

Primljen / Received: 28.5.2015.

Ispravljen / Corrected: 10.3.2016.

Prihvaćen / Accepted: 6.5.2016.

Dostupno online / Available online: 10.7.2016.

# Alternativno rješenje za križno uslojene kompozitne debele ploče

## Autori:



Mr.sc. **Nurten Ateş**, dipl.ing.građ.  
Tehničko sveučilište u Istanbulu, Turska  
[nurtenates@hotmail.com](mailto:nurtenates@hotmail.com)



Mr.sc. **Gülçin Tekinu**, dipl.ing.građ.  
Tehničko sveučilište u Istanbulu, Turska  
[gulcintekin@itu.edu.tr](mailto:gulcintekin@itu.edu.tr)



Izv.prof.dr.sc. **Fethi Kadioğlu**, dipl.ing.građ.  
Tehničko sveučilište u Istanbulu, Turska  
[fkadioglu@itu.edu.tr](mailto:fkadioglu@itu.edu.tr)

Izvorni znanstveni rad

**Nurten Ateş, Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu**

## Alternativno rješenje za križno uslojene kompozitne debele ploče

U radu se opisuje analiza ortotropnih linearnoelastičnih križno uslojenih kompozitnih debelih ploča, pri čemu se u obzir uzima zajedničko djelovanje poprečnih posmičnih i normalnih naprezanja. Rješenja se dobivaju primjenom metoda funkcionalne analize u kombinaciji s Gâteauxovom derivacijom. Za potrebe analize razvijen je novi funkcional sa članovima za rubne uvjete. Primijenjen je serendipity element sa četiri čvora i osam stupnjeva slobode. Kako bi se potvrdila točnost novorazvijenoga mješovitog konačnog elementa, numerički su rezultati uspoređeni s objavljenim rješenjima. Utvrđeno je da je novorazvijeni element izuzetno točan i djelotvoran.

### Ključne riječi:

križno uslojeni laminat, kompozitne ploče debljeg presjeka, mješoviti konačni element, statička analiza, Gâteauxova derivacija

Original scientific paper

**Nurten Ateş, Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu**

## Alternative solution for cross-ply laminated composite thick plates

The structural analysis of orthotropic and linear elastic cross-ply laminated composite thick plates is made by considering complete effects of transverse shear and normal stresses. The solutions are obtained using the functional analysis method in conjunction with the Gâteaux differential. A new functional with boundary condition terms is developed for the analysis. A four-node serendipity element with eight degrees of freedom is used. To ensure the accuracy of the developed mixed finite element (MFE), numerical results are compared with those of the published solutions. It has been proven that the developed MFE is highly accurate and efficient.

### Key words:

cross-ply laminate, composite thick plates, mixed finite element, static analysis, Gâteaux differential

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

**Nurten Ateş, Gülçin Tekin, Fethi Kadioğlu**

## Alternativlösung für starke quer geschichtete Verbundplatten

In dieser Arbeit wird die Analyse orthotropischer linear elastischer quer geschichteter starker Verbundplatten beschrieben. Dabei wird die Wechselwirkung von Schub- und Normalspannungen berücksichtigt. Die Lösungen werden aufgrund von funktionalanalytischen Methoden in der Kombination mit der Gâteaux-Ableitung aufgezeigt. Für die Analyse wurde ein neues Funktional mit Gliedern zur Beschreibung der Randbedingungen entwickelt. Ein Serendipity-Element mit vier Knoten und acht Freiheitsgraden wurde implementiert. Um die Genauigkeit des neuen gemischten Finite Elementes zu prüfen, wurden die numerischen Resultate mit veröffentlichten Resultaten verglichen. Eine hohe Genauigkeit und Effizienz des neu entwickelten Elements konnte festgestellt werden.

### Schlüsselwörter:

quer geschichtetes Laminat, starke Verbundplatten, gemischte Finite Elemente, statische Analyse, Gâteaux-Ableitung

## 1. Uvod

Komponente konstrukcija izrađene od kompozitnih materijala sve se više primjenjuju u raznim područjima zbog povoljnih odnosa između čvrstoće i težine te krutosti i težine. Mehaničko ponašanje kompozitnih materijala predmet je brojnih istraživanja [1-2].

U posljednje se vrijeme sve više stavlja naglasak na analizu odziva lameliranih konstrukcijskih komponenata. U literaturi su opisani mnogi proračunski modeli koji se primjenjuju za analizu lameliranih kompozitnih ploča. Autori rada [3] analiziraju ortotropne ploče na temelju triju teorija (Kirchhoffova teorija, Reissner-Mindlinova teorija i teorija višeg reda) segmentacijskim postupkom rješavanja ortotropnih pravokutnih ploča slobodno oslonjenih na dva suprotna ruba te s bilo kakvim drugim uvjetima na preostala dva ruba. U radu [4] analizira se statično ponašanje ortotropnih pravokutnih debelih ploča, pri čemu se za analizu jednoliko opterećenih slobodno oslonjenih kvadratnih ploča različitih debljina i materijalnih svojstava rabe inicijalne funkcionalne metode. Metoda mješovitih konačnih elemenata primjenjuje se u [5] za rješavanje problema savijanja upetih anizotropnih / ortotropnih / izotropnih ploča promjenjive/konstantne debljine. U radu [6] upotrijebljena je bezmrežna metoda za statičku analizu i analizu slobodnih oscilacija posmične deformabilnih lameliranih kompozitnih ploča različitih odnosa raspona i debljine, te različitih koeficijenata materijala, rubnih uvjeta ili kutova pružanja slojeva. Varijable su predstavljene skupom prikladno raspoređenih čvorova, a uvjet spoja elemenata zadovoljen je bez dodatnih zahtjeva. Za zadovoljavanje geometrijskih rubnih uvjeta primijenjen je postupak kaznenih funkcija koji je djelotvorniji od Lagrangeovih multiplikatora i metode ortogonalne transformacije. U radu [7] prikazana je globalna-lokalna teorija s trodimenzionalnom korekcijom elastičnosti za analizu naprezanja i deformacije višeslojnih i sendvič ploča. Na temelju Galerkinove formulacije konačnih elemenata riješene su pripadne jednadžbe, pri čemu su upotrijebljeni Lagrangeovi elementi drugog reda. U radu [8] predložen je jednostavan mješoviti četverostrani trodimenzionalni pločasti element. Element, namijenjen linearnostatičkoj analizi i analizi izbočivanja ploča, ima šest stupnjeva slobode u svakom čvoru, što je pogodno za obnavljanje naprezanja u slučaju grubih mreža. Novi tenzor zakrivljenosti razvijen je u radu [9] za lameliranu kompozitnu ploču tipa Reddy, na temelju nove modificirane teorije spregnutih naprezanja. Slobodno oslonjena križno uslojena kompozitna ploča podvrgnuta djelovanju naprezanja u obliku sinusne funkcije riješena je primjenom novorazvijenog modela ploče. Jednostavna formulacija izoparametarskog konačnog elementa prikazana je u radu [10]. Ta se formulacija temelji na poboljšanoj teoriji posmične deformacije višeg reda koja se upotrebljava za analizu savijanja i slobodnog osciliranja lameliranih kompozitnih i sendvič-ploča. Predložena teorija uzima u obzir paraboličnu raspodjelu poprečnih posmičnih deformacija

po debljini ploče te utjecaje rotacijske inercije. Razmatra se utjecaj stupnja ortotropnosti, odnos raspona prema debljini te odnos raspona u dva smjera ploče na svojstvene frekvencije. Statička analiza, analiza slobodnih oscilacija i analiza izvijanja lameliranih kompozitnih ploča razmatraju se u [11] na temelju poboljšane teorije ploča sa četiri varijable. Predloženom metodom postižu se dobri rezultati iako svaki čvor ima samo četiri stupnja slobode.

U današnje se vrijeme provode opsežne analize lameliranih kompozitnih ploča i pritom se primjenjuju razne teorije posmične deformacije. U radu [12] predlaže se jednostavna teorija posmične deformacije prvoga reda kao podloga za analizu savijanja i slobodnog osciliranja slobodno oslonjenih antisimetričnih križno i kutno uslojenih kompozitnih ploča. Za razliku od postojeće teorije posmične deformacije prvog reda, teorija prikazana u tom radu sadrži samo četiri nepoznanice i u velikoj je mjeri podudarna s teorijom klasičnih ploča. Jednadžbe gibanja i rubni uvjeti izvedeni su iz Hamiltonovog pravila. Za slobodno oslonjene antisimetrične križno i kutno uslojene laminate dobivena su analitička rješenja. U radu [13] prikazana je formulacija obogaćenoga pločastog elementa prema teoriji posmične deformacije prvog reda. Kako bi se u obzir uzele ploče raznih geometrijskih oblika, na temeljni kvadratni laminat nanesen je proizvoljni četverokutni laminat. U radu [14] analizira se izvijanje i statička raspodjela poprečnih posmičnih naprezanja prema novoj teoriji inverzne hiperbolične posmične deformacije. Predloženom teorijom koja se temelji na funkciji oblika posmične deformacije dobiva se nelinearna raspodjela poprečnih posmičnih naprezanja, a također se ispunjavaju i prirodni rubni uvjeti bez sila. U radu [15] prikazuje se nova trigonometrijska teorija posmične deformacije koja se upotrebljava za analizu konačnih elemenata višeslojnih debelih ploča. Odabrani element je četveročvorni četverokut sa sedam stupnjeva slobode u svakom čvoru. Nova trigonometrijska teorija posmične deformacije višeg reda, kojom se u obzir uzima adekvatna raspodjela poprečne posmične deformacije po debljini ploče, s rubnim uvjetima bez tangencijalnih naprezanja po rubu ploče, razvijena je u radu [16] za izotropne i kompozitne lamelirane i sendvič-ploče. Nova trigonometrijska teorija posmične deformacije višeg reda, kojom se u obzir uzima adekvatna raspodjela poprečne posmične deformacije po debljini ploče, s tangencijalnim rubnim uvjetima bez naprezanja po rubu ploče, prikazana je u radu [17] za elastične kompozitne/sendvič-ploče i ljuske. Za izvod pripadnih jednadžbi i rubnih uvjeta primijenjen je princip virtualnih radova. Rješenje je u zatvorenom obliku Navierovog tipa. U radu [18] prikazuje se analiza ortotropnih lameliranih kompozitnih debelih ploča utemeljena na teoriji posmične deformacije višeg reda, kojom se u obzir uzimaju parabolične raspodjele poprečnih posmičnih naprezanja, i kod koje se ne treba koristiti faktorima korekcije posmika. Program za proračun konačnim elementima razvijen je pomoću *serendipity* elementa sa sedam stupnjeva slobode u svakom čvoru. U radu [19] analizira se savijanje, osciliranje i izvijanje slobodno oslonjenih ortotropnih pravokutnih debelih

ploča i laminata na temelju trodimenzionalnoga linearnog rješenja prema teoriji elastičnosti za male pomake. Rješenjem su dobiveni jednostavni beskonačni redovi za naprezanja i pomake pri savijanju i prisilnom osciliranju, te karakteristične jednačbe u zatvorenom obliku za probleme slobodnog osciliranja i izvijanja. U radu [20] primjenjuju se analitički postupci i metoda konačnih elemenata za određivanje statičkog ponašanja antisimetričnih kutno uslojenih posmičnofleksibilnih spojenih ploča srednje debljine pod utjecajem jednoliko raspodijeljenog opterećenja. Za rješenje konačnim elementima upotrijebljen je četverostrani element s četiri čvora, dok je za analitička istraživanja primijenjen Navierov pristup utemeljen na Reissner-Mindlinovoj teoriji posmične deformacije.

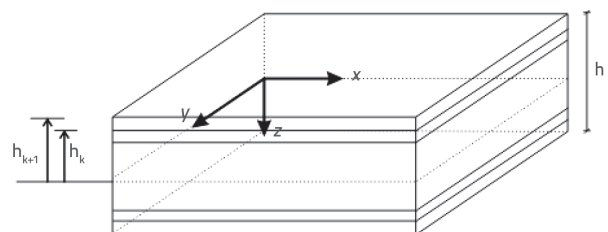
U ovom je istraživanju izveden novi funkcional za statičku analizu simetričnih križno uslojenih debelih ploča, pri čemu je primijenjen sustavan postupak utemeljen na Gâteauxovoj derivaciji. Prema spoznajama autora, do sada još nije opisan funkcional lameliranih kompozitnih debelih ploča koji se temelji na metodi mješovitih konačnih elemenata. U ovom je radu prikazana primjena djelotvorne i jednostavne metode za statičku analizu simetričnih križno uslojenih kompozitnih debelih ploča utemeljena na Gâteauxovoj derivaciji. Metoda Gâteauxove derivacije snažnije je, pouzdanije i djelotvornije varijacijsko sredstvo od prihvaćenijih varijacijskih načela Hellinger-Reissnera (HR) i Hu-Washizua (HW), te se odlikuje brojnim prednostima u odnosu na ta načela. Spomenuti postupci detaljno se uspoređuju u radovima [21, 22]. Metoda Gâteauxove derivacije prvi je put upotrijebljena u [23]. U novije su vrijeme Aköz i njegovi suradnici uspješno upotrijebili metodu Gâteauxove derivacije za razvijanje funkcionala koji se može primijeniti u rješavanju brojnih problema [24-29]. Matematički postupak i prednosti ove metode detaljno su objašnjeni u dobro dokumentiranoj studiji prikazanoj u radu [27]. Radi jednostavnosti, u nastavku se ukratko prikazuju samo neke od bitnih prednosti postupka Gâteauxove derivacije:

- Sve diferencijalne jednačbe mogu se sustavno izraziti funkcionalom. Na primjer, konvencionalna varijacijska načela HR i HW ne mogu se primijeniti na diferencijalnu jednačbu za koju unaprijed nisu poznati stacionarni funkcionalni i rubni uvjeti problema koji se razmatra, dok se u istom slučaju metoda Gâteauxove derivacije ipak može primijeniti. Matematički je postupak detaljno opisan u radu [30].
- Diferencijalne jednačbe polja mogu se provjeriti ispitivanjem potencijala kako je to opisano u [34]. Metoda Gâteauxove derivacije može se primijeniti ako je oblik diferencijalnog operatora potencijalan (pozitivno definitan i samoadjungiran). Za određivanje parametara i predznaka rubnih uvjeta pomoću konvencionalnih postupaka (HR i HW) potrebno je odgovarajuće iskustvo.
- Pojava zaostajanja posmika (engl. *shear locking*) potpuno je onemogućena primjenom novorazvijenoga mješovitog elementa. Prethodne studije koje su izradili Aköz i njegovi suradnici pokazuju da se primjenom ovog postupka izbjegava zaostajanje posmika [30, 32].

Za potrebe ove analize oblikovan je novi mješoviti konačni element sa četiri čvora, svaki s osam stupnjeva slobode. Za programsku realizaciju mješovitog konačnog elementa upotrijebljen je programski jezik FORTRAN. Ovo opsežno parametarsko istraživanje provedeno je kako bi se odredilo na koji način na komponente pomaka i naprezanja utječu načini uslojenosti, broj slojeva, odnos između raspona i debljine, rubni uvjeti i varijacije geometrijskih i materijalnih svojstava. Valjanost prikazane formulacije mješovitoga konačnog elementa dokazana je uspoređivanjem dobivenih rezultata s odgovarajućim rezultatima iz literature. Numerička usporedba pokazuje da su rezultati prikazani u ovom istraživanju podudarni s rezultatima iz literature.

## 2. Diferencijalne jednačbe

Analizira se lamelirana ploča pravokutnog presjeka debljine  $h$  sa  $k$  ortotropnih slojeva, koja je prikazana na slici 1.



Slika 1. Križno uslojena kompozitna ploča sa  $k$  slojeva

U srednjoj ravnini ploče definiran je Kartezijev koordinatni sustav  $(x, y, z)$ . Diferencijalne jednačbe debele ploče prikazane su u [33], a za potrebe ovog istraživanja diferencijalne jednačbe za simetrične križno uslojene kompozitne ploče mogu se iskazati kako slijedi:

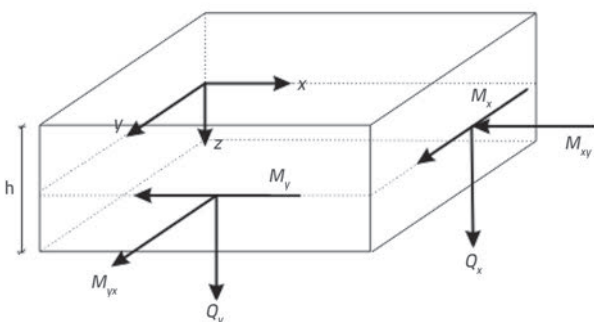
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \\
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\
 \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \left( M_x - \mu_{xy} M_y - \frac{qh^2}{10} \mu_{xz} q \right) &= 0 \\
 \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} - \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \left( M_y - \mu_{yx} M_x - \frac{qh^2}{10} \mu_{yz} q \right) &= 0 \\
 \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial x} - \frac{Q_{11}}{G_{xy} D_{11}} M_{xy} &= 0 \\
 \Omega_x + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{6}{5G_{xz} h} Q_x &= 0 \\
 \Omega_y + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{6}{5G_{yz} h} Q_y &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdje je  $q$  jednoliko opterećenje nanoseno na gornju površinu lamelirane ploče.  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x$  i  $Q_y$  su rezultante momenata i rezultante poprečnih sila, a njihove su pozitivne orijentacije prikazane na slici 2.  $w$  i  $\Omega_x$  su geometrijski parametri koji označavaju pomak točke (z) lamelirane ploče i rotaciju poprečnog presjeka oko osi x.

Matrica krutosti na savijanje,  $D_{ij}$  u diferencijalnim jednadžbama definirana je kako slijedi:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij}^{(k)}) \cdot (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2)$$

gdje su  $z_{k+1}$  i  $z_k$  koordinate gornjih i donjih površina sloja k.



Slika 2. Unutarnje sile

Dvodimenzionalne jednadžbe naprezanja-deformacije za sloj k, pod pretpostavkom ravninskog naprezanja, mogu se za ortotropne materijale svakog sloja lameliranih kompozitnih ploča izraziti kako slijedi:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3)$$

gdje su  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  naprezanja dok su  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$  komponente linearne deformacije koje se odnose na glavne materijalne koordinate sloja.  $Q_{ij}^{(k)}$  su elastične konstante sloja k. One se mogu iskazati ovako:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \\ Q_{12} = Q_{21} &= \frac{\mu_{12}E_2}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (4)$$

gdje je  $E_i$  modul elastičnosti u materijalnom smjeru i,  $\mu_{ij}$  je Poissonov koeficijent, a  $G_{ij}$  je posmični modul u ravnini i-j. Konstitucijske jednadžbe ortotropnog sloja k transformirane su u koordinate laminata (x, y, z) na sljedeći način:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = [\bar{Q}_{ij}^{(k)}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (5)$$

gdje su  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  transformirane elastične konstante matrice krutosti u odnosu na koordinate laminata (x, y, z) [2]. Elementi matrice  $\bar{Q}_{ij}$  mogu se iskazati kako slijedi:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

gdje je  $\theta$  kut između globalne osi i lokalne osi x svakog sloja.

### 3. Gâteauxova derivacija i funkcional

Diferencijalne jednadžbe lameliranih kompozitnih debelih ploča mogu se u operatorskom obliku izraziti kao:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (7)$$

gdje  $\mathbf{L}$  predstavlja matricu koeficijenta,  $\mathbf{y}$  predstavlja vektor nepoznanica ( $\mathbf{y} = \{w, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, \Omega_x, \Omega_y\}$ ), dok je  $\mathbf{f}$  vektor opterećenja.

Prirodni i geometrijski rubni uvjeti kompozitnih ploča mogu se iskazati kako slijedi:

*prirodni rubni uvjeti*

$$\begin{aligned} M - \hat{M} &= 0 \\ Q - \hat{Q} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

*geometrijski rubni uvjeti*

$$\begin{aligned} -\Omega + \hat{\Omega} &= 0 \\ -w + \hat{w} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Gâteauxova derivacija operatora definira se kao

$$dQ(u; \bar{u}) = \frac{\partial Q(u + \tau \bar{u})}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \quad (10)$$

gdje je  $\tau$  skalar. Nuždan je i dovoljan uvjet da operator  $\mathbf{Q}$  bude potencijal [34]:

$$\langle dQ(y; \bar{y}), y^* \rangle = \langle dQ(y; y^*), \bar{y} \rangle \quad (11)$$

gdje simboli  $\langle \cdot \rangle$  označavaju skalarni umnožak. Uz udovoljavanje tog zahtjeva, funkcional koji odgovara diferencijalnim jednadžbama jest:

$$I(\mathbf{y}) = \int_0^1 \langle \mathbf{Q}(\mathbf{s}, \mathbf{y}), \mathbf{y} \rangle ds \quad (12)$$

gdje je  $s$  skalarna veličina. Eksplicitni oblik funkcionala koji odgovara diferencijalnim jednažbama za križno uslojene kompozitne debele ploče debljine  $h$  jest:

$$I(\mathbf{y}) = [M_x, \Omega_{x_x}] + [M_{xy}, \Omega_{x_y}] + [M_{yx}, \Omega_{y_x}] + [M_y, \Omega_{y_y}] + [Q_x, \Omega_x] + [Q_y, \Omega_y] + [Q_x, w_x] + [Q_y, w_y] - [q, w] - \frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}} \{ [M_x, M_x] - 2\mu_{xy} [M_x, M_y] + [M_y, M_y] + 2(1 + \mu_{xy}) [M_{xy}, M_{xy}] \} + \frac{Q_{11} h^2}{E_x D_{11} 10} \{ \mu_{xz} [q, M_x] + \mu_{yz} [q, M_y] \} - \frac{3}{5G_{xz} h} [Q_x, Q_x] - \frac{3}{5G_{yz} h} [Q_y, Q_y] - [\hat{M}, \hat{\Omega}] - [\hat{Q}, w] - [(w - \hat{w}), Q] - [(\Omega - \hat{\Omega}), M] \quad (13)$$

Veličine s "kapiicom" poznate su vrijednosti na rubu. Zagrade s indeksima  $\varepsilon$  i  $\sigma$  označavaju geometrijske i prirodne rubne uvjete. Rubni uvjeti se eksplicitno mogu izraziti kako slijedi:

$$[Q, w] = [(Q_x n_x + Q_y n_y), w] \quad (14)$$

$$[M, \Omega] = [(M_x n_x + M_{xy} n_y), \Omega_x] + [(M_{xy} n_x + M_y n_y), \Omega_y]$$

#### 4. Formulacija konačnog elementa

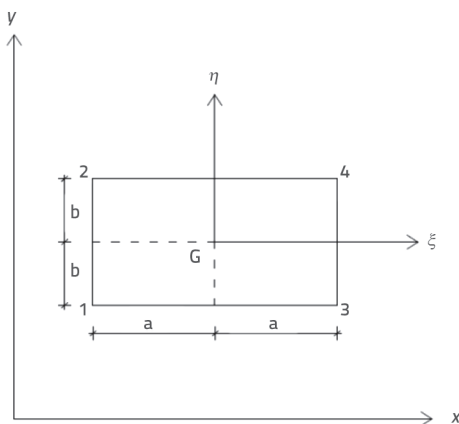
Za pravokutni element sa slike 3., s funkcijom oblika

$$\Psi_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1; i = 1, \dots, 4 \quad (15)$$

sve se nepoznate varijable funkcionala mogu izraziti pomoću interpolacijskih funkcija, primjerice:

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \Psi_i \quad (16)$$

gdje je  $n$  broj čvorova konačnog elementa. Upotrijebljen je *serendipity* element s četiri čvora i osam stupnjeva slobode na svakom čvoru.



Slika 3. Osnovni pravokutni element

Uvrštavanjem navedenih definicija u jednažbu (13) dobivaju se matrica elementa i vektor opterećenja:

$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$	$Q_x$	$Q_y$	$\Omega_x$	$\Omega_y$	$w$	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	

$$[K] = \begin{bmatrix} 2\gamma_1 [k_1] & \gamma_2 [k_1] & 0 & 0 & 0 & [k_2]^T & 0 & 0 \\ \gamma_2 [k_1] & 2\gamma_3 [k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & [k_3]^T & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma_4 [k_1] & 0 & 0 & [k_3]^T & [k_2]^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\gamma_5 [k_1] & 0 & [k_1] & 0 & [k_2]^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_6 [k_1] & 0 & [k_1] & [k_3]^T \\ [k_2] & 0 & [k_3] & [k_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k_3] & [k_2] & 0 & [k_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [k_2] & [k_3] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_7 [k_1] q \\ \gamma_8 [k_1] q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [k_1] q \end{bmatrix} \quad (18)$$

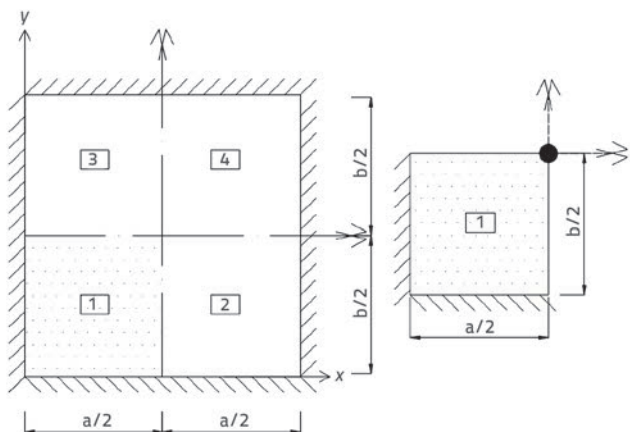
gdje su:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}}, & \gamma_5 &= -\frac{3}{5G_{xz} h} \\ \gamma_2 &= \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \mu_{xy}, & \gamma_6 &= -\frac{3}{5G_{yz} h} \\ \gamma_3 &= -\frac{Q_{11}}{2E_x D_{11}} \frac{\mu_{xy}}{\mu_{yx}}, & \gamma_7 &= -\frac{1}{E_x D_{11}} \frac{Q_{11}}{10} \mu_{xz} h^2 \\ \gamma_4 &= -\frac{Q_{11}}{2D_{11} G_{xy}}, & \gamma_8 &= -\frac{1}{E_y D_{22}} \frac{Q_{22}}{10} \mu_{yz} h^2 \end{aligned} \quad (19)$$

U prilogu 1 prikazan je eksplicitni oblik podmatrica četverokutnog elementa  $[k_1]$ ,  $[k_2]$ ,  $[k_3]$  i operatorski oblik diferencijalnih jednažbi.

#### 5. Numerički primjeri

Učinkovitost metode ispitana je pomoću sljedećih problema za ploče. U svim je primjerima upotrijebljena četvrtina pravokutne ploče, kao što je prikazano na slici 4. Osim toga, za sve se slojeve pretpostavlja jednaka debljina i jednaka ortotropna svojstva materijala.



Slika 4. Geometrijska svojstva slobodno oslonjene pravokutne ploče

### 5.1. Primjer 1

Razmatra se ortotropna slobodno oslonjena kvadratna debela ploča pod jednoliko raspodijeljenim opterećenjem. Kako bi se odabrala mreža odgovarajuće gustoće, razmatraju se rezultati statičke analize lameliranih ploča (0°) na mrežama s različitim brojem elemenata. Povećanje broja elemenata navedeno je u prvom stupcu tablice 1.

Svojstva materijala su:

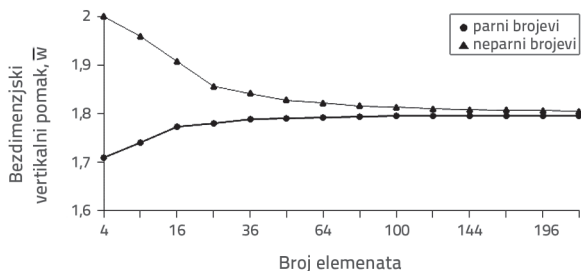
$$E_x / E_y = 25; \mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0,25; G_{xy} = G_{xz} = 0,5 E_y; G_{yz} = 0,2 E_y$$

Za omjer raspona i debljine (parametar debljine)  $a/h = 5$  izračunava se pomak središnje točke ( $w$ ) i momenti savijanja

( $M_x, M_y$ ) jednoslojne lamelirane ploče. Rezultati su prikazani u bezdimenzijskom obliku te su uspoređeni s rezultatima iz literature. U nastavku su iskazani bezdimenzijski izrazi za vertikalni pomak i momente savijanja:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \bar{w} = w \frac{E_y h^3}{q_0 a^4} 10^2$$

$$M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \bar{M} = \frac{M}{q_0 a^2}$$
(20)



Slika 5. Ispitivanje konvergencije pomaka slobodno oslonjene jednoslojne (0°) ploče

Odnos između bezdimenzijskog vertikalnog pomaka i broja elemenata prikazan je na slici 5. Numerički rezultati konvergiraju odozgo i odozdo, ovisno o parnom ili neparnom broju elemenata. Konvergencija posmičnih sila vrlo je slična konvergenciji momenata savijanja i vertikalnog pomaka, pa su zato rezultati prikazani samo za vertikalni pomak. Iz tablice 1. se može vidjeti da su rezultati ovdje prikazanog modela podudarni s rezultatima iz [35, 36].

Tablica 1. Bezdimenzionalni vertikalni pomak ( $\bar{w}$ ) i vrijednosti momenata savijanja ( $\bar{M}_x, \bar{M}_y$ ) za slobodno oslonjenu debelu ploču s različitim brojem elemenata

Broj elemenata	$\bar{w}$		$\bar{M}_x$			$\bar{M}_y$			
	Ovo istraživanje	[35]	[36]	Ovo istraživanje	[35]	[36]	Ovo istraživanje	[35]	[36]
4	1,7090	1,7097	1,8159	0,1138	0,1138	0,1206	0,0085	0,0085	0,0109
9	1,9590	1,9584		0,1315	0,1316		0,0125	0,0125	
16	1,7740	1,7746		0,1189	0,1189		0,0100	0,0100	
25	1,8560	1,8565		0,1245	0,1246		0,0115	0,0115	
36	1,7880	1,7885		0,1199	0,1199		0,0104	0,0104	
49	1,8280	1,8271		0,1226	0,1226		0,0112	0,0112	
64	1,7920	1,7931		0,1202	0,1202		0,0106	0,0106	
81	1,8160	1,8163		0,1218	0,1218		0,0111	0,0111	
100	1,7950	1,7947		0,1204	0,1203		0,0107	0,0107	
121	1,8100	1,8101		0,1214	0,1214		0,0110	0,0110	
144	1,7960	1,7962		0,1204	0,1204		0,0107	0,0107	
169	1,8070	1,807		0,1212	0,1212		0,0110	0,0110	
196	1,7960	1,7963		0,1205	0,1205		0,0108	0,0108	
225	1,8050	1,8039		0,1211	0,1206		0,0109	0,0109	



### 5.2. Primjer 2

Razmatra se ortotropna slobodno oslonjena križno uslojena (0°/90°/0°) kvadratna ploča pod jednoliko raspodijeljenim opterećenjem. Na četvrtini ploče upotrijebljena je pravilna mreža sa 225 elemenata (15x15).

Svojstva materijala su:

$$E_1 = 25E_2; G_{12} = G_{13} = 0,5E_2; \mu_{12} = 0,25$$

Bezdimenzijski vertikalni pomaci ( $\bar{w}$ ) uslojene debele ploče (0°/90°/0°), s različitim vrijednostima parametra debljine a/h, uspoređeni su s prije objavljenim rezultatima [2, 37], kao što je prikazano u tablici 2. Kao što se u tablici može vidjeti, rezultati dobiveni pomoću ovdje prikazane metode mješovitih konačnih elemenata izrazito su podudarni s dostupnim rješenjima. Općenito uzevši, rezultati za moment savijanja i posmičnu silu također su izrazito točni, ali treba napomenuti da su prikazani samo rezultati vertikalnog pomaka. Bezdimenzijski je izraz za vertikalni pomak:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \bar{w} = w \frac{E_2 h^3}{q_0 a^4} 10^2 \quad (21)$$

Tablica 2. Vrijednosti bezdimenzionalnog vertikalnog pomaka ( $\bar{w}$ ) za slobodno oslonjenu debelu ploču i za različite vrijednosti parametra debljine, a/h

$\frac{a}{h}$	$\bar{w}$		
	Ovo istraživanje	[2]	[37]
10	1,0160	1,0219	1,0221
20	0,7548	0,7572	0,7574
100	0,6681	0,6697	0,6698

### 5.3. Primjer 3

Razmatra se upeta simetrična križno uslojena (0°/90°/0°) ortotropna debela ploča pod jednoliko raspodijeljenim opterećenjem ( $p_0$ ). Vrijednost bezdimenzijskog vertikalnog pomaka ( $\bar{w}$ ) lamelirane debele ploče izračunana je za četvrtinu ploče pomoću pravilne mreže sastavljene od 169 elemenata (13x13). Bezdimenzijski je izraz za pomak u ovom primjeru:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \bar{w} = w \left(\frac{10^6}{p_0}\right) \quad (22)$$

Svojstva materijala su:

$$E_1 = 20,83 \times 10^6 \text{ psi (po kvadratnom inču)}, E_2 = 10,94 \times 10^6 \text{ psi}, G_{12} = 6,1 \times 10^6 \text{ psi}, G_{13} = 3,71 \times 10^6 \text{ psi}, G_{23} = 6,19 \times 10^6 \text{ psi}, \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0,44, \text{ pri čemu je } 1 \text{ psi} = 6,895 \cdot 10^3 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

Numerički rezultati bezdimenzijskog pomaka središnje točke ( $\bar{w}$ ) prikazani su u tablici 3. za različite odnose debljine i duljine (h/a) te duljine i širine (odnos raspona u dva smjera: a/b). Ti su rezultati uspoređeni s odgovarajućim rezultatima iz literature [38]. Iako su metodom prikazanom u radu postignuti dobri rezultati za moment savijanja i posmičnu silu, u ovom su primjeru za usporedbu dani rezultati vertikalnog pomaka. Kao što se vidi iz tablice, rezultati dobiveni prikazanim postupkom u dobroj su sukladnosti s rezultatima iz literature, pa se stoga metodologija prikazana u ovom istraživanju može smatrati pouzdanom. Osim toga, jasno je pokazano da se progib uvijek smanjuje pri povećanju vrijednosti omjera raspona (a/b) ploče.

Tablica 3. Vrijednosti vertikalnog bezdimenzijskog pomaka ( $\bar{w}$ ) upete debele ploče za razne odnose h/a i a/b

$\frac{a}{b}$	$\frac{h}{a}$	$\bar{w}$	
		Ovo istraživanje	[38]
1	0,2	42,1000	41,7590
	0,14	93,8200	92,7280
3	0,2	3,8680	3,8696
	0,14	6,7160	6,6931
5	0,2	1,2160	1,2192
	0,14	1,8900	1,8902

### 5.4. Primjer 4

Razmatra se rješenje simetrične križno uslojene (0°/90°/90°/0°) ploče s dva suprotna slobodno oslonjena ruba, dok su preostala dva ruba upeta, pod jednoliko raspodijeljenim opterećenjem. Na jednoj četvrtini ploče upotrijebljena je pravilna mreža s 169 elemenata (13x13).

Pripadna su svojstva materijala:

$$E_x/E_y=1; 10 \text{ (analizirani pojedinačno)}; G_{xy} = G_{xz} = 0,5E_y; G_{yz} = 0,2E_y; \mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0,3$$

Bezdimenzijski pomak središnje točke, momenti savijanja i posmične sile izračunani su prema bezdimenzijskim izrazima (23) za razne odnose raspona i debljine (a/h) ploče, kako je prikazano u tablici 4.

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \bar{w} = w \frac{E_y h^3}{q_0 a^4} 10^2$$

$$M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \rightarrow \bar{M} = \frac{M}{q_0 a^2} \quad (23)$$

$$Q\left(\frac{a}{2}, 0\right) \rightarrow \bar{Q} = \frac{Q}{q_0 a}$$

Iz rezultata se vidi da se s povećanjem odnosa  $E_x/E_y$  povećavaju i vrijednosti  $M_x$  i  $Q_x$  dok se vrijednosti  $M_y$  i  $Q_y$  smanjuju.

Tablica 4. Vrijednosti bezdimenziojskog vertikalnog pomaka, momenata savijanja i posmičnih sila za dva suprotna slobodno oslonjena ruba i za preostala dva upeta ruba, pri jednoliko raspodijeljenom opterećenju, za razne odnose  $a/h$

$\frac{a}{h}$	$E_x / E_y = 1$					$E_x / E_y = 10$				
	$\bar{w}$	$\bar{M}_x$	$\bar{M}_y$	$\bar{Q}_x$	$\bar{Q}_y$	$\bar{w}$	$\bar{M}_x$	$\bar{M}_y$	$\bar{Q}_x$	$\bar{Q}_y$
5	3,2510	0,0292	0,0326	0,2682	0,4632	1,8510	0,0667	0,0271	0,3422	0,3676
10	2,3320	0,0248	0,0318	0,2589	0,4964	1,1000	0,0656	0,0262	0,3441	0,4001
20	2,0810	0,0235	0,0316	0,2558	0,5085	0,9074	0,0651	0,0261	0,3450	0,4199
50	2,0080	0,0231	0,0315	0,2554	0,5132	0,8524	0,0648	0,0261	0,3454	0,4272
100	1,9980	0,0230	0,0315	0,2554	0,5141	0,8445	0,0648	0,0261	0,3456	0,4284

## 6. Zaključak

Statička analiza simetričnih križno uslojenih kompozitnih debelih ploča provedena je pomoću mješovitih konačnih elemenata. Primjenom Gâteauxove derivacije razvijen je novi funkcional za lamelirane kompozitne debele ploče. Na temelju formulacije razvijene mješovite metode konačnih elemenata, kao primjeri su upotrijebljene simetrične križno uslojene kompozitne debele ploče s različitim brojem slojeva kako bi se numerički ocijenila varijacija geometrijskih i materijalnih parametara te rubni uvjeti s pomacima i rezultatima momenata i poprečnih sila. Usporedbom rezultata dobivenih u ovom radu s rezultatima iz literature ustanovljeno je da između njih postoji dobra podudarnost. Rezultati numeričkih primjera potvrđuju valjanost i djelotvornost ove analize. Sljedeći se zaključci mogu izvesti

iz teorijskih postavki i numeričkih analiza novorazvijenog mješovitog konačnog elementa:

- Za križno uslojene kompozitne debele ploče izveden je novi funkcional primjenom sustavnog postupka utemeljenog na Gâteauxovoj derivaciji. Funkcional ima deset neovisnih varijabli.
- Osim toga određeni su geometrijski i prirodni rubni uvjeti.
- Razvijen je i poseban program za mješovite konačne elemente s osam neovisnih varijabli. Kako funkcional sadrži samo prve derivacije varijabli, odgovarajuća formulacija elemenata za funkciju oblika N mora udovoljavati samo zahtjevima  $C^0(r)$ .
- Razvijenim mješovitim konačnim elementom mogu se izravno izračunati pomaci i unutarnje sile bez dodatnih matematičkih operacija. Mješoviti konačni element nije podložan zaostajanju posmika.

## LITERATURA

- [1] Jones, R.M.: *Mechanics of Composite Materials*, Taylor&Francis. Inc. Philadelphia. USA, pp. 187-201, 1999.
- [2] Reddy, J.N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis*, Second Edition, 2004 by CRC Press LLC, 1945.
- [3] Kant, T., Gadhil, M.G.: Analysis of Orthotropic Plates Based on Three Theories by Segmentation Method, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 9(2002), pp. 189-239, <http://dx.doi.org/10.1080/15376490290096937>
- [4] Iyengar, K.T.S.R., Pandya, S.K.: Analysis of Orthotropic Rectangular Thick Plates, *Fire Science and Technology*, 18(1983), pp. 19-36
- [5] Gopalsamy, S., Balasundaram, S., Bhattacharyya, P.K.: On a Mixed finite element method for clamped anisotropic plate bending problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(1989), pp. 1351-1370, <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620280609>
- [6] Dia, K.Y., Liua, G.R., Lima, K.M., Chena, X.L.: A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibrations*, 269 (3-5), pp. 633-652, 2004., [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00089-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00089-0)
- [7] Khalili, S. M. R., Shariyat, M., Rajabi, I.: A finite element based global-local theory for static analysis of rectangular sandwich and laminated composite plates, *Composite Structures*, 107(2014), pp. 177-189, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.07.043>
- [8] Barbero, E. J., Madeo, A., Zagari, G., Zinno, R., Zucco, G.: A mixed isostatic 24 dof element for static and buckling analysis of laminated folded plates, *Composite Structures*, 116(2014), pp. 223-234, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.003>
- [9] Chen, W., Ma Xu, M., Li, L.: A model of composite laminated Reddy plate based on new modified couple stress theory, *Composite Structures*, 94(2012), pp. 2143-2156, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.02.009>
- [10] Tu, T. M., Thach, L. N., Quoc, T. H.: Finite element modeling for bending and vibration analysis of laminated and sandwich composite plates based on higher-order theory, *Computational Materials Science* 49(2010), pp. S390-S394, <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.03.045>
- [11] Tran, L. V., Thai, C. H., Le, H. T., Gan, B. S., Lee, J., Nguyen-Xuan, H.: Isogeometric analysis of laminated composite plates based on a four-variable refined plate theory, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 47(2014), pp. 68-8, <http://dx.doi.org/10.1016/j.engabound.2014.05.013>



- [12] Thai H-T, Choi, D-H.: A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite Structures*, 106(2013), pp. 754-763, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.013>
- [13] Rango, R.F., Nallim, L. G., Oller, S.: Static and dynamic analysis of thick laminated plates using enriched macroelements, *Composite Structures*, 101(2013), pp. 94-103, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.01.028>
- [14] Grover, N., Maiti, D. K., Singh, B. N.: A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite Structures*, 95(2013), pp. 667-675, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.012>
- [15] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C.: A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates, *Computers and Structures*, 94-95(2012), pp. 45-53, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.12.003>
- [16] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C.: A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates, *International Journal of Solids and Structures*, 49(2012), pp. 43-53, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.09.008>
- [17] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C.: Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, 94(2011), pp. 37-49, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.020>
- [18] Pervez, T., Seibi, A.C., Al-Jahwari, F.K.S.: Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory, *Composite Structures*, 71(3-4), pp. 414-422, 1970.
- [19] Srinivas, S., Rao, A.K.: Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates, *International Journal of Solids and Structures*, 6, pp. 1463-1481, 1970., <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.09.014>
- [20] Kabir, H.R.H.: Static responses of anti-symmetrical angle-ply laminated shear-flexible clamped plates. *Computers and Structures*, 53(1994) 1, pp. 201-208, [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(70\)90076-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(70)90076-4)
- [21] Omurtag, M.H., Kadioğlu, F.: Free vibration analysis of orthotropic plates resting on Pasternak foundation by mixed finite element formulation. *Computers and Structures*, 67(1998), pp. 253-265, [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)90142-2](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(94)90142-2)
- [22] Omurtag, M.H., Özütok, A., Aköz, A.Y.: Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gâteaux differential. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(1997), pp. 295-317, [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(97\)00128-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00128-4)
- [23] Aköz, A.Y., Özçelikörs, Y.: A new functional for plates and a new finite element formulation. *9<sup>th</sup> National Applied Mechanics Meeting* (in Turkish), Bayramoğlu-Kocaeli, pp. 113-123, 1985., [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970130\)40:2<295::AID-NME66>3.0.CO;2-2](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970130)40:2<295::AID-NME66>3.0.CO;2-2)
- [24] Aköz, A.Y., Kadioğlu, F.: The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(1999), pp. 1909-1932
- [25] Kadioğlu, F., Aköz, A.Y.: The mixed finite element for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic circular beams. *International Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 15(2003), pp. 735-752, [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990430\)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990430)44:12<1909::AID-NME573>3.0.CO;2-P)
- [26] Aköz, A.Y., Kadioğlu, F., Tekin, G.: Quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic plates. *Mechanics of Time Dependent Materials*, 19(2015) 45, pp. 483-503, <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2003.15.6.735>
- [27] Aköz, A.Y., Özütok, A.: A functional for shells of arbitrary geometry and a mixed finite element method for parabolic and circular cylindrical shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(2000), pp. 1933-1981, <http://dx.doi.org/10.1007/s11043-015-9274-8>
- [28] Kadioğlu, F., İyidoğan C.: Free vibration of laminated composite curved beams using mixed finite element formulation. *Science and Engineering of Composite Materials*, 16(2009) 4, pp. 247-257, [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000430\)47:12<1933::AID-NME860>3.0.CO;2-0](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000430)47:12<1933::AID-NME860>3.0.CO;2-0)
- [29] Özütok, A., Madenci, E., Kadioğlu, F.: Free vibration analysis of angle-ply laminate composite beams by mixed finite element formulation using the Gâteaux differential. *Science and Engineering of Composite Materials*, 21(2014) 2, pp. 257-266, <http://dx.doi.org/10.1515/SECM.2009.16.4.247>
- [30] Aköz, A.Y., Omurtag, M.H., Doğruoğlu, A.N.: The mixed finite element formulation for three dimensional bars. *International Journal of Solids and Structures*, 28(1991) 2, pp. 225-234, <http://dx.doi.org/10.1515/semc-2013-0043>
- [31] Mang, H.A., Hofstetter, G., Gallagher, R.H.: On an alleged philosopher's stone concerning variational principles with subsidiary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(1985), pp. 1971-1999, [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90207-V](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(91)90207-V)
- [32] Eratli, N, Aköz, A.Y.: The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations. *Computers and Structures*, 65 (1997) 4, pp. 515-529, <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620211104>
- [33] Panc., V.: *Theories of elastic plates*, Noordhoff International, Holland, 1975., [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(96\)00403-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00403-8)
- [34] Oden, J.T., Reddy, J.N.: *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Berlin, 1976.
- [35] Çalıřkan, H.: Static and dynamic analysis of orthotropic thick plates. *M.Sc. Dissertation*, Department of Civil Engineering, Istanbul Technical University, Istanbul, 2007., <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-96312-4>
- [36] Reddy, J.N.: *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley&Sons, 1984.
- [37] Civalek, Ö.: Analysis of Thick Rectangular Plates with Symmetric Cross-ply Laminates Based on First-order Shear Deformation Theory, *Journal of Composite Materials*, 42 (2008) 26, pp. 2853-2867
- [38] Liew, K.M., Han, J.B., Xiao, Z.M.: Differential Quadrature Method for Thick Symmetric Cross-Ply Laminates with First-Order Shear Flexibility, *International Journal of Solids and Structures*, 33(1996) 18, pp. 2647-2658

**Prilog I**

Operatorski je oblik diferencijalnih jednađzbi  $Q = Ly-f$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{17} & P_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{24} & 0 & P_{26} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{35} & P_{36} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{42} & 0 & P_{44} & P_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{53} & P_{54} & P_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{62} & P_{63} & 0 & 0 & P_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{71} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{81} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ w \\ \Omega \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ -A_1 \\ -A_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{Q} \\ \hat{M} \\ -\Omega \\ -\hat{w} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

gdje su

$$\begin{aligned} P_{17} &= -\frac{\partial}{\partial x}, & P_{18} &= -\frac{\partial}{\partial y}, & P_{24} &= -\frac{\partial}{\partial x}, & P_{26} &= -\frac{\partial}{\partial y} \\ P_{35} &= -\frac{\partial}{\partial y}, & P_{36} &= -\frac{\partial}{\partial x}, & P_{42} &= \frac{\partial}{\partial x}, & P_{44} &= -\frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \\ P_{45} &= \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \mu_{xy}, & P_{53} &= \frac{\partial}{\partial y}, & P_{54} &= \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \mu_{yx}, & P_{55} &= -\frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \\ P_{62} &= \frac{\partial}{\partial y}, & P_{63} &= \frac{\partial}{\partial x}, & P_{66} &= -\frac{Q_{11}}{G_{xy} D_{11}}, & P_{71} &= \frac{\partial}{\partial x} \\ P_{77} &= -\frac{6}{5G_{xz} h}, & P_{81} &= \frac{\partial}{\partial y}, & P_{88} &= -\frac{6}{5G_{yz} h} \\ A_1 &= \frac{Q_{11}}{E_x D_{11}} \frac{qh^2}{10} \mu_{xz}, & A_2 &= \frac{Q_{22}}{E_y D_{22}} \frac{qh^2}{10} \mu_{yz} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Podmatrice četverokutnog elementa su:

$$[k_1] = \int \hat{\Psi}_i \hat{\Psi}_j dA = \begin{bmatrix} 4ab/9 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/36 \\ 4ab/18 & 4ab/9 & 4ab/36 & 4ab/18 \\ 4ab/18 & 4ab/36 & 4ab/9 & 4ab/18 \\ 4ab/36 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/9 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

$$[k_2] = \int_A \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial x} \hat{\Psi}_j dA = \begin{bmatrix} -b/3 & -b/6 & -b/3 & -b/6 \\ -b/6 & -b/3 & -b/6 & -b/3 \\ b/3 & b/6 & b/3 & b/6 \\ b/6 & b/3 & b/6 & b/3 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$[k_3] = \int_A \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial y} \hat{\Psi}_j dA = \begin{bmatrix} -a/3 & -a/3 & -a/6 & -a/6 \\ a/3 & a/3 & a/6 & a/6 \\ -a/6 & -a/6 & -a/3 & -a/3 \\ a/6 & a/6 & a/3 & a/3 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$