math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

CS-dekompozicija J-ortogonalnih matrica malog reda

CS-dekompozicija dekompozicija vlastitih vrijednosti indefinitna metrika J-simetrični Jacobijev algoritam

Vjeran Hari i Vida Zadelj-Martić
Matematički odsjek PMFa Sveučilišta u Zagrebu, Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb, Hrvatska
Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Hrvatska

Sažetak

U radu se izvodi CS dekompozicija $J-$ortogonalnih matrica reda 2, 3 i 4. U izvodu se koriste samo osnovni pojmovi iz teorije matrica, te singularna dekompozicija matrica reda 2 i 3. Pokazuje se da se J-ortogonalna matrica reda 4 (3) može faktorizirati u produkt od 4 (2) "trigonometrijske" ravninske rotacije i 2 (1) "hiperbolne" ravninske rotacije. To otvara zanimljiv i važan problem: kako odrediti sve te ravninske rotacije, direktno iz simetrične matrice A reda 4 (3), koje kroz transformacije kongruencije dijagonaliziraju A. Rješenje tog problema ima direktnu primjenu u ubrzanju blok J-Jacobijeve metode za računanje vlastitih vrijednosti i vektora indefinitne simetrične matrice reda n.

1 Uvod u CSD J-ortogonalne matrice

Ovaj rad nastavak je istraživanja o CS dekompoziciji ortogonalnih matrica malog reda [3]. Umjesto s ortogonalnim, radit ćemo sa J-ortogonalnim matricama. Matrice malog reda su jednostavnije za proučiti, pa je namjera ovog članka dokazati rezultate na novi i jednostavniji način. Stoga je rad napisan tako da zahtijeva minimalno znanje iz teorije matrica. Ipak, zaključak ovog istraživanja upućuje na otvoren, zanimljiv i netrivijalan matematički problem: kako dijagonalizirati indefinitnu simetričnu matricu reda 4 (3) koristeći tek nekoliko ravninskih (trigonometrijskih i hiperbolnih) rotacija. Rješenje tog problema povećalo bi efikasnost postojećih vrlo točnih algoritama [5, 2] za računanje vlastitih vrijednosti simetrične indefinitne matrice reda n.

Neka je J dijagonalna matrica predznaka reda n oblika

$$J = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_{n-l} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq l \leq n-1,$$

pri čemu su I_l i I_{n-l} jedinične matrice reda l i $n-l$, respektivno. Matrici J možemo pridružiti grupu J-ortogonalnih matrica reda n.

Definicija 1. *Matrica F naziva se $J-$ortogonalna matrica ako vrijedi*

$$F^\tau JF = J. \tag{1}$$

Iz definicije odmah slijedi da F mora biti kvadratna i nesingularna. Doista, jer je na desnoj strani jednakosti (1) kvadratna matrica J reda n, mora i lijeva strana dati kvadratnu matricu. Stoga F kao zadnja matrica u produktu mora imati n stupaca, a da bi produkt JF bio definiran mora F imati n redaka. Dakle sve su matrice na lijevoj strani kvadratne reda n. Njihov produkt je J koja je nesingularna, pa sve matrice na lijevoj strani moraju biti nesingularne. To se također vidi i ako primijenimo na lijevu i desnu stranu jednakosti (1) determinantu i iskoristimo Binet-Cauchyjev teorem.

Propozicija 2. *J-ortogonalne matrice reda n čine grupu s obzirom na operaciju matričnog množenja. Ona je podgrupa grupe nesingularnih matrica reda n i zatvorena je u odnosu na matrično transponiranje.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je produkt dviju J-ortogonalnih matrica također J-ortogonalna matrica. Neka su F i GJ-ortogonalne tako da vrijedi $F^\tau JF = J$ i $G^\tau JG = J$. Tada je

$$(FG)^\tau J(FG) = (G^\tau F^\tau)\ JFG = G^\tau(F^\tau JF)G = G^\tau JG = J,$$

što pokazuje da je i produkt FG jedna $J-$ ortogonalna matrica.

Ulogu jediničnog elementa igra jedinična matrica I_n koja zadovoljava relaciju (1). Grupna operacija je matrično množenje koje je asocijativno, pa preostaje pokazati da je inverz J-ortogonalne matrice također J-ortogonalna.

Neka je F J-ortogonalna. Tada je ona nesingularna, pa postoji inverzna matrica F^{-1}. Pokažimo da je F^{-1} J-ortogonalna. Ako pomnožimo lijevu i desnu stranu jednadžbe (1) prvo sa F^{-1} zdesna, a zatim s J slijeva, dobijemo ekvivalentu jednadžbu

$$F^{-1} = JF^{\tau}J. \tag{2}$$

Ako invertiramo lijevu i desnu stranu i iskoristimo činjenicu da operacije transponiranja i invertiranja komutiraju, dobijemo

$$[F^{-1}]^{-1} = J[F^{-1}]^{\tau}J.$$

To pokazuje da i F^{-1} zadovoljava uvjet (2), pa je J-ortogonalna matrica.

Preostaje još pokazati da J-ortogonalnost od F povlači J-ortogonalnost od F^T. Doista, ako transponiramo izraze na lijevoj i desnoj strani jednadžbe (2), dobijemo

$$[F^T]^{-1} = J[F^T]^TJ.$$

pa je propozicija dokazana. **Q.E.D.**
Koje uvjete zadovoljavaju elementi proizvoljne J-ortogonalne matrice F?

Napomena 3. Da bismo na to odgovorili, podijelimo matricu F u četiri bloka

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} l \\ n-l \end{array} \tag{3}$$

pri čemu su F_{11} i F_{22} kvadratni. Tada se jednadžba $J = F^T J F$ može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_{n-l} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11}^T & F_{21}^T \\ F_{12}^T & F_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{11}^T & -F_{21}^T \\ F_{12}^T & -F_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{11}^T F_{11} - F_{21}^T F_{21} & F_{11}^T F_{12} - F_{21}^T F_{22} \\ F_{12}^T F_{11} - F_{22}^T F_{21} & F_{12}^T F_{12} - F_{22}^T F_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Izjednačavajući blokove na lijevoj i desnoj strani, dobivamo

$$\begin{array}{ll} F_{11}^T F_{11} - F_{21}^T F_{21} = I_l & F_{12}^T F_{12} - F_{22}^T F_{22} = -I_{n-l} \\ F_{11}^T F_{12} - F_{21}^T F_{22} = 0 & F_{12}^T F_{11} - F_{22}^T F_{21} = 0. \end{array} \tag{5}$$

Ako pišemo $F = (f_{ij})$, i izračunamo elemente na diagonalnom mjestu (i,i) odnosno nedijagonalnom mjestu (i,j), na lijevoj i desnoj strani u relaciji (1), lako dobijemo

$$\sum_{k=1}^{l} f_{ki}^2 - \sum_{k=l+1}^{n} f_{ki}^2 = \begin{cases} 1, & 1 \le i \le l \\ -1, & l+1 \le i \le n \end{cases} \tag{6}$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{l} f_{ki} f_{kj} - \sum_{k=1+1}^{n} f_{ki} f_{kj} = 0; \quad i \ne j. \tag{7}$$

Jer je matrica FJ-ortogonalna, takva je i matrica F^T, pa relacije (6) i (7) vrijede ako na svim mjestima zamijenimo donje indekse ($f_{ki} \mapsto f_{ik}$, $f_{kj} \mapsto f_{jk}$). Tako dobijemo analogne relacije

$$\sum_{k=1}^{l} f_{ik}^2 - \sum_{k=l+1}^{n} f_{ik}^2 = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq l \\ -1, & l+1 \leq i \leq n \end{cases} \tag{8}$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{l} f_{ik} f_{jk} - \sum_{k=1+1}^{n} f_{ik} f_{jk} = 0; \quad i \neq j. \tag{9}$$

U našoj analizi trebat ćemo pojmove singularnih vrijednosti i vektora matrice. Sljedeći teorem dokazuje postojanje *singularne dekompozicije* matrice. Nama će trebati samo verzija za realne matrice.

Teorem 4. *[Singularna dekompozicija] Ako je $C m \times n$ realna matrica, tada postoje ortogonalne matrice U i V reda m i n, respektivno, takve da je*

$$U^T C V = \Sigma, \qquad \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}}), \tag{10}$$

pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{m,n\}} \geq 0$ Brojevi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}}$ su singularne vrijednosti matrice C. Stupci matrice U su lijevi, a stupci matrice V desni singularni vektori matrice C.

U slučaju kvadratne matrice reda n, $\sigma_{\min\{m,n\}} = \sigma_n$. Singularna dekompozicija se koristi u dokazu postojanja CS dekompozicije J-ortogonalne matrice, a mi ćemo ju koristiti samo za slučajeve $m = n = 2$ i $m = n = 3$ (vidjeti npr. [6, 3]).

Da bismo otkrili još neka zanimljiva svojstva J-ortogonalne matrice F, podijelimo ju na 4 bloka, prema matričnoj blok-particiji koju nosi J,

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} l \\ n-l \end{matrix}, \tag{11}$$

pri čemu su F_{11} i F_{22} kvadratni blokovi. Tada se jednadžba $J = F^T J F$ može nakon množenja na desnoj strani, zapisati u obliku

$$\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_{n-l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}^T & F_{21}^T \\ F_{12}^T & F_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_{n-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{11}^T F_{11} - F_{21}^T F_{21} & F_{11}^T F_{12} - F_{21}^T F_{22} \\ F_{12}^T F_{11} - F_{22}^T F_{21} & F_{12}^T F_{12} - F_{22}^T F_{22} \end{bmatrix}.$$

Izjednačavajući blokove na lijevoj i desnoj strani, dobivamo

$$\begin{aligned} F_{11}^T F_{11} &= F_{21}^T F_{21} + I_l, & F_{12}^T F_{12} &= F_{22}^T F_{22} - I_{n-l}, \\ F_{11}^T F_{12} &= F_{21}^T F_{22}, & F_{12}^T F_{11} &= F_{22}^T F_{21}. \end{aligned} \tag{12}$$

Svaka vlastita vrijednost simetrične matrice $H \pm \alpha I$ je oblika $\lambda \pm \alpha$ gdje je λ vlastita vrijednost matrice H. Stoga nam relacija (5) pokazuje da vrijedi

$$\begin{aligned} \lambda_i(F_{11}^T F_{11}) - \lambda_i(F_{21}^T F_{21}) &= 1, \quad 1 \leq i \leq l, \\ \lambda_j(F_{22}^T F_{22}) - \lambda_j(F_{12}^T F_{12}) &= 1, \quad 1 \leq j \leq n-l. \end{aligned}$$

Ako je $X r \times t$ realna matrica, korištenjem njene singularne dekompozicije odmah slijedi da su vlastite vrijednosti simetrične matrice $X^T X \ \ (X X^T)$ kvadrati singularnih vrijednosti od X, uz dodatno $t-r$ $(r-t)$ nula vlastitih vrijednosti u slučaju $t > r$ $(r > t)$). Ako općenito $\sigma_i(X)$ označava i-tu singularnu vrijednost od X, tada se zadnje dvije relacije mogu zapisati u obliku

$$\sigma_i^2(F_{11}) - \sigma_i^2(F_{21}) = 1,\ 1 \leq i \leq l,\ \ \sigma_j^2(F_{22}) - \sigma_j^2(F_{12}) = 1,\ 1 \leq j \leq n–l, \tag{13}$$

pri čemu se mora voditi računa od dimenzijama matrica F_{21} i F_{12}. Ako je manja dimenzija od F_{21} (F_{12}) manja od l $(n-l)$, tada F_{21} (F_{12}) ima manje od l $(n-l)$ singularnih vrijednosti, pa se zadnja relacija za odgovarajuće vrijednosti indeksa i (j) svodi na oblik $\sigma_i(F_{11}) = 1$ $(\sigma_j(F_{22}) = 1)$.

Dakle se odgovarajuće singularne vrijednosti blokova F_{11} i F_{21} $(F_{22}$ i $F_{12})$ ponašaju kao hiperbolni kosinus i sinus istog argumenta. Stoga se može očekivati da postoji neka dekompozicija J-ortogonalne matrice F, slična singularnoj dekompoziciji, kod koje će ortogonalne matrice koje množe F slijeva i zdesna također biti i J-ortogonalne. To nas vodi na tzv. hiperbolnu kosinus-sinus dekompoziciju J-ortogonalne matrice, koju u općenitom obliku dajemo bez dokaza. Dokaz je dugačak i zahtjevan (vidjeti \cite[Theorem 2.1]{Tru-00}).

Teorem 5. *[Hiperbolna CS dekompozicija] Neka je F J-ortogonalna matrica reda n kao u relaciji (3).*

Ako je $2l \leq n$, tada postoje ortogonalne blok-dijagonalne matrice $U = \mathrm{diag}(U_{11}, U_{22})$ i $V = \mathrm{diag}(V_{11}, V_{22})$ reda n pri čemu su U_{11} i V_{11} reda l tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} U_{11}^{\tau} & 0 \\ 0 & U_{22}^{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \Gamma & \Sigma & 0 \\ \hline \Sigma & \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right]. \tag{14}$$

Pri tome su Γ i Σ dijagonalne matrice reda l s nenegativnim elementima, takve da je

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l), \quad \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l), \quad \Gamma^2 - \Sigma^2 = I_l. \tag{15}$$

Ako je $2l > n$, tada postoje ortogonalne blok-dijagonalne matrice $U = \mathrm{diag}(U_{11}, U_{22})$ i $V = \mathrm{diag}(V_{11}, V_{22})$ reda n pri čemu su U_{11} i V_{11} reda l tako da vrijedi

$$\begin{bmatrix} U_{11}^{\tau} & 0 \\ 0 & U_{22}^{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \Gamma & 0 & \Sigma \\ 0 & I & 0 \\ \hline \Sigma & 0 & \Gamma \end{array}\right]. \tag{16}$$

Pritom su Γ i Σ dijagonalne matrice reda $n-l$ s nenegativnim elementima, takve da je

$$\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-l}),\ \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-l}),\ \Gamma^2 - \Sigma^2 = I_{n-l}. \tag{17}$$

U teoremu su singularne vrijednosti blokova F_{11} i F_{22} označene sa γ_i, dok su singularne vrijednosti blokova F_{21} i F_{12} označene sa σ_i, $1 \leq i \leq \min\{l, n-l\}$. Ako je $2l = n$, tada se na desnim stranama u relacijama (14) i (16) ispušta jedinična matrica I. Zbog svojstva $\Gamma^2 - \Sigma^2 = I$, dijagonalni elementi od Γ i Σ zadovoljavaju uvjet

$$\gamma_i^2 - \sigma_i^2 = 1, \qquad 1 \leq i \leq \min\{l, n-l\}. \tag{18}$$

Ako je $2l \leq n$, tada je dijagonalna matrica Γ općenito oblika $\mathrm{diag}(\Gamma_1, I_{l-k})$, pri čemu dijagonalni elementi od Γ_1 zadovoljavaju uvjet $\gamma_i > 1$, $1 \leq i \leq k$. Tada je dijagonalna matrica Σ oblika $\mathrm{diag}(\Sigma_1, 0_{l-k})$, pri čemu dijagonalni elementi od Σ_1 zadovoljavaju uvjet $\sigma_i > 0$, $1 \leq i \leq k$. U slučaju

$2l > n$ može se pretpostaviti isto, samo l treba zamijeniti sa $n - l$. Zbog relacije (18) dijagonalni elementi γ_i se poistovjećuju sa kosinus hiperbolnim, a σ_i sa sinus hiperbolnim nekih kuteva. Stoga ćemo dekompoziciju iz Teorema 5 nazivati *hiperbolnom CS dekompozicijom* (kraće: HCSD) ili *CS dekompozicijom J-ortogonalne matrice* (kraće: CSD J-ortogonalne matrice).

Cilj ovog članka je na što elementarniji način izvesti CS dekompoziciju J ortogonalne matrice F reda 2, 3 i 4. U slučaju $n = 3$ i $n = 4$ postoje različite mogućnosti za J, ovisno o tome koliki je l u odnosu na n. Stoga će za svaki izbor od n i l postojati posebni dokaz.

Također ćemo i za $n = 3, 4$ dati primjene koje otvaraju nove netrivijalne probleme. Od kompliciranijih alata, koristit ćemo tek singularnu dekompoziciju za matrice reda 2 i 3.

2 CSD J-ortogonalne matrice reda 2

U ovom slučaju jedini mogući oblik za J je $\mathrm{diag}(1, -1)$, pa je $l = 1$. Stoga su i matrice U_{11}, U_{22}, V_{11}, V_{22} brojevi iz skupa $\{1, -1\}$. Dakle, hiperbolna CSD za matricu F ima oblik

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \gamma_1^2 - \sigma_1^2 = 1, \\ \gamma_1 \geq 1,\ \sigma_1 \geq 0, \end{array} \tag{1}$$

pri čemu su $u_{11}, u_{22}, v_{11}, v_{22} \in \{1, -1\}$. Kako odrediti elemente matrica na desnoj strani ako je dana matrica F svojim elementima?

Ako je $|f_{11}| = 1$, tada iz relacija (6) i (8) za $i = 1$ odmah slijedi $f_{21} = 0$ i $f_{12} = 0$. Stoga je $|f_{22}| = 1$, pa mora biti $\sigma_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$. Možemo odabrati u_{11}, u_{22} iz skupa $\{1, -1\}$ tako da vrijedi $f_{11} = u_{11}\gamma_1$, $f_{22} = u_{22}\gamma_1$, te onda staviti $v_{11} = 1$, $v_{22} = 1$.

Ako je $|f_{11}| > 1$, tada iz relacija (6) i (8) za $i = 1$ odmah slijedi $|f_{21}| > 0$, $|f_{12}| > 0$ i $|f_{21}| = |f_{12}|$. Stoga je i $|f_{22}| = |f_{11}|$. Relacija (7) pokazuje da mora vrijediti $f_{11}f_{12} = f_{21}f_{22}$. Definirajmo $\gamma_1 = |f_{11}|$, $\sigma_1 = |f_{21}|$.

Možemo odabrati u_{11} i u_{22} tako da bude $f_{11} = u_{11}\gamma_1$ i $f_{21} = u_{22}\sigma_1$. Zatim odaberimo $v_{11} = 1$, a v_{22}

odaberimo tako da bude $f_{22} = (u_{22}\gamma_1)v_{22}$. Tada mora vrijediti relacija (??), čime je postignut traženi oblik iz teorema.

3 CSD J-ortogonalne matrice reda 3

U ovom slučaju imamo dva podslučajeva: $l = 1$ i $l = 2$.

3.1 Slučaj $n = 3,\ l = 1$

U ovom slučaju matrice F i J možemo zapisati na sljedeći način

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ g & h & p \end{array}\right], \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Načinimo singularnu dekompoziciju matrice F_{22}. Ona daje ortogonalne matrice reda 2, U_{22} i V_{22} takve da je

$$F_{22} = U_{22}\Gamma_2 V_{22}^T, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \\ & \gamma_2 \end{bmatrix}, \ \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq 1. \tag{1}$$

Ovdje smo iskoristili relaciju (13) koja govori da su singularne vrijednosti matrice F_{22} veće ili jednake od 1.

Napomena 6. Nama će zapravo trebati malo modificirana singularna dekompozicija, najme ona koja će dati $\gamma_2 \geq \gamma_1 \geq 1$. To se postiže tako da se između U_{22} i Γ_2, te između Γ_2 i V_{22}^T umetne produkt $I_{12}I_{12}$ koji je jednak jediničnoj matrici I_2. Pritom se I_{12} dobije iz I_2 zamjenom stupaca (ili redaka). Drugim riječima, sve što treba u (1) napraviti je: zamijeniti γ_1 i γ_2, zamijeniti stupce od U_{22} i zamijeniti stupce od V_{22}.

Sada možemo pisati

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & U_{22}\Gamma_2 V_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12}V_{22} \\ U_{22}^T F_{21} & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & V_{22}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & U_{22} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} a & \tilde{b} & \tilde{c} \\ \hline \tilde{d} & \gamma_1 & 0 \\ \tilde{g} & 0 & \gamma_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & \\ & V_{22}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

U relaciji (2) sve matrice su J-ortogonalne, pa je takva i “srednja” matrica na desnoj strani koju označimo sa $\tilde{F}$,

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|cc} a & \tilde{b} & \tilde{c} \\ \hline \tilde{d} & \gamma_1 & 0 \\ \tilde{g} & 0 & \gamma_2 \end{array}\right].$$

Iz relacija (7) i (9) za matricu $\tilde{F}$ i za $i = 2$, $j = 3$, proizlazi $\tilde{b}\tilde{c} = 0$ i $\tilde{d}\,\tilde{g} = 0$. Sada uvjet $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq 1$ i relacije (6) i (8) pokazuju da ne može biti $\gamma_2 > 1$. Jer $\gamma_2 > 1$ povlači $\gamma_1 > 1$, $|\tilde{b}| > 0$, $|\tilde{c}| > 0$ kao i $|\tilde{d}\,| > 0$, $|\tilde{g}| > 0$, pa ne bi moglo biti ni $\tilde{b}\tilde{c} = 0$ niti $\tilde{d}\,\tilde{g} = 0$. Dakle je $\gamma_2 = 1$, pa relacije (6) i (8) povlače $|\tilde{c}| = 0$ i $|\tilde{g}| = 0$. Dobili smo da je

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|cc} a & \tilde{b} & 0 \\ \hline \tilde{d} & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{array}\right]. \tag{3}$$

Sada relacije (6) i (8) uz $i = 2$ daju $|\tilde{b}| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$ i $|\tilde{d}\,| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$. Ako iskoristimo iste relacije uz $i = 1$, dobivamo $|a| = \gamma_1$. Mi trebamo dobiti $a = \gamma_1$ i $\tilde{b} = \tilde{d} \geq 0$. To ćemo postići izborom ortogonalnih matrica U_{11} i V_{11} koje su reda 1, pa su to brojevi iz skupa $\{1, -1\}$. Kako želimo da je $a > 0$, odaberimo $U_{11} = \operatorname{sgn}(a)$, $V_{11} = 1$. Time dobivamo

$$F=\begin{bmatrix}\operatorname{sgn}(a) & \\ & U_{22}\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|cc}\gamma_1 & \tilde{b}' & 0\\ \hline \tilde{d}' & \gamma_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}1 & \\ & V_{22}^T\end{bmatrix}$$

Iz relacije (6) (ili (8)) slijedi $\gamma_1\tilde{b}' = \gamma_1\tilde{d}'$ pa nakon kraćenja slijedi $\tilde{b}' = \tilde{d}'$. Ako je $\tilde{b}' \geq 0$ tada je HCSD je dovršena. Ako je $\tilde{b}' < 0$, sve što treba napraviti je pomnožiti prvi stupac od U_{22} i V_{22} sa -1. Da bi se u to uvjerili, uočimo da je matrica $D = \operatorname{diag}(1,-1,1)J$-ortogonalna i da vrijedi $D\cdot D = I_3$. Stoga je

$$\begin{aligned}F &= \begin{bmatrix}\operatorname{sgn}(a) & \\ & U_{22}\end{bmatrix} D\cdot D\left[\begin{array}{c|cc}\gamma_1 & \tilde{b}' & 0\\ \hline \tilde{d}' & \gamma_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] D\cdot D\begin{bmatrix}1 & \\ & V_{22}^T\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\operatorname{sgn}(a) & \\ & U_{22}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|cc}\gamma_1 & -\tilde{b}' & 0\\ \hline -\tilde{d}' & \gamma_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}1 & \\ & \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}V_{22}^T\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Uočimo da je i $\operatorname{diag}(-1,1)\cdot V_{22}^T = [V_{22}\cdot\operatorname{diag}(-1,1)]^T$, pa i kod matrice V_{22} samo treba prvi stupac pomnožiti sa -1.

3.2 Slučaj $n=3,\ l=2$

Sada je $J=\operatorname{diag}(1,1,-1)$. Dokaz teorema u ovom slučaju može se napraviti posve analogno kao i u prethodnom slučaju. Stoga ćemo ga napraviti na malo drugačiji način.

Iz teorema 5 slijedi, stoga što je $2l > n$, da postoje ortogonalne matrice $U=\operatorname{diag}(U_{11},U_{22})$ i $V=\operatorname{diag}(V_{11},V_{22})$ tako da vrijedi relacija (16). Pri tome su u našem slučaju $n=3$, $l=2$, U_{11} i V_{11} ortogonalne matrice reda 2 i vidi se da je $U_{11}^T F_{11} V_{11} = \operatorname{diag}(\Gamma, I)$ singularna dekompozicija bloka F_{11}

matrice F. Zato izvod kreće od singularne dekompozicije matrice F_{11}.

Neka je matrica F oblika

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & p \end{array}\right].$$

Načinimo singularnu dekompoziciju matrice F_{11}, $F_{11} = U_{11}\Gamma_1 V_{11}^T$ i formirajmo ortogonalne matrice $U = \mathrm{diag}(U_{11}, u)$, $V = \mathrm{diag}(V_{11}, v)$ gdje će dijagonalni elementi $u, v \in \{1, -1\}$ biti određeni kasnije. Izračunajmo $\tilde{F} = U^T F V$.

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} U_{11}^T & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & p \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \gamma_1 & 0 & \tilde{c} \\ 0 & \gamma_2 & \tilde{f} \\ \hline \tilde{g} & \tilde{h} & \tilde{p} \end{array}\right]$$

Pritom je zbog relacije (13), $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq 1$. Uočimo da su sve matrice U, F i V J-ortogonalne, pa je takva i $\tilde{F}$. Stoga relacije (7) i (9) primijenjene na $\tilde{F}$ za $i = 1$, $j = 2$ daju $\tilde{c}\tilde{f} = 0$ i $\tilde{g}\tilde{h} = 0$. Slično kao i prije zaključujemo da pretpostavka $\gamma_2 > 1$ povlači $\gamma_1 > 1$, a onda relacije (6) i (8) za $i = 1$ i $i = 2$ pokazuju da mora biti $|\tilde{c}| > 0$, $|\tilde{f}| > 0$, $|\tilde{g}| > 0$, $|\tilde{h}| > 0$, pa ne može biti ni $\tilde{c}\tilde{f} = 0$ niti $\tilde{g}\tilde{h} = 0$. Kako je $\gamma_2 \geq 1$ zaključujemo da je $\gamma_2 = 1$. Stoga $\tilde{F}$ ima oblik

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{cc|c} \gamma_1 & 0 & \tilde{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \tilde{g} & 0 & \tilde{p} \end{array}\right]$$

Iskoristimo opet relacije (6) i (8) za $i = 1$ da bi zaključili kako mora biti $|\tilde{c}| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$ i $|\tilde{g}| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}$. Kada to uvažimo i opet primijenimo relacije (6) i (8) za $i = 3$, dobijemo $|\tilde{p}| = \gamma_1$. Neka je dijagonalni element u matrice U odabran tako da bude $\tilde{p} = \gamma_1$. Dakle odabrali smo $u = \mathrm{sgn}(\tilde{p})$. Da bismo vidjeli kako su elementi $\tilde{c}$ i $\tilde{g}$ jednaki, primijenimo na $\tilde{F}$ relaciju (7) ili (9) za $i = 1$, $j = 3$. Primjena relacije (7) daje $\gamma_1\tilde{c} = \tilde{g}\gamma_1$, odakle slijedi $\tilde{c} = \tilde{g}$. Preostaje pokazati da možemo odabrati dijagonalni element v matrice V tako da bude $\tilde{c} = \tilde{g} > 0$. Za to je dovoljno definirati

$v = \operatorname{sgn}(\tilde{c})$.

Kako je $F = U\tilde{F}V^T$, a $\tilde{F}$ je traženog oblika kao na desnoj strani u relaciji (16), dokaz je dovršen.

4 CSD J-ortogonalne matrice reda $n = 4$

Kada je $n = 4$ imamo tri podslučajeva: $l = 1$, $l = 2$ i $l = 3$.

4.1 Slučaj $n = 4,\ l = 1$

U ovom slučaju imamo $J = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$, pa pretpostavimo sljedeću notaciju

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} a & b & c & d \\ \hline e & h & o & p \\ f & q & r & s \\ g & t & w & z \end{array}\right], \qquad J = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array}\right].$$

Načinimo singularnu dekompoziciju matrice F_{22}, $F_{22} = U_{22}\Gamma_2 V_{22}^T$, gdje je $\Gamma_2 = \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$, a U_{22} i V_{22} su ortogonalne matrice reda 3. Neka su $U = \operatorname{diag}(u, U_{22})$, $V = \operatorname{diag}(v, V_{22})$, gdje ćemo brojeve $u, v \in \{1, -1\}$ kasnije odrediti. Za početak razmatranja stavimo $u = 1$, $v = 1$. Tada vrijedi

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & U_{22}^T \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|ccc} a & b & c & d \\ \hline e & h & o & p \\ f & q & r & s \\ g & t & w & z \end{array}\right] \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} a & \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} \\ \hline \tilde{e} & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \tilde{f} & 0 & \gamma_2 & 0 \\ \tilde{g} & 0 & 0 & \gamma_3 \end{array}\right]$$

Ovdje se element a nije promijenio jer je $u = 1 = v$. Jer su sve matrice u produktu, U, F i V J-ortogonalne, takva je i $\tilde{F}$. Stoga primjena relacije (13) daje $\gamma_3 \geq 1$. Također, primjena relacija (7) i (9) za svaki izbor i, j, pri čemu je $2 \leq i < j \leq 4$, daje

$$\begin{aligned} \tilde{b}\,\tilde{c} &= 0, \quad & \tilde{b}\,\tilde{d} &= 0, \quad & \tilde{c}\,\tilde{d} &= 0, \\ \tilde{e}\,\tilde{f} &= 0, \quad & \tilde{e}\,\tilde{g} &= 0, \quad & \tilde{f}\,\tilde{g} &= 0, \end{aligned}$$

a primjena relacija (6) i (8) za $i = 2, 3, 4$ daje

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= 1 + \tilde{b}^2, \quad & \gamma_2^2 &= 1 + \tilde{c}^2, \quad & \gamma_3^2 &= 1 + \tilde{d}^2, \\ \gamma_1^2 &= 1 + \tilde{e}^2, \quad & \gamma_2^2 &= 1 + \tilde{f}^2, \quad & \gamma_3^2 &= 1 + \tilde{g}^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Tvrdimo da mora vrijediti $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$. Da bi to dokazali, pokažimo da suprotna pretpostavka, da je $\gamma_2 > \gamma_3$ ili $\gamma_3 > 1$, vodi u kontradikciju.

Doista, kada bi bilo $\gamma_3 > 1$, tada bi zapravo vrijedilo $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 > 1$, pa bi relacije (2) i (2) implicirale

$$|\tilde{b}| \geq |\tilde{c}| \geq |\tilde{d}\,| > 0 \quad \text{i} \quad |\tilde{e}| \geq |\tilde{f}\,| \geq |\tilde{g}| > 0,$$

pa ne bi mogle vrijediti ni relacija (1) niti relacija (1).
Kada bi vrijedilo $\gamma_2 > \gamma_3$, tada bi bilo $\gamma_1 \geq \gamma_2 > 1$, pa bi relacije (2) i (2) implicirale

$$|\tilde{b}| \geq |\tilde{c}| > 0 \quad \text{i} \quad |\tilde{e}| \geq |\tilde{f}\,| > 0.$$

To bi povlačilo $\tilde{b}\,\tilde{c} \neq 0$ i $\tilde{e}\,\tilde{f} \neq 0$, što proturječi relacijama (1) i (1), respektivno.

Time je pokazano da mora biti $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$. Zbog relacija (2) i (2) to implicira da je $\tilde{c} = 0$, $\tilde{d} = 0$, $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$, pa matrica $\tilde{F}$ ima oblik

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|ccc} a & \tilde{b} & 0 & 0 \\ \hline \tilde{e} & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Opet koristeći relacije (2) i (2) lako zaključimo da je

$$|\tilde{b}| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}, \quad |\tilde{e}| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}, \quad |a| = \gamma_1.$$

Sada ćemo odrediti prave vrijednosti za u i v. Odaberimo prvi dijagonalni element od U kao predznak od a, dakle $u = \mathrm{sgn}(a)$. To povlači da su se u matrici $\tilde{F}$ elementi a i $\tilde{b}$ zamijenili sa γ_1 i $\tilde{b}' = \mathrm{sgn}(a)\tilde{b}$, respektivno. Koristeći relaciju (7) ili (9) za $i = 1$, $j = 2$, dobijemo $\gamma_1 \tilde{b}' = \tilde{e}\gamma_1$, što daje $\tilde{b}' = \tilde{e}$. Ovdje je $v = 1$. Do istog zaključka i oblika matrice $\tilde{F}$ došli bi izborom $u = 1$, $v = \mathrm{sgn}(a)$.

Preostaje osigurati pozitivnost elementa $\tilde{b}'$. To možemo tako da istovremeno pomnožimo $\tilde{F}$ slijeva i zdesna sa dijagonalnom matricom $\Phi = \mathrm{diag}(1, \mathrm{sgn}(\tilde{b}'), 1, 1)$ koja je J-ortogonalna. Tada će $\Phi\tilde{F}\Phi$ biti traženog oblika i sve što još treba je pomnožiti matrice U_{22} i V_{22} zdesna s $\mathrm{diag}(\mathrm{sgn}(\tilde{b}'), 1, 1)$. To zapravo znači da je $U = \mathrm{diag}(\mathrm{sgn}(a), U_{22}\Phi)$ i $V = \mathrm{diag}(1, V_{22}\Phi)$.

4.2 Slučaj $n = 4,\ l = 3$

U ovom slučaju pretpostavljamo notaciju

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} h & o & p & a \\ q & r & s & b \\ t & w & z & c \\ \hline e & f & g & d \end{array}\right], \qquad J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & -1 \end{array}\right].$$

Načinimo singularnu dekompoziciju dijagonalnog bloka F_{11}, $F_{11} = U_{11}\Gamma_1 V_{11}^T$, $\Gamma_1 = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$. Pritom su U_{11} i V_{11} ortogonalne matrice reda 3. Neka su $U = \mathrm{diag}(U_{11}, u)$, $V = \mathrm{diag}(V_{11}, v)$ ortogonalne matrice reda 4, gdje su elementi $u, v \in \{1, -1\}$ još neodređeni, a za početak razmatranja neka imaju vrijednost 1. Matrice U i V su ortogonalne i J-ortogonalne. Zaključujemo da je i matrica $\tilde{F} = U^T F V J$-ortogonalna. Vrijedi

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} U_{11}^T & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_1 & 0 & 0 & \tilde{a} \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \tilde{b} \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \tilde{c} \\ \hline \tilde{e} & \tilde{f} & \tilde{g} & d \end{array}\right]$$

Ovdje se d nije promijenio jer je $u = 1 = v$. Jer je $\tilde{F}$ J-ortogonalna, primijenimo na nju relaciju (13).

Odmah dobijemo $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq 1$.

Na slični način kao u prethodnom slučaju, lako se zaključi da mora vrijediti $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$, pa je $\tilde{b} = \tilde{c} = 0$ i $\tilde{f} = \tilde{g} = 0$. Stoga možemo pisati

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_1 & 0 & 0 & \tilde{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \tilde{e} & 0 & 0 & d \end{array}\right] \tag{3}$$

Koristeći relacije (6) i (8) lako zaključimo da je

$$|\tilde{a}| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}, \quad |\tilde{e}| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}, \quad |d| = \gamma_1.$$

Sada odaberimo $u = \operatorname{sgn}(d)$. To će utjecati na zadnji redak od $\tilde{F}$, tako da ćemo umjesto $\tilde{e}$ pisati $\tilde{e}' = \operatorname{sgn}(d)\tilde{e}$, a umjesto d ćemo pisati γ_1. Sada primjena relacije (7) ili (9) na $\tilde{F}$ za $i = 1$, $j = 4$ daje $\gamma_1 \tilde{e}' = \tilde{a}\gamma_1$. Nakon kraćenja sa γ_1 slijedi $\tilde{e}' = \tilde{a}$. Do istog zaključka nas dovodi i izbor $v = \operatorname{sgn}(d)$ pri čemu ostaje $u = 1$.

Preostaje osigurati nenegativnost od $\tilde{a}$ odnosno $\tilde{e}'$. To ćemo postići tako da istovremeno pomnožimo $\tilde{F}$ slijeva i zdesna sa dijagonalnom matricom $\tilde{\Phi} = \operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(\tilde{a}), 1, 1, 1)$ koja je J-ortogonalna. Tada će $\tilde{\Phi}\tilde{F}\tilde{\Phi}$ biti traženog oblika i sve što još treba je pomnožiti matrice U_{11} i V_{11} zdesna s $\operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(\tilde{a}), 1, 1)$. To zapravo znači da je $U = \operatorname{diag}(U_{11}\tilde{\Phi}, \operatorname{sgn}(d))$ i $V = \operatorname{diag}(V_{22}\tilde{\Phi}, 1)$. Time je postignut oblik kao u tvrdnji (16) teorema.

4.3 Slučaj $n = 4$, $l = 2$

Ovo je najzanimljiviji slučaj i on zahtijeva dvije singularne dekompozicije, jednu za blok F_{11}, drugu za blok F_{22}. Neka su $F_{11} = U_{11}\Gamma_1 V_{11}^T$ i $F_{22} = U_{22}\Gamma_2 V_{22}^T$ te dvije singularne dekompozicije i neka je $U = \operatorname{diag}(U_{11}, U_{22})$, $V = \operatorname{diag}(V_{11}, V_{22})$. Singularna dekompozicija daje dijagonalne elemente od Γ_1 i Γ_2 nenegativne i u nerastućem poretku. Neka je

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} U_{11}^T & 0 \\ 0 & U_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & c & d \\ 0 & \gamma_2 & g & h \\ \hline p & q & \gamma_3 & 0 \\ r & s & 0 & \gamma_4 \end{array}\right].$$

Ovdje smo zbog jednostavnijeg pisanja izostavili znak ~ na elementima $(1,2)$ i $(2,1)$ blokova matrice $\tilde{F}$. Uočimo da su matrice U (pa zato i U^T), V i F J-ortogonalne, pa je takva i $\tilde{F}$. Koristeći relaciju (13) zaključujemo da su singularne vrijednosti dijagonalnih blokova matrice $\tilde{F}$ veće ili jednake 1.
Stoga vrijedi

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq 1, \qquad \gamma_3 \geq \gamma_4 \geq 1, \tag{5}$$

pa su oba dijagonalna bloka nesingularna.
Relacije (6), (7) i (8), (9) za matricu $\tilde{F}$ povlače:

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= 1 + c^2 + d^2 \\ \gamma_2^2 &= 1 + g^2 + h^2 \\ \gamma_3^2 &= 1 + c^2 + g^2 \\ \gamma_4^2 &= 1 + d^2 + h^2 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} g & d \\ d & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= 1 + p^2 + r^2 \\ \gamma_2^2 &= 1 + q^2 + s^2 \\ \gamma_3^2 &= 1 + p^2 + q^2 \\ \gamma_4^2 &= 1 + r^2 + s^2 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} q & r \\ r & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Pogledajmo homogeni sustav linearnih jednadžbi (7).

Ako je determinanta sustava različita od nule, tj. ako je $|g| \neq |d|$, tada je rješenje sustava trivijalno, dakle $c = h = 0$. No, $c = h = 0$ u jednadžbama (6)–(6) daje

$$\gamma_1 = \sqrt{1+d^2} = \gamma_4, \quad \gamma_2 = \sqrt{1+g^2} = \gamma_3.$$

Sada relacija (5) daje $\gamma_2 = \gamma_3 \geq \gamma_4 = \gamma_1$, pa mora biti $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$. Iz jednadžbi (6)–(6) odmah slijedi $|d| = \sqrt{\gamma_1^2 - 1} = \sqrt{\gamma_2^2 - 1} = |g|$. Dobili smo proturječje s polaznom pretpostavkom $|g| \neq |d|$, pa zaključujemo da je matrica sustava singularna, tj. vrijedi $|g| = |d|$.

Jer je $|g| = |d|$, relacije (6) i (6) povlače $\gamma_1 = \gamma_3$, a relacije (6) i (6) povlače $\gamma_2 = \gamma_4$.

Na posve isti način, iz jednadžbi (8)–(9) slijedi $|q| = |r|$.

Dakle, pokazali smo da mora vrijediti

$$\gamma_1 = \gamma_3 \geq \gamma_2 = \gamma_4 \geq 1 \quad \text{i} \quad |g| = |d|, \quad |q| = |r|. \tag{10}$$

Kako je $|g| = |d|$, imamo dvije mogućnosti: $g = d$ i $g = -d$. Promotrimo ih zasebno.

4.3.1 Slučaj $g = d$

Sada relacija (7) povlači ili $d = 0$ ili $d \neq 0$, $h = -c$.

Promotrimo prvo slučaj $d = 0$. Tada je i $g = 0$. Stoga, ako primijenimo relaciju (7) uz $i = 2$, $j = 3$ na matricu $\tilde{F}$, dobijemo

$$0 = 0 \cdot c + \gamma_2 \cdot g - q \cdot \gamma_3 - s \cdot 0 = 0 + \gamma_2 \cdot 0 - q \cdot \gamma_1 - 0 = -q \cdot \gamma_1.$$

Dakle je $q = 0$. Relacija (10) pokazuje da je $|q| = |r|$, pa mora biti i $r = 0$.

Primijenimo li relaciju (7) uz $i = 1$, $j = 3$ na matricu $\tilde{F}$, dobijemo

$$0 = \gamma_1 \cdot c + 0 - p \cdot \gamma_3 - 0 = \gamma_1(c - p),$$

pa mora biti $c = p$.

Primjenom relacije (7) uz $i = 2$, $j = 4$ na matricu $\tilde{F}$, dobijemo

$$0 = 0 + \gamma_2 \cdot h - 0 - s \cdot \gamma_4 = \gamma_2(h - s),$$

pa mora biti $h = s$.

Time je pokazano da je matrica $\tilde{F}$ oblika

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & c & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & h \\ \hline c & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & h & 0 & \gamma_2 \end{array}\right], \quad c = \pm\sqrt{\gamma_1^2 - 1},\ h = \pm\sqrt{\gamma_2^2 - 1}. \tag{11}$$

Da bismo osigurali nenegativnost od c i h, još treba načiniti transformaciju sličnosti na matrici $\tilde{F}$ s dijagonalnom matricom $D = \operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(c), \operatorname{sgn}(h), 1, 1)$ koja je i ortogonalna i J-ortogonalna.

Promotrimo i drugu mogućnost: $d \neq 0$ i $h = -c$. Kako je i $g = d$, relacije (6) i (6) pokazuju da je $\gamma_1 = \gamma_2$, relacije (6) i (6) pokazuju da je $\gamma_3 = \gamma_4$, a relacije (6) i (6) daju $\gamma_2 = \gamma_3$. Dakle je $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$.

Ako primijenimo relaciju (7) na matricu $\tilde{F}$, prvo za $i = 2$, $j = 3$, a zatim za $i = 1$, $j = 4$, dobijemo $\gamma_1(g - q) = 0$ i $\gamma_1(d - r) = 0$, dakle $q = g$ i $r = d$. Isto tako, primjena relacije (7) na matricu $\tilde{F}$, prvo za $i = 1$, $j = 3$, a zatim za $i = 2$, $j = 4$, daje $\gamma_1(c - p) = 0$ i $\gamma_1(h - s) = 0$, dakle $p = c$ i $h = s$. Stoga $\tilde{F}$ ima oblik

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & c & d \\ 0 & \gamma_1 & d & -c \\ \hline c & d & \gamma_1 & 0 \\ d & -c & 0 & \gamma_1 \end{array}\right]$$

Ako je $\gamma_1 = 1$, tada je $c = d = 0$, pa smo dobili proturječje s $d \neq 0$. Dakle je $\gamma_1 > 1$. Jer je $c^2 + d^2 > 0$, dobro je definirana ravninska rotacija $R_{12}(\phi)$ čiji kut ϕ je određen formulama

$$\mathsf{c} = \cos\phi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \mathsf{s} = \sin\phi = \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Ona je ortogonalna i J-ortogonalna matrica. Sada je

$$R_{12}^T(\phi)\tilde{F}R_{12}(\phi) = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathsf{c} & \mathsf{s} & 0 & 0 \\ -\mathsf{s} & \mathsf{c} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & c & d \\ 0 & \gamma_1 & d & -c \\ \hline c & d & \gamma_1 & 0 \\ d & -c & 0 & \gamma_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \mathsf{c} & -\mathsf{s} & 0 & 0 \\ \mathsf{s} & \mathsf{c} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & -\sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 & \gamma_1 \end{array}\right], \quad \sigma_1 = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}.$$

Da bismo promijenili predznak od elementa $-\sigma_1$, dovoljno je načiniti transformaciju sličnosti na tako transformiranoj matrici $\tilde{F}$ s dijagonalnom matricom $D = \mathrm{diag}(1, -1, 1, 1)$ koja je i ortogonalna i J-ortogonalna.

Time je dobivena tražena dekompozicija (14) matrice F. U njoj je $\Gamma = \gamma_1 I_2$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_1)$, U_{22} i V_{22} su matrice iz singularne dekompozicije (iz relacije (11)), dok se U_{11} i V_{11} iz (11) trebaju ažurirati (pomnožiti zdesna) s produktom vodećih podmatrica reda od 2 od $R_{12}(\phi)$ i od D, dakle s matricom $\begin{bmatrix} \mathsf{c} & \mathsf{s} \\ \mathsf{s} & -\mathsf{c} \end{bmatrix}$.

4.3.2 Slučaj $g = -d$

Razmatranje je vrlo slično prethodnom. Relacija (7) povlači ili $d = 0$ ili $d \neq 0$, $h = c$.

Ako je $d = 0$ onda je i $g = 0$. Stoga, ako primijenimo relaciju (7) uz $i = 2$, $j = 3$ na matricu $\tilde{F}$, dobijemo $-q \cdot \gamma_3 = -q \cdot \gamma_1 = 0$, pa je $q = 0$. Prema relaciji (10) vrijedi $|q| = |r|$, pa mora biti i $r = 0$.

Primjenom relacije (7) uz $i = 1$, $j = 3$ (uz $i = 2$, $j = 4$) na matricu $\tilde{F}$, dobijemo $\gamma_1(c - p) = 0$ ($\gamma_2(h - s) = 0$), pa mora biti $c = p$ ($h = s$). Time je pokazano da je matrica $\tilde{F}$ istog oblika kao u relaciji (11), pa se dokaz završi na isti način kao u točki 4.3.1.

Promotrimo i drugu mogućnost: $h = c$. Kako je i $g = -d$, relacije (6) i (6) pokazuju da je $\gamma_1 = \gamma_2$, pa je zbog relacije (10) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$.

Primijenimo li relaciju (7) na matricu $\tilde{F}$, prvo za $i = 2$, $j = 3$, a zatim za $i = 1$, $j = 4$, dobijemo $\gamma_1(g - q) = 0$ i $\gamma_1(d - r) = 0$, dakle je $q = g$ i $r = d$. Isto tako, primjena relacije (7) na matricu $\tilde{F}$, prvo za $i = 1$, $j = 3$, a zatim za $i = 2$, $j = 4$, daje $\gamma_1(c - p) = 0$ i $\gamma_1(h - s) = 0$, dakle $p = c$ i $s = h$. Stoga $\tilde{F}$ ima oblik

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & c & d \\ 0 & \gamma_1 & -d & c \\ \hline c & -d & \gamma_1 & 0 \\ d & c & 0 & \gamma_1 \end{array}\right]$$

Ako je $\gamma_1 = 1$, tada je $c = d = 0$, pa je $\tilde{F} = I_4$ i dokaz je gotov.

Ako je $\gamma_1 > 1$, tada je $c^2 + d^2 > 0$, pa je dobro definirana ravninska rotacija $R_{12}(\psi)$ čiji kut ϕ je određen formulama

$$\mathsf{c} = \cos\psi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad \mathsf{s} = \sin\psi = -\frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Ona je ortogonalna i J-ortogonalna matrica. Sada je

$$R_{12}^T(\psi)\tilde{F}R_{12}(\psi) = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathsf{c} & \mathsf{s} & 0 & 0 \\ -\mathsf{s} & \mathsf{c} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & c & d \\ 0 & \gamma_1 & -d & c \\ \hline c & -d & \gamma_1 & 0 \\ d & c & 0 & \gamma_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \mathsf{c} & -\mathsf{s} & 0 & 0 \\ \mathsf{s} & \mathsf{c} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \gamma_1 \end{array}\right], \quad \sigma_1 = \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}.$$

Time je dobivena tražena dekompozicija (14) matrice F. U njoj je $\Gamma = \gamma_1 I_2$, $\Sigma = \sigma_1 I_2$, U_{22} i V_{22} su iz singularne dekompozicije, tj. iz relacije (11), dok se U_{11} i V_{11} iz (11) trebaju ažurirati (pomnožiti zdesna) s vodećom podmatricom reda 2 od $R_{12}(\psi)$.

Primjer 7. *Evo primjera CS dekompozicije J ortogonalne matrice W. Ako je*

$$W = \frac{1}{8}\left[\begin{array}{cc|cc} \sqrt{30}-2\sqrt{6} & 6\sqrt{2}+\sqrt{10} & -8 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{6}+\sqrt{30} & \sqrt{10}-6\sqrt{2} & 8 & 2\sqrt{2} \\ \hline -4\sqrt{2} & 4\sqrt{6} & -8\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 & 4\sqrt{5} \end{array}\right], \; J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & -1 \end{array}\right],$$

tada je {

$$W = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ \hline & & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \sqrt{3} & & \sqrt{2} & \\ & \frac{\sqrt{5}}{2} & & \frac{1}{2} \\ \hline \sqrt{2} & & \sqrt{3} & \\ & \frac{1}{2} & & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right]$$

. }

Napomena 8. *U slučaju kada je podmatrica F_{11} (F_{22}) reda dva, tada su ortogonalne matrice U_{11} i V_{11} (U_{22} i V_{22}) ravninske rotacije ili reflektori. Ako je determinanta od F_{11} (F_{22}) pozitivna, tada korištenjem Binet-Cauchyjevog teorema lako zaključimo da obje matrice U_{11} i V_{11} (U_{22} i V_{22}) moraju biti ili rotacije ili reflektori. Korištenjem matrica $\mathrm{diag}(1,-1)$ ili $\mathrm{diag}(-1,1)$ možemo ih sve načiniti rotacijama ili reflektorima, ne mijenjajući ni Γ niti Σ. Ako je determinanta od F_{11} (F_{22}) negativna, tada tek možemo birati koju od matrica U_{11} ili V_{11} (U_{22} ili V_{22}) načiniti rotacijom. Druga će biti reflektor.*

5 Primjena na blok J-Jacobijeve metode

Ako se na računalu žele izračunati vlastite vrijednosti i vektori nesingularne indefinitne simetrične matrice H reda n, s visokom relativnom točnosti, matrica H se dekomponira pomoću posebne matrične faktorizacije [1] na produkt $H = GJG^T$ gdje je $J = \mathrm{diag}(I_l, -I_{n-l})$, a G je nesingularna matrica reda n. Problem se zapisuje kao

$$Hx = \lambda x, \quad x \neq 0 \qquad \text{odnosno} \qquad GJG^T x = \lambda x, \quad x \neq 0.$$

Pomnožimo zadnju jednadžbu slijeva s G^T i definirajmo vektor $z = JG^T x$. Tada je $G^T G(JG^T x) = \lambda G^T x = \lambda J(JG^T x)$, pa smo dobili generalizirani problem vlastitih vrijednosti (GPVV)

$$Az = \lambda Jz, \quad z \neq 0, \quad \text{pri čemu je} \quad A = G^T G, \quad (JG^T)x = z,$$

tj. kad izračunamo z, vlastiti vektor x se dobije rješavajući sustav linearnih jednadžbi s matricom sustava JG^T. Pritom je G matrica sa puno nula pa se rješenje sustava brzo i vrlo točno izračuna.

Jer je matrica A pozitivno definitna za par simetričnih matrica (A, J) postoji nesingularna matrica Z, takva da vrijedi $Z^T AZ = D_A$ i $Z^T JZ = D_J$, pri čemu su D_A i D_J dijagonalne. Kako kongruencija čuva inerciju simetrične matrice, nesingularna dijagonalna matrica $D_J = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ ima točno $n - l$ negativnih dijagonalnih elemenata. Stoga postoji matrica permutacije P reda n takva da matrica $P^T D_J P$ ima prvih l dijagonalnih elemenata pozitivne. Tada za nesingularnu matricu $F = Z|D_J|^{-\frac{1}{2}}P$ vrijedi

$$F^T JF = P^T\,|D_J|^{-\frac{1}{2}}\,Z^T JZ\,|D_J|^{-\frac{1}{2}}\,P = P^T\,|D_J|^{-\frac{1}{2}} D_J |D_J|^{-\frac{1}{2}}\,P = J,$$
$$F^T AF = P^T\,|D_J|^{-\frac{1}{2}}\,Z^T AZ\,|D_J|^{-\frac{1}{2}}\,P = P^T\,|D_J|^{-\frac{1}{2}} D_A |D_J|^{-\frac{1}{2}}\,P = \Lambda_A.$$

Pritom je $|D_J|^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}\left(1/\sqrt{|d_1|}, \ldots, 1/\sqrt{|d_n|}\right)$, pa je Λ_A dijagonalna. Iz prve relacije vidimo da je F J-ortogonalna matrica. Za nalaženje matrice F i dijagonalne matrice Λ_A postoji vrlo točna tzv. J-Jacobijeva metoda [5].

Ta metoda bazirana je na činjenici da za par matrica $(\hat{A}, \hat{J})$,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \hat{J} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\hat{A}$ pozitivno definitna, postoji $\hat{J}$-ortogonalna matrica $\hat{F}$ takva da vrijedi $\hat{F}^T \hat{A} \hat{F} = \mathrm{diag}(a'_{11}, a'_{22})$. Pritom je (vidjeti [5])

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \cosh y & \sinh y \\ \sinh y & \cosh y \end{bmatrix}, \quad \tanh 2y = -\frac{2a_{12}}{a_{11} + a_{22}}, \quad \begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} + \tanh y \, a_{12}, \\ a'_{22} &= a_{22} + \tanh y \, a_{12}. \end{aligned}$$

U općem slučaju kad su matrice A i J reda n, Veselićev J-Jacobijev algoritam [5] primjenjuje ove formule tako da izabire glavne podmatrice reda dva, $\hat{A}$ od A i $\hat{J}$ od J, u nekom redoslijedu, i primijenjuje ravninske hiperbolne rotacije. Ako je $\hat{J}$ jednak I_2 ili $-I_2$, koristi se jedan korak standardne Jacobijeve metode koja koristi ravninske rotacije.

Kada se F i Λ_A izračunaju, tražena dijagonalna matrica vlastitih vrijednosti od H je $J\Lambda_A$, dok je pripadna matrica ortonormiranih vektora $Q = G^{-T} J F \Lambda_A^{\frac{1}{2}}$. Doista,

$$\begin{aligned} Q^T H Q &= \Lambda_A^{\frac{1}{2}} F^T J G^{-1} \, G J G^T \, G^{-T} J F \Lambda_A^{\frac{1}{2}} = \Lambda_A^{\frac{1}{2}} F^T J F \Lambda_A^{\frac{1}{2}} = J \Lambda_A, \\ Q^T Q &= \Lambda_A^{\frac{1}{2}} (F^T J)(G^{-1} \, G^{-T})(J F) \Lambda_A^{\frac{1}{2}} = \Lambda_A^{\frac{1}{2}} J F^{-1} A^{-1} F^{-T} J \Lambda_A^{\frac{1}{2}} \\ &= \Lambda_A^{\frac{1}{2}} J (F^T A F)^{-1} J \Lambda_A^{\frac{1}{2}} = \Lambda_A^{\frac{1}{2}} J \Lambda_A^{-1} J \Lambda_A^{\frac{1}{2}} = I_n. \end{aligned}$$

Dakle, ortogonalna matrica Q dobijena je kao produkt u kojem se uz J nalaze tri neortogonalne matrice! Uočimo da je $H = Q \Lambda Q^T$, $\Lambda = J \Lambda_A$ spektralna dekompozicija od H.

Danas je po brzini i visokoj relativnoj točnosti jedna od najefikasnijih metoda za istovremenu dijagonalizaciju matrica A i J tzv. jednostrana blok J-Jacobijeva metoda [2], koja je modifikacija

Veselićeve J-Jacobijeve metode [5]. Ta blok metoda na svakom koraku treba rješenje vlastitog problema $\hat{A}\hat{z} = \hat{\lambda}\hat{J}\hat{z}$ sa matricama $\hat{A}$ i $\hat{J}$ koje su manje dimenzije. Kod standardne (po elementima) J-Jacobijeve metode je $\hat{n} = 2$, a kod blok metode je veći. Najčešće je ta dimenzija $\hat{n} \in \{32, 64, 128\}$ i $\hat{n}$ ovisi o veličini cache memorije računala. Ovi manji problemi uspješno se rješavaju standardnom J-Jacobijevom metodom. Da bi se i ta obična metoda ubrzala, može se zamijeniti sa specijalnom blok J-Jacobijevom metodom koja na svakom koraku rješava GPVV sa matricama $\tilde{A}$ i $\tilde{J}$ koje su reda 4 ili 3 (3 samo ako je n neparan i $\hat{A}$ ima elemente iz zadnjeg stupca matrice A). U tom slučaju se takova J-Jacobijeva metoda može uspješno koristiti i kad je red matrice A nekoliko tisuća.

Ako su $\tilde{A}$ i $\tilde{J}$ dimenzije 4 ili 3, postavlja se pitanje kako najbrže izračunati matricu $\tilde{F}$ koja zadovoljava uvjet $\tilde{F}^T\tilde{J}\tilde{F} = \tilde{J}$ i uvjet da je $\tilde{F}^T\tilde{A}\tilde{F}$ dijagonalna matrica. Drugim riječima, otvara se problem kako izračunati što točnije i brže (sa što manje računskih operacija) traženu $\tilde{J}$-ortogonalnu matricu $\tilde{F}$. Jer je $\tilde{A}$ pozitivno definitna, zna se da tražena $\tilde{F}$ postoji.

Tu će nam pomoći rezultati iz prethodne točke o CS dekompoziciji J-ortogonalne matrice reda 3 i 4. Prvo ćemo se osvrnuti na slučaj kada su $\tilde{A}$ i $\tilde{J}$ reda 3, a zatim na slučaj kada su reda 4. Zbog lakšeg pisanja, maknut ćemo znak tilde sa matrica.

5.1 Slučaj $n = 3$

Kada je $n = 3$, najzanimljiviji je slučaj $l = 2$. Iz teorema 5 za slučaj $n = 3$, $l = 2$, pogledajmo što nam kaže relacija (16). Vidimo da su matrice U_{11} i V_{11} reda 2 dok su U_{22} i V_{22} ortogonalne matrice reda 1, dakle brojevi 1 ili -1.

Napomena 9. Lako je pokazati da ortogonalne matrice reda 2 moraju biti rotacije ili reflektori, tj. oblika

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \;\text{ ili }\; \mathsf{R}(\phi) = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix}, \quad c = \cos\phi,\;\; s = \sin\phi,\;\; \phi \in [-\pi, \pi].$$

Uočimo da je $\mathsf{R}(\phi) = R(\phi)D_2$, gdje je $D_2 = \mathrm{diag}(1, -1)$. Ako stavimo $\Phi(\phi) = \mathrm{sgn}(c)D_2$ onda vrijedi $\mathsf{R}(\phi) = R(\psi)\Phi(\phi)$, $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Matricu F možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} F &= \left[\begin{array}{cc|c} u_{11} & u_{12} & \\ u_{21} & u_{22} & \\ \hline & & u_0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} \gamma_1 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \sigma_1 & 0 & \gamma_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} v_{11} & v_{21} & \\ v_{12} & v_{22} & \\ \hline & & v_0 \end{array}\right], \; u_0, v_0 \in \{-1, 1\} \\ &= U_{12} W_{13} V_{12}^T. \end{aligned}$$

Kada se na matricu A uzastopce primijene transformacije kongruencije, prvo s U_{12}, zatim sa W_{13} i konačno sa V_{12}^T moramo dobiti dijagonalnu matricu. Možemo pisati

$$\Lambda = F^T A F = V_{12} \left(W_{13}^T \left(U_{12}^T \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array}\right] U_{12} \right) W_{13} \right) V_{12}^T$$

gdje je Λ dijagonalna. Matrice U_{12} i V_{12} su ravninske ortogonalne matrice, a W_{13} je ravninska J-ortogonalna matrica (tzv. hiperbolna rotacija).

Gledajući zadnju relaciju, možemo sljedeće zaključiti. Ravninska ortogonalana matrica V_{12} (V_{12}^T) ne mijenja sumu kvadrata elemenata na pozicijama $(1,3)$ i $(2,3)$ (odnosno $(3,1)$ i $(3,2)$), a kako se ona primijenjuje zadnja, moraju elementi na pozicijama $(1,3)$ i $(2,3)$ ($(3,1)$ i $(3,2)$) već biti nula. Stoga je uloga od V_{12}^T, tansformacijom kongruencije (koja je i sličnost jer je V_{12} ortogonalna) poništiti elemente na pozicijama $(1,2)$ i $(2,1)$. To znači da transformacija sa matricom U_{12} treba pripremiti matricu A kako da bi transformacija s W_{13} poništila oba elementa na pozicijama $(1,3)$ i $(2,3)$. Dakle će se matrica V_{12} lako odrediti, npr. kao Jacobijeva rotacija.

Stoga je uloga J-ortogonalne matrice W_{13} transformacijom kongruencije poništiti elemente matrice $U_{12}^T A U_{12}$ na pozicijama $(1,3)$, $(2,3)$ i $(3,1)$, $(3,2)$. Još kažemo da W_{13} mora biti istovremeno i Jacobijeva i Givensova hiperbolna rotacija. Da bi to mogla biti, uloga matrice U_{12} mora biti priredititi matricu A tako da to bude moguće. Stoga očekujemo najveći problem u određivanju elemenata matrice matrice U_{12}. Vjerojatno će trebati riješiti polinomijalnu (kubnu) jednadžbu za npr. tangens kuta koji određuje U_{12}.

Primjer 10. *Neka je L zadana donje-trokutasta matrica, a $J = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$. Tada je $H = LJL^T$ indefinitna nesingularna simetrična matrica. Relacija $H = LJL^T$ za konkretnu matricu L ima sljedeći oblik:*

$$H = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Problem se zapisuje kao $Hx = \lambda x, \quad x \neq 0$ i kako smo objasnili, svede se na oblik $Az = \lambda Jz, \;\; z \neq 0$, pri čemu je $A = L^T L, \;\; (JL^T)x = z$. Tražimo F koja zadovoljava $F^T AF = \Lambda_A$ i $F^T JF = J$. Koristit ćemo MATLAB i njegov Symbolic toolbox da bismo račun načinili u aritmetici promjenjive preciznosti sa 80 dekadskih znamenaka. Ispis matrica međurezultata je načinjen tako da su se one prvo pretvorile (aproksimirale) u matrice tzv. dvostruke (double) preciznosti.

Prvo ispisujemo matrice A i F:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 5.25 & -1.25 & -\,0.5 \\ -1.25 & 1.25 & 0.5 \\ \hline -0.5 & -0.5 & 1 \end{array}\right]$$

$$F \approx \left[\begin{array}{cc|c} 2.561736523957978e-01 & 9.674219085764793e-01 & 3.911635687996478e-02 \\ 9.871794546361790e-01 & -2.702217520080404e-01 & -\,2.180437362413296e-01 \\ \hline -2.003701969794577e-01 & 9.447192414708516e-02 & 1.024242725280311e+00 \end{array}\right]$$

Znamo da možemo načiniti hiperbolnu CS dekompoziciju matrice F,

$$F = UWV^T = U_{12} W_{13} V_{12}^T.$$

Izvod hiperbolne CSD u slučaju kada je $n = 3$, $l = 2$ ukazuje kako treba napisati algoritam koji se koristi u MATLABu. Matrice U_{12}, W_{13} i V_{12} su izračunate u visokoj preciznosti i onda su pretvorene u matrice dvostruke preciznosti. To znači da su im elementi točni u prvih 16 značajnih znamenaka.

Sada možemo primijeniti na A uzastopne transformacije kongruencije sa U_{12}, W_{13} i V_{12}^T i vidjeti na *koji način i u kojem redoslijedu se poništavaju izvandijagonalni elementi od A. Mi ćemo prikazati najzanimljivije fenomene. Neka je*

$$A^{(1)} = U_{12}^T A U_{12}, \quad A^{(2)} = W_{13}^T A^{(1)} W_{13}, \quad A^{(3)} = V_{12} A^{(2)} V_{12}^T.$$

Pođimo redom. Matrica U_{12} treba pripremiti matricu A kako bi hiperbolna rotacija W_{13} "blok dijagonalizirala" matricu $A^{(1)}$. Zadnja kongruencija sa V_{12}^T služi za dijagonalizaciju prvog dijagonalnog bloka, tj. za poništavanje elemenata na pozicijama $(1,2)$ i $(2,1)$ od $A^{(3)}$. Evo kako izgledaju izračunate matrice $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ i $A^{(3)}$:

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{rr|r} 1.809227260806340e+00 & -1.867263750517425e+00 & -5.804322905490655e{-}01 \\ -1.867263750517425e+00 & 4.690772739193664e+00 & 4.038543748530719e{-}01 \\ \hline -5.804322905490655e{-}01 & 4.038543748530719e{-}01 & 1.000000000000000e+00 \end{array}\right]$$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{rr|r} 1.683690565854021e+00 & -1.823067622966421e+00 & 9.992007221626409e{-}16 \\ -1.823067622966421e+00 & 4.690772739193664e+00 & -2.942091015256665e{-}15 \\ \hline 9.714451465470120e{-}16 & -2.997602166487923e{-}15 & 8.744633050476804e{-}01 \end{array}\right]$$

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{rr|r} 8.241380536131467e{-}01 & -1.831867990631508e{-}15 & 3.509088574926918e{-}16 \\ -1.332267629550188e{-}15 & 5.550325251434538e+00 & 3.087258427627578e{-}15 \\ \hline 3.996873412970663e{-}16 & 3.125631848201211e{-}15 & 8.744633050476804e{-}01 \end{array}\right]$$

Vidimo da kongruencija sa matricom W_{13} "poništava" elemente na pozicijama $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,1)$ i $(3,2)$, dok transformacija s V_{12}^T poništava elemente na pozicijama $(1,2)$ i $(2,1)$, kako smo i predvidjeli.

Vlastite vrijednosti matrice H dobiju se kao produkt dijagonalnih elemenata matrica $F^T A F$ i J: $\lambda_1 \approx 0.8241381$, $\lambda_2 \approx 5.550325$ i $\lambda_3 \approx -0.8744633$. Pripadni vlastiti vektori su stupci od

$Q = L^{-T} J F \Lambda_A^{\frac{1}{2}}$, *a računaju se povratnim postupkom (stupac po stupac) iz linearne jednadžbe* $L^T X = J F \Lambda_A^{\frac{1}{2}}$.

5.2 Slučaj $n = 4$

Najzanimljiviji je slučaj kada je $l = 2$. Relacija (16) iz teorema 5, za slučaj $n = 4$, $l = 2$, pokazuje da se J-ortogonalna matrica reda 4 može prikazati kao produkt od 4 ortogonalne i dvije hiperbolne ravninske matrice. Matricu F možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} F &= \left[\begin{array}{cc|cc} u_{11} & u_{12} & & \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \hline & & u_{33} & u_{34} \\ & & u_{43} & u_{44} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} \gamma_1 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \sigma_2 \\ \hline \sigma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \gamma_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} v_{11} & v_{21} & & \\ v_{12} & v_{22} & & \\ \hline & & v_{33} & v_{43} \\ & & v_{34} & v_{44} \end{array}\right] \\ &= U_{12} U_{34} \, W_{13} W_{24} \, V_{12}^T V_{34}^T . \end{aligned}$$

Za razliku od istoimenih matrica iz točke 5.1, sada su U_{12}, W_{13} i V_{12} ravninske matrice reda 4. Takve su i U_{34}, W_{24} i V_{34}. Pritom ortogonalne matrice U_{12} i U_{34} (V_{12} i V_{34}) međusobno komutiraju, baš kao i J-ortogonalne matrice W_{13} i W_{24}.

Kada se na matricu A uzastopce primijene transformacije kongruencije, prvo sa U_{12} i U_{34} zatim sa W_{13} i W_{24}, te konačno sa V_{12}^T i V_{34}^T, moramo dobiti dijagonalnu matricu $F^T A F = \Lambda_A$. To možemo zapisati ovako:

$$\Lambda_A = V_{34} V_{12} \left(W_{24}^T W_{13}^T \left(U_{34}^T U_{12}^T \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{array}\right] U_{12} U_{34} \right) W_{13} W_{24} \right) V_{12}^T V_{34}^T .$$

Slično kao u slučaju $n = 3$ možemo zaključiti sljedeće. Uloga transformacija sa matricama V_{12}^T i V_{34}^T je poništiti elemente na pozicijama $(1,2)$, $(2,1)$ i $(3,4)$, $(4,3)$, respektivno. Transformacije sa matricama W_{13} i W_{24} trebaju poništiti sve elemente na pozicijama $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$ i $(3,1)$, $(4,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$, a da bi to mogle, moraju transformacije sa U_{12} i U_{34} prirediti matricu A za to.

Primjer 11. *Neka je* L *zadana donje-trokutasta matrica, a* $J = \mathrm{diag}(I_2, -I_2)$. *Tada je* $H = LJL^T$ *indefinitna nesingularna simetrična matrica. Relacija* $H = LJL^T$ *za konkretnu matricu* L *ima sljedeći oblik:*

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & \frac{2}{5} \\ -2 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{20} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Problem se zapisuje kao $Hx = \lambda x, \quad x \neq 0$ *i kako smo objasnili, svede se na oblik*

$$Az = \lambda J z, \quad z \neq 0, \quad \text{pri čemu je} \quad A = L^T L, \quad (JL^T)x = z.$$

Tražimo F *koja zadovoljava* $F^T A F = \Lambda_A$, $F^T J F = J$. *Koristimo MATLAB na sličan način kako je to objašnjeno u prethodnom primjeru. Prvo smo izračunali matrice* A *i* F.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 5.29e+00 & -1.08e+00 & -2.3e-01 & 4.00e-02 \\ -1.08e+00 & 1.16e+00 & -4.0e-02 & -8.00e-02 \\ \hline -2.30e-01 & -4.00e-02 & 2.6e-01 & 2.00e-02 \\ 4.00e-02 & -8.00e-02 & 2.0e-02 & 4.00e-02 \end{array}\right],$$

$$F \approx \left[\begin{array}{cc|cc} 0.2427978387670312 & 0.9716871112257911 & 0.05583771862956592 & 0.002963411970954754 \\ 0.9762085972426619 & -0.2393626027437477 & 0.07587208631158646 & 0.06723918085070529 \\ \hline 0.08181757279331632 & 0.03687414741170095 & 1.001339200694919 & -0.07330500062608739 \\ 0.07238715785715838 & -0.01051641418185013 & 0.07870342721056436 & 0.9995780440441821 \end{array}\right]$$

Znamo da možemo načiniti hiperbolnu CS dekompoziciju matrice F,

$$F = UWV^T = U_{12}U_{34}W_{13}W_{24}V_{12}^T V_{34}^T.$$

U odjeljku 4.3 opisan je postupak za određivanje svih tih 6 *matrica. Taj postupak je jednostavno pretvoriti u program. Kao i prije, koristimo MATLAB i Symbolic Toolbox sa aritmetikom varijabilne preciznosti sa* 80 *dekadskih znamenaka. Kao izlazni podaci, te matrice su pretvorene u matrice dvostruke preciznosti.*

Sada možemo primijeniti na A *uzastopne transformacije kongruencije sa* U_{12}*,* U_{34}*,* W_{13}*,* W_{24}*,* V_{12}^T *i* V_{34}^T *i vidjeti kako i kojim redom se poništavaju izvandijagonalni elementi od* A*. Mi ćemo prikazati najzanimljivije fenomene. Neka je*

$$
\begin{aligned}
A^{(2)} &= U^T A U = U_{34}^T U_{12}^T A U_{12} U_{34}, \\
A^{(3)} &= W_{13}^T A^{(2)} W_{13}, \quad A^{(4)} = W_{24}^T A^{(3)} W_{24}, \\
A^{(6)} &= V A^{(4)} V^T = V_{34} V_{12} A^{(4)} V_{12}^T V_{34}^T.
\end{aligned}
$$

Pođimo redom. Matrice U_{12} *i* U_{34} *(odnosno matrica* U*) trebaju pripremiti matricu* A *kako bi hiperbolne rotacije* W_{13} *i* W_{24} *"blok dijagonalizirale" matricu* $A^{(2)}$*. Zadnje dvije kongruencije sa* V_{12}^T *i* V_{34}^T *služe za dijagonalizaciju dobivenih dijagonalnih blokova. Evo kako izgledaju matrice* $A^{(2)}$*,* $A^{(3)}$*,* $A^{(4)}$*, i* $A^{(6)}$*:*

$$
\left[\begin{array}{rr|rr}
1.08822346515594500 & 9.299521708882834-01 & -1.403526696245988-01 & -4.039179998224724-02 \\
9.299521708882834-01 & 5.36177653484405400 & -1.060107554620273-01 & -1.730067927851752-01 \\
\hline
-1.403526696245988-01 & -1.060107554620273-01 & 1.955255429095872-01 & 1.021147635887550-01 \\
-4.039179998224726-02 & -1.730067927851752-01 & 1.021147635887550-01 & 1.044744570904127-01
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{rr|rr}
1.07269072650096100 & 9.238952584600005-01 & -1.831867990631508-15 & -2.927062675041160-02 \\
9.238952584600005-01 & 5.36177653484405400 & -3.112673877916583-03 & -1.730067927851752-01 \\
\hline
-1.835337437583462-15 & -3.112673877916597-03 & 1.799928042546040-01 & 9.824814007065660-02 \\
-2.927062675041162-02 & -1.730067927851752-01 & 9.824814007065662-02 & 1.044744570904127-01
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{rr|rr}
1.07269072650096100 & 9.234314695820740-01 & -1.831867990631508-15 & -1.953298633949885-15 \\
9.234314695820740-01 & 5.35629537536138400 & -1.004708469198867-14 & -1.637578961322106-15 \\
\hline
-1.835337437583462-15 & -1.006139616066548-14 & 1.799928042546040-01 & 9.819882020000592-02 \\
-1.967176421757699-15 & -1.710871028182126e-15 & 9.819882020000594-02 & 9.899329760774431-02
\end{array}\right]
$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 8.821031015553899{-}01 & -9.159339953157542{-}16 & -6.831387316538583{-}16 & 1.446383537458862{-}15 \\ -8.881784197001252{-}16 & 5.546883000306955\,00 & -9.596581516298218{-}15 & -4.017911259345387{-}15 \\ \hline -6.828780846655310{-}16 & -9.650296458455715{-}15 & 2.457156394325458{-}01 & 2.775557561562891{-}17 \\ 1.445086068561601{-}15 & -3.964114150840219{-}15 & 3.469446951953614{-}18 & 3.327046242980235{-}02 \end{array}\right].$$

Ovdje smo ispustili oznaku eksponenta "e", ali smo zadržali predznak eksponenta i onda kada je pozitivan. Vidimo da kongruencija sa matricom W_{13} "poništava" tek $(1,3)$–element, dok sljedeća sa W_{24} poništava čak tri elementa u gornjem trokutu matrice, na pozicijama $(1,4)$, $(2,3)$ i $(2,4)$. Zadnje transformacije s V_{12}^T i V_{34}^T poništavaju elemente na pozicijama $(1,2)$, $(2,1)$ i $(3,4)$, $(4,3)$, respektivno, kako smo i predvidjeli.

Vlastite vrijednosti matrice H dobiju se kao produkt dijagonalnih elemenata matrica F^TAF i J: $\lambda_1 \approx 5.546883$, $\lambda_2 \approx 0.8821031$, $\lambda_3 \approx -0.2457156$ i $\lambda_4 \approx -0.03327046$. Pripadni vlastiti vektori su stupci od $Q = L^{-T}JF\Lambda_A^{\frac{1}{2}}$, a računaju se povratnim postupkom iz linearne jednadžbe $L^TX = JF\Lambda_A^{\frac{1}{2}}$.

Zahvala. Ovaj rad djelomično je financiran sredstvima projekta IP-2014-09-3670 Hrvatske zaklade za znanost. Jadna od tema tog projekta je dijagonalizaciju matrica malog reda uz tek nekoliko ravninskih transformacija. U ovom kao i u prethodnom radu [3] pokazano je da je to moguće, pa još preostaje pronaći i algoritme. {80}

Bibliografija

[1] Bunch J. R., Parlett B. N.: Direct methods for solving symmetric indefinite systems of linear equations. SIAM J. Numerical Analysis 8 (1971) 639–655.

[2] Hari, V., Singer, S., Singer, S.: Full Block J-Jacobi Method for Hermitian Matrices. Linear Algebra Appl. 444 (2014) 1–27.

[3] Hari, V., Zadelj-Martić, V., Kosinus-sinus dekompozicija ortogonalnih \linebreak matrica malog reda. Math.e, Vol.10, veljača 2007. (`http://e.math.hr/csdekompozicija/index.html`).

[4] N. Truhar, Relative perturbation theory for matrix spectral decompositions, Doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb (2000).

[5] Veselić, K.: A {J}acobi Eigenreduction Algorithm for Definite Matrix Pairs. Numer. Math. 64, (1) (1993) 241–269.

[6] Zadelj-Martić, V., Singularna dekompozicija matrice reda 2. Matematičko fizički list. 57 (2006/2007), 243-249.

ISSN 1334-6083