

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS
FÍSICAS

ESTABILIZACIÓN DE LA FRECUENCIA DE UN
MICROOSCILADOR NO LINEAL MEDIANTE UNA
RESONANCIA INTERNA

Lic. Franco Mangussi
Magíster

Dr. Damián H. Zanette
Director

Dr. Hernán Pastoriza
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Mariano Gomez Berisso (Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche)
Dr. Rodolfo Guillermo Pregliasco (Instituto Balseiro, Centro Atómico Bariloche)
Dr. Alexandre Nicolas (CONICET, Centro Atómico Bariloche)

Diciembre de 2015

Física Estadística e Interdisciplinaria y Laboratorio de Bajas
Temperaturas – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A Sofía, a mis padres y a mis hermanos.

Que con justa emoción definen el compás y marcan el ritmo
de la periódica conmoción de mis días.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Índice de figuras	iv
Resumen	vii
Abstract	viii
1. Introducción	1
1.1. Oscilaciones autosostenidas y generadores de frecuencia	3
1.2. Interacción entre modos mediante resonancias internas	4
1.3. Organización de los tópicos abordados en este trabajo	5
2. Caracterización experimental del microoscilador	6
2.1. El microresonador <i>clamped-clamped</i>	6
2.2. Interfaz electromecánica y no linealidades	8
2.3. Configuración experimental	10
2.4. Resonancia del sistema ante una excitación armónica	12
2.5. Resonancia del sistema ante una excitación saturada	13
2.6. Comportamiento del sistema autosostenido	14
3. Modelos para la dinámica del microoscilador	16
3.1. El oscilador de Duffing y el Método de las Múltiples Escalas	17
3.1.1. Dinámica a lazo abierto	18
3.1.2. Dinámica autosostenida	23
3.2. Modos acoplados mediante resonancias internas	23
3.2.1. Estabilización de la frecuencia de operación	27
4. Optimización de la estabilización de frecuencia	29
5. Conclusiones	31
A. Esquema del circuito de realimentación	33

Bibliografía	34
---------------------	-----------

Publicaciones y presentaciones en congresos asociadas	39
--	-----------

Agradecimientos	40
------------------------	-----------

Índice de figuras

1.1.	Imágenes tomadas con un microscopio electrónico de barrido (SEM) de: (A) El interior de un giroscopio 3D construido con tecnología MEMS. (B) Un sensor de fuerza basado en un MEMS torsional, diseñado para medir el efecto Casimir. (C) Un MEMS tipo <i>clamped-clamped</i> , sistema prototipo para ser usado como microresonador en un generador de frecuencia. (D) Un oscilador de cuarzo típico.	2
1.2.	(A) Configuración autosostenida: La componente principal de la respuesta del resonador $a_1 \cos(\omega t)$, es desfasada en un ángulo ϕ y su amplitud es controlada a un valor f_1 para ser luego reinyectada al resonador como una fuerza externa. (B) Configuración a lazo abierto: Se actúa sobre el resonador con una excitación de amplitud f_1 y frecuencia ω controladas y se detecta su respuesta en amplitud y fase a frecuencia ω	4
2.1.	(A) Imagen SEM del microresonador C-C donde pueden verse: Las vigas voladizas empotradas en ambos extremos, las <i>comb-drives</i> y la superficie exterior recubierta de oro donde pueden soldarse contactos para actuar y detectar al resonador. (B) Ampliaciones que muestran en detalle las <i>comb-drives</i>	7
2.2.	Imágenes obtenidas a partir del análisis de los modos de vibración del microresonador C-C usando simulaciones con técnicas de elementos finitos que permiten estimar las frecuencias de resonancia naturales de los distintos modos (ver referencia [1]). (A) Modo principal de flexión dentro del plano, $\nu_1 \approx 70\text{kHz}$. (B) Modo principal de flexión fuera del plano, $\nu_2 \approx 170\text{kHz}$. (C) Modo principal de torsión, $\nu_3 \approx 230\text{kHz}$	8
2.3.	(A) Esquema de una configuración típica utilizada para excitar eléctricamente un microresonador <i>clamped-clamped</i> . (B) Esquema detallado del funcionamiento de las <i>comb-drives</i>	8

2.4.	Disposición experimental utilizada para caracterizar la dinámica del microoscilador en distintas configuraciones: (A) Lazo abierto con una fuerza de excitación armónica. (B) Lazo abierto con una fuerza de excitación saturada. (C) Autosostenida.	11
2.5.	Mediciones a lazo abierto del microresonador para $V_{ac}=20\text{mV}$ y $V_{dc}=25\text{V}$, las flechas indican la dirección en que se realizaron las mediciones. (A) Curva de resonancia. (B) Respuesta en fase.	12
2.6.	(A) Curvas de resonancia para $V_{dc}=25\text{V}$ y variando V_{ac} entre 5mV y 25mV . (B) Curvas de resonancia para $V_{dc}=6\text{V}$ y variando V_{ac} entre 5mV y 190mV	13
2.7.	Curvas de resonancia para una excitación saturada, con $V_{dc}=25\text{V}$ y variando V_{ac}^{1er} entre 20mV y 190mV . Se resaltan las frecuencias en las cuales se producen resonancias internas.	14
2.8.	(A) Curvas de resonancia para una medición autosostenida variando la fase en las cercanías de 0 y $\frac{\pi}{2}$ ($V_{saturacin}=500\text{mV}$), junto con una curva de resonancia a lazo abierto para $V_{ac}^{1er}=190\text{mV}$. (B) Respuesta temporal del microresonador para $\phi \approx \frac{\pi}{2}$. (C) Respuesta temporal del microresonador para $\phi \approx 0$	15
3.1.	Soluciones analíticas para diferentes valores del parámetro no lineal γ_1 de: (A) Curvas de resonancia $a_1(\sigma_1)$. (B) Respuesta de la fase $\phi_1(\sigma_1)$	21
3.2.	Ajuste de los datos experimentales para $V_{ac}=20\text{mV}$, utilizando un modelo tipo Duffing con $\omega_1 = 62,77$, $f_1 = 100$, $\gamma_1 = 3,3$ y $\mu_1 = 0,0147$. (A) Curva de resonancia. (B) Respuesta de la fase.	22
3.3.	Resultados del modelo tipo Duffing ($\omega_1 = 62,77$, $\gamma_1 = 3,3$ y $\mu_1 = 0,0147$) para la dependencia de las curvas de resonancia con la fuerza de excitación f_1 , compárese con la Fig. 2.6 A. En el recuadro interior se muestra un ajuste lineal satisfactorio de $V_{ac} = V_{ac}(f_1)$	22
3.4.	Soluciones analíticas del oscilador de Duffing autosostenido (las líneas llenas indican soluciones estables). (A) Curva de resonancia. (B) Frecuencia como función de la fase. (C) Dependencia de la frecuencia con la fuerza de realimentación, se esquematiza la conversión de ruido de amplitud en fluctuaciones en la frecuencia de operación. (D) Esquema del funcionamiento de la configuración autosostenida.	24
3.5.	Resultados para $a_1 = a_1(\nu)$, Los parámetros utilizados fueron: $\omega_1 = 62,77$, $\omega_3 = 212,007$, $\sigma_3 = 236,97$, $\mu_1 = 0,0147$, $\mu_3 = 0,1$, $\gamma_1 = -3,3$, $\beta_1 = -0,15$, $\beta_3 = -0,0015$ y el resto de los coeficientes no lineales iguales a cero.	27

-
- 3.6. Resultados para $\nu = \nu(f_1)$, para una excitación armónica. Los parámetros utilizados fueron: $\omega_1 = 62,77$, $\omega_3 = 212,007$, $\sigma_3 = 236,97$, $\mu_1 = 0,0147$, $\mu_3 = 0,1$, $\gamma_1 = -3,3$, $\beta_1 = -0,15$, $\beta_3 = -0,0015$ y el resto de los coeficientes no lineales iguales a cero. 28
- 4.1. Resultados para $\nu = \nu(f_1)$, para una excitación saturada ($f_3 = \frac{f_1}{3}$) y una armónica ($f_3 = 0$). Los parámetros utilizados fueron: $\omega_1 = 62,77$, $\omega_3 = 212,007$, $\sigma_3 = 236,97$, $\mu_1 = 0,0147$, $\mu_3 = 0,1$, $\gamma_1 = -3,3$, $\beta_1 = -0,15$, $\beta_3 = -0,0015$ y el resto de los coeficientes no lineales iguales a cero. 30
- A.1. Esquema del circuito de acondicionamiento de la señal de realimentación. El mismo consta de una etapa de control de fase y una etapa de saturación. 33

Resumen

Los osciladores electromecánicos son un componente indispensable en cualquier dispositivo electrónico moderno, que necesite una frecuencia patrón para sincronización o cronometraje y son ampliamente utilizados en la fabricación de sensores. Los osciladores de cristales de cuarzo han sido utilizados clásicamente para este tipo de aplicaciones. Sin embargo, recientemente con el auge en el estudio de sistemas microelectromecánicos (MEMS), el desarrollo de osciladores a escalas micrométricas representa una alternativa potencial para sustituir a las tecnologías a base de cuarzo. La implementación de osciladores y sensores basados en MEMS, no solo permite disminuir enormemente las dimensiones físicas de esta clase de componentes, sino que también presenta la ventaja de que los métodos de microfabricación son compatibles con la tecnología de producción de semiconductores, lo que permite la incorporación de los osciladores y sensores en circuitos integrados directamente en su etapa de fabricación. Desafortunadamente, la aparición de fenómenos no lineales al reducir los mecanismos resonantes a tan pequeña escala, resulta un gran impedimento a la hora de conseguir sistemas con frecuencias de funcionamiento estables, dificultando así la aplicación de MEMS en sensores u osciladores.

En este trabajo se presenta un estudio teórico-experimental de la dinámica no lineal que domina el comportamiento de un tipo especial de MEMS, denominado resonador *clamped-clamped*. En particular se ahondará en el desarrollo de modelos analíticos que permitan describir la interacción entre distintos modos de vibración del resonador mediante una resonancia interna, y que demuestran como la misma puede utilizarse como mecanismo de estabilización de la frecuencia de operación del microoscilador. Quartz oscillators have been conventionally used for such applications.

Palabras clave: RESONANCIA INTERNA, MEMS, DUFFING, MICROOSCILADOR NO LINEAL, CLAMPED-CLAMPED

Abstract

Micromechanical oscillators are an essential component of practically every modern electronic device requiring a frequency reference for time keeping or synchronization and are also widely used in frequency-shift-based sensors. However, recently with the rise in the study of microelectromechanical systems (MEMS), micro- and nano-mechanical oscillators are being developed as an alternative to quartz oscillators. The implementation of oscillators and MEMS based sensors, not only allows greatly reduce the physical dimensions of such components, but also presents the advantage that the microfabrication methods are compatible with the technology of semiconductor production, allowing incorporate sensors and oscillators in integrated circuits directly at its manufacturing stage. Unfortunately, as the dimensions of the vibrating structures are reduced to the micro-scale, their dynamics response at the amplitudes needed for operation frequently becomes nonlinear. These nonlinearities are the biggest impediment to getting systems with stable operating frequencies, thus hindering the application of MEMS sensors or oscillators.

This thesis presents a theoretical and experimental study of nonlinear dynamics that dominates the behavior of a special type of MEMS resonator called clamped-clamped beam resonator. In particular we will deal with the development of analytical models to describe the interaction between different vibration modes of the resonator through an internal resonance, and showing how it can be used as a mechanism for stabilizing the operating frequency of the microoscilador.

Keywords: INTERNAL RESONANCE, MEMS, DUFFING, NONLINEAR MICROMECHANICAL OSCILLATOR, CLAMPED-CLAMPED

Capítulo 1

Introducción

“There’s Plenty of Room at the Bottom”

— Richard P. Feynman, 1959

Desde que se desarrollaron los primeros sistemas microelectromecánicos (MEMS por sus siglas en inglés) algunas décadas atrás, la madurez alcanzada por esta tecnología ha sido tal, que hoy muchos dispositivos MEMS están siendo utilizados en nuestra vida diaria. Ejemplos del amplio espectro de sus aplicaciones van desde acelerómetros (Fig. 1.1 A) y sensores de presión en autos, microespejos en TVs Plasma, interruptores de radio frecuencia y micrófonos en teléfonos celulares, hasta sensores de movimiento en video juegos. Buena parte del éxito en la implementación de estos sistemas se debe a los grandes avances en los métodos de fabricación a escala micrométrica, incluyendo técnicas de micromaquinado y fotolitografía de gran versatilidad, que han permitido realizar diseños que desafían los límites de la imaginación. Esto sumado a la gran precisión que han demostrado tener los MEMS al utilizarse como sensores (Fig. 1.1 B) y actuadores, ha hecho de los mismos un área de gran interés para la ciencia y la ingeniería, que promete permanecer a la vanguardia del desarrollo tecnológico de los próximos años.

Sin embargo, con la creciente demanda de tecnología MEMS, aparecen grandes desafíos. Diseños cada vez más agresivos y configuraciones más pequeñas y complejas, han llevado a estos sistemas a desempeñarse peligrosamente cerca de los límites de las teorías lineales, lo que ha despertado en los investigadores el interés de explorar la posibilidad de operar MEMS en regímenes no lineales.

Actualmente uno de los campos con potenciales aplicaciones para los MEMS y en el cual la coexistencia con fenómenos no lineales es inevitable [2], es el de la fabricación de resonadores mecánicos para ser utilizados en generadores de frecuencia o en sensores de masa, fuerza y campo magnético [3–10]. Desde su invención en 1920, los osciladores de cristales de cuarzo (Fig. 1.1 D) han sido utilizados casi exclusivamente con este propósito, demostrando ser altamente confiables. Sin embargo, limitaciones en

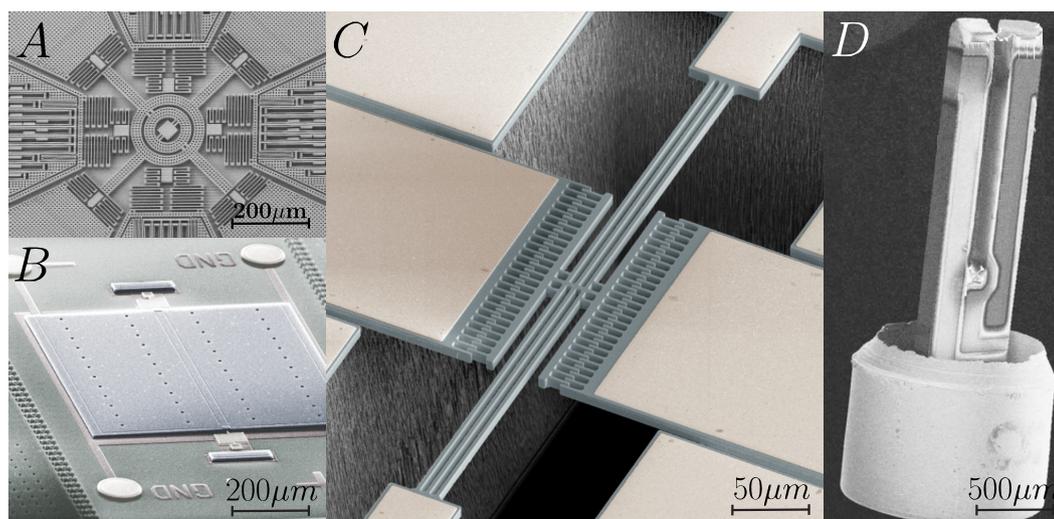


Figura 1.1: Imágenes tomadas con un microscopio electrónico de barrido (SEM) de: **(A)** El interior de un giroscopio 3D construido con tecnología MEMS. **(B)** Un sensor de fuerza basado en un MEMS torsional, diseñado para medir el efecto Casimir. **(C)** Un MEMS tipo *clamped-clamped*, sistema prototipo para ser usado como microresonador en un generador de frecuencia. **(D)** Un oscilador de cuarzo típico.

la miniaturización de los cristales dadas por dificultades en su construcción y posterior encapsulado, aumento indeseable de la frecuencia de resonancia natural y por ende en su consumo energético, entre otras, establecen un límite a la aplicabilidad de este tipo de tecnología. Es así que desarrollo de osciladores a escalas micrométricas se ha convertido en una de las alternativas más viables para reemplazar a los osciladores de cuarzo, debido no sólo a sus pequeñas dimensiones y bajo consumo energético, sino también a su compatibilidad intrínseca con las técnicas de fabricación de semiconductores, pudiendo los mismos ser incorporados directamente como parte de los circuitos integrados en la etapa de fabricación [11, 12].

Debido a la facilidad de fabricación a escala micrométrica, uno de los tipos de MEMS con mayor perspectiva para implementarse en sensores o generadores de frecuencia, es el de los resonadores *clamped-clamped* (C-C) [12]. Los mismos están constituidos por una o varias vigas de silicio empotradas en ambos extremos que pueden ser actuadas eléctricamente (Fig. 1.1 C). Desafortunadamente, las dimensiones típicas de estas microestructuras reducen el rango de respuesta lineal del sistema, hasta el punto en el que la amplitud de las señales necesarias para obtener comportamientos lineales está por debajo de los niveles de ruido de operación. Grandes deformaciones relativas son entonces indispensables para el funcionamiento del MEMS, fenómeno que en general amplifica las no linealidades geométricas de las estructuras. Esta fuente de comportamientos no lineales sumada a otras tales como las no linealidades intrínsecas de los acoples electrostáticos o de algunos mecanismos de disipación mecánica, pueden desempeñar un rol determinante en la dinámica del microoscilador degradando su desempeño como generador de frecuencia [13–16].

El objetivo del presente trabajo es analizar algunos aspectos de la dinámica no lineal de un microresonador C-C como el de la Fig. 1.1 C. En particular exploraremos como un fenómeno de resonancia interna entre modos de vibración del microresonador puede ser usado como mecanismo de estabilización de su dinámica, posibilitando la implementación del mismo en un generador de frecuencia.

En las siguientes secciones introduciremos algunos conceptos necesarios para entender el principio de funcionamiento de un generador de frecuencia y como la presencia de no linealidades puede afectar su desempeño. También se describirá brevemente el fenómeno de resonancia interna y su vínculo con las no linealidades del sistema.

1.1. Oscilaciones autosostenidas y generadores de frecuencia

Los generadores de frecuencia u osciladores (llamados a menudo simplemente *clocks*), son un componente esencial de prácticamente todo dispositivo electrónico que requiera una frecuencia de referencia para sincronización o cronometraje. Para poder ser utilizados como patrones de frecuencia, los osciladores deben generar una señal estable y autónoma de frecuencia bien definida, es decir una señal que dependa únicamente de las características intrínsecas del oscilador y que ante pequeñas perturbaciones en las condiciones dinámicas del mismo su valor no se vea afectado. Esto se consigue fruto de la interacción de un resonador mecánico con un circuito electrónico de realimentación. De esta manera el movimiento mecánico del resonador se traduce a una señal eléctrica (este acoplamiento en el caso de los resonador *clamped-clamped* aquí tratado es capacitivo), que es acondicionada para luego ser reinyectada al resonador como una fuerza externa. Según el tipo de acondicionamiento que sufra dicha señal, el conjunto **resonador + realimentación** que conforman el **oscilador**, puede converger a un estado de movimiento autónomo o ciclo límite estable. Esta oscilación autosostenida tendrá algún período determinado que puede usarse como patrón de tiempo o frecuencia. Si bien el oscilador es el resultado de la interacción entre resonador y la realimentación, es normal abusar de la terminología y referirse a la estructura resonante directamente como oscilador. En la Fig. 1.2 A, se muestra un esquema simplificado de una configuración autosostenida típica. En la misma el acondicionamiento de la señal consiste de una etapa de desfasaje de la señal a la salida del resonador y de un etapa de control de amplitud que fija la amplitud de la señal de realimentación a un valor predeterminado.

Si bien para funcionar como patrón de frecuencia un microresonador tiene que estar incorporado en una configuración autosostenida como la de la Fig. 1.2 A, es común recurrir a una configuración a lazo abierto como la de la Fig. 1.2 B, a la hora de caracterizar el comportamiento dinámico del resonador, debido principalmente a conveniencias en

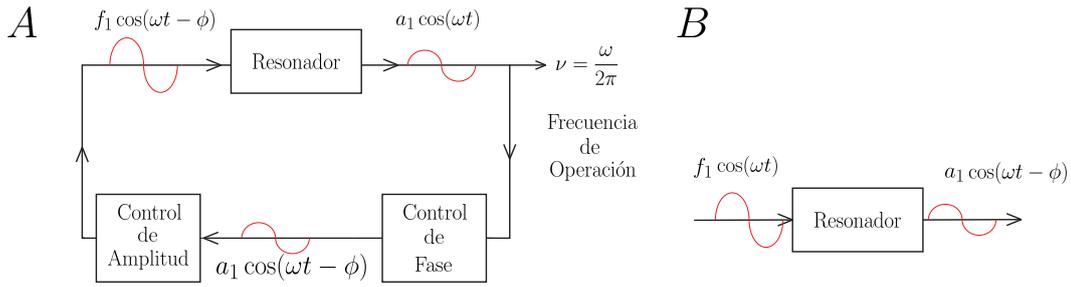


Figura 1.2: (A) Configuración autosostenida: La componente principal de la respuesta del resonador $a_1 \cos(\omega t)$, es desfasada en un ángulo ϕ y su amplitud es controlada a un valor f_1 para ser luego reinyectada al resonador como una fuerza externa. (B) Configuración a lazo abierto: Se actúa sobre el resonador con una excitación de amplitud f_1 y frecuencia ω controladas y se detecta su respuesta en amplitud y fase a frecuencia ω .

las implementaciones experimentales. Ambas configuraciones son equivalentes dentro de ciertos límites, lo que permite obtener información del comportamiento del oscilador, caracterizando la dinámica del resonador. La diferencia fundamental entre ambas configuraciones, es que en el sistema autosostenido las variables de control son la fase ϕ y la amplitud f_1 de la señal de realimentación, mientras que para la disposición a lazo abierto las mismas son la frecuencia ω y la amplitud f_1 de la señal de excitación.

El desempeño de un oscilador como el de la Fig. 1.2 A, está relacionado con las fluctuaciones que experimenta su frecuencia de operación ν . Si bien existen diversas fuentes de ruido que pueden contribuir a dichas fluctuaciones, en este trabajo se prestará especial atención en aquellas que son producidas por la presencia de ruido en la amplitud de la señal de realimentación, fenómeno típicamente asociado con comportamientos no lineales [17] y conocido como efecto Amplitud-Frecuencia (A-F).

1.2. Interacción entre modos mediante resonancias internas

Las resonancias internas (RRII) ocurren en sistemas mecánicos cuando los acoplamientos no lineales entre distintos modos de vibración producen, bajo ciertas condiciones, un fortalecimiento de la interacción mutua [18], generando intercambio de energía entre los modos que puede producir un gran número de fenómenos tales como inestabilidades, sincronización, etc. La interacción entre dos modos no lineales puede pensarse mediada por un potencial dado por:

$$U = \frac{1}{2}\omega_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 x_2^2 + c_1 x_1 x_2^3 + c_2 x_1^3 x_2 + c_3 x_1^2 x_2^2 + \dots \quad (1.1)$$

Según la forma de los términos no lineales dominantes, distintos tipos de RRII pueden aparecer. Por ejemplo, el término correspondiente a c_1 está asociado a RRII 1:2, mientras que el término c_2 está vinculado a una RI 1:3, donde la notación indica la

relación existente entre las frecuencias de resonancia natural de los modos interactuantes.

Recientemente Dario Antonio *et al* [1], han reportado resultados experimentales que muestran como un mecanismo de RI 1:3 entre modos de vibración no lineales podría ser utilizado para disminuir las fluctuaciones en la frecuencia de operación de un microscilador *clamped-clamped*. Dicho trabajo motiva a realizar una profundización en la caracterización experimental de esta clase de sistemas, como así también desarrollar una descripción teórica que brinde un mayor entendimiento del fenómeno.

1.3. Organización de los tópicos abordados en este trabajo

El presente trabajo aspira a contribuir a la comprensión de los distintos aspectos de la dinámica no lineal de un microresonador *clamped-clamped* y en particular aportar al desarrollo de modelos analíticos predictivos que permitan describir los fenómenos de interacción entre modos de vibración del resonador mediante RRII, con el fin de aprovechar estos mecanismos como estabilizadores de frecuencia que posibilitarían la implementación de estos MEMS como generadores de frecuencia o sensores.

Para ello comenzaremos por realizar en el Capítulo 2 una caracterización experimental del microresonador tanto en una configuración a lazo abierto como en una autosostenida. Se prestará especial interés en investigar la dependencia de las RRII con la forma funcional de la señal de excitación.

El Capítulo 3 se iniciará describiendo la dinámica del modo principal del microresonador, para luego presentar un modelo de dos modos interactuantes mediante no linealidades cúbicas que intenta reproducir los resultados experimentales del Capítulo 2.

En el Capítulo 4 se presentará una manera de optimizar el fenómeno de estabilización de frecuencia, fortaleciendo el mecanismo de RI 1:3 al usar señales de realimentación saturadas.

Este trabajo finaliza en el Capítulo 5 con una breve discusión de los resultados obtenidos, su significancia y las posibles dirección que se podrían tomarse para trabajos futuros en el área.

Capítulo 2

Caracterización experimental del microoscilador

Este capítulo está destinado a la presentación de una serie de resultados experimentales concernientes al comportamiento dinámico del microresonador C-C, operando tanto en una configuración a lazo abierto como en una autosostenida. El objetivo del mismo es demostrar la existencia de un fenómeno de saturación en la frecuencia de operación del microoscilador, que puede ser adjudicado a la presencia de una resonancia interna entre dos de sus modos de vibración.

Debido a facilidades en cuanto a la implementación y posterior adquisición de datos, la mayor parte de las mediciones aquí reportadas son en el marco de una configuración a lazo abierto. Estos resultados, por lo desarrollado en la Sec. 1.1, pueden ser luego utilizados para predecir algunos aspectos de la dinámica autosostenida.

Se comenzará el capítulo realizando una descripción del resonador C-C, sus posibles modos de vibración y su interfaz electromecánica. Luego se presentará la configuración experimental a utilizar y se reportarán los resultados de las mediciones a lazo abierto. Cabe separar dichas mediciones en dos grupos, según el tipo de fuerza utilizada para excitar al resonador, por un lado cuando la fuerza que actúa sobre el resonador es de tipo armónica y en segundo lugar cuando es una señal saturada (onda cuadrada). Por último se mostrará, para una elección particular de parámetros experimentales, como es el comportamiento del microoscilador autosostenido.

2.1. El microresonador *clamped-clamped*

En la Fig. 2.1 se muestra un imagen SEM del microresonador mecánico estudiado en este trabajo. El diseño del mismo es idéntico al utilizado por Dario Antonio *et al.* [1] y fue fabricado en polysilicio por la empresa MEMSCAP [19], utilizando un proceso denominado *Polysilicon Multi-User MEMS Processes* (PolyMUMPs).

La estructura del resonador esta compuesta de tres vigas voladizas paralelas de $500\mu\text{m}$ de largo, $3\mu\text{m}$ de ancho y $10\mu\text{m}$ de espesor, empujadas en ambos extremos y unidas entre sí por un tabique transversal, el mismo a su vez es solidario en ambos lados a sendas *comb-drives* que hacen las veces de actuadores y detectores capacitivos y constituyen la interfaz electromecánica del resonador.

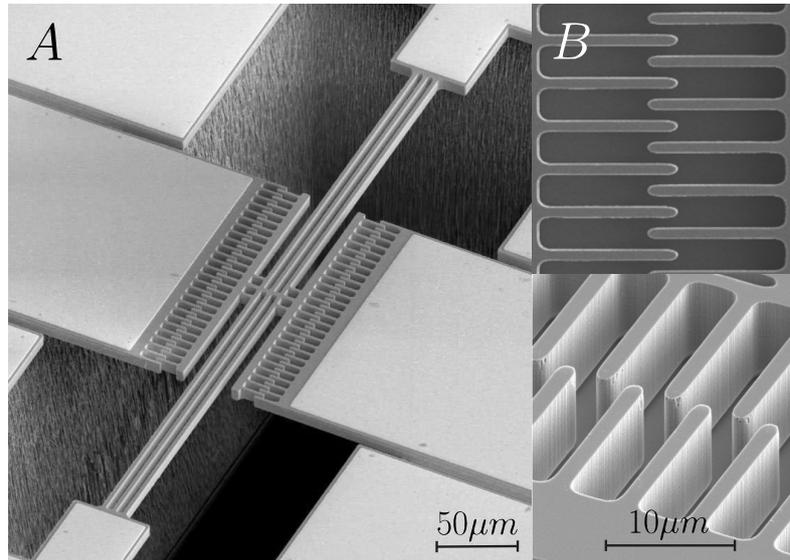


Figura 2.1: (A) Imagen SEM del microresonador C-C donde pueden verse: Las vigas voladizas empujadas en ambos extremos, las *comb-drives* y la superficie exterior recubierta de oro donde pueden soldarse contactos para actuar y detectar al resonador. (B) Ampliaciones que muestran en detalle las *comb-drives*.

Si bien la estructura del microresonador fue diseñada para oscilar en el plano que contiene las *comb-drives*, la misma posee además otros modos de vibración. Conocer los mismos es de suma importancia para poder describir adecuadamente posibles interacciones entre el modo principal de oscilación y modos de orden superior.

A partir de resultados de simulaciones utilizando técnicas de elementos finitos [1], es posible determinar que para una estructura como la del microresonador aquí tratado, además del modo principal de flexión dentro del plano, que llamaremos **modo 1** y cuya frecuencia de resonancia natural es $\nu_1 \approx 70\text{kHz}$, existen otros dos modos de interés que podrían llegar a interactuar con el modo principal mediante resonancias internas 1:2 y 1:3. Ellos son el modo de flexión principal fuera del plano (**modo 2**, $\nu_2 \approx 170\text{kHz}$) y el modo principal de torsión (**modo 3**, $\nu_3 \approx 230\text{kHz}$). En la Fig. 2.2 se muestran los resultados de las simulaciones para los modos de vibración del microresonador C-C, obtenidos de la referencia [1].

En la siguiente sección se describirá de que manera estos distintos modos de vibración pueden ser excitados y que comportamientos no lineales podemos esperar en su dinámica. Se hará especial énfasis en la descripción del modo 1, ya que es el mismo el único que se excita y detecta de manera directa en los experimentos.

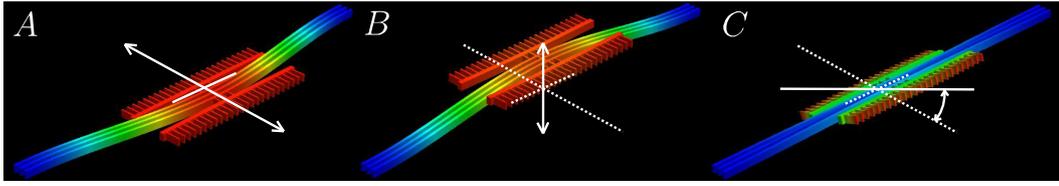


Figura 2.2: Imágenes obtenidas a partir del análisis de los modos de vibración del micro-resonador C-C usando simulaciones con técnicas de elementos finitos que permiten estimar las frecuencias de resonancia naturales de los distintos modos (ver referencia [1]). **(A)** Modo principal de flexión dentro del plano, $\nu_1 \approx 70\text{kHz}$. **(B)** Modo principal de flexión fuera del plano, $\nu_2 \approx 170\text{kHz}$. **(C)** Modo principal de torsión, $\nu_3 \approx 230\text{kHz}$.

2.2. Interfaz electromecánica y no linealidades

Como se ha mencionado anteriormente, las *comb-drives* constituyen el mecanismo de transducción que permite actuar y detectar eléctricamente el movimiento mecánico del microresonador. En la Fig. 2.3 A se presenta una configuración típica utilizada para excitar eléctricamente un resonador C-C. En la misma se muestra como la estructura resonante es conectada a un voltaje de polarización continuo (o *bias*) denominado V_{dc} , mientras que por uno de las *comb-drives* el sistema es excitado con una tensión alterna $V_{ac}(t) = V_{ac} \cos(\omega t)$.

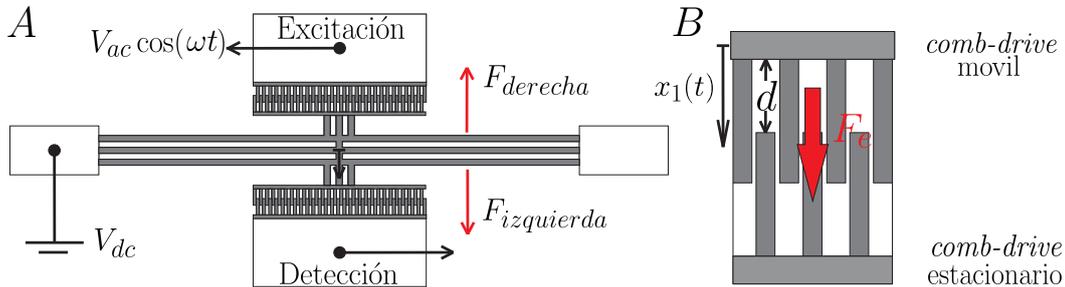


Figura 2.3: **(A)** Esquema de una configuración típica utilizada para excitar eléctricamente un microresonador *clamped-clamped*. **(B)** Esquema detallado del funcionamiento de las *comb-drives*.

En una primera aproximación podría pensarse al movimiento del resonador, cuya posición denotaremos con $x_1(t)$, descrito por una dinámica lineal forzada dada por:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \eta_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = F_1 \cos(\omega t), \quad (2.1)$$

donde m_1 es la masa efectiva del resonador, η_1 es su constante de roce viscoso, k_1 es una constante elástica lineal y $F_1(t) = F_1 \cos(\omega t)$, es la fuerza de excitación de amplitud F_1 (proporcional a las tensiones V_{ac} y V_{dc}) y frecuencia $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ (El subíndice 1 en estas variables viene del hecho que el análisis se enfoca, en esta etapa, en describir el movimiento del **modo 1**). Sin embargo a lo largo del Cap. 1 se ha remarcado la presencia ineludible de fenómenos no lineales en la dinámica de esta clase de sistemas. Es necesario entonces, incorporar términos adicionales de la forma $k_2 x_1^2$ y $k_3 x_1^3$ en la Ec. 2.1, para contemplar de esta manera posibles no linealidades cuadráticas y cúbicas

(vamos a despreciar contribuciones no lineales de mayor orden).

Las no linealidades presentes en la dinámica de MEMS pueden tener orígenes muy variados [18, 20–22], saber cuales son los efectos no lineales dominantes es de vital importancia a la hora de modelar el comportamiento de estos sistemas. En particular para estructuras tipo C-C, vale la pena resaltar dos fuentes típicas de comportamientos no lineales [23, 24]. En primer lugar están las no linealidades geométricas, producto de una elongación estructural fuera de los límites de un comportamiento tipo Ley de Hooke. Y en segundo lugar se encuentran aquellas de origen eléctrico, asociadas a no linealidades en la fuerza de excitación electrostática. A continuación se describirá brevemente como las mismas influyen sobre la dinámica del microresonador.

Nolinealidades geométricas:

Cuando se consideran no linealidades mecánicas, si la estructura del resonador está diseñada para ser simétrica ante desplazamientos positivos y negativos, los términos no lineales cuadráticos pueden ser despreciados. La influencia de la geometría sobre la dinámica puede aproximarse entonces usando un término de la forma $k_{1g}x_1 + k_{3g}x_1^3$ [25, 26], donde el subíndice g indica que las constantes están asociadas a las contribuciones geométricas.

Nolinealidades eléctricas:

Las no linealidades eléctricas son producto de la fuerza de excitación electrostática generada entre las *comb-drives*, que viene dada por:

$$F_1(t) = F_e(t) = F_{izquierda}(t) - F_{derecha}(t), \quad (2.2)$$

donde cada uno de los términos de fuerza es proporcional a la variación en la capacitancia con la distancia en la siguiente forma:

$$F(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x} V^2 \quad (2.3)$$

A partir de las ecuaciones 2.2 y 2.3 y haciendo una analogía entre las *comb-drives* y un capacitor de placas paralelas podemos escribir finalmente que para una configuración como la de la Fig. 2.3:

$$F_1(t) = \left[\frac{1}{2} V_{dc}^2 \frac{\epsilon_0 A_e}{(d - x_1)^2} \right] - \left[\frac{1}{2} (V_{dc} - V_{ac}(t))^2 \frac{\epsilon_0 A_e}{(d + x_1)^2} \right], \quad (2.4)$$

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio vacío y A_e y d son respectivamente, el área de interacción electrostática efectiva y la longitud de interpenetración entre las *comb-drives*. Por último, expandiendo la Ec. 2.4 para pequeños desplazamientos $x_1(t)$ y

considerando que $V_{dc} \gg V_{ac}$, con lo cual los términos proporcionales a V_{ac}^2 pueden ser despreciados, obtenemos:

$$F_1(t) = k_{1e}x_1 + k_{3e}x_1^3 + \frac{\epsilon_0 A_e}{d^2} V_{dc} V_{ac} \cos(\omega t), \quad (2.5)$$

donde $k_{1e} = \frac{2\epsilon_0 A_e V_{dc}^2}{d^3}$, $k_{3e} = \frac{4\epsilon_0 A_e V_{dc}^2}{d^5}$ y el subíndice e denota que se trata de las contribuciones eléctricas.

Combinando los efectos de las no linealidades geométricas y eléctricas se obtiene la siguiente ecuación aproximada para la dinámica del resonador:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \eta_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_3 x_1^3 = \frac{\epsilon_0 A_e}{d^2} V_{dc} V_{ac} \cos(\omega t), \quad (2.6)$$

donde ahora $k_1 = (k_{1g} - k_{1e})$ y $k_3 = (k_{3g} - k_{3e})$, esta última ecuación brinda valiosa información sobre la dependencia de la dinámica del resonador con los parámetros de la excitación (V_{ac} y V_{dc}).

El análisis precedente puede ser extrapolado a la descripción de la dinámica de los modos 2 y 3 ajustando convenientemente los valores de A_e y d .

A continuación se presentará la configuración experimental utilizada para caracterizar la dinámica no lineal del modo 1 y sus posibles interacciones con los modo 2 y 3.

2.3. Configuración experimental

En la Fig. 2.4, se muestra un esquema de la disposición experimental utilizada para caracterizar la dinámica del microoscilador, tanto a lazo abierto como en su configuración autosostenida.

La caracterización a lazo abierto se hará utilizando dos tipos de fuerza de excitación, por un lado un señal armónica de amplitud V_{ac} y frecuencia ν y por otro lado una señal saturada u onda cuadrada de amplitud $V_{saturada}$ y frecuencia ν . El interés en estudiar el comportamiento del microresonador ante una señal cuadrada, tiene tanto un origen fundamental como aplicado.

La motivación fundamental consiste en entender como la presencia de armónicos de orden superior puede influir en los mecanismos de RI especialmente cuando, como en este caso, existen RRII (1:3) que coinciden con las relación entre las frecuencias de los primeros armónicos de un desarrollo de fourier de la señal de excitación. Como sucede en el caso de la onda cuadrada ya que:

$$V_{saturada}(t) = V_{ac}^{1er} \cos(\omega t) + V_{ac}^{3er} \cos(3\omega t + \pi) + \dots, \quad (2.7)$$

donde $V_{ac}^{1er} = \frac{4}{\pi} V_{saturada}$ y $V_{ac}^{3er} = \frac{4}{3\pi} V_{saturada}$.

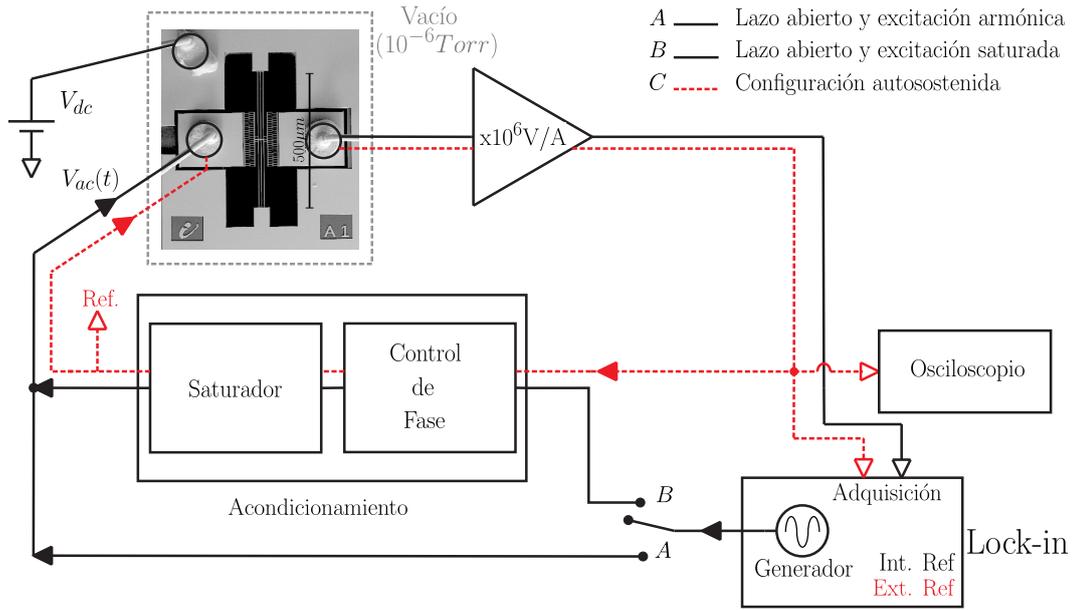


Figura 2.4: Disposición experimental utilizada para caracterizar la dinámica del microoscilador en distintas configuraciones: **(A)** Lazo abierto con una fuerza de excitación armónica. **(B)** Lazo abierto con una fuerza de excitación saturada. **(C)** Autosostenida.

Por otro lado, la motivación aplicada viene del hecho que, al implementar un circuito de acondicionamiento para autosostener al microoscilador, resulta más sencillo electrónicamente hablando, que después de una etapa de control de fase, la señal acondicionada sea directamente saturada a un valor constante prefijado. Esta clase de circuito guarda más similitud con los típicos *Pierce oscillators*, ampliamente utilizados en *clocks* a base de cristales de cuarzo [27] y pueden resultar más versátiles en futuras aplicaciones.

Los esquemas para las configuraciones a lazo abierto se muestran en las Fig 2.4 A y B, puede verse que en ambos casos la señal es generada mediante un Lock-in, pero mientras que para A es directamente aplicada sobre el microresonador (Excitación armónica), para el caso B es previamente saturada utilizando el circuito de acondicionamiento antes mencionado. Este circuito electrónico consta de una etapa de control de fase y una de saturación y se diseñó específicamente en el marco de este trabajo, para utilizarse en la configuración autosostenida del microoscilador representada en la Fig. 2.4 C (Para más detalles respecto del diseño del circuito véase el apéndice A).

La detección del movimiento del microresonador se realiza mediante la medición de la corriente generada por el mismo, la cual es proporcional a:

$$i(t) \propto V_{dc} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad (2.8)$$

y su frecuencia coincide con la de la excitación. Dicha señal de corriente es luego amplificada y convertida a una señal de tensión, que será luego detectada por el Lock-in, si la configuración es a lazo abierto, o en su defecto será ingresada al circuito

de acondicionamiento para producir la señal de realimentación en la configuración autosostenida.

Durante todas las mediciones el microresonador se encuentra a temperatura ambiente y a un presión de vacío de aproximadamente 10^{-6} Torr.

En la siguientes secciones se presentan los resultados obtenidos utilizando las tres configuraciones experimentales antes mencionadas.

2.4. Resonancia del sistema ante una excitación armónica

Se realizaron mediciones a lazo abierto de la respuesta del microresonador en amplitud y fase como función de la frecuencia (en barridos ascendentes y descendentes), para una excitación armónica de amplitud $V_{ac}=20\text{mV}$ y aplicando al resonador una tensión de polarización de $V_{dc}=25\text{V}$. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 2.5.

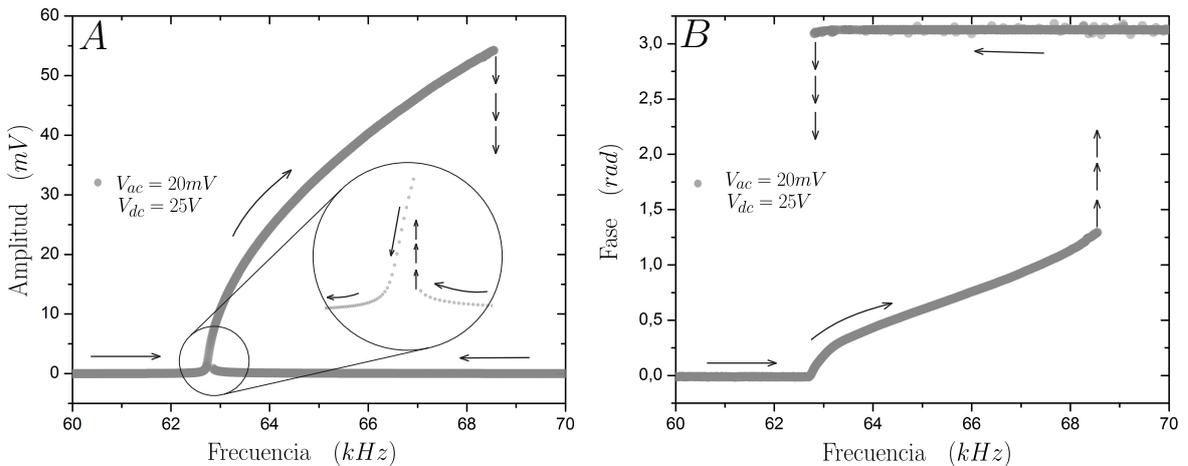


Figura 2.5: Mediciones a lazo abierto del microresonador para $V_{ac}=20\text{mV}$ y $V_{dc}=25\text{V}$, las flechas indican la dirección en que se realizaron las mediciones. **(A)** Curva de resonancia. **(B)** Respuesta en fase.

Para analizar la dependencia de las curvas de resonancia con la amplitud de la excitación, se efectuó una serie de mediciones variando V_{ac} para $V_{dc}=25\text{V}$. Los resultados se muestran en la Fig. 2.6 A. Los mismos son compatibles con mediciones reportadas para sistemas similares (véase [23, 28, 29], entre otros), en las que las curvas de resonancia reflejan un comportamiento no lineal típico, asociado a la preponderancia de no linealidades geométricas en la dinámica del modo principal de flexión en el plano.

Sin embargo comportamientos cualitativamente distintos aparecen al modificar fuertemente el valor de las fuerzas de excitación, reduciendo la tensión de polarización a $V_{dc}=6\text{V}$ (véase Ec. 2.6). Los resultados obtenidos en este caso para diferentes valores

de V_{dc} se muestran en la Fig. 2.6 B. En los mismos se ve que para un valor específico de frecuencia, que denominaremos frecuencia de resonancia interna ν_{RI} , los picos de resonancia saturan en un mismo valor. Este fenómeno de saturación se produce dentro de cierto rango de amplitudes de excitación alterna, superando un cierto valor umbral (para este caso aproximadamente $V_{ac}=190\text{mV}$) las curvas de resonancia vuelen a tener un comportamiento similar al mostrado en las Fig 2.6 A.

Este fenómeno de saturación fue reportado por primera vez por [1] y se asoció a un intercambio de energía entre el modo 1 y el modo 3 del microresonador, producido una resonancia interna cuya frecuencia viene dada por $\nu_{RI} \approx \frac{\nu_3}{3}$.

El capítulo siguiente esta destinado a dar un marco teórico al conjunto de comportamientos anteriormente presentados, con el fin de determinar cuales son las no linealidades de relevancia a la hora de generar resonancias internas entre distintos modos de vibración.

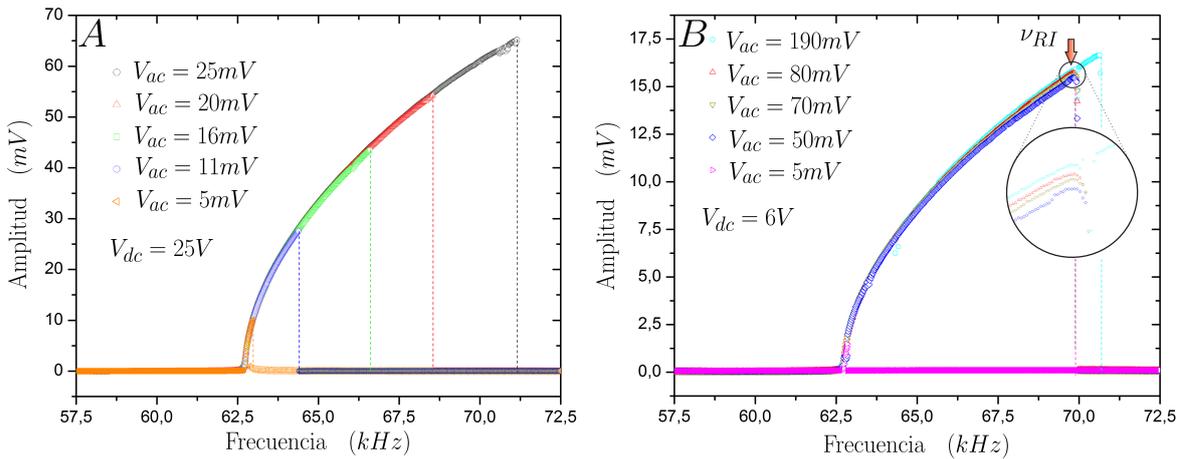


Figura 2.6: (A) Curvas de resonancia para $V_{dc}=25\text{V}$ y variando V_{ac} entre 5mV y 25mV . (B) Curvas de resonancia para $V_{dc}=6\text{V}$ y variando V_{ac} entre 5mV y 190mV .

2.5. Resonancia del sistema ante una excitación saturada

Con el objetivo de analizar cual es la influencia de la forma de la señal de excitación sobre el comportamiento del microoscilador, se realizaron mediciones para $V_{dc}=25\text{V}$ y variando la amplitud de la señal de excitación saturada entre $V_{ac}^{1er}=20\text{mV}$ y $V_{ac}^{1er}=190\text{mV}$. Los resultados obtenidos se presentan en la Fig. 2.7. En la misma se incorpora a su vez una curva de resonancia efectuada con una excitación armónica para $V_{ac}=50\text{mV}$. Puede verse que no hay diferencias apreciables entre las curvas para $V_{ac}=50\text{mV}$ y $V_{ac}^{1er}=50\text{mV}$. Con lo que puede afirmarse que la presencia de armónicos de orden superior no influye de manera significativa en el comportamiento general de

la curva de resonancia. Sin embargo para valores de V_{ac}^{1er} entre 25mV y 40 mV, el fenómeno de RI se hace presente, siendo que el mismo no existía para el caso de la excitación armónica a idénticos valores de tensión alterna (ver Fig. 2.6) A. De esto último puede concluirse que la presencia de los armónicos de orden superior en la señal de excitación saturada (en particular el tercero), juegan un rol muy importante en cuanto al mecanismo de RI se refiere, fortaleciéndolo de alguna forma. En la Fig. 2.7 se resalta a su vez un segundo valor de frecuencia cercano a 77kHz para el cual pareciera producirse otra resonancia interna, posiblemente debida a interacciones de tipo 1:2 y sobre la cual no ahondaremos en este trabajo (consúltese [30]).

En el Cap. 4 se profundizará un poco más sobre la influencia de los armónicos de orden superior en el mecanismo de resonancia interna.

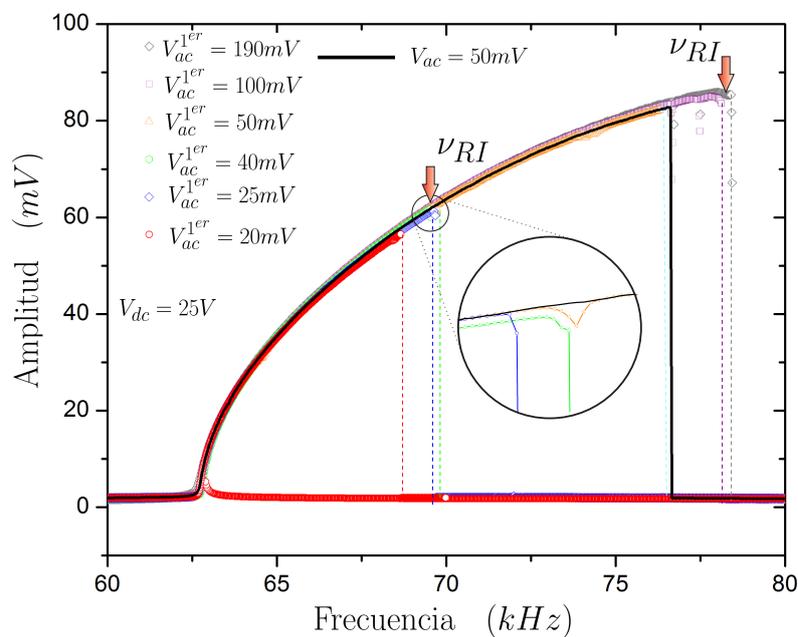


Figura 2.7: Curvas de resonancia para una excitación saturada, con $V_{dc}=25V$ y variando V_{ac}^{1er} entre 20mV y 190mV. Se resaltan las frecuencias en las cueles se producen resonancias internas.

2.6. Comportamiento del sistema autosostenido

Por último y empleando la configuración autosostenida de la Fig. 2.4 C, se midió el comportamiento del microoscilador autosostenido. Para ello se controló la fase de la fuerza de realimentación en las cercanías de dos valores de interés (0 y $\frac{\pi}{2}$) y se fijó la amplitud de la realimentación en 500mV. Los resultados obtenidos se presentan en la Fig. 2.8 A, junto con la curva de resonancia para una excitación saturada a lazo abierto con $V_{ac}^{1er}=190mV$. De dichos resultados vale la pena resaltar la equivalencia evidenciada entre las caracterización a lazo abierto y autosostenida.

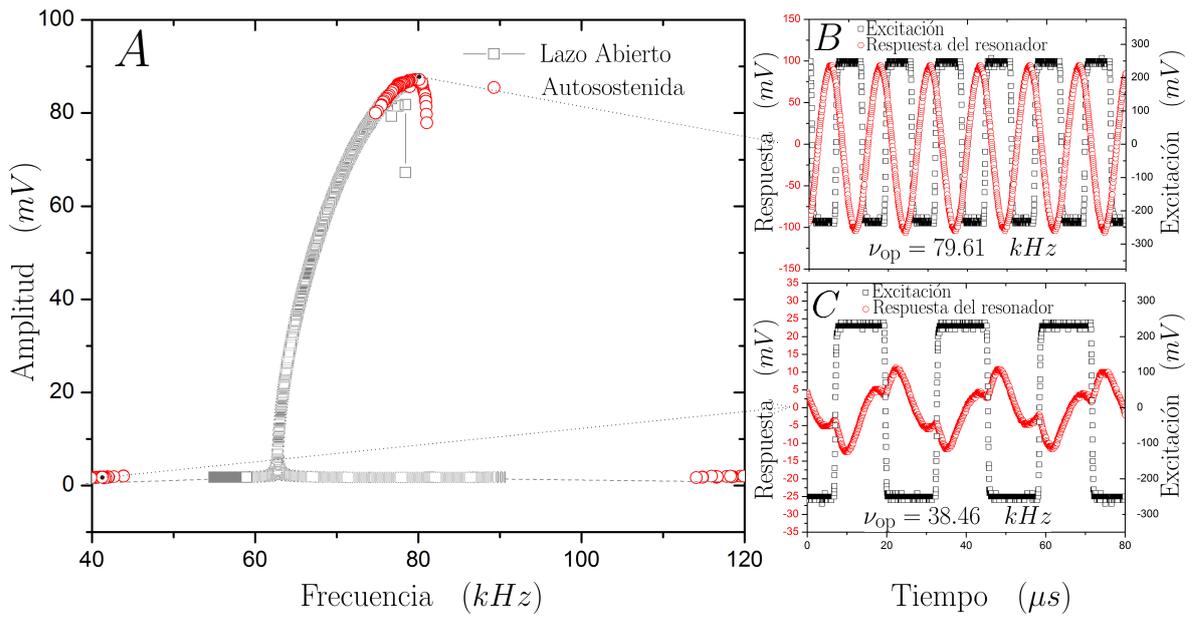


Figura 2.8: (A) Curvas de resonancia para una medición autosostenida variando la fase en las cercanías de 0 y $\frac{\pi}{2}$ ($V_{saturacin}=500mV$), junto con una curva de resonancia a lazo abierto para $V_{ac}^{1er}=190mV$. (B) Respuesta temporal del microresonador para $\phi \approx \frac{\pi}{2}$. (C) Respuesta temporal del microresonador para $\phi \approx 0$.

En las figuras 2.8 B y C se muestra el comportamiento temporal de la excitación y de la respuesta del resonador, cuando la fase se controla en las cercanías de 0 y $\frac{\pi}{2}$ respectivamente.

Capítulo 3

Modelos para la dinámica del microoscilador

El objetivo de este capítulo es entender y describir la dinámica no lineal del resonador C-C presentado en el Cap. 2 cuando el mismo trabaja en una configuración autosostenida. En particular, es de interés comprender como las diferentes fuentes de no linealidades en el sistema afectan el comportamiento del microoscilador cuando el mismo se encuentra en las cercanías de un resonancia interna y como las mismas pueden ser utilizadas para estabilizar su frecuencia de operación.

Se comenzará el análisis presentando al oscilador de Duffing como un modelo sencillo que rescata los ingredientes no lineales básicos para una descripción adecuada del modo de vibración principal del resonador (modo principal de flexión dentro del plano o modo 1). Para la resolución de esta dinámica tipo Duffing, se introducirá a su vez un método perturbativo conocido como el Método de las Múltiples Escalas, el cual se usará a todo largo de este trabajo como herramienta para resolver, de manera aproximada, las diferentes ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales vinculadas a los modelos.

Acto seguido, se desarrollará una descripción analítica de la interacción, a través de resonancias internas, del modo principal con los diferentes modos de orden superior presentes en el resonador (ver Sec. 2.1). Nos enfocaremos en aquellos modos que, por sus frecuencias de resonancia naturales, son candidatos a producir resonancias internas 1:2 y 1:3 con el modo principal (modo 2 y modo 3).

Los resultados de ambos modelos (el de un modo resonante aislado y el de dos modos interactuantes), se utilizarán para reproducir cualitativamente los resultados experimentales de la Sec. 2.4.

Por último se mostrará como la interacción entre distintos modos de vibración del microresonador, a través de resonancias internas específicas, puede actuar como un mecanismo que produce una disminución abrupta de las fluctuaciones en la frecuencia

de operación del microoscilador autosostenido (se considerará que las mismas se deben únicamente a posibles fuentes de ruido en la amplitud de la fuerza de realimentación). La magnitud de estas fluctuaciones puede utilizarse como una medida del desempeño del microoscilador como un generador de frecuencia o *clock*.

Los resultados del presente capítulo se presentarán mediante las características curvas de resonancia (curvas Amplitud vs Frecuencia) o mediante gráficas de la frecuencia de operación como función de la fuerza de realimentación cuando se quieran resaltar los fenómenos de saturación en frecuencia producidos por las resonancias internas.

3.1. El oscilador de Duffing y el Método de las Múltiples Escalas

En la Sec. 2.2 se analizaron las fuentes usuales de no linealidades que pueden afectar la dinámica del microresonador C-C. Se determinó a su vez que el comportamiento del modo principal del mismo, puede ser descrito dentro de ciertos límites por una ecuación diferencial de la forma:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \eta_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_3 x_1^3 = F_1 \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

donde $k_1 = (k_{1g} - k_{1e})$, $k_3 = (k_{3g} - k_{3e})$ y $F_1 = \frac{\epsilon_0 A_e}{d^2} V_{dc} V_{ac}$. La Ec. 3.1 es conocida con el nombre de ecuación u oscilador de Duffing y ha sido ampliamente utilizada para modelar no linealidades en MEMS tipo C-C ([1, 28, 29, 31–36]) ya que la misma presenta, como veremos en la siguiente sección, comportamientos tipo *hardening* (o de endurecimiento) asociados a no linealidades geométricas dominantes ($k_{3g} > k_{3e}$) y tipo *softening* (o de ablandamiento) comunes en sistemas con no linealidades electrostáticas dominantes ($k_{3e} > k_{3g}$).

La Ec. 3.1 puede ser normalizada por m_1 para obtener:

$$\ddot{x}_1 + 2\tilde{\mu}_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \tilde{\gamma}_1 x_1^3 = \tilde{f}_1 \cos(\omega t), \quad (3.2)$$

donde $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ es la frecuencia de resonancia natural del modo 1 y por comodidad el coeficiente de viscosidad normalizado se escribe como $2\tilde{\mu}_1$, siendo $Q_1 = \frac{1}{2\tilde{\mu}_1}$ el factor de calidad del modo 1.

Se resolverá a continuación la Ec. 3.2 considerando al término $\tilde{f}_1 \cos(\omega t)$ como una fuerza externa, lo que se corresponde con pensar al sistema en una configuración a lazo abierto y por ende el parámetro de control será ω . Inmediatamente después, se repetirá el procedimiento considerando a la excitación como un término de realimentación del sistema cuando el mismo trabaja en una configuración autosostenida.

3.1.1. Dinámica a lazo abierto

Existen diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales no lineales (véase por ejemplo [37, 38]), caben destacarse: el Método de Balance Armónico, el Método del Promedio y el Método de las Múltiples Escalas (MME). Dadas la ventajas del MME para tratar sistemas amortiguados y con múltiples términos de excitación, se empleará el mismo repetidamente en este trabajo, se comenzará por utilizarlo para resolver 3.2.

Se considerará que los términos de excitación y viscosidad, así como también el término no lineal, pueden ser tratados como una pequeña perturbación al comportamiento lineal del sistema. Con lo cual la Ec. 3.2 se transforma en:

$$\ddot{x}_1 + 2\epsilon\mu_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 + \epsilon\gamma_1x_1^3 = \epsilon f_1 \cos(\omega t), \quad (3.3)$$

donde $\tilde{\mu}_1 = \epsilon\mu_1$, $\tilde{\gamma}_1 = \epsilon\gamma_1$, $\tilde{f}_1 = \epsilon f_1$ y ϵ es el parámetro perturbativo.

La idea subyacente a la utilización de esta técnica, es la de considerar que la solución de 3.3 puede ser representada mediante una expansión en serie de potencias del parámetro ϵ , en la cual los términos de dicha expansión serán funciones de múltiples variables independientes o escalas temporales en lugar de solo una. De esta manera es posible discernir entre una escala de tiempo típica de $\mathcal{O}(1)$ asociada al movimiento oscilatorio y escalas de tiempo mas pequeñas vinculadas a cambios lentos en la amplitud y la frecuencia. Estas nuevas variables independientes se definen como:

$$\tau_n = \epsilon^n t \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Luego, las derivadas respecto a t se representan en término de derivadas parciales respecto a τ_n de acuerdo con:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{d\tau_0}{dt} \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{d\tau_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

La solución de 3.3 puede entonces ser escrita como:

$$x_1(t; \epsilon) = x_{10}(\tau_0, \tau_1, \dots) + \epsilon x_{11}(\tau_0, \tau_1, \dots) + \dots \quad (3.6)$$

Nótese que el número de escalas de tiempo independientes necesarias para escribir la solución, depende del orden de aproximación deseado. En este caso se considera una expansión a $\mathcal{O}(\epsilon)$, con lo que son necesarias τ_0 y τ_1 . Sustituyendo 3.4, 3.5 y 3.6 en 3.3 e igualando los coeficientes de $\mathcal{O}(1)$ y $\mathcal{O}(\epsilon)$ obtenemos:

$$D_0^2 x_{10} + \omega_1^2 x_{10} = 0 \quad (3.7)$$

$$D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = -2D_0 D_1 x_{10} - 2\mu_1 D_0 x_{10} - \gamma_1 x_{10}^3 + f_1 \cos(\omega \tau_0) \quad (3.8)$$

Adviértase que debido a este ordenamiento, la fuerza de excitación, el coeficiente de amortiguamiento y el correspondiente a la no linealidad aparecen juntos en 3.8.

Se considerará de aquí en adelante que la frecuencia de la fuerza de excitación toma valores cercanos a la frecuencia de resonancia natural del modo 1 (ω_1), lo que se conoce como **resonancia primaria** del sistema y se denota como:

$$\omega = \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \quad (3.9)$$

donde σ_1 es una variable de $\mathcal{O}(1)$ conocida como parámetro de sintonización, que pasará a ser la nueva variable de control de la dinámica.

La solución general de 3.7 puede escribirse como:

$$x_{10} = A_1(\tau_1) \exp(i\omega_1 \tau_0) + cc, \quad (3.10)$$

donde cc representa el complejo conjugado de la expresión precedente y $A_1(\tau_1)$ es una función indeterminada en este punto. Sustituyendo 3.10 en 3.8 y expresando el $\cos(\omega_1 \tau_0 + \sigma_1 \tau_1)$ en su forma compleja, tenemos:

$$D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} = - [2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) + 3\gamma_1 A_1^2 \bar{A}_1] \exp(i\omega_1 \tau_0) - \gamma_1 A_1^3 \exp(3i\omega_1 \tau_0) + \frac{1}{2} f_1 \exp[i(\omega_1 \tau_0 + \sigma_1 \tau_1)] + cc, \quad (3.11)$$

donde cc representa el complejo conjugado de los términos precedentes.

De 3.11 puede verse que si se aspira a una solución $x_{11}(\tau_0, \tau_1)$ uniformemente válida, es condición necesaria que los términos proporcionales a $\exp(i\omega_1 \tau_0)$, conocidos como términos seculares, se anulen. Esto se debe a que, en caso contrario, la solución particular de 3.11 tendría un término proporcional a $\tau_0 \exp(i\omega_1 \tau_0)$, el cual diverge para $\tau_0 \rightarrow \infty$. Dicha condición puede escribirse como:

$$2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) + 3\gamma_1 A_1^2 \bar{A}_1 - \frac{1}{2} f_1 \exp(i\sigma_1 \tau_1) = 0 \quad (3.12)$$

Cabe resaltar que la presencia de un término cuadrático de la forma $k_2 x_1^2$ en la Ec. 3.1, no hubiese aportado en esta instancia ningún término secular a la Ec. 3.11 y es por esto que, como se afirmó en la Sec 2.2, el término cúbico es el primer término no lineal de interés en este tipo de análisis.

Para resolver 3.12, se escribe A_1 en su forma polar:

$$A_1 = \frac{1}{2}a_1 \exp(i\varphi_1), \quad (3.13)$$

donde a_1 y φ_1 son reales, luego reemplazando 3.13 en 3.12 y separando en parte real e imaginaria obtenemos:

$$\begin{aligned} a_1' &= -\mu_1 a_1 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \sin(\sigma_1 \tau_1 - \varphi_1) \\ a_1 \gamma_1' &= \frac{3}{8} \frac{\gamma_1}{\omega_1} a_1^3 - \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \cos(\sigma_1 \tau_1 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

El sistema de ecuaciones 3.14 puede ser transformado en uno autónomo (es decir que no depende del tiempo) si se toma:

$$\phi_1 = \sigma_1 \tau_1 - \varphi_1 \quad (3.15)$$

Lo que resulta en:

$$\begin{aligned} a_1' &= -\mu_1 a_1 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \sin(\phi_1) \\ a_1 \gamma_1' &= \sigma_1 a_1 - \frac{3}{8} \frac{\gamma_1}{\omega_1} a_1^3 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \cos(\phi_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

El sistema 3.16 presenta un movimiento estacionario cuando $a_1' = \phi_1' = 0$, lo que corresponde a la solución de:

$$\begin{aligned} \mu_1 a_1 &= \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \sin(\phi_1) \\ a_1 \sigma_1 - \frac{3}{8} \frac{\gamma_1}{\omega_1} a_1^3 &= -\frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_1} \cos(\phi_1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Así finalmente, 3.17 puede resolverse para obtener la curva de resonancia, que viene dada por:

$$\sigma_1 = \frac{3}{8} \frac{\gamma_1}{\omega_1} a_1^2 \pm \left(\frac{f_1^2}{4\omega_1^2 a_1^2} - \mu_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

Conociendo $a_1 = a_1(\sigma_1)$ y a partir de 3.17 se puede determinar $\phi_1 = \phi_1(\sigma_1)$ como:

$$\phi_1 = \arcsin \left(\frac{2\mu_1 a_1 \omega_1}{f_1} \right) \quad (3.19)$$

Por último a partir de 3.9, 3.10, 3.13 y 3.15, la solución de 3.3 puede escribirse como:

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon \sigma_1 t - \phi_1) + \mathcal{O}(\epsilon) = a_1 \cos(\omega t - \phi_1) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.20)$$

La Ec. 3.20 representa una respuesta oscilatoria de amplitud $a_1(\sigma_1)$, totalmente sincronizada con la frecuencia de la excitación y desfasada de la misma en $-\phi_1(\sigma_1)$.

En la Fig. 3.1 se muestra la forma usual que toman $a_1(\sigma_1)$ y $\phi_1(\sigma_1)$ para diferentes valores del parámetro γ_1 . En las mismas pueden observarse comportamientos no lineales tipo *hardening* ($\gamma_1 > 0$) y *softening* ($\gamma_1 < 0$) que se apartan de la respuesta lineal para $\gamma_1 = 0$. Para esta última, tanto la curva de resonancia como la respuesta en fase son univaluadas, mientras que para $\gamma_1 \neq 0$, existe una región multivaluada en la que conviven dos soluciones estables (líneas llenas) y una inestable (línea punteada). Para más detalles sobre el cálculo de la estabilidad de las soluciones estacionarias véase [37].

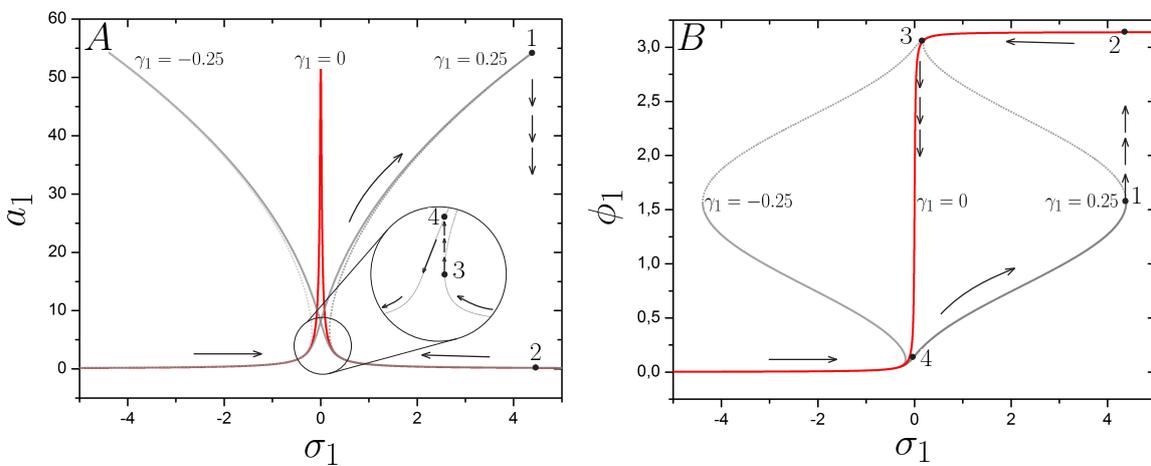


Figura 3.1: Soluciones analíticas para diferentes valores del parámetro no lineal γ_1 de: **(A)** Curvas de resonancia $a_1(\sigma_1)$. **(B)** Respuesta de la fase $\phi_1(\sigma_1)$.

La conjunción de soluciones con diferente estabilidad en una misma región, produce lo que en este contexto se conoce como fenómeno de salto. El mismo se representa mediante flechas en una de las curvas de la Fig. 3.1. Las discontinuidades asociadas a los saltos se observan entre $1 \Rightarrow 2$, cuando la curvas se recorren aumentando σ_1 y entre $4 \Leftarrow 3$ al disminuir σ_1 .

Para mostrar cuan fielmente un modelo tipo Duffing reproduce los resultados experimentales de la Sec. 2.4, se realizó en primera instancia un ajuste de las mediciones presentadas en la Fig. 2.5, utilizando las ecuaciones 3.18 y 3.19 y considerando que para el modo 1, las no linealidades preponderantes son de índole geométrica con lo que $\gamma_1 > 0$. Los resultados de dicho ajuste se muestran en la Fig. 3.2, donde se ve que eligiendo adecuadamente los parámetros del modelo el acuerdo entre los datos experimentales es excelente.

Siguiendo esta línea, se ajustó correspondientemente los valores de f_1 con la idea de reproducir la dependencia de las curvas de resonancia con la fuerza de excitación mostrada en la Fig. 2.6 A. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 3.3. Una vez más existe un buen acuerdo entre los resultados experimentales y el modelo. En el

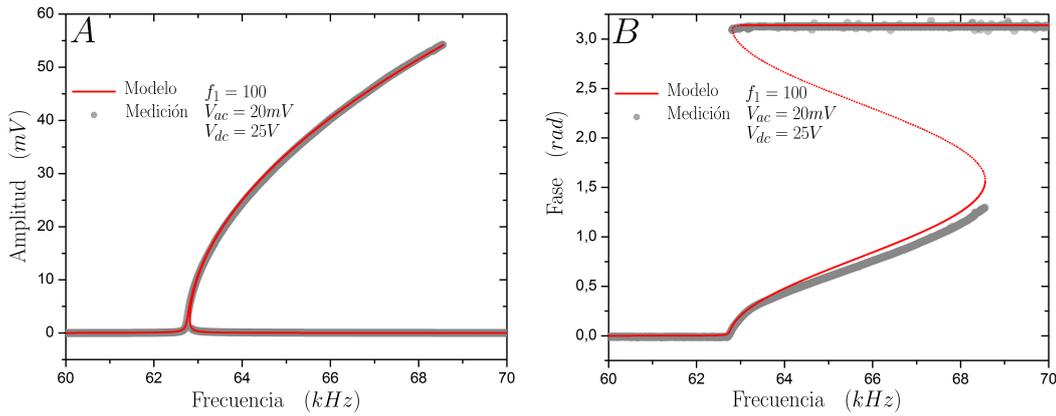


Figura 3.2: Ajuste de los datos experimentales para $V_{ac}=20mV$, utilizando un modelo tipo Duffing con $\omega_1 = 62,77$, $f_1 = 100$, $\gamma_1 = 3,3$ y $\mu_1 = 0,0147$. **(A)** Curva de resonancia. **(B)** Respuesta de la fase.

interior de la Fig. 3.3 se presenta un ajuste de V_{ac} como función de f_1 , donde se ve que la relación entre estos parámetros es básicamente un factor de escala constante.

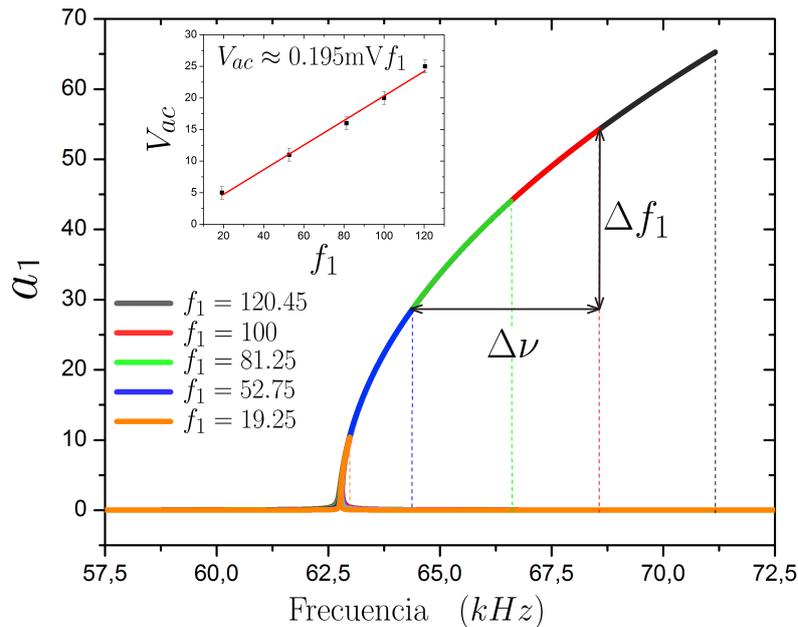


Figura 3.3: Resultados del modelo tipo Duffing ($\omega_1 = 62,77$, $\gamma_1 = 3,3$ y $\mu_1 = 0,0147$) para la dependencia de las curvas de resonancia con la fuerza de excitación f_1 , compárese con la Fig. 2.6 A. En el recuadro interior se muestra un ajuste lineal satisfactorio de $V_{ac} = V_{ac}(f_1)$.

En la Fig. 3.3 se ha resaltado a su vez el efecto A-F presente en la dinámica del resonador. Este fenómeno, como ya se ha mencionado, es una de las causas principales de degeneración del desempeño de un microoscilador, ya que convierte ruido de amplitud en fluctuaciones de su frecuencia de trabajo. Para entender mejor esta problemática, resolveremos a continuación la dinámica tipo Duffing en una configuración autosostenida.

3.1.2. Dinámica autosostenida

Como se mencionó en el Cap. 1, el análisis y caracterización de un sistema resonante a lazo abierto y en una configuración autosostenida son en cierto límite equivalentes. Sin embargo, ambos enfoques guardan algunas diferencias, como por ejemplo, la estabilidad de las soluciones estacionarias [39–41]. Además de esto, un análisis del sistema autosostenido da una visión más intuitiva del comportamiento real del microoscilador y ayuda a entender la degeneración producida por efecto A-F. Afortunadamente la metodología de resolución mediante el MME para la dinámica autosostenida es idéntica a la desarrollada en la sección anterior, con la cual la solución puede escribirse directamente como:

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon \sigma_1 t - \phi_1) + \mathcal{O}(\epsilon) = a_1 \cos(\omega t - \phi_1) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.21)$$

Debe quedar claro en este punto, que para este caso las variables de control pasan a ser la amplitud de la fuerza de autosostenido f_1 y la diferencia de fase entre dicha fuerza y la señal a la salida del resonador ϕ_1 (ver Fig. 3.4 **D**). Pese a que la fase ϕ_1 aparece explícitamente en la solución 3.21, dado que la referencia de fase es arbitraria, es equivalente pensar a la solución del sistema como $a_1 \cos(\omega t)$ y a la fuerza de realimentación como $f_1 \cos(\omega t + \phi_1)$, donde la amplitud a_1 y la frecuencia de operación ω son las variables a determinar.

En la Fig. 3.4, se muestran las soluciones del sistema autosostenido con su correspondiente estabilidad. En la misma, además de las clásicas curvas de resonancia y de respuesta en fase, se grafica la dependencia de la frecuencia de operación del sistema con la amplitud de la fuerza de realimentación. En esta última puede observarse como el efecto A-F transforma ruido en la señal de realimentación (ξ_{f_1}), en fluctuaciones de la frecuencia de operación (ξ_ω).

En las figuras 3.4 **A** y **B** puede verse que a diferencia de la configuración a lazo abierto, en este caso todas las soluciones estacionarias son de hecho estables.

En la siguiente sección se presentará un mecanismo de reducción del efecto A-F, mediante el uso de la interacción de dos modos de vibración del resonador a través de una resonancia interna.

3.2. Modos acoplados mediante resonancias internas

Los resultados experimentales presentados en la Fig. 2.6 **B**, muestran que para ciertos valores de la fuerza de excitación la dinámica del microresonador C-C se aleja claramente de comportamiento tipo Duffing usual. En su lugar aparecen valores específicos de frecuencia, que se han denominado frecuencias de resonancia interna (ν_{RI}), cerca de los cuales se produce una saturación de los picos de resonancia. Este tipo de

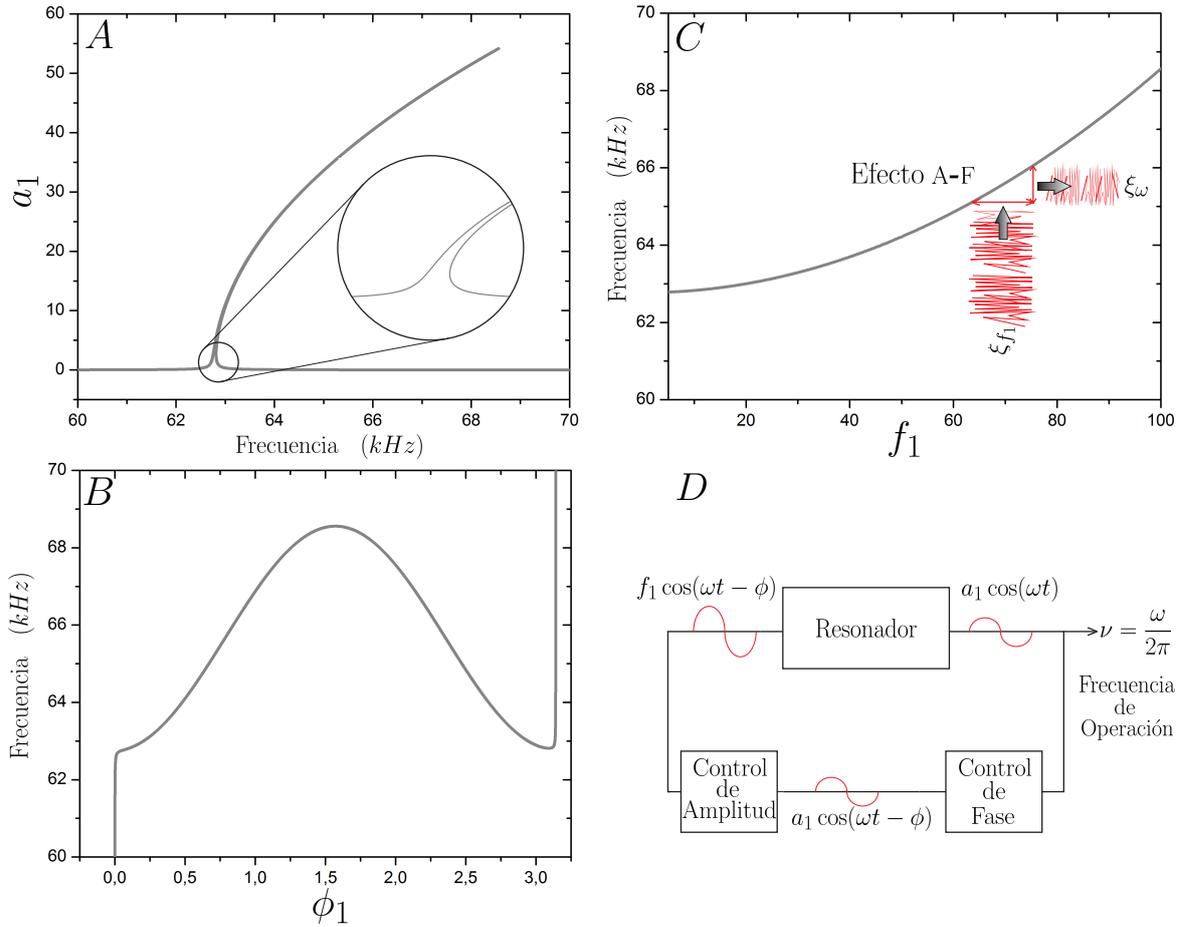


Figura 3.4: Soluciones analíticas del oscilador de Duffing autosostenido (las líneas llenas indican soluciones estables). **(A)** Curva de resonancia. **(B)** Frecuencia como función de la fase. **(C)** Dependencia de la frecuencia con la fuerza de realimentación, se esquematiza la conversión de ruido de amplitud en fluctuaciones en la frecuencia de operación. **(D)** Esquema del funcionamiento de la configuración autosostenida.

comportamientos fueron reportados en MEMS por primera vez por Dario Anonio *et al* [1] y propuestos como un posible mecanismo para estabilizar la frecuencia de operación de un microoscilador autosostenido. Otros tantos fenómenos de interacción entre modos de vibración en microestructuras han sido reportados recientemente [42–45], lo que hace al estudio de estos procesos un tópico de gran interés.

El objetivo de esta sección es dar un marco teórico que describa la fenomenología de la Fig. 2.6 B y muestre que la misma es debida a un mecanismo de resonancia interna 1:3 entre el modo principal de flexión dentro del plano y el modo de torsión principal. Esfuerzos similares están siendo llevados a cabo en forma simultánea a este trabajo por Scott B. Strachan [46].

En las últimas décadas, gran cantidad de trabajos teóricos se han abocado al estudio de las resonancias internas en estructuras mecánicas, en particular, muchos de ellos se han dedicado a investigar el mecanismo de resonancia interna entre dos o más modos de vibración de un alambre delgado [47–51]. En estos trabajos se deduce de primeros

principios un modelo que describe la dinámica de dos modos de vibración (modos de flexión dentro y fuera del plano) acoplados mediante no linealidades cuadráticas, mecanismo que presenta fenómenos de saturación y que sería equivalente al caso de una posible interacción entre los modos 1 y 2 del microresonador C-C. Sin embargo, la evidencia experimental presentada en el Cap. 2, brinda argumentos para pensar que el modo de orden superior que interactúa en este caso con el modo 1 es el modo 3. Por ello y basados en los trabajos previamente mencionados, se propone a continuación un modelo de dos modos de vibración acoplados mediante no linealidades cúbicas que puede presentar las resonancias internas 1:3 y con ello los fenómenos de saturación deseados.

La interacción entre los modos puede representarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -2\tilde{\mu}_1 \dot{x}_1 + \tilde{\beta}_1 x_1^2 x_3 + \tilde{\alpha}_1 x_1 x_3^2 + \tilde{\gamma}_1 x_1^3 + \tilde{\rho}_1 x_3^3 + \tilde{f}_1(t) \\ \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= -2\tilde{\mu}_3 \dot{x}_3 + \tilde{\beta}_3 x_1^3 + \tilde{\alpha}_3 x_3 x_1^2 + \tilde{\gamma}_3 x_3^3 + \tilde{\rho}_3 x_1 x_3^2 + \tilde{f}_3(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde $\tilde{\mu}_i = \epsilon\mu_i$, $\tilde{\beta}_i = \epsilon\beta_i$, $\tilde{\gamma}_i = \epsilon\gamma_i$, $\tilde{\rho}_i = \epsilon\rho_i$, $\tilde{f}_i(t) = \epsilon f_i(t)$, para $i = 1, 3$. Con $f_1(t) = \cos(\omega t)$ y $f_3(t) = \cos(\omega t + \theta_3)$ como términos de excitación para cada uno de los modos.

El sistema 3.22 se resolverá utilizando el método de las múltiples escalas de forma análoga a lo desarrollado en las secciones anteriores. Para ello se proponen soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}(\tau_0, \tau_1) + \epsilon x_{11}(\tau_0, \tau_1) + \dots \\ x_3 &= x_{30}(\tau_0, \tau_1) + \epsilon x_{31}(\tau_0, \tau_1) + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sustituyendo 3.23 en 3.22 e igualando los coeficientes de $\mathcal{O}(1)$ y $\mathcal{O}(\epsilon)$ obtenemos:

Orden 1:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{10} + \omega_1^2 x_{10} &= 0 \\ D_0^2 x_{30} + \omega_3^2 x_{30} &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Orden ϵ :

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} &= -2D_0(D_1 x_{10} - \mu_1 x_{10}) + \gamma_1 x_{10}^3 + \beta_1 x_{10}^2 x_{30} + \alpha_1 x_{10} x_{30}^2 \\ &\quad + \rho_1 x_{30}^3 + f_1 \cos(\omega \tau_0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$D_0^2 x_{31} + \omega_3^2 x_{31} = -2D_0(D_1 x_{30} - \mu_3 x_{30}) + \beta_3 x_{30}^3 + \alpha_3 x_{10}^2 x_{30} + \rho_3 x_{10} x_{30}^2 + \gamma_3 x_{30}^3 + f_3 \cos(\omega \tau_0 + \theta_3) \quad (3.26)$$

Luego la soluciones de 3.24 puedes ser expresadas como:

$$\begin{aligned} x_{10} &= A_1(\tau_1) \exp(i\omega_1 \tau_0) + cc \\ x_{30} &= A_3(\tau_1) \exp(i\omega_3 \tau_0) + cc \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sustituyendo 3.27 en 3.26 y 3.25 y considerando que:

$$\omega = \omega_1 + \epsilon \sigma_1, \quad (3.28)$$

y

$$\omega_3 = 3\omega_1 + \epsilon \sigma_3, \quad (3.29)$$

Pueden obtenerse los términos seculares del sistema igual que se hizo en la sección 3.1. A partir de eliminar dichos términos seculares se llega finalmente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} 8\omega_1(a_1\mu_1 + a_1') - \beta_1 a_1^2 a_3 \sin(\phi_3) - 4f_1 \sin(\phi_1) &= 0 \\ 8\omega_3(a_3' + a_3\mu_3) + \beta_3 a_1^3 \sin(\phi_3) &= 0 \\ 8\omega_1 a_1 \phi_1' + 3\gamma_1 a_1^3 + 2\alpha_1 a_1 a_3^2 + \beta_1 a_1^2 a_3 \cos(\phi_3) + 4f_1 \cos(\phi_1) &= 0 \\ 8\omega_3 a_3 \phi_3' + 3\gamma_3 a_3^3 + 2\alpha_3 a_1^2 a_3 + \beta_3 a_1^3 \cos(\phi_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Donde $\phi_1 = \sigma_1 \tau_1 - \varphi_1$ y $\phi_3 = \sigma_3 \tau_1 + \varphi_3 - 3\varphi_1$.

Para obtener soluciones estacionarias de la dinámica pedimos que $a_i' = \phi_i' = 0$, con lo que se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} 8\omega_1 a_1 \mu_1 - \beta_1 a_1^2 a_3 \sin(\phi_3) - 4f_1 \sin(\phi_1) &= 0 \\ 8\omega_3 a_3 \mu_3 + \beta_3 a_1^3 \sin(\phi_3) &= 0 \\ 8\omega_1 a_1 \sigma_1 + 3\gamma_1 a_1^3 + 2\alpha_1 a_1 a_3^2 + \beta_1 a_1^2 a_3 \cos(\phi_3) + 4f_1 \cos(\phi_1) &= 0 \\ 8\omega_3 a_3 (3\sigma_1 - \sigma_3) + 3\gamma_3 a_3^3 + 2\alpha_3 a_1^2 a_3 + \beta_3 a_1^3 \cos(\phi_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

El sistema de ecuaciones algebraicas 3.31 puede ser resuelto analíticamente para obtener las curvas de resonancia para el modo 1 ($a_1 = a_1(\nu)$), con $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. En la Fig. 3.5 se muestran los resultados obtenidos para dichas curvas de resonancia, en los que se ve como el fenómeno de resonancia interna modifica cualitativamente la soluciones en las cercanías de ν_{RI} y como el mismo depende del valor de la fuerza de excitación. Para valores de f_1 mayores a un cierto umbral, la curva de resonancia recupera la

continuidad en las cercanías de ν_{RI} .

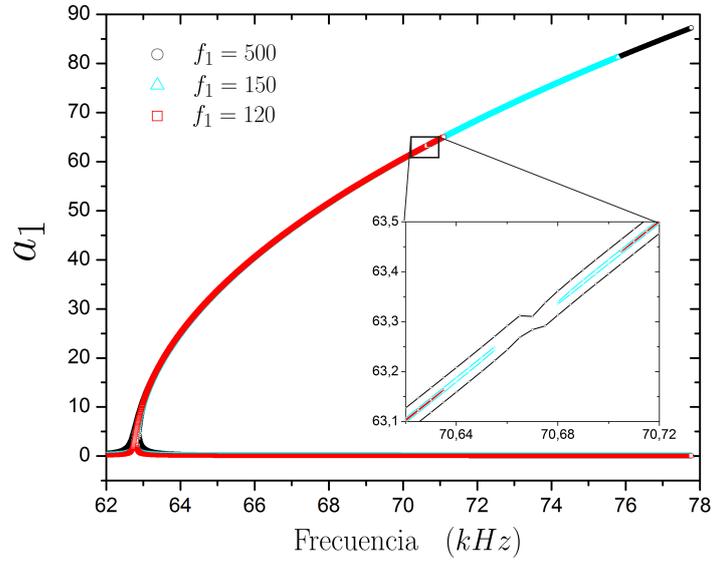


Figura 3.5: Resultados para $a_1 = a_1(\nu)$. Los parámetros utilizados fueron: $\omega_1 = 62,77$, $\omega_3 = 212,007$, $\sigma_3 = 236,97$, $\mu_1 = 0,0147$, $\mu_3 = 0,1$, $\gamma_1 = -3,3$, $\beta_1 = -0,15$, $\beta_3 = -0,0015$ y el resto de los coeficientes no lineales iguales a cero.

3.2.1. Estabilización de la frecuencia de operación

Para comprender mejor como el fenómeno de resonancia interna puede actuar como un mecanismo de estabilización de la frecuencia de operación de un microoscilador autosostenido, se resolvió nuevamente el sistema 3.31, pero esta vez tomando como variable de control la fuerza de excitación, fijando la fase entre la excitación y la respuesta del microresonador en $\frac{\pi}{2}$ y calculando la frecuencia de operación del sistema. Los resultados se presentan en la Fig. 3.6.

Puede verse claramente el fenómeno de saturación producido por la resonancia interna en las cercanías de ν_{RI} y como de esta manera se reducen abruptamente las fluctuaciones de la frecuencia de operación debida a ruido en la amplitud de la fuerza de realimentación.

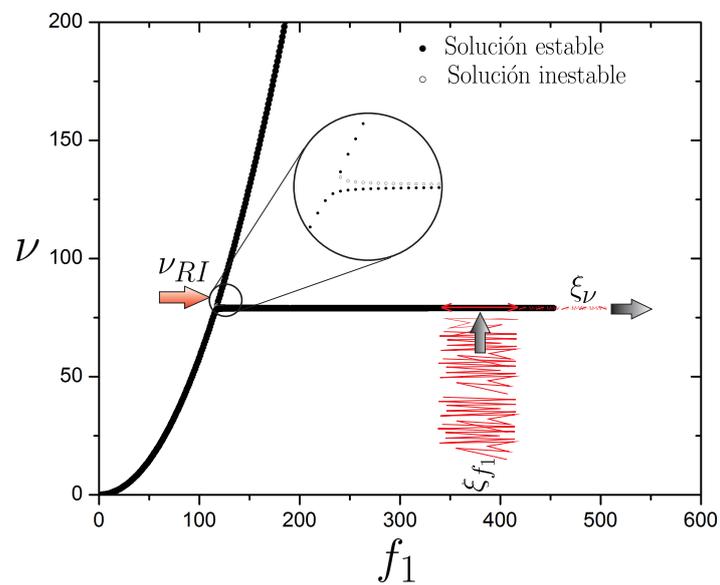


Figura 3.6: Resultados para $\nu = \nu(f_1)$, para una excitación armónica. Los parámetros utilizados fueron: $\omega_1 = 62,77$, $\omega_3 = 212,007$, $\sigma_3 = 236,97$, $\mu_1 = 0,0147$, $\mu_3 = 0,1$, $\gamma_1 = -3,3$, $\beta_1 = -0,15$, $\beta_3 = -0,0015$ y el resto de los coeficientes no lineales iguales a cero.

Capítulo 4

Optimización de la estabilización de frecuencia

Este capítulo este destinado a la presentación y breve descripción de un posible mecanismo de optimización del fenómeno de resonancia interna 1:3. El mismo está motivado en los resultados experimentales presentados en la Fig. 2.7, en los cuales puede notarse que la forma funcional de la señal de excitación tiene la capacidad de modificar cualitativamente el comportamiento de las curvas de resonancia del sistema en las cercanías de una resonancia interna. En particular como se dijo anteriormente, el desarrollo en serie de fourier de la señal de excitación saturada, pone en evidencia que la frecuencia de su primer armónico de orden superior es tres veces la del armónico principal. Esta relación particular entre las frecuencias de los armónicos más significativos puede ser aprovechada para que, al mismo tiempo que el modo 1 se aproxima a la frecuencia de resonancia interna, el modo 3 este siendo excitado con una fuerza sintonizada con su frecuencia de resonancia natural, mecanismo que tiende a fortalecer la interacción entre ambos modos. Esta situación puede ser representada mediante el modelo desarrollado en el capítulo anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -2\tilde{\mu}_1 \dot{x}_1 + \tilde{\beta}_1 x_1^2 x_3 + \tilde{\alpha}_1 x_1 x_3^2 + \tilde{\gamma}_1 x_1^3 + \tilde{\rho}_1 x_3^3 + \tilde{f}_1(t) \\ \ddot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= -2\tilde{\mu}_3 \dot{x}_3 + \tilde{\beta}_3 x_3^3 + \tilde{\alpha}_3 x_3 x_1^2 + \tilde{\gamma}_3 x_3^3 + \tilde{\rho}_3 x_1 x_3^2 + \tilde{f}_3(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde $\tilde{\mu}_i = \epsilon\mu_i$, $\tilde{\beta}_i = \epsilon\beta_i$, $\tilde{\gamma}_i = \epsilon\gamma_i$, $\tilde{\rho}_i = \epsilon\rho_i$, $\tilde{f}_i(t) = \epsilon f_i(t)$, para $i = 1, 3$. En este caso los términos de excitación vendrán dados por:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f_1 \cos(\omega t) + \frac{f_1}{3} \cos(3\omega t + \pi) + \dots \\ f_3(t) &= f_3 \cos(\omega t) + \frac{f_3}{3} \cos(3\omega t + \pi) + \dots, \end{aligned} \quad (4.2)$$

cada uno de los cuales es básicamente el desarrollo en serie de fourier de una onda cuadrada. Por simplicidad y sin pérdida de mayor generalidad se considerará en lo que

sigue que $f_1 = f_3$.

Para resolver el sistema 4.1 mediante el MME, se procede de forma idéntica que en la Sec. 3.2, obteniéndose para las soluciones estacionarias el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 8\omega_1 a_1 \mu_1 - \beta_1 a_1^2 a_3 \sin(\phi_3) - 4f_1 \sin(\phi_1) &= 0 \\
 8\omega_3 a_3 \mu_3 + \beta_3 a_1^3 \sin(\phi_3) + 4\frac{f_1}{3} \sin(3\phi_1 - \phi_3) &= 0 \\
 8\omega_1 a_1 \sigma_1 + 3\gamma_1 a_1^3 + 2\alpha_1 a_1 a_3^2 + 2\beta_1 a_1^2 a_3 \cos(\phi_3) + 4f_1 \cos(\phi_1) &= 0 \\
 8\omega_3 a_3 (3\sigma_1 - \sigma_3) + 3\gamma_3 a_3^3 + 2\alpha_3 a_1^2 a_3 + \beta_3 a_1^3 \cos(\phi_3) - 4\frac{f_1}{3} \cos(3\phi_1 - \phi_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

El sistema 4.3 puede ser resuelto analíticamente para obtener finalmente una gráfica de la frecuencia de operación del sistema autosostenido como función de la fuerza de realimentación saturada ($\nu = \nu(f_1)$). En la Fig. 4.1 se muestra el resultado obtenido para $\nu = \nu(f_1)$ y a modo de comparación se incorpora la misma curva calculada cuando la fuerza de realimentación es monoarmónica.

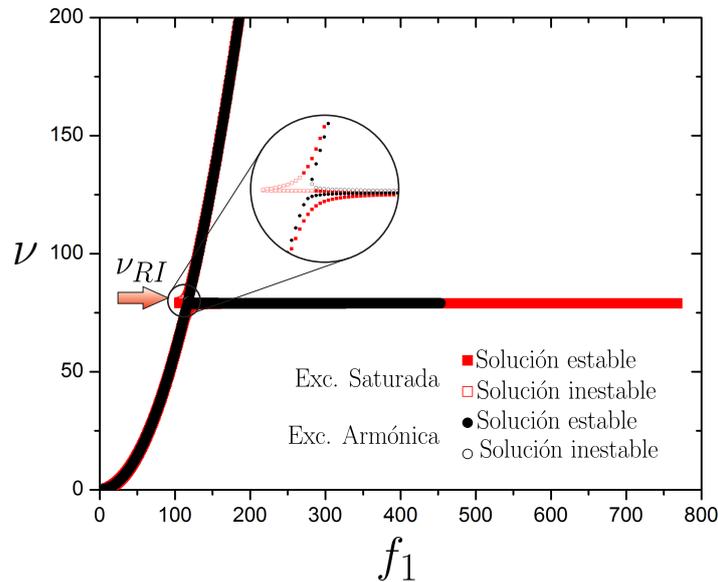


Figura 4.1: Resultados para $\nu = \nu(f_1)$, para una excitación saturada ($f_3 = \frac{f_1}{3}$) y una armónica ($f_3 = 0$). Los parámetros utilizados fueron: $\omega_1 = 62,77$, $\omega_3 = 212,007$, $\sigma_3 = 236,97$, $\mu_1 = 0,0147$, $\mu_3 = 0,1$, $\gamma_1 = -3,3$, $\beta_1 = -0,15$, $\beta_3 = -0,0015$ y el resto de los coeficientes no lineales iguales a cero.

Puede verse que el rango de estabilización de la frecuencia crece considerablemente debido a la presencia del armónico superior en la fuerza de realimentación. Esto sumado a las ventajas en la implementación electrónica de un circuito de acondicionamiento que sature la señal de realimentación, hace de esta configuración un excelente candidato para futuras aplicaciones en circuitos para microosciladores autosostenidos.

Capítulo 5

Conclusiones

La coexistencia, en muchos casos inevitable, de la dinámica de los MEMS con fenómenos no lineales constituye una problemática de índole tanto aplicado como fundamental. Este trabajo ha abordado algunas de las aristas de este problema utilizando herramientas tanto teóricas como experimentales. Se comenzó por realizar una caracterización experimental de microresonador *clamped-clamped* bajo distintos parámetros de operación. Se demostró que la dinámica del mismo puede ser descrita en cierto rango, por un único modo no lineal tipo Duffing. Sin embargo se mostró que existen configuraciones para las cuales la dinámica del microoscilador presenta fenómenos de saturación, alejándose cualitativamente de un comportamiento usual tipo Duffing. Resultados similares a estos fueron reportados originalmente por Dario Antonio *et al* [1] y los mismos se asociaron a la presencia de una resonancia interna 1:3 entre el modo principal de flexión dentro del plano y el modo de torsión principal del microresonador, proponiéndose de esta manera a este mecanismo como un posible estabilizador de la frecuencia de operación del microoscilador. Estas observaciones experimentales constituyeron la motivación para desarrollar un modelo que permita describir dicha fenomenología. El modelo propuesto se presentó al final del Capítulo 3 y se corroboró que el mismo reproduce los resultados experimentales a lazo abierto. Para demostrar la existencia del fenómeno de estabilización de frecuencia, se resolvió a su vez la dinámica autosostenida del nuevo modelo, completando así una descripción satisfactoria del fenómeno de RI.

Por último en el Capítulo 4 se presentó un posible mecanismo de optimización de la estabilización de frecuencia mediante el uso de señales saturadas de realimentación. Se adjudicó este fortalecimiento de la resonancia interna a la presencia de un armónico de orden superior en el desarrollo de Fourier de la señal saturada cuya frecuencia guarda una relación 1:3 con la del armónico principal. Se demostró la mejora en la estabilización de frecuencia resolviendo la dinámica autosostenida para el modelo de dos modos interactuantes adaptado a la excitación saturada y comparando estos resultados con los

del modelo armónicamente excitado. De esto último puede concluirse que incorporar a la forma funcional de la señal de realimentación como una variable más a la hora de diseñar microosciladores, representa un tópico a tener en cuenta para futuros trabajos en esta área. Y en particular utilizar circuitos de realimentación con señales saturadas, pueden constituir una alternativa a la hora de implementar microosciladores, tanto por la optimización de la estabilización de frecuencia, como por las conveniencias en su diseño electrónico.

En conclusión, el resultado más importante de este trabajo es la demostración de que existen diferentes mecanismos que permiten operar MEMS en regímenes no lineales, posibilitando de esta manera su implementación como sensores, actuadores o generadores de frecuencia.

Apéndice A

Esquema del circuito de realimentación

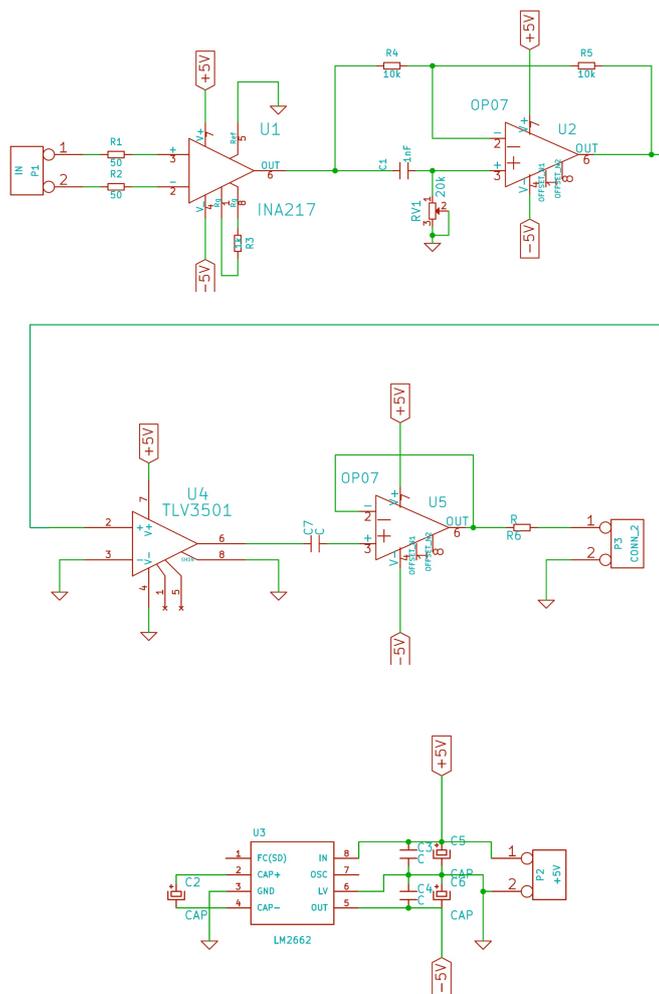


Figura A.1: Esquema del circuito de acondicionamiento de la señal de realimentación. El mismo consta de una etapa de control de fase y una etapa de saturación.

Bibliografía

- [1] Antonio, D., Zanette, D. H., Lopez, D. Frequency stabilization in nonlinear micromechanical oscillators. *Nat. Commun.*, **3**, 802, 2012.
- [2] Postma, H. W. C., Kozinsky, I., Husain, A., Roukes, M. L. Dynamic range of nanotube- and nanowire-based electromechanical systems. *Appl. Phys. Lett.*, **86**, 223105, 2005.
- [3] Audoin, C., Guinot, B. The measurement of time: Time, frequency, and the atomic clock. *Cambridge University Press.*, 2001.
- [4] Van Beek, J. T. M., Puers, R. A review of mems oscillators for frequency reference and timing applications. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **22**, 013001, 2012.
- [5] Nguyen, C. MemS technology for timing and frequency control. *IEEE trans. ultrason. ferroelectr. freq. control*, **54**, 251–270, 2007.
- [6] Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J. A universal concept in nonlinear sciences. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, 2003.
- [7] Yang, Y. T. S., Feng, X. L., Ekinici, K. L., Roukes, M. L. Zeptogram-scale nanomechanical mass sensing. *Nano Lett.*, **6**, 583–586, 2006.
- [8] Decca, R. S., et al. Constraining new forces in the casimir regime using the isoelectronic technique. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 240401, 2005.
- [9] Stowe, T. D., et al. Attonewton force detection using ultrathin silicon cantilevers. *Appl. Phys. Lett.*, **71**, 288–290, 1997.
- [10] Rugar, D., Budakian, R., Mamin, H. J., Chui, B. W. Single spin detection by magnetic resonance force microscopy. *Nature*, **430**, 329–332, 2004.
- [11] Bishop, D., Gammel, P., Giles, R. The little machines that are making it big. *Phys. Today*, **54**, 38–44, 2001.

- [12] Ekinici, K. L., Roukes, M. L. Nanoelectromechanical systems. *Rev. Sci. Instrum.*, **76**, 061101, 2005.
- [13] Yurke, B., Greywall, D. S., Pargellis, A. N., Busch, P. A. Theory of amplifier-noise evasion in an oscillator employing a nonlinear resonator. *Phys. Rev. A*, **51**, 4211–4229, 1995.
- [14] Lee, H. K., et al. Verification of the phase-noise model for mems oscillators operating in the nonlinear regime. in: Solid-state sensors. *Actuators and Microsystems Conference*, pág. 510–513, 2011.
- [15] Ward, P., Duwel, A. Oscillator phase noise: systematic construction of an analytical mode encompassing nonlinearity. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, **58**, 195–205, 2011.
- [16] Cleland, A. N., Roukes, M. L. Noise processes in nanomechanical resonators. *J. Appl. Phys.*, **92**, 2758–2769, 2002.
- [17] Dykman, M. I., Mannella, R., McClintock, P. V. E., Soskin, S. M., Stocks, M. G. Noiseinduced narrowing of peaks in power spectra of underdamped nonlinear oscillators. *Physical Review A*, **42(12)**, 7041, 1990.
- [18] Manevich, A. I., Manevitch, L. I. Mechanics of nonlinear systems with internal resonances. *Imperial College Press*, 2005.
- [19] MEMSCAP Inc. Durham, NC. [Online]. Available: <http://www.memscap.com>.
- [20] Mohammad, I. Y. Memes linear and nonlinear statics and dynamics. *Springer*, 2011.
- [21] Lin, R. M. L., Wang, W. J. Structural dynamics of microsystems current state of research and future directions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, 1015–1043, 2006.
- [22] Hentz, S. Downscaling silicon resonant mems and nems sensors, devices, transduction, nonlinear dynamics and applications. *Micro and Nanotechnologies and Microelectronics. INSA de Lyon*, 2012.
- [23] Palaniapan, M., Khine, L. Nonlinear behavior of soi free free micromechanical beam resonator. *ScienceDirect Sensors and Actuators A*, **142**, 203–210, 2007.
- [24] Lifshitz, R., Cross, M. C. Nonlinear dynamics of nanomechanical and micromechanical resonators. *Preprint of contribution to: Review of Nonlinear Dynamics and Complexity.*, 2008.

- [25] Agarwal, M., Park, K., Candler, R., Hopcroft, M., Jha, C., Melamud, R., *et al.* Nonlinear cacellation in mems resonators for improved power-handling. *Proceedings of the IEEE International Electron Devices Meeting, IEDM*, págs. 286–289, 2005.
- [26] Agarwal, M., Chandorkar, S. A., Candler, R., Hopcroft, M., Jha, C., Melamud, R., *et al.* Optimal drive condition for nonlinearity reduction in electrostatic microresonators. *Appl. Phys. Lett.*, **89**, 214105, 2006.
- [27] Matthys, R. J. Cristal oscillator circuits. *New York, Wiley Interscience*, **1**, 244, 1983.
- [28] Mestrom, R. M. C., Fey, R. H. B., Phan, K. L., Nijmeijer, H. Simulations and experiments of hardening and softening resonances in a clamped-clamped beam mems resonator. *Sensors and Actuators A*, **162**, 225–234, 2010.
- [29] Mestrom, R. M. C., Fey, R. H. B., Nijmeijer, H. Theroretical and experimental nonlinear dynamics of a clamped-clamped beam mems resonator. *ENOC*, 2008.
- [30] Lopez, D., Czaplewski, D. Nanofabrication and devices group at argonne national labs.
- [31] Arroyo, S. I. Dinámica de micro osciladores clamped-clamped, estabilización de la frecuencia. *Tesis carrera de maestría en física*, 2013.
- [32] Lin, R. M. L., Wang, W. J. Nonlinear dynamics of a micromechanical torsional resonator: Analitical model and experiments. *Jornal of Micromechanical Systems*, **18**, 1396–1400, 2009.
- [33] Mestrom, R. M. C., Fey, R. H. B., van Beek, J. T. M., Phan, K. L., Nijmeijer, H. Modelling the dynamics of a mems resonator: Simulations and experiments. *Sensors and Actuators A*, **142**, 306–315, 2008.
- [34] Mestrom, R. M. C., Fey, R. H. B., Phan, K. L., Nijmeijer, H. Experimental validation of hardening and softening resonances in a clamped-clamped beam mems resonator. *Proceedings of Eurosensors XXIII conference*, **1**, 812–815, 2009.
- [35] Braghin, F., Resta, F., Leo, E., Spinola, G. Nonlinear dynamics of vibrating mems. *Sensors and Actuators A*, **134**, 98–108, 2007.
- [36] Kacem, N., Hentz, S., Pinto, D., Reig, B., Nguyen, V. Nonlinear dynamics of nanomechanical beam resonators: improving the preformance of nems-based sensors. *IOPscience- Nanotechnology*, **20**, 275501, 2009.

- [37] Nayfeh, A. H., Mook, D. T. Nonlinear oscillations. *Wiley, New York*, 1995.
- [38] Guckenheimer, J., Holmes, P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Springer-Verlag New York*, **42**, 1983.
- [39] Arroyo, S. I., Zanette, D. H. Duffing revisited: Phase shift control and internal resonance in self-sustained oscillators. *Preprint submitted to Elsevier Science*, pág. 0, 2014.
- [40] Zanette, D., Arroyo, S. I. H. Synchronization of a forced self-sustained duffin oscillator. *The European Physical Journal Special Topics*, **223**, 2807–2817, 2014.
- [41] Arroyo, S. I., Zanette, D. H. Synchronization propertird of self-sustained mechanical oscillators. *Phys. Rev. E*, **87**, 052910, 2013.
- [42] Matheny, M., Villanueva, L. G., Karabalin, R. B., Sader, J. E., Roukes, M. L. Nonlinear mode-coupling in nanomechanical systems. *Nano letters*, 2013.
- [43] Lulla, K. J., Cousins, R. B., Venkatesan, A., Patton, M. J., Armour, A. D., Mellor, C. J., *et al.* Nonlinear modal coupling in a high-stress doubly-clamped nanomechanical resonator. *New Journal of Physics*, **14**, 113040, 2012.
- [44] A., T. P., B., H. J., E., A., C., S. K. Linear and nonlinear coupling between transverse modes of a nanomechanical resonator. *Journal of Applied Physics*, **114**, 114307, 2013.
- [45] Poluinin, P. M., Strachan, S., Ahn, C. H., Shaw, W. S. Experimental investigation on mode coupling of bulk mode silicon mems resonators. *In Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 2015 28th IEEE International Conference*, págs. 1008–1011, 2015.
- [46] Strachan, B. S. Exploiting internal resonance in mems for a signal processing applications. *A dissertation submitted to Michigan State University in partial fulfillment of the requirements of a degree of doctor of philosophy- Mechanical Engineering-Electrical Engiennering*, 2015.
- [47] Narashima, R. Non-lienar vibration of an elastic string. *J. Sound Vib.*, **8**, 464, 1968.
- [48] Lee, C. L., Perkins, N. C. Nonlinear oscillations os suspended cables containing a two-to-one internal resonance. *Nano letters*, **3**, 465–490, 1992.
- [49] Benedettini, F., Rega, G., Alaggio, R. Nonlinear oscillations of a four degree of freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of sound and vibration*, **18**, 775–798, 1995.

-
- [50] Nayfeh, A. H., Balachandran, B. Modal interactions in dynamical and structural systems. *Appl. Mech. Rev.*, **42**, S175–S201, 1989.
- [51] Visweswara, R. G., Iyengar, R. N. Internal resonance and nonlinear response of a cable under periodic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, **149**, 25–41, 1991.

Publicaciones y presentaciones en congresos asociadas

1. Mangussi, F., Zanette, D. H., Pastoriza, H. Dinámica no lineal de microosciladores autosostenidos. Presentación en formato póster en la 100RNF de la Asociación de Física Argentina, 2015. (Trabajo distinguido con una mención en el premio Masperi 2015).

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director Damián H. Zanette por su guía y paciencia durante el desarrollo de esta maestría, a mi codirector Hernán Pastoriza por brindar a este proyecto el sustento experimental sin el no hubiese podido concretarse, a Damián Dellavale por ayudarme a resolver algunas complicaciones relacionadas con la electrónica de los sistemas de medición, a Diego J. Pérez por el acompañamiento en la etapa inicial de este trabajo, a Sergio Encina por su contribución en el desarrollo de los programas de adquisición, a Daniel López por sus convalidaciones experimentales y por supuesto a todos los miembros de los grupos de física estadística interdisciplinaria (FiEstIn) y bajas temperaturas (BT) por su permanente colaboración y compañía.