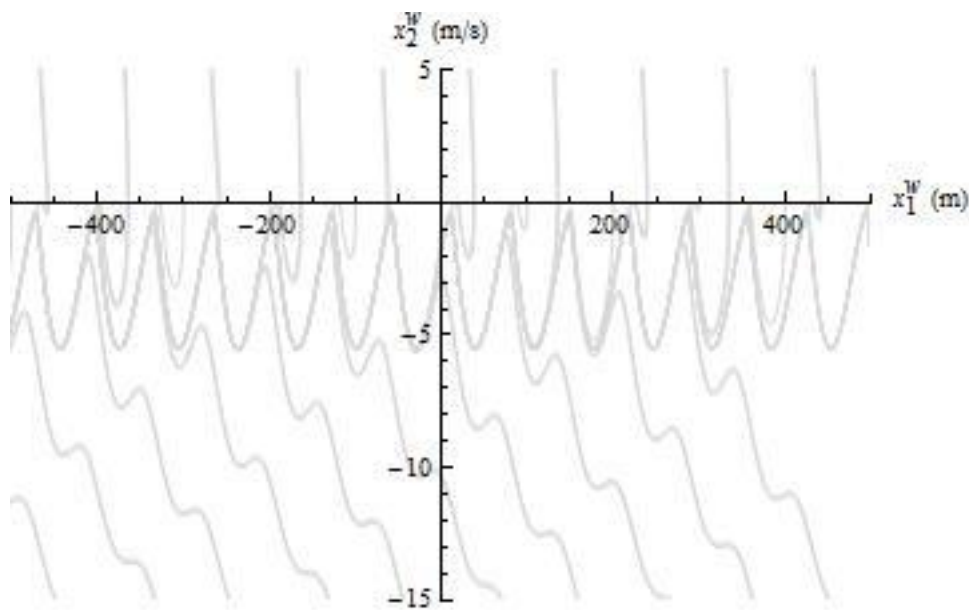
Σχήμα 35 Αριθμός στροφών προπέλας, n έναντι του αριθμού Froude, Fr



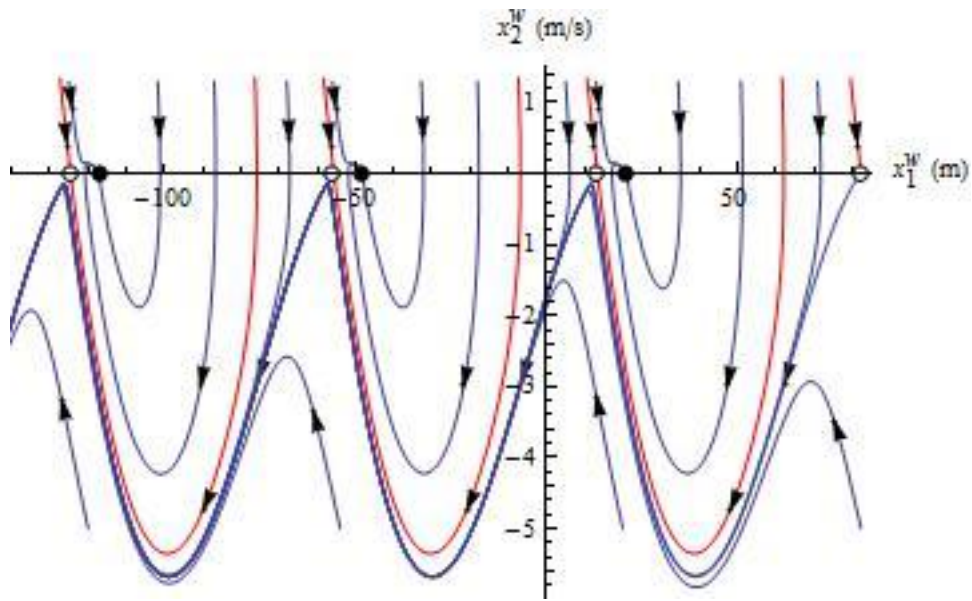
Σχήμα 36 RAO έναντι γωνιακής συχνότητας ω

Αρχικά δείχνουμε αμέσως παρακάτω πως το αδιατάραχτο σύστημα (5) είναι ικανό να αναπαράγει τις περιπτώσεις ύπαρξης μόνο περιοδικών λύσεων που αντιστοιχούν σε κινήσεις περιοδικού surging (βλ. Σχήμα 37), συνύπαρξης περιοδικών λύσεων και του surf-riding (βλ. Σχήμα 38), καθώς και του καθολικού surf-riding (βλ. Σχήμα 39). Πιο συγκεκριμένα, στο σχήμα 37 παρατηρούμε πως όλες οι λύσεις τελικά

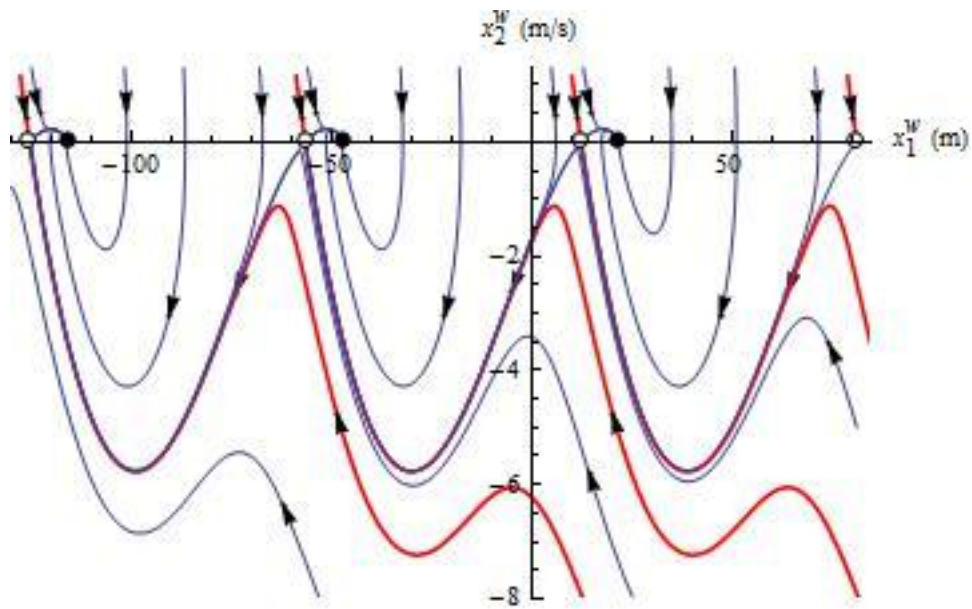
προσεγγίζουν την κυματοειδή γραμμή η οποία αντιστοιχεί στο περιοδικό surging. Στα σχήματα 38 και 39 τα στάσιμα σημεία (σάγματα και ευσταθείς κόμβοι) αντιστοιχούν σε καταστάσεις surf-riding. Στο σχήμα 38 παρατηρούμε πως οι λύσεις που ξεκινούν από αρχικές συνθήκες που περικλείονται από τους ευσταθείς κλάδους ενός σάγματος (κόκκινες γραμμές) καταλήγουν σε surf-riding, ενώ οι υπόλοιπες καταλήγουν στην κυματοειδή γραμμή που αντιστοιχεί στο περιοδικό surging. Στο σχήμα 39 όλες οι λύσεις καταλήγουν σε surf-riding. Επισημαίνουμε επίσης την ομοιότητα των σχημάτων 37, 38 και 39 με τα αντίστοιχα πορτραίτα φάσεων του σχήματος 4. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι τα ευσταθή στάσιμα του σχήματος 4 είναι εστίες, ενώ εδώ κόμβοι. Στο σχήμα 40 φαίνεται η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας του πλοίου σε σχέση με το σύστημα αναφοράς, το στερεωμένο στη γη, για τέσσερις περιπτώσεις εκ των οποίων η a αφορά το σχήμα 37, οι b και c το σχήμα 38 και η d το σχήμα 39 για τις αρχικές συνθήκες που φαίνονται στην περιγραφή του. Στις περιπτώσεις a και b παρατηρούμε το φαινόμενο που αναφέρεται ως ασύμμετρο (το εύρος των κορυφών είναι μεγαλύτερο από αυτό των κοιλάδων) surging ένα επικίνδυνο, από άποψη ασφάλειας, φαινόμενο, καθώς μπορεί να πυροδοτήσει το broaching, ενώ αυξάνει και την πιθανότητα για άμεση ανατροπή λόγω του ότι επιμηκύνει την παραμονή του πλοίου στη γειτονιά των κορυφών των κυμάτων όπου η ροπή επαναφοράς κατά τη διεύθυνση roll εμφανίζει μειωμένη τιμή [35].



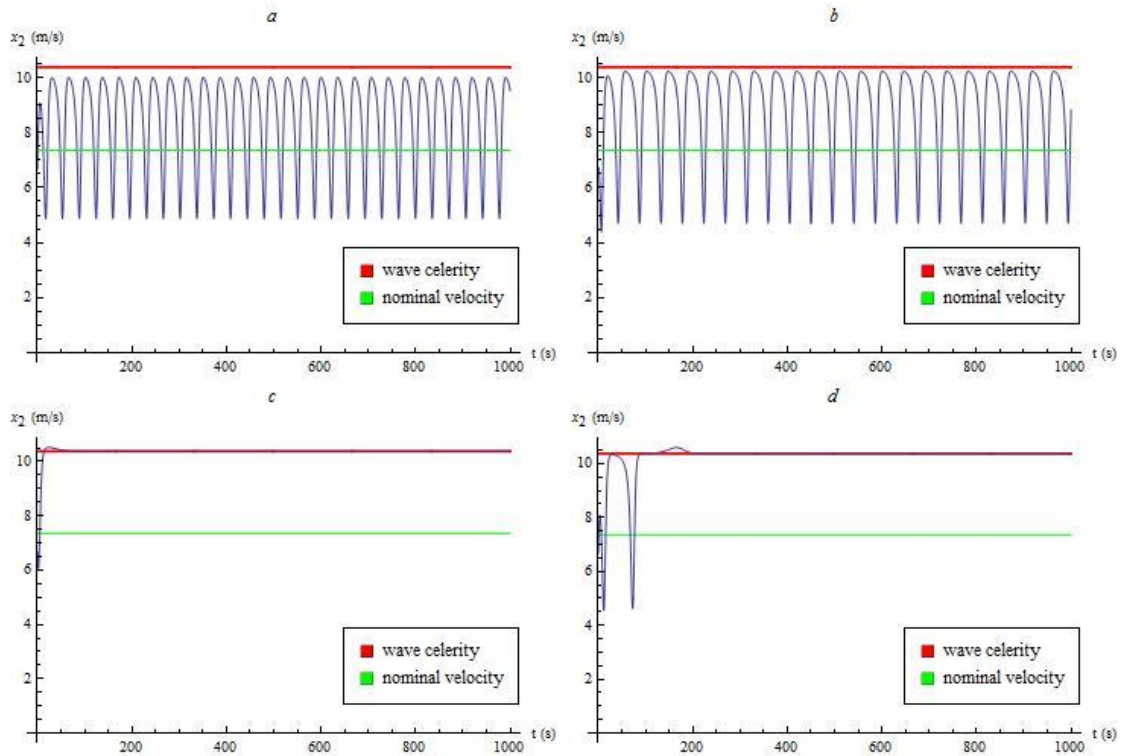
Σχήμα 37 Πορτραίτο φάσεων για $H_1/\lambda_1 \approx 0.045$ ($A_1 = 1.54$ m)



Σχήμα 38 Πορτραίτο φάσεων για $H_1/\lambda_1 \approx 0.048$ ($A_1 = 1.65$ m)



Σχήμα 39 Πορτραίτο φάσεων για $H_1/\lambda_1 \approx 0.05$ ($A_1 = 1.71$ m)



Σχήμα 40 Ταχύτητα έναντι του χρόνου για το αδιατάραχτο σύστημα για αρχική ταχύτητα $x_2(0) = 6.67$ m/s και *a*) $A_1 = 1.54$ m, $x_1(0) = 500$ m, *b*) $A_1 = 1.65$ m, $x_1(0) = 70$ m, *c*) $A_1 = 1.65$ m, $x_1(0) = 45$ m, *d*) $A_1 = 1.71$ m, $x_1(0) = 80$ m

Σε συνέχεια λοιπόν των προηγούμενων, αν υποθέσουμε ακόμη ότι:

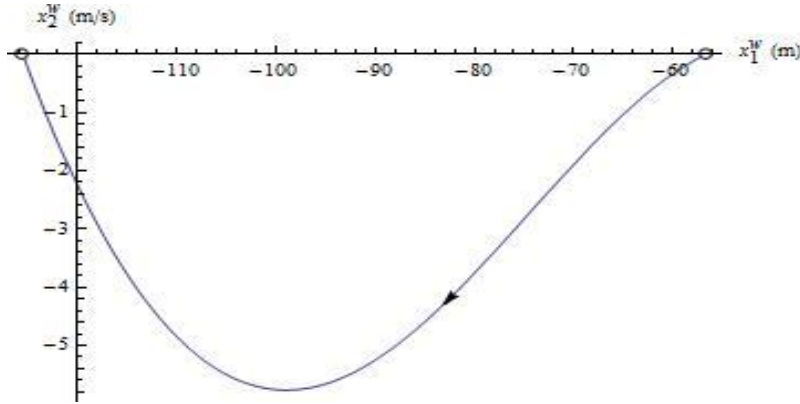
1. $A_1 = 1.70921759$ m (τιμή για την οποία το (5) έχει ετεροκλινική τροχιά, όπως βρήκαμε μέσω προσομοιώσεων)
2. το ω_2 μεταβάλλεται από 0.87 rad/s έως 1.55 rad/s με βήμα 0.02 rad/s με αντίστοιχες τιμές λ_2 , 81.43 m και 25.65 m και ότι
3. το κάθε H_2/λ_2 μεταβάλλεται από 0.005 έως $H_1/\lambda_1/2 = 0.025$ με βήμα 0.004,

τότε τα στάσιμα σημεία του αδιατάραχτου συστήματος είναι της μορφής: $(10.98(2.01 + 6.28i), 0), i \in \mathbb{Z}$ (7) και $(10.98(1.13 + 6.28i), 0), i \in \mathbb{Z}$ (8). Τα στάσιμα σημεία της μορφής (7) είναι ευσταθείς κόμβοι, ενώ τα στάσιμα σημεία της μορφής (8) είναι σαγματικά σημεία.

Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους, του Ιακωβιανού πίνακα του (5) για το στάσιμο σημείο $(-56.55, 0)$ είναι, αντιστοίχως, $\{-0.47, 0.079\}$ και $\{-0.905, 0.425\}, \{0.997, 0.079\}$.

Εξετάζουμε τώρα ως προς την ύπαρξη πιθανών σημείων τομής μεταξύ της ασταθούς πολλαπλότητας του δεξιού σαγματικού σημείου και της ευσταθούς πολλαπλότητας του αριστερού σαγματικού σημείου. Για το σκοπό αυτό απαιτείται ο προσδιορισμός της αντίστοιχης ετεροκλινής τροχιάς (βλ. Σχήμα 41). Για την εύρεση της ολοκληρώνουμε το σύστημα (5) με αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) \approx$

$(-56.55 - 10^{-6}, -7.9 * 10^{-8})$, κοντά στο σάγμα και επί της ιδιοδιεύθυνσης που ορίζει το δεύτερο από τα ανωτέρω ιδιοδιανύσματα και συνθήκη τερματισμού $|x_2^w(t)| \leq 10^{-4}$.



Σχήμα 41 Ετεροκλιτική τροχιά

Παρακάτω ακολουθούμε σχεδόν την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε και στις περιπτώσεις του εκκρεμούς και του ταλαντωτή Duffing-Holmes προκειμένου να επιτύχουμε κι εδώ έναν μερισμό του παραμετρικού χώρου $\omega_2/\omega_1 - \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1}$ σε δύο περιοχές επί των οποίων στη μεν πρώτη να αποκλείεται η πιθανότητα χαοτικής κίνησης στη δε δεύτερη αυτή να αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο, γι' αυτό και θα αναφέρουμε μόνο τις απαραίτητες πληροφορίες. Το όριο των προαναφερθέντων περιοχών αποτελεί και το άνω όριο του surf-riding.

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στον ορισμό της συνάρτησης Melnikov εδώ είναι:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_h^w(\zeta)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{x}_h^w(\zeta), \zeta + t_0) \left\{ \exp \left[- \int_0^\zeta \text{Trace} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_h^w(s)) ds \right] \right\} =$$

$$x_{h2}^w(\zeta) (m - X_u)^{-1} f_2 \sin \left(k_2 x_{h1}^w(\zeta) + \left(\frac{c_1}{c_2} - 1 \right) \omega_2 (\zeta + t_0) \right)$$

$$\left\{ \exp \left[- \int_0^\zeta [0.0022 (-30.019 - 1.067 x_{h2}^w(s) + 4.669 \right.$$

$$\left. (10.379 + x_{h2}^w(s)) - 1.829 (10.379 + x_{h2}^w(s))^2 \right] ds \right\} \quad (9)$$

Στην παραπάνω σχέση η $x_{h2}^w(s)$ είναι η ετεροκλιτική τροχιά η οποία έχει υπολογιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση.

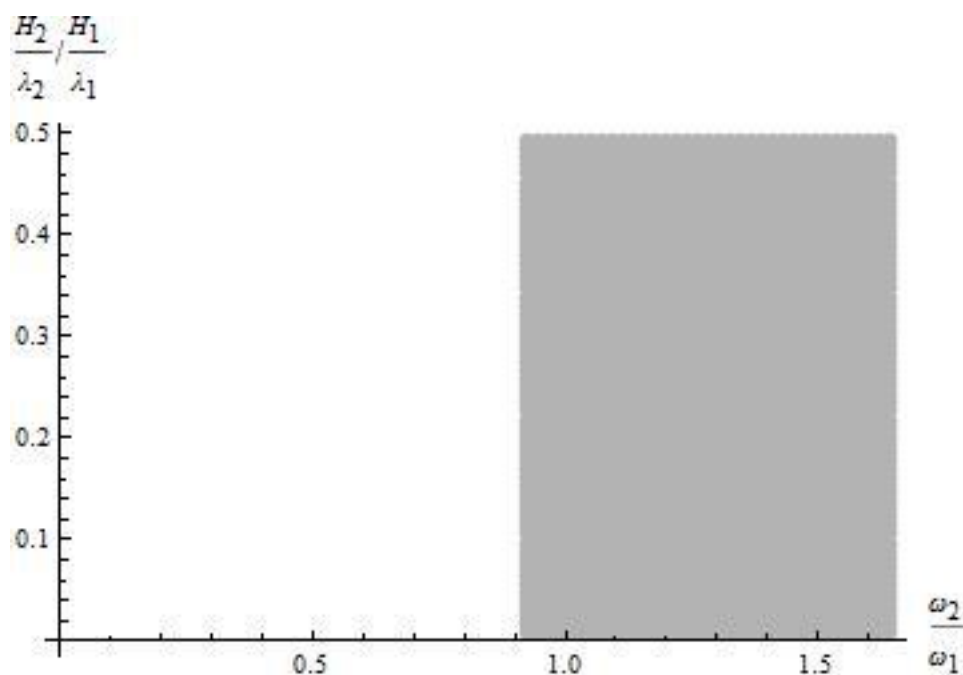
Εδώ, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων λ_2 και A_2 , οι συναρτήσεις Melnikov υπολογίζονται στο διάστημα $[0, 2\pi / [(c_1/c_2 - 1) \omega_2]]$ (με εναλλαγή των άκρων όταν $(c_1/c_2 - 1) < 0$) με βήμα $2\pi/300 [(c_1/c_2 - 1) \omega_2]$ τα οποία είναι κι εδώ επιλεγμένα κατάλληλα.

Οι τιμές $M(t_0)$ προκύπτουν ολοκληρώνοντας την (9) ως προς ζ στο διάστημα $[0, 233.24]$, όπου 233.24 είναι η τιμή του χρόνου t για την οποία ικανοποιείται η

συνθήκη τερματισμού $|x_2^w(t)| \leq 10^{-4}$ κατά τον υπολογισμό της ετεροκλιτικής τροχιάς.

Η διαφορά εδώ σε σχέση με τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις (πέραν της διαφοράς στην έκφραση της συνάρτησης Melnikov) έγκειται στο ότι εδώ δεν γίνεται χρήση παρεμβολικών πολυωνύμων για τον υπολογισμό των τιμών των παραγώγων των συναρτήσεων Melnikov στις ρίζες των τελευταίων. Ο λόγος είναι ότι η εισαγωγή του εκθετικού όρου στην έκφραση της συνάρτησης Melnikov έχει σαν αποτέλεσμα αυτές να λαμβάνουν πολύ μεγάλες τιμές με αποτέλεσμα να χρειάζεται πολύ μικρό βήμα για την καλή προσέγγισή τους το οποίο όμως αυξάνει πολύ το υπολογιστικό κόστος. Αυτές σ' αυτή την περίπτωση υπολογίζονται με πεπερασμένες κεντρικές διαφορές τάξης $O(h^2)$. Για τον υπολογισμό των τελευταίων κάνουμε επανυπολογισμό των τιμών των συναρτήσεων Melnikov σε θέσεις πριν και μετά τη ρίζα. Πιο συγκεκριμένα, αν το x παριστάνει τη θέση της ρίζας τότε οι θέσεις αυτές είναι οι $x \pm h$, όπου για τον υπολογισμό του βήματος h χρησιμοποιούμε τον εμπειρικό κανόνα $h = \max(|x|, 1) u^{1/3}$, όπου u είναι το machine epsilon.

Το διάγραμμα που παίρνουμε τελικά είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 42 Διατεταγμένα ζεύγη $(\omega_2/\omega_1, \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1})$ (γκρι) τα οποία ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης.

Παρατηρούμε εδώ ότι ο παραμετρικός χώρος $\omega_2/\omega_1 - \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1}$ δεν διαμερίζεται σε δύο περιοχές, όπως συνέβη στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις και πως η παραμικρή διαταραχή επί του αδιατάραχτου συστήματος έχει σαν αποτέλεσμα τη διασταύρωση των πολλαπλοτήτων των υπερβολικών τροχιών (αντίστοιχες των υπερβολικών στάσιμων σημείων στην περίπτωση του αδιατάραχτου συστήματος) γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει στην εκδήλωση χαοτικής κίνησης.

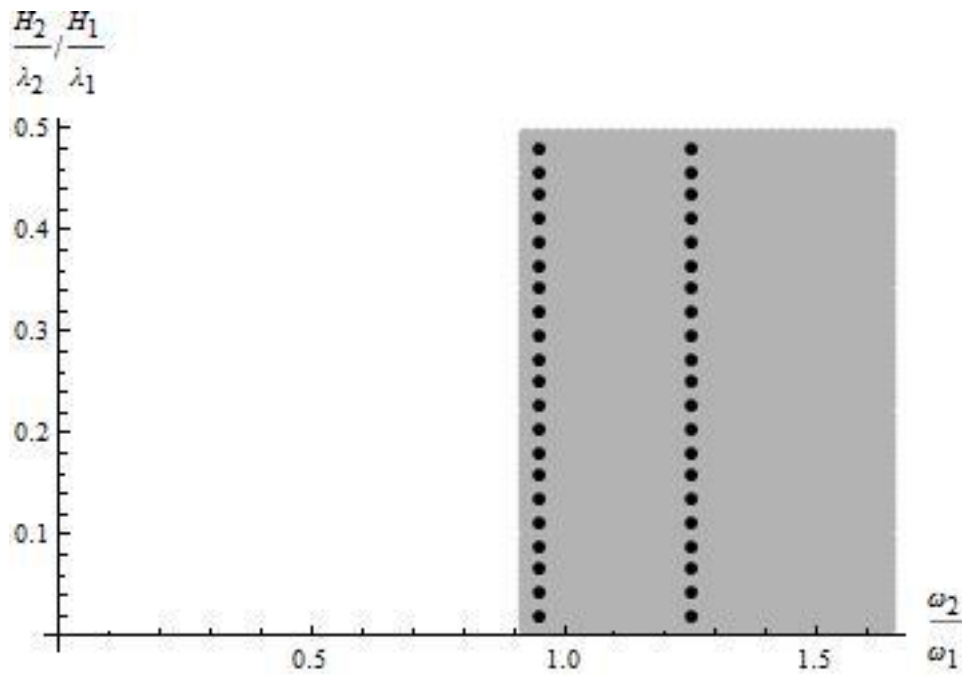
5.3.1 Εξέταση ως προς την ύπαρξη χαοτικών αποκρίσεων του υπό μελέτη πλοίου με τη μέθοδο των εκθετών Lyapunov

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε αν υπάρχουν χαοτικές αποκρίσεις του υπό μελέτη πλοίου με εφαρμογή της μεθόδου των εκθετών Lyapunov.

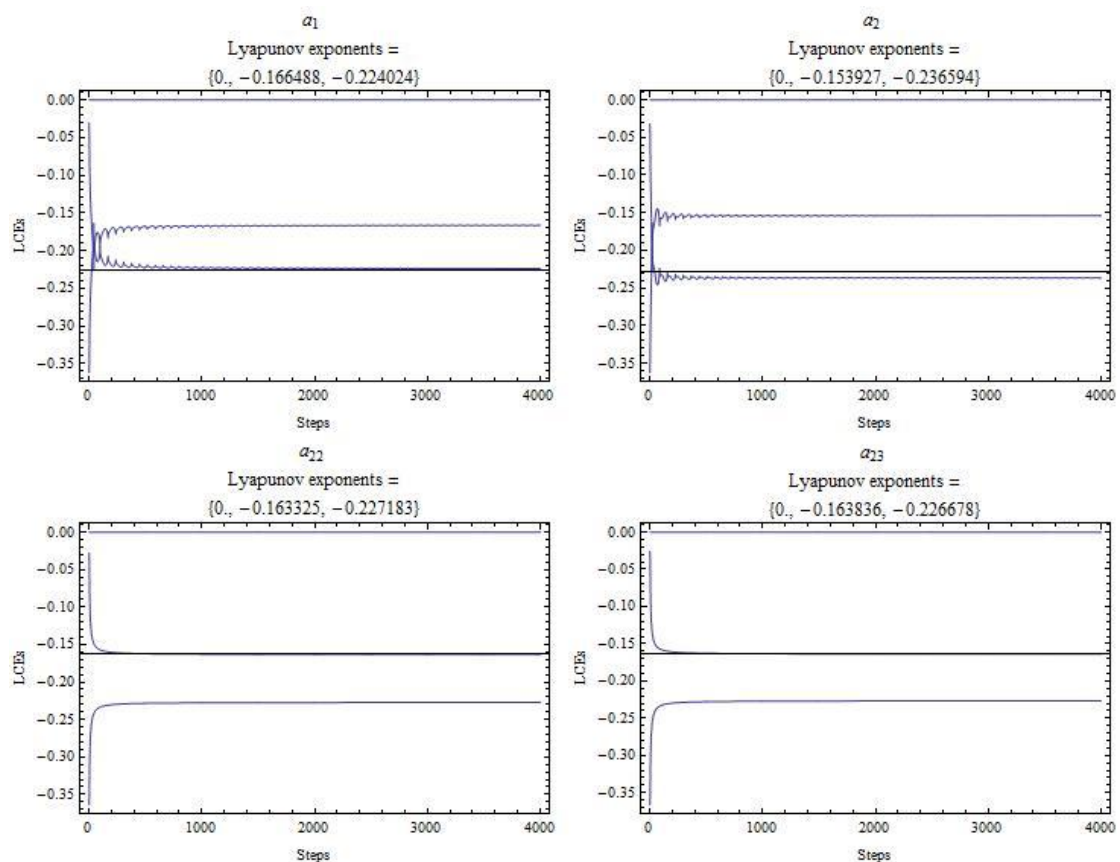
Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τα σημεία (μαύρες κουκκίδες) που φαίνονται στο σχήμα 43 τα οποία αριθμούμε από το 1 έως το 42 από κάτω προς τα πάνω, ξεκινώντας από την κατακόρυφη γραμμή που βρίσκεται στα αριστερά, για τα οποία θα υπολογίσουμε τους εκθέτες Lyapunov. Σε κάθε περίπτωση παίρνουμε τρεις εκθέτες Lyapunov εκ των οποίων ο ένας είναι πάντα 0. Ο τελευταίος αντιστοιχεί στην εξίσωση $\dot{t} = 1$. Για κάθε ένα από τα θεωρούμενα σημεία οι άλλοι δύο εκθέτες Lyapunov είναι αρνητικοί γεγονός που υποδεικνύει την απουσία χάους. Στο σχήμα 44 δείχνουμε τους εκθέτες Lyapunov και τα διαγράμματα σύγκλισης που αφορούν τα σημεία 1, 2, 22 και 23.

Το ανωτέρω αποτέλεσμα επιβεβαιώθηκε και μέσω προσομοιώσεων για διάφορες τιμές του διατεταγμένου ζεύγους $(\omega_2/\omega_1, \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1})$ και για διάφορες τιμές αρχικών συνθηκών (χρησιμοποιώντας και μη ρεαλιστικές τιμές ταχύτητας). Κατά τον πειραματισμό μας αυτό εντοπίσαμε τις περιπτώσεις των σχημάτων 45, 46, 47 και 48 που είναι θα λέγαμε αντιπροσωπευτικές των «ειδών κίνησης» που «κρύβονται» εντός του παραμετρικού χώρου $\omega_2/\omega_1 - \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1}$.

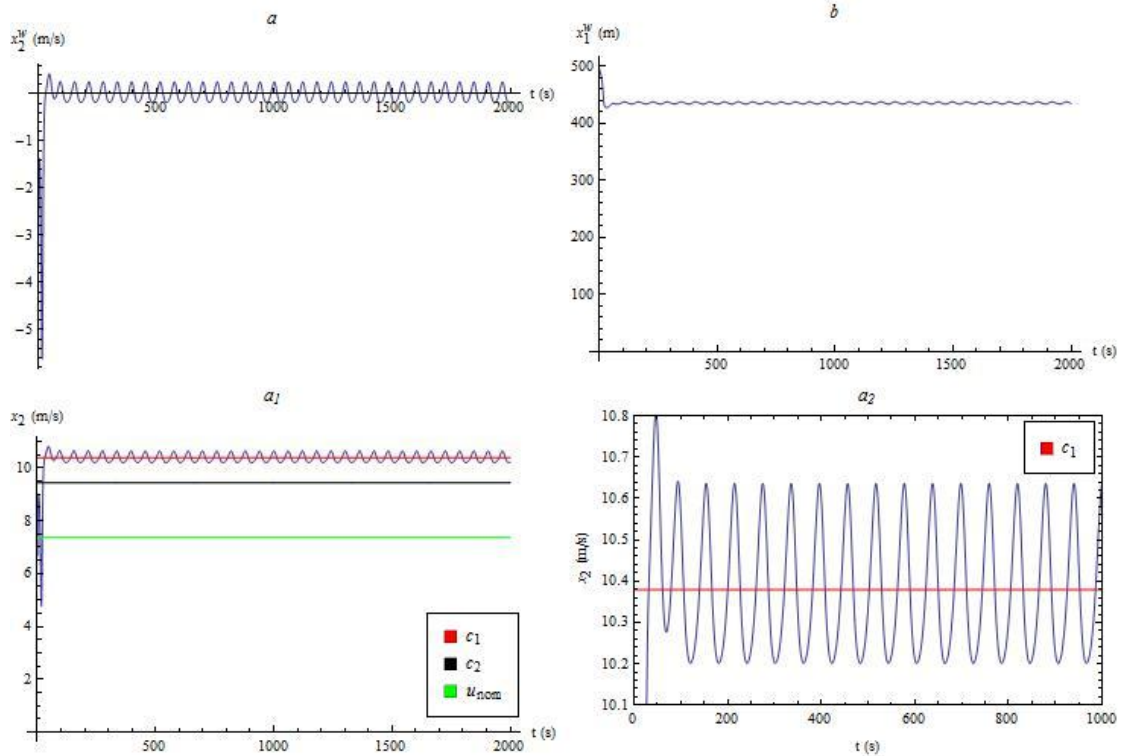
Στα σχήματα 45 και 48 παρατηρούμε περιπτώσεις ταλαντωτικού surf-riding. Στο σχήμα 47 παρατηρούμε ότι το πλοίο μεταπηδά διαδοχικά από το surging στο surf-riding. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά και στο b του σχήματος 47 όπου η καμπύλη της εξέλιξης του x_1^w σε σχέση με το χρόνο έχει τη μορφή μιας σκάλας, με τα οριζόντια τμήματα να αντιστοιχούν σε παγίδευση του πλοίου από το εκάστοτε κύμα (surf-riding) και τα επικλινή τμήματα να αντιστοιχούν στο surging. Παρόμοια φαίνεται να είναι και η περίπτωση του σχήματος 46.



Σχήμα 43 Διατεταγμένα ζεύγη $(\omega_2/\omega_1, \frac{H_2/\lambda_2}{H_1/\lambda_1})$ (μαύρες κουκκίδες) επί του παραμετρικού χώρου $\omega_2/\omega_1 - \frac{H_2/\lambda_2}{H_1/\lambda_1}$ για τα οποία υπολογίζονται οι εκθέτες Lyapunov.

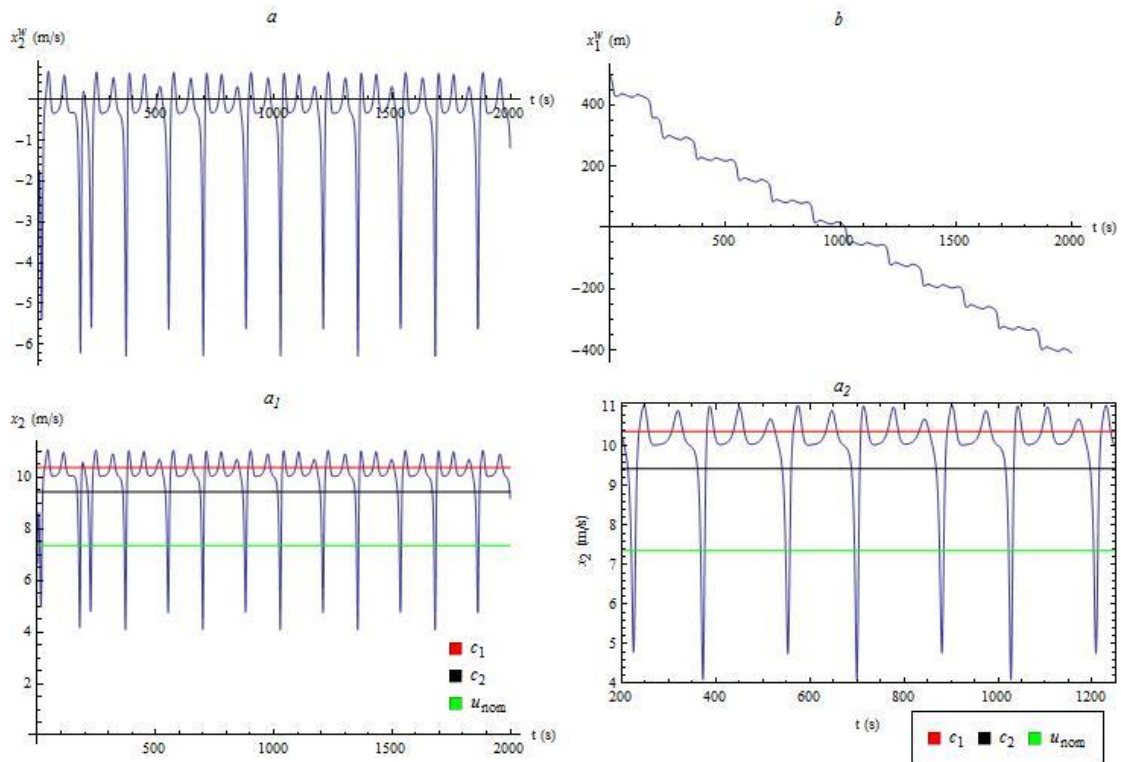


Σχήμα 44 Εκθέτες Lyapunov για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 6.67 \text{ m/s})$, $T = 2 \text{ s}$, βήματα = 4000, $TR = 600$ βήματα, βήμα Runge-Kutta = 0.02 s

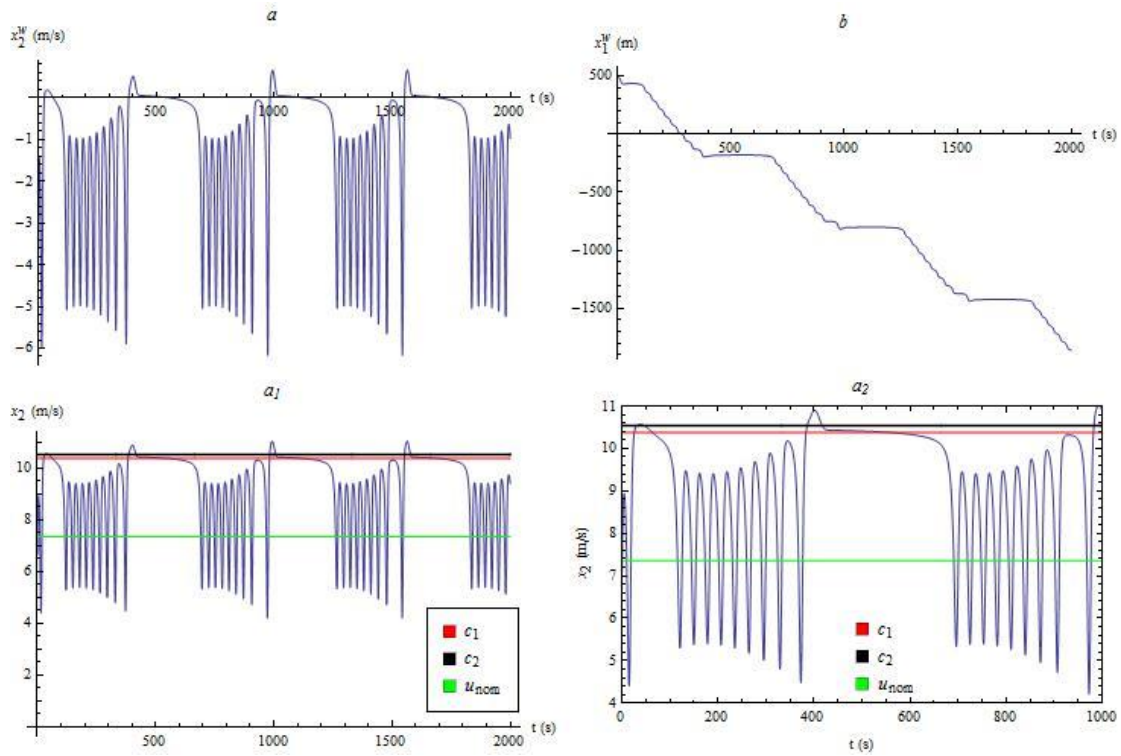


Σχήμα 45 α) x_2^w έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του α₁ και β) x_1^w έναντι του χρόνου t για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (1.1, 0.12)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 6.67 \text{ m/s})^6$

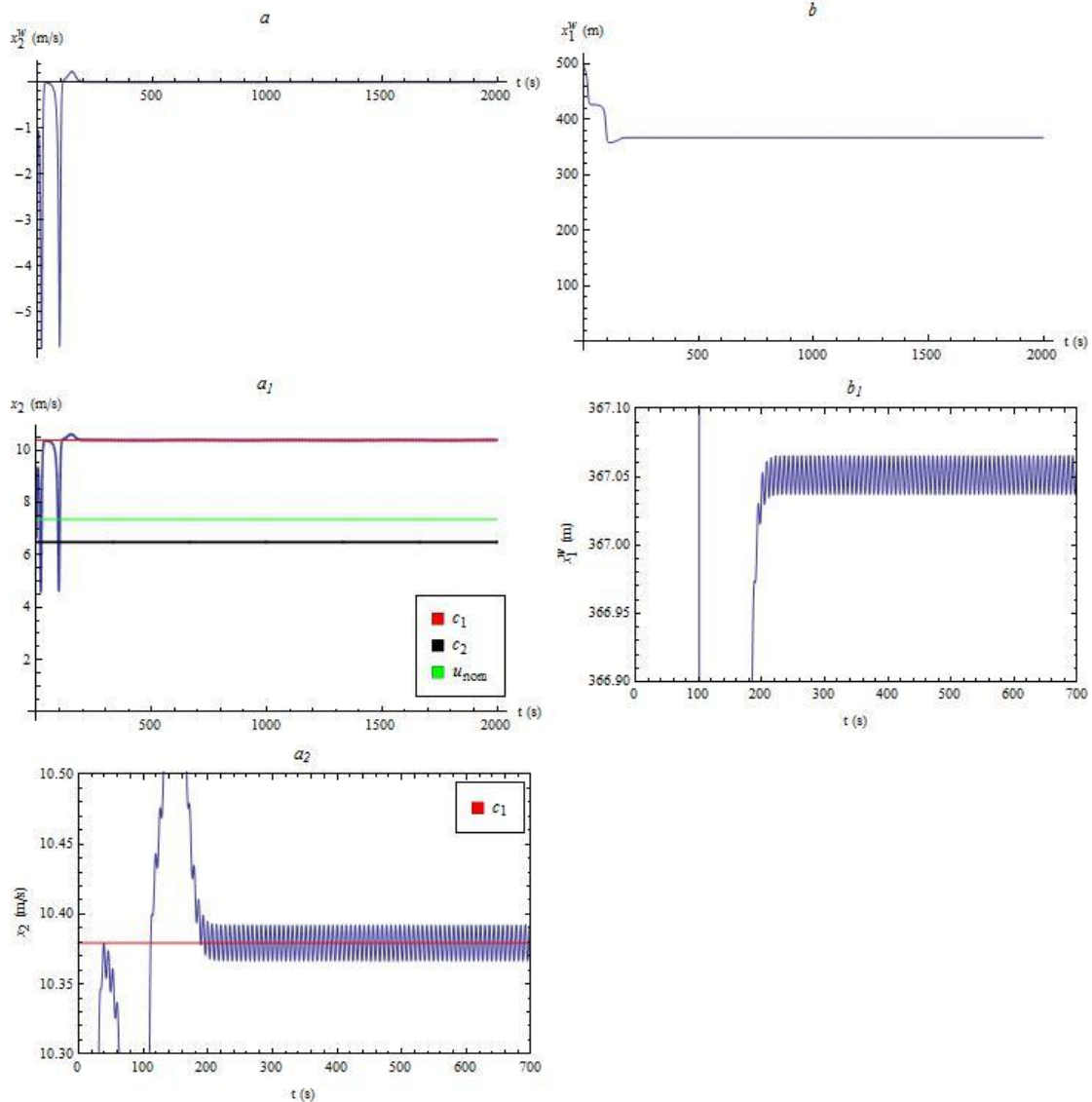
⁶ Το σύμβολο u_{nom} υποδηλώνει την ονομαστική ταχύτητα του πλοίου.



Σχήμα 46 α) x_2^w έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του α₁ και β) x_1^w έναντι του χρόνου t για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (1.1, 0.263)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 6.67 \text{ m/s})$



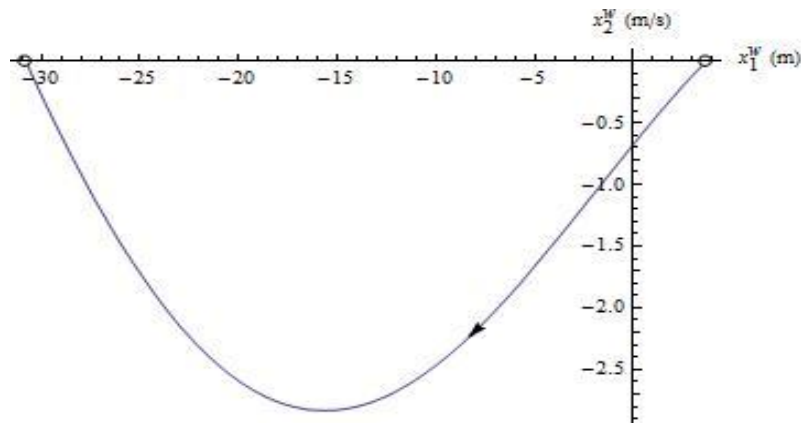
Σχήμα 47 α) x_2^w έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του α₁ και β) x_1^w έναντι του χρόνου t για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (0.985, 0.29)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 6.67 \text{ m/s})$



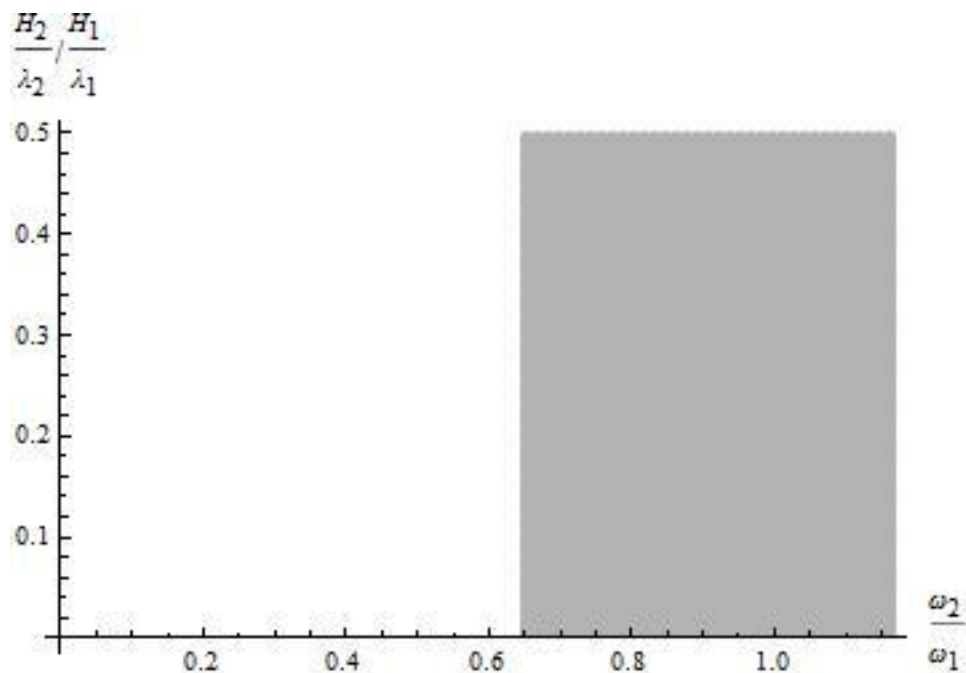
Σχήμα 48 α) x_2^w έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του a_1 , β) x_1^w έναντι του χρόνου t και β₁) μεγέθυνση του b για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (1.6, 0.12)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 6.67 \text{ m/s})$

5.3.2 Εφαρμογή της μεθόδου Μελνικον στην περίπτωση που το μήκος του ενός κύματος είναι ίσο με το μήκος του υπό μελέτη πλοίου

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $Fr = 0.31$, $\lambda_1 = 34.5 \text{ m}$ (μήκος του πλοίου) και εφαρμόσουμε τα προηγούμενα, τότε $A_1 = 1.142463 \text{ m}$ (τιμή για την οποία το (5) έχει ετεροκλινική τροχιά, όπως βρήκαμε μέσω προσομοιώσεων) και παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:



Σχήμα 49 Ετεροκλινική τροχιά



Σχήμα 50 Διατεταγμένα ζεύγη $(\omega_2/\omega_1, \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1})$ (γκρι) τα οποία ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη για την εκδήλωση χαοτικής κίνησης.

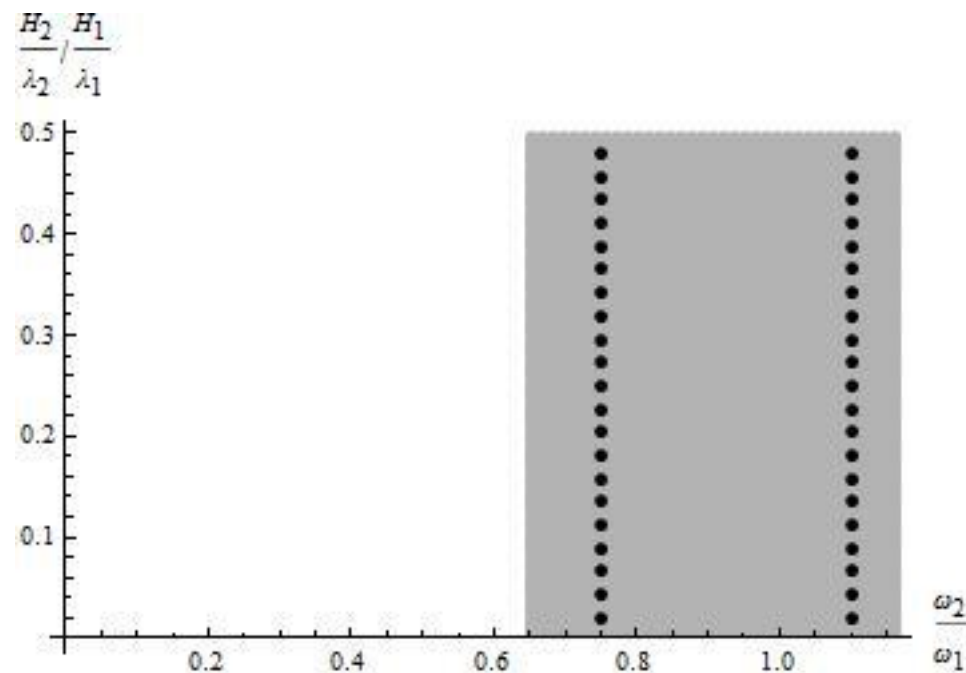
Παρατηρούμε κι εδώ πως η παραμικρή διαταραχή επί του αδιατάραχτου συστήματος έχει σαν αποτέλεσμα τη διασταύρωση των πολλαπλοτήτων των υπερβολικών τροχιών (αντίστοιχες των υπερβολικών στάσιμων σημείων στην περίπτωση του αδιατάραχτου συστήματος) γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει στην εκδήλωση χαοτικής κίνησης. Ωστόσο, ούτε εδώ εντοπίσαμε χαοτικές αποκρίσεις του υπό μελέτη πλοίου, όπως δείχνουμε στην επόμενη παράγραφο.

5.3.2.1 Εξέταση ως προς την ύπαρξη χαοτικών αποκρίσεων του υπό μελέτη πλοίου με τη μέθοδο των εκθετών Lyapunov

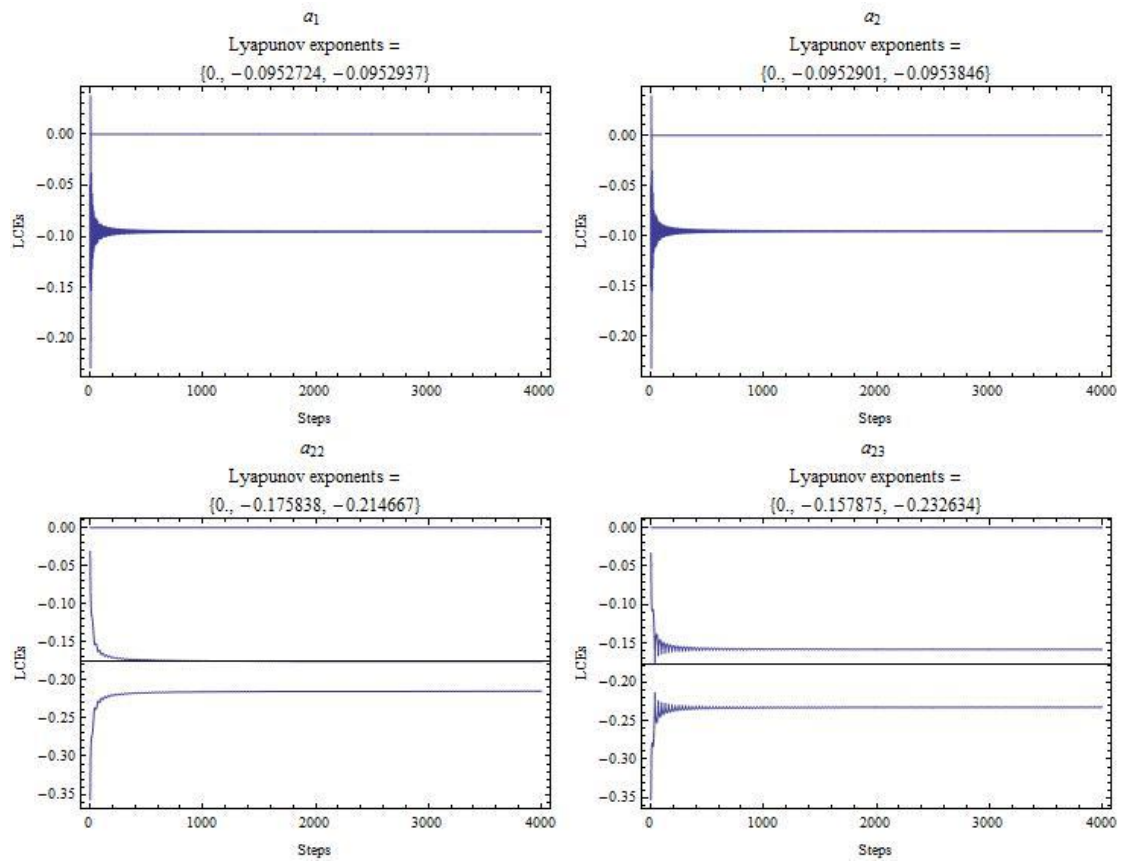
Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε αν υπάρχουν χαοτικές αποκρίσεις του υπό μελέτη πλοίου στην περίπτωση που το μήκος του ενός κύματος είναι ίσο με το μήκος αυτού, με εφαρμογή της μεθόδου των εκθετών Lyapunov.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τα σημεία (μαύρες κουκκίδες) που φαίνονται στο σχήμα 51 τα οποία αριθμούμε από το 1 έως το 42 από κάτω προς τα πάνω, ξεκινώντας από την κατακόρυφη γραμμή που βρίσκεται στα αριστερά, για τα οποία θα υπολογίσουμε τους εκθέτες Lyapunov. Σε κάθε περίπτωση παίρνουμε τρεις εκθέτες Lyapunov εκ των οποίων ο ένας είναι πάντα 0. Ο τελευταίος αντιστοιχεί στην εξίσωση $\dot{t} = 1$. Για κάθε ένα από τα θεωρούμενα σημεία οι άλλοι δύο εκθέτες Lyapunov είναι αρνητικοί γεγονός που υποδεικνύει την απουσία χάους. Στο σχήμα 52 δείχνουμε τους εκθέτες Lyapunov και τα διαγράμματα σύγκλισης που αφορούν τα σημεία 1, 2, 22 και 23.

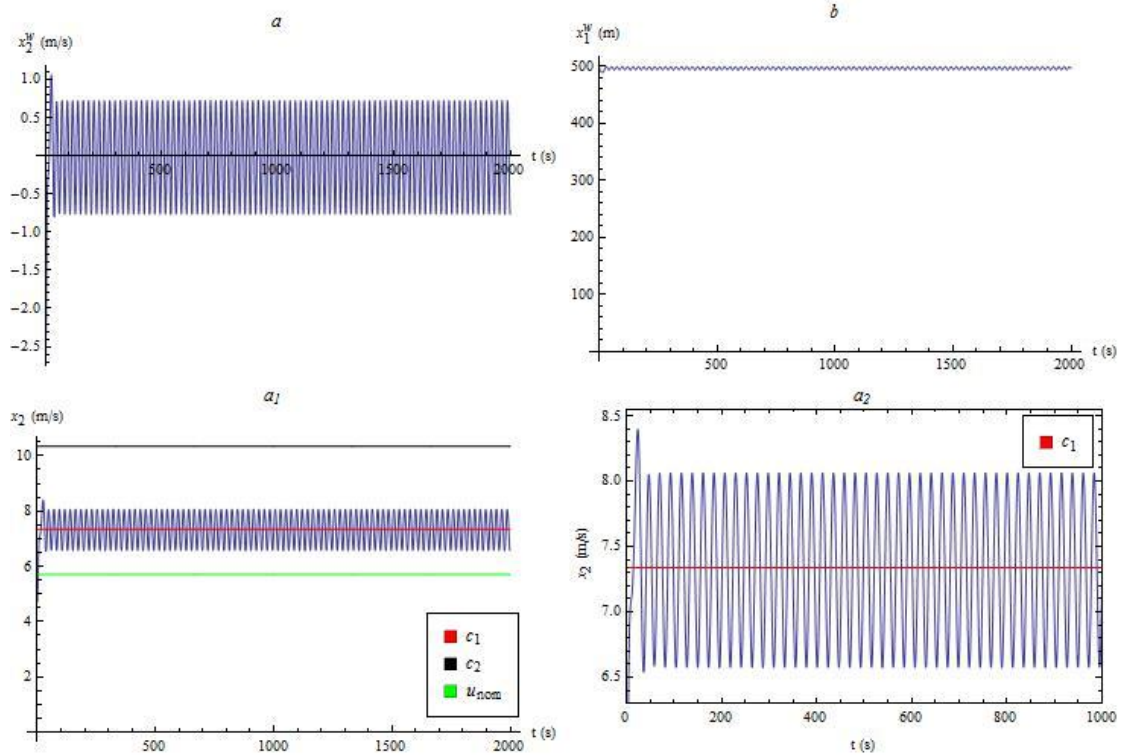
Το ανωτέρω αποτέλεσμα επιβεβαιώθηκε και μέσω προσομοιώσεων για διάφορες τιμές του διατεταγμένου ζεύγους $(\omega_2/\omega_1, \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1})$ και για διάφορες τιμές αρχικών συνθηκών (χρησιμοποιώντας και μη ρεαλιστικές τιμές ταχύτητας). Κατά τον πειραματισμό μας αυτό εντοπίσαμε τις περιπτώσεις των σχημάτων 53, 54, 55 και 56 που είναι θα λέγαμε αντιπροσωπευτικές των «ειδών κίνησης» που «κρύβονται» εντός του παραμετρικού χώρου $\omega_2/\omega_1 - \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1}$. Σε κάθε περίπτωση, συνεκτιμώντας την εξέλιξη των x_2 και x_1^W σε σχέση με το χρόνο, πρόκειται περί ταλαντωτικού surf-riding.



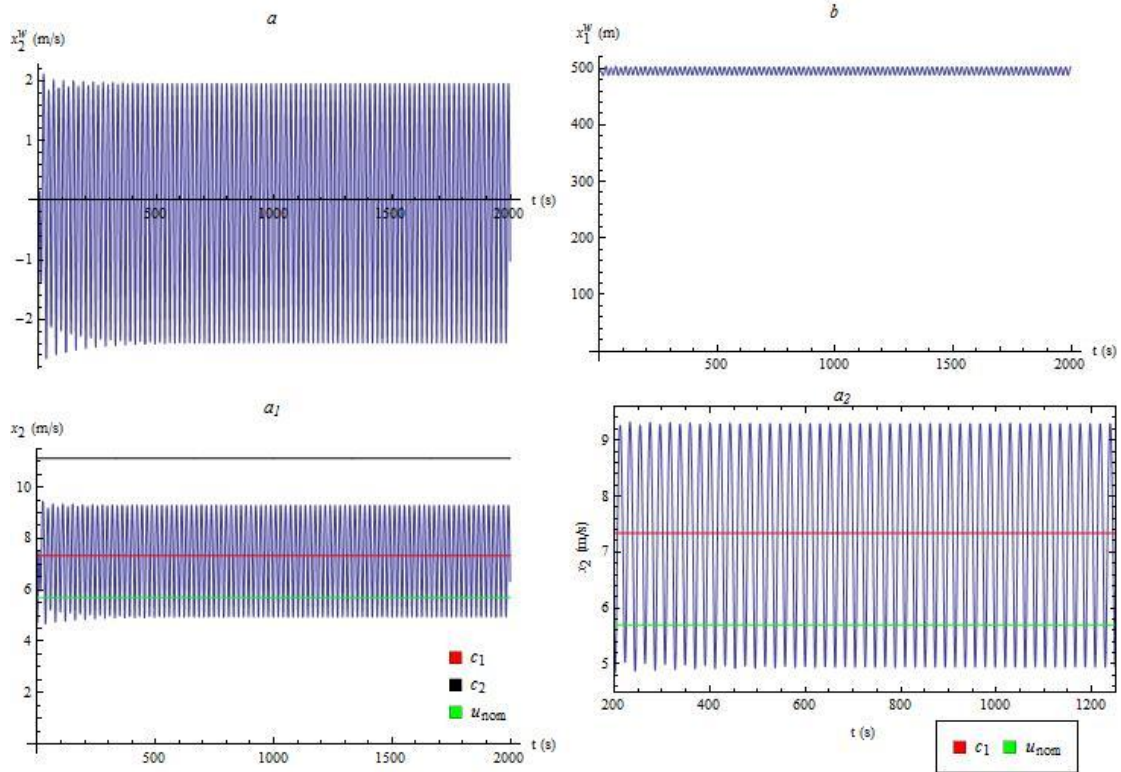
Σχήμα 51 Διατεταγμένα ζεύγη $(\omega_2/\omega_1, \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1})$ (μαύρες κουκκίδες) επί του παραμετρικού χώρου $\omega_2/\omega_1 - \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1}$ για τα οποία υπολογίζονται οι εκθέτες Lyapunov.



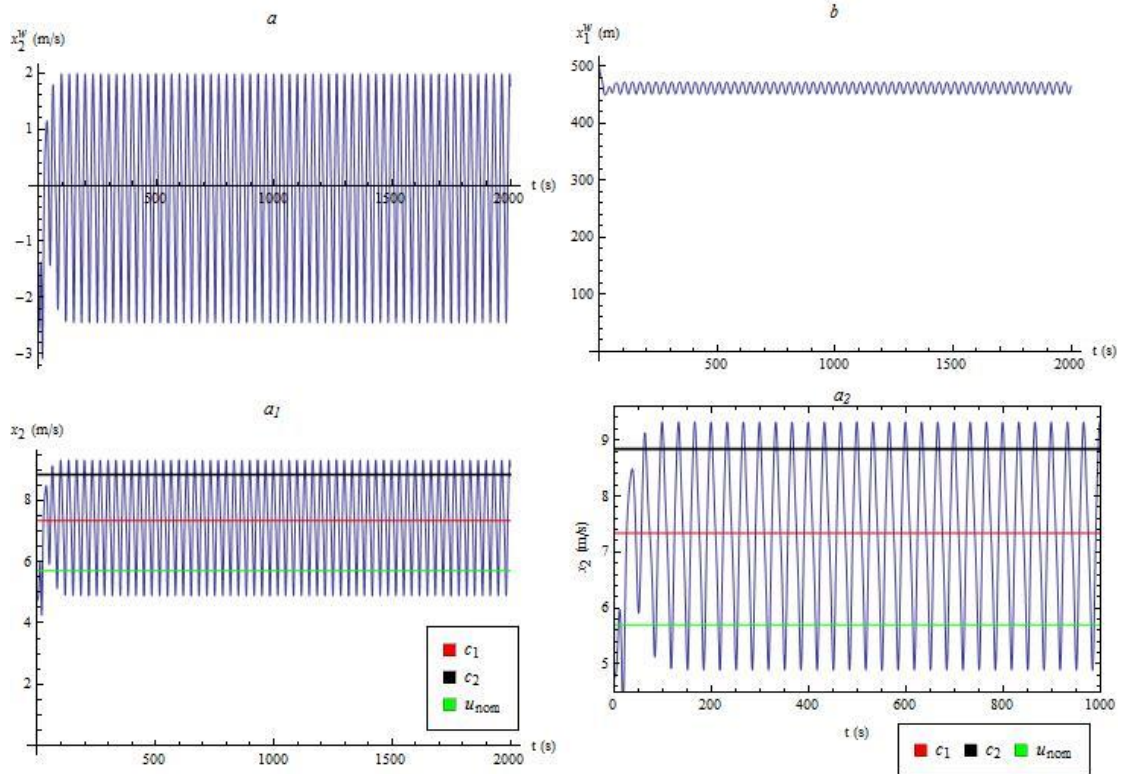
Σχήμα 52 Εκθέτες Lyapunov για αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 4.72 \text{ m/s})$, $T = 2 \text{ s}$, βήματα = 4000, $TR = 600$ βήματα, βήμα Runge-Kutta = 0.02 s



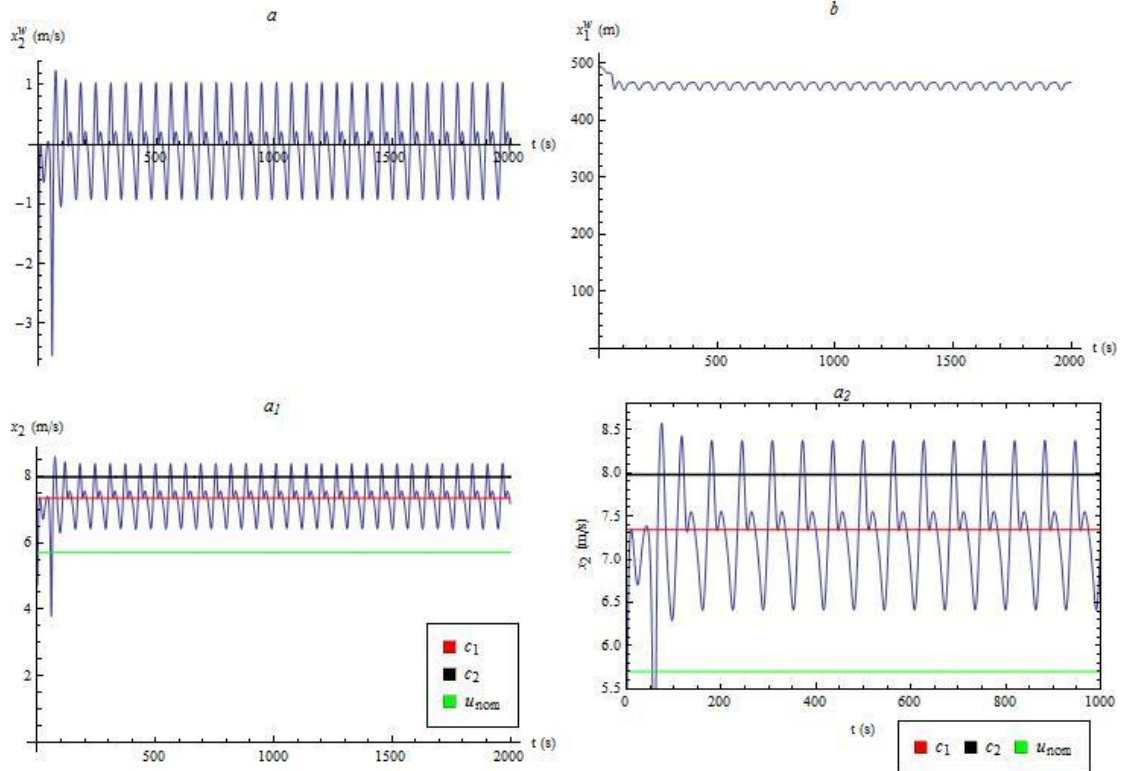
Σχήμα 53 α) x_2^W έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του α₁ και β) x_1^W έναντι του χρόνου t για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (0.71, 0.12)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 4.72 \text{ m/s})$



Σχήμα 54 α) x_2^w έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του α₁ και β) x_1^w έναντι του χρόνου t για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (0.66, 0.42)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 4.72 \text{ m/s})$



Σχήμα 55 α) x_2^w έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του α₁ και β) x_1^w έναντι του χρόνου t για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (0.83, 0.49)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 4.72 \text{ m/s})$



Σχήμα 56 α) x_2^w έναντι του χρόνου t , α₁) x_2 έναντι του χρόνου t , α₂) μεγέθυνση του α₁ και β) x_1^w έναντι του χρόνου t για $(\omega_2/\omega_1, H_2/H_1) = (0.92, 0.45)$ και αρχική συνθήκη $(x_1(0), x_2(0)) = (500 \text{ m}, 4.72 \text{ m/s})$

6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Κύριος στόχος της εργασίας αυτής ήταν ο προσδιορισμός του κατωφλιού πάνω από το οποίο η έλξη προς το surf-riding είναι καθολική δηλαδή, από κάθε αρχική συνθήκη, για ένα ιαπωνικό αλιευτικό (Purse Seiner) που λειτουργεί σε διχρωματικό περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Το συγκεκριμένο πλοίο επιλέχθηκε γιατί το μήκος του και οι συνθήκες λειτουργίας του ευνοούν την εκδήλωση του φαινομένου surf-riding [3]. Για την εύρεση του παραπάνω ορίου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Melnikov γιατί το καθολικό surf-riding αντιστοιχεί σε ένα φαινόμενο ομοκλινικής διακλάδωσης και αυτή χρησιμοποιείται ως ένα εργαλείο για τον εντοπισμό τέτοιων φαινομένων. Για την περιγραφή της κίνησης του πλοίου κατά το διάμηκες χρησιμοποιήθηκε ένα μαθηματικό μοντέλο ικανό να αναπαράγει το φαινόμενο surf-riding σε ακολουθούντες κυματισμούς. Επίσης, έγινε εξέταση ως προς την ύπαρξη χαοτικών αποκρίσεων του υπό μελέτη πλοίου με τη μέθοδο των εκθετών Lyapunov. Ακόμη, για λόγους εξοικείωσης με τη μέθοδο Melnikov προηγήθηκε η εφαρμογή της σε δύο περιπτώσεις: (1) την περίπτωση του απλού εκκρεμούς υποθέτοντας περιοδική διέγερση και (2) την περίπτωση του ταλαντωτή Duffing-Holmes υποθέτοντας οιονεί περιοδική διέγερση (δύο αρμονικοί όροι).

Όσον αφορά την περίπτωση του αλιευτικού η μέθοδος Melnikov εφαρμόστηκε σε δύο περιπτώσεις: (1) την περίπτωση που το μήκος του ενός από τα δύο θεωρούμενα κύματα ήταν ίσο με το διπλάσιο του μήκους του πλοίου και ο αριθμός Froude ήταν $Fr = 0.4$ και (2) την περίπτωση που το μήκος του ενός από τα δύο θεωρούμενα κύματα ήταν ίσο με το μήκος του πλοίου και ο αριθμός Froude ήταν $Fr = 0.31$. Αυτό που θέλαμε να πετύχουμε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις ήταν να διαχωρίσουμε τον παραμετρικό χώρο $\omega_2/\omega_1 - \frac{H_2/H_1}{\lambda_2/\lambda_1}$ σε δύο περιοχές επί των οποίων στη μεν πρώτη να αποκλείεται η πιθανότητα χαοτικής κίνησης στη δε δεύτερη αυτή να αποτελεί πιθανό ενδεχόμενο. Το προσδιορισθέν όριο μεταξύ των δύο περιοχών συνιστά και το κατώφλι του καθολικού surf-riding. Το αποτέλεσμα που προέκυψε και στις δύο περιπτώσεις ήταν πως και η παραμικρή διαταραχή (ως διαταραχή θεωρήθηκε η κυματική δύναμη που οφείλεται στο δεύτερο κύμα) επί του αδιατάραχτου συστήματος (όλοι οι υπόλοιποι όροι της εξίσωσης κίνησης κατά το διάμηκες) έχει σαν αποτέλεσμα τη διασταύρωση των πολλαπλοτήτων των υπερβολικών τροχιών (αντίστοιχες των υπερβολικών στάσιμων σημείων στην περίπτωση του αδιατάραχτου συστήματος) γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει στην εκδήλωση χαοτικής κίνησης. Ωστόσο, με τη βοήθεια των εκθετών Lyapunov, αλλά και μέσω προσομοιώσεων για διάφορες αρχικές συνθήκες (χρησιμοποιώντας και μη ρεαλιστικές τιμές για την ταχύτητα) προέκυψε πως το σύστημα δεν εμφανίζει χαοτική απόκριση σε καμία εκ των δύο περιπτώσεων.

Όσον αφορά την περίπτωση του απλού εκκρεμούς το αποτέλεσμα εφαρμογής της μεθόδου Melnikov ήταν να προσδιοριστεί ένα όριο μεταξύ δύο περιοχών επί των οποίων στη μεν πρώτη να αποκλείεται η πιθανότητα χαοτικής κίνησης στη δε δεύτερη αυτή να είναι πιθανό ενδεχόμενο, στον αντίστοιχο παραμετρικό χώρο $\alpha - \Omega$ (πλάτος - συχνότητα του αρμονικού όρου που θεωρείται ως διέγερση). Το ανωτέρω

αποτέλεσμα επιβεβαιώθηκε ως ένα βαθμό μέσω προσομοιώσεων και προσδιορισμό των τομών Poincare για διάφορα σημεία εντός των δύο περιοχών.

Όσον αφορά την περίπτωση του ταλαντωτή Duffing-Holmes η μέθοδος Melnikov είχε κι εδώ σαν αποτέλεσμα τον προσδιορισμό ενός ορίου μεταξύ δύο περιοχών επί των οποίων στη μεν πρώτη να αποκλείεται η πιθανότητα χαοτικής κίνησης στη δε δεύτερη αυτή να είναι πιθανό ενδεχόμενο, στον αντίστοιχο παραμετρικό χώρο $\lambda - \omega$ (κοινό πλάτος των δύο αρμονικών όρων - συχνότητα ενός (του δεύτερου) αρμονικού όρου). Στην περίπτωση αυτή κάναμε έναν έλεγχο κατά πόσο το ανωτέρω προσδιορισθέν όριο υποστηρίζεται και από την εφαρμογή των μεθόδων των εκθέτων Lyapunov, FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM. Για το σκοπό αυτό διαλέξαμε δύο σειρές σημείων πολύ κοντά στο ανωτέρω όριο. Για την πρώτη σειρά προσδιορίσαμε τους εκθέτες Lyapunov, ενώ για τη δεύτερη εφαρμόσαμε τις άλλες τρεις μεθόδους. Σε κάθε περίπτωση οι ανωτέρω μέθοδοι φαίνεται πως συμφωνούν εκτός από ένα σημείο. Πιο συγκεκριμένα, για ένα σημείο διαπιστώθηκε ασυμφωνία μεταξύ της μεθόδου Melnikov και των μεθόδων FTLE, FSLE και του αλγορίθμου FCM. Για το λόγο αυτό γι' αυτό το σημείο προσδιορίσαμε και τους εκθέτες Lyapunov. Το αποτέλεσμα βρέθηκε να συμφωνεί με τη μέθοδο Melnikov. Τέλος, αναφέρουμε πως το αποτέλεσμα της μεθόδου Melnikov επιβεβαιώθηκε και μέσω προσομοιώσεων και προσδιορισμό των τομών Poincare για διάφορα σημεία εντός των δύο περιοχών.

Ως πρόταση για μελλοντική έρευνα στην περίπτωση του αλιευτικού προτείνεται ένας διαφορετικός χειρισμός του συστήματος με την ελπίδα ο θεωρούμενος παραμετρικός χώρος να χωριστεί σε δύο περιοχές, όπως στην περίπτωση του εκκρεμούς και του ταλαντωτή Duffing-Holmes. Όπως έχουμε προαναφέρει για να είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου Melnikov πρέπει, μεταξύ άλλων, το αδιατάραχτο σύστημα να κατέχει μία ομοκλινική ή ετεροκλινική τροχιά στο χώρο φάσεων. Εν προκειμένω, ως διαταραχή θεωρήθηκε η κυματική δύναμη που οφείλεται στο δεύτερο κύμα, ενώ όλοι οι υπόλοιποι όροι της εξίσωσης κίνησης κατά το διάμηκες θεωρήθηκαν μέρος του αδιατάραχτου συστήματος το οποίο κατείχε μία ετεροκλινική τροχιά. Τώρα προτείνουμε να θεωρηθεί ως διαταραχή το άθροισμα των κυματικών δυνάμεων που οφείλεται στα δύο κύματα και οι υπόλοιποι όροι να θεωρηθούν μέρος του αδιατάραχτου συστήματος. Σε περίπτωση που το αδιατάραχτο σύστημα δεν κατέχει κάποια ομοκλινική ή ετεροκλινική τροχιά αυτή μπορεί να κατασκευαστεί προσθέτοντας μία σταθερά στο αδιατάραχτο σύστημα ή οποία θα αφαιρεθεί όταν ληφθεί υπόψη και η διαταραχή προκειμένου να μην έχουμε αλλοίωση του υπό μελέτη συστήματος (βλ. 28).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Spyrou, K.J., 1996. Dynamic Instability in Quartering Seas: The Behavior of a Ship During Broaching, *Journal of Ship Research*, Vol. 40, No. 1, pp. 46-59
2. Belenky, V., Spyrou, K.J., Weems, K.M., 2012. Evaluation of the Probability of Surf-Riding in Irregular Waves with the Time-Split Method, *Proceedings of the 11th International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles*, pp. 29-37, Athens, Greece
3. Peters, W., Belenky, V., Bassler, C., Spyrou, K., Umeda, N., Bulian, G., Altmayer, B., 2011. The Second Generation of Intact Stability Criteria: An Overview of Development, *SNAME Transactions*
4. Spyrou, K.J., 2001. The Nonlinear Dynamics of Ships in Broaching, *MCFA*, Vol. 1, 7 pp.
5. Umeda, N., 2013. Current Status of Second Generation Intact Stability Criteria Development and Some Recent Efforts, *Proceedings of the 13th International Ship Stability Workshop*, 20 pp., Brest
6. Couillet, P., Elphick, C., 1987. Topological Defects Dynamics and Melnikov's theory, *Physics Letters A*, Vol 121, No. 5, pp. 233-236
7. Simiu, E., *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems*, Princeton University Press, New Jersey, 2002
8. Kan, M., 1990. Surging of Large Amplitude and Surf-riding of Ships in Following Seas, *Naval Architecture and Ocean Engineering*, The Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers, Vol. 28, pp. 49-62
9. Neves, M.A.S., 2016. Dynamic stability of ships in regular and irregular seas – An Overview, *Ocean Engineering*, Vol. 120, pp. 362 – 370
10. Grim, O., 1963. Surging Motion and Broaching Tendencies in a Severe Irregular Sea, *Deutsche Hydrografische Zeitschrift*, Vol. 16, Issue 5, pp. 201-231
11. Spyrou, K.J., Belenky, V., Themelis, N., Weems, K., 2012. Conditions for Surf-riding in an Irregular Seaway, *Proceedings of the 11th International Conference on the Stability of Ships and Ocean Vehicles*, pp. 323-336, Athens, Greece
12. Spyrou, K.J., Belenky, V., Themelis, N., Weems, K., 2014a. Detection of surf-riding behavior of ships in irregular seas, *Nonlinear Dynamics*, 19 pp.
13. Spyrou, K.J., Themelis, N., 2013. Wave celerity in a multi-chromatic sea: a comparative study, *Proceedings of the 13th International Ship Stability Workshop*, 7 pp., Brest
14. Spyrou, K.J., Belenky, V., Reed, A.M., Weems, K., Themelis, N., Kontolefas, I., 2014b. Split-Time Method for Pure Loss of Stability and Broaching-To, *30th Symposium on Naval Hydrodynamics*, 11 pp., Hobart, Tasmania, Australia
15. Kontolefas, I., Spyrou, K.J., 2016. Coherent structures in phase space, governing the nonlinear surge motions of ships in steep waves, *Ocean Engineering*, Vol. 120, pp. 339-345

16. Shadden, S.C., 2011. Lagrangian Coherent Structures, Mechanical and Aerospace Engineering, Illinois Institute of Technology, 29 pp., Chicago, USA
17. Gould, S.H., 1964. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Soviet. Math. Dokl., Vol. 5, pp. 5 (Translation into English of “Arnold, V.I., 1964. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, Dokl. Akad. Nauk SSSR 156:1, pp. 9-12”)
18. Guckenheimer J., Holmes, P.J., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, 1983
19. Holmes, P.J., Marsden, J.E., 1982. Melnikov’s method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems, J. Math. Phys., Vol. 23, No. 4, pp. 669-675
20. Ling, F.H., Bao, G.W., 1987. A numerical implementation of Melnikov’s method, Physics Letters A, Vol. 122, No. 8, pp. 413-417
21. Liu, Z., Gu, G., 1990. Second order Melnikov function and its application, Physics Letters A, Vol. 143, No. 4,5, pp. 213-216
22. Marsden, J.E., 1983. Chaotic orbits by Melnikov’s method: A survey of applications, Proceedings of the 2nd IEEE Conference on Decision and Control, pp. 356-359
23. Marsden, J.E., 1984. Chaos in Dynamical Systems by the Poincare-Melnikov-Arnold Method, Chaos in Nonlinear Dynamical Systems, SIAM, Philadelphia, pp. 19-31
24. Nayfeh, A.H., Balachandran B., Applied Nonlinear Dynamics, Analytical, Computational and Experimental Methods, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004
25. Wiggins, S., 1987. Chaos in the quasiperiodically forced Duffing oscillator, Physics Letters A, Vol. 124, No. 3, pp. 138-142
26. Wiggins, S., 1988. Adiabatic Chaos, Physics Letters A, Vol. 128, No. 6,7, pp. 339-342
27. Wiggins, S., Global bifurcations and chaos: Analytical Methods, Springer-Verlag, New York, 1988
28. Wu, W., Spyrou, K.J., McCue, L.S., 2010. Improved prediction of the threshold of surf-riding of a ship in steep following seas, Ocean Engineering, Vol. 37, pp. 1103-1110
29. Strogatz, S.H., Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering, Perseus Books, USA, 1994
30. Σταυρακάκης, Ν.Μ., Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, Γραμμική και μη Γραμμική Θεωρία με εφαρμογές από τη φύση και τη ζωή, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2011
31. Sandri, M., 1996. Numerical Calculation of Lyapunov Exponents, The Mathematica Journal, pp. 78-84
32. Φελλούρης, Α.Γ., Γραμμική άλγεβρα και αναλυτική γεωμετρία, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, 1^η έκδοση, Αθήνα 2006

33. Artale, V., Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., Vulpiani, A., 1997. Dispersion of passive tracers in closed basins: Beyond the diffusion coefficient, *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 11, pp. 3162-3171
34. Froyland, G., Padberg-Gehle, K., 2015. A rough-and-ready cluster-based approach for extracting finite-time coherent sets from sparse and incomplete trajectory data, *Chaos*, Vol. 25, No. 087406, 15 pp.
35. Spyrou, K.J., 2006. Asymmetric Surging of Ships in Following Seas and its Repercussions for Safety, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 43, pp. 149-172