

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS  
FÍSICAS

**INTERFEROMETRÍA  
LANDAU-ZENER-STÜCKELBERG EN QUBITS  
SUPERCONDUCTORES: EFECTOS DEL  
ACOPLAMIENTO SISTEMA-RESERVORIO**

**Ana Laura Gramajo**  
Maestrando

**Dr. Daniel Domínguez**  
Director

**Miembros del Jurado**  
Dr. P. Cornaglia (Instituto Balseiro)  
Dr. G. Usaj (Instituto Balseiro)  
Dr. A. Reynoso (Centro Atómico Bariloche)

Diciembre de 2014

Grupo de Teoría de Sólidos – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



A mi familia.



# Índice de símbolos

qubits: quantum bits

MQP: Macroscopic Quantum Phenomena

SQUID: Superconducting Quantum Interference Device

JJ: Juntura Josephson

rf: radio frequency

TLS: Two Level System

MZ: Mach-Zener

LZS: Landau-Zener-Stückelberg

pc: persistent-current

RWA: Rotating Wave Aproximation



# Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas cuánticos macroscópicos . . . . .	2
1.1.1. SQUIDs: juntura Josephson . . . . .	2
1.1.2. Hamiltoniano del qubit superconductor de flujo . . . . .	3
1.2. Interferencia Landau-Zener-Stückelberg . . . . .	6
1.2.1. Experimento de interferencia LZS en qubits superconductores . . . . .	6
1.2.2. Interferometría LZS: aproximación de impulso adiabático . . . . .	9
1.2.3. Interferometría LZS: Rotating Wave Aproximation . . . . .	11
<b>2. Sistema aislado: resolución de la dinámica del qubit superconductor</b>	<b>15</b>
2.1. Modelo TLS y formalismo de Floquet . . . . .	15
2.1.1. Desarrollo de la teoría de Floquet . . . . .	16
2.1.2. Aplicación al qubit de flujo . . . . .	18
2.2. Probabilidades de transición . . . . .	19
2.3. Resolución numérica: interferencia de Landau-Zener-Stückelberg . . . . .	19
<b>3. Sistema cuántico dependiente del tiempo en contacto con un reservorio</b>	<b>23</b>
3.1. Ecuación maestra para un sistema cuántico abierto . . . . .	23
3.1.1. Representación de Floquet . . . . .	27
3.2. Baño térmico . . . . .	28
3.2.1. Ecuación de Langevin . . . . .	28
3.3. Probabilidades de transición . . . . .	30

<b>4. Sistema abierto: Resolución de la dinámica del qubit superconductor</b>	<b>33</b>
4.1. Acoplamiento del sistema con el reservorio . . . . .	34
4.2. Acoplamiento longitudinal, $\mathcal{A} = \sigma_z$ . . . . .	34
4.2.1. Probabilidad estacionaria . . . . .	34
4.2.2. Probabilidad a tiempos finitos . . . . .	36
4.3. Acoplamiento transversal, $\mathcal{A} = \sigma_x$ . . . . .	37
4.3.1. Probabilidad estacionaria . . . . .	37
4.3.2. Probabilidad a tiempos finitos . . . . .	38
4.4. Acoplamiento transversal y longitudinal . . . . .	40
<b>5. Interferometría LZS en el qubit de flujo: sistema de <math>N</math> niveles</b>	<b>43</b>
5.1. Hamiltoniano del qubit de flujo . . . . .	43
5.2. Ruido de flujo y de carga . . . . .	45
5.2.1. Probabilidad estacionaria . . . . .	46
5.2.2. Probabilidad no estacionaria . . . . .	48
5.3. Comparación con resultados experimentales . . . . .	50
<b>6. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>A. Reducción del qubit de flujo a un sistema de dos niveles</b>	<b>55</b>
<b>B. Método del propagador</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>63</b>



# Resumen

En 1982 los físicos Paul Benioff y Richard Feynmann (independientemente) propusieron por primera vez la idea de que un sistema cuántico puede ser utilizado en computación. Ambas ideas se basan en que si la unidad indivisible de información clásica es el bit (un objeto que puede tener dos valores 0 ó 1) entonces la correspondiente unidad de información cuántica es el bit cuántico o “quantum bit” (‘qubit’). Con lo cual la idea básica de funcionamiento es: se coloca una serie de qubits en un estado inicial determinado, se aplica una operación unitaria  $U$  (equivalente a una compuerta lógica cuántica), se deja evolucionar al sistema y luego se mide. La medición realizada es la salida de la computadora cuántica.

A partir de estas ideas sugieron diversos candidatos para ser usados como qubits para: almacenamiento, manipulación y transmisión de información cuántica. Paralelamente, el estudio de fenómenos cuánticos a escala macroscópica y los desarrollos tecnológicos permitieron el uso de nanosistemas superconductores como qubits. En los cuales es posible manipular el estado cuántico del sistema mediante la aplicación y medición de variables macroscópicas (como voltajes, corrientes y flujos magnéticos en el dispositivo), útil para la construcción de una compuerta lógica cuántica.

Entre los posibles candidatos superconductores tenemos el qubit de flujo. Este dispositivo consiste en una espira superconductora con una serie de juntas del tipo superconductor-aislante-superconductor. El funcionamiento se basa, sin entrar en detalles, en la posibilidad de manipular el estado cuántico superconductor mediante la aplicación de un campo magnético externo: el flujo encerrado en la espira modifica las fases de la función de onda del sistema, generando fenómenos de interferencia cuántica. Una de las grandes ventajas es la posibilidad de determinar su estado cuántico mediante la medición de la corriente en la espira: los signos de la corriente permite identificar los estados del sistema.

En este trabajo se presenta una breve descripción de dichos nanosistemas a fin de determinar su dinámica. Partimos modelando al qubit de flujo como un sistema simplificado de dos niveles, forzado por un campo magnético periódico en el tiempo. De esta manera se manipula el estado del qubit modificando las probabilidades de encontrar al sistema en uno de los dos estados, es decir: se elige un estado inicial, se

aplica el campo externo y se analiza su evolución. En base a este modelo, calculamos numéricamente dichas probabilidades para tiempos finitos y para el caso estacionario, en el cual se deja evolucionar al sistema lo suficiente hasta alcanzar un estado final independientemente de su preparación inicial.

Por otra parte se enfatizó el estudio del qubit de flujo en contacto con el ambiente que lo rodea, con el objetivo de poder comparar nuestros resultados numéricos con mediciones experimentales. Para ello se analiza como afectan las fluctuaciones del mundo externo a la dinámica del sistema, considerando diferentes fuentes de ruido. Luego se estudió los efectos de extender el sistema a  $N$  niveles, en particular se trabajó con  $N = 4$ . De esta manera, se busca poder identificar las fuentes de ruido para poder disminuirlas, y con ello evitar la pérdida de información del sistema.

# Abstract

In 1982 physicists Paul Benioff and Richard Feynmann (independently) proposed for the first time the idea that a quantum system can be used in computing. Both ideas are based on the same elements: if the indivisible unity of classical information is the bit (an object that can have two values 0 or 1) then the corresponding unit of quantum information is the quantum bit ('qubit '). So the basic idea of operation is: a series of qubits are put at a given initial state, then a unit operation  $U$  (equivalent to a quantum logic gate) is applied, the system evolves and then measured. The measurement is carried out at the exit of the quantum computer.

From these ideas diverse candidates to be used as qubits emerged for: storage, handling and transmission of quantum information. Similarly, the study of quantum phenomena at macroscopic scale and technological developments permitted the use of superconducting nanosystems as qubits. In which it is possible to manipulate the quantum state of the system by implementing and measuring macroscopic variables (such as voltages, currents and magnetic fluxes on the device), useful for building a quantum logic gate.

There is many superconducting candidates, for example the qubit flux. This device consists of a superconducting loop with a series of junctions superconductor-insulator-superconductor type. The operation is based on the possibility of manipulating the superconducting quantum state by applying an external magnetic field: the enclosed flux in the loop modifies the phases of the wave function of the system, generating quantum interference phenomena . One of the great advantages of this system is the ability to determine its quantum state by measuring the current in the loop: the signs of the current are used to identify the system states.

In this work we present a brief description of these nanosystems to determine its dynamics. We start by modeling the flux qubit as a simplified two-levels system forced by a periodic magnetic field in time. Thus the state of the qubit is manipulated by changing the probabilities of finding the system in one of two states: an initial state is chosen, the external field is applied and its evolution is analyzed. Based on this model, we calculate these probabilities numerically for finite times and for the stationary case where the system is allowed to evolve enough to reach a final state regardless of their initial preparation.

Moreover, we emphasized the study of a qubit in contact with the surrounding environment, to compare our numerical results with experimental measurements. For it we analyze how the fluctuations of external world affect the dynamic of the system, considering different noise sources. Then we study the effects of extending the system to  $N$  levels, in particular, we work with  $N = 4$ . Thus, we seek to identify noise sources in order to reduce them, and thus prevent the loss of system information.

# Capítulo 1

## Introducción

La propuesta de usar sistemas cuánticos para manipular información, fomentó la idea de la creación de una computadora en la que es posible simular sistemas cuánticos de manera más eficiente que en una computadora clásica, R. P. Feynman [1]. Para el almacenamiento, manipulación y transmisión de información en estos dispositivos, es necesario definir la unidad básica: bit cuántico o “quantum bit” (conocido como ‘qubit’). Este objeto consiste en una superposición de estados cuánticos, cuya evolución es determinada por medio de la aplicación de operadores unitarios, denominados compuertas lógicas cuánticas.

Estas ideas fomentaron el estudio de diversos sistemas cuánticos para ser usados como qubits. Hasta el momento existen diversos candidatos, entre ellos se encuentran: los fotones, candidatos principales para la comunicación, los semiconductores, entre otros, para almacenamiento de información, y finalmente, encontramos los nanosistemas superconductores, candidatos para ser usados como compuertas cuánticas.

En este trabajo nos vamos a enfocar en los qubits superconductores. Estos dispositivos consisten básicamente en una espira superconductora con una serie de junturas Josephson, del tipo superconductor-aislante-superconductor. Estos sistemas tienen muchas ventajas [3]: al ser de tamaño mesoscópico pueden ser integrados en circuitos eléctricos (provee diferentes maneras de controlar y probar sus estados), sus parámetros son ajustables (por medio de corrientes de bias, voltajes de compuerta o flujos magnéticos) y, lo más interesante, el estado del qubit puede ser probado midiendo la carga o la corriente inducida.

En particular, vamos a trabajar con un tipo de sistema superconductor: el qubit de flujo, cuyo estado cuántico es manipulado mediante la aplicación de campos magnéticos y el estado es determinado por medio de la medición del sentido de la corriente en la espira. De esta manera es posible la construcción de una compuerta cuántica de un qubit.

En este capítulo daremos una breve descripción de estos sistemas cuánticos macroscó-

picos. Partimos describiendo uno de los primeros qubits de flujo implementados experimentalmente, cuya investigación formó una base sólida para el empleo de nanosistemas superconductores en computación cuántica. Este dispositivo consiste en una espira superconductora con una sólo juntura Josephson, conocido como SQUID por sus siglas en inglés: “Superconducting Quantum Interference Device”.

Luego se presenta con más detalle la descripción de los qubits de flujo actuales, que consisten en una espira superconductora de tres juntas Josephson. En experimentos con este tipo de qubit [4], se observan fenómenos de interferencia entre los estados cuánticos del sistema al variar el campo magnético aplicado. Este tipo de experimentos son conocidos como “interferometría Landau-Zener-Stückelberg”, lo cual se desarrollará con más detalle a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2 se propone la descripción del qubit de flujo como un sistema de dos niveles aislado y forzado por un campo magnético externo, en el cual se trabaja con el formalismo de Floquet y se presentan los resultados numéricos obtenidos.

Por otra parte, en el capítulo 3 nos enfocamos en modelar al qubit de flujo como un sistema cuántico abierto, trabajando con la ecuación maestra en la aproximación de Born-Markov-Floquet: consideramos al qubit en contacto con un reservorio térmico y proponemos trabajar a las fluctuaciones del ambiente perturbativamente respecto al sistema forzado. Los resultados numéricos para este caso se presentan en los capítulos 4 y 5, para un sistema de dos y cuatro niveles respectivamente. En ambos capítulos nos enfocamos en los efectos de las fluctuaciones provenientes del ambiente en la dinámica del qubit, con el objetivo de identificar las posibles fuentes de ruido, dismunirlas y con ello evitar la pérdida de información del sistema.

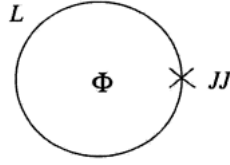
## 1.1. Sistemas cuánticos macroscópicos

### 1.1.1. SQUIDs: juntura Josephson

Uno de los primeros sistemas donde se estudió experimentalmente fenómenos cuánticos macroscópicos (MQP, siglas en inglés “Macroscopic Quantum Phenomena”) fueron los dispositivos superconductores de interferencia cuántica, conocidos como SQUIDs, los cuales son fabricados con juntas Josephson mesoscópicas.

Para entender el funcionamiento de un rf SQUID (rf, radio frequency) se puede usar un modelo simple que consiste en un anillo de material superconductor de inductancia  $L$  con una juntura Josephson, ver figura 1.1 JJ. Esta juntura está caracterizada por una corriente crítica  $I_c$ , una capacitancia de ‘shunt’  $C$  y una resistencia de ‘shunt’  $R$ .

La corriente que circula por la juntura es



**Figura 1.1:** Esquema de un rf SQUIDs.

$$I_s = I_c g(\Phi), \quad (1.1)$$

con  $g(\Phi) = g(\Phi + 2\pi)$  función periódica que depende solamente del diseño del SQUIDs, siendo  $g(\Phi) = \sin(\Phi)$  en la mayoría de los casos.

La energía potencial es :

$$U(\Phi) = \frac{(\Phi - \Phi_x)^2}{2L} - E_J \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\phi_0}\right), \quad (1.2)$$

donde  $E_J = \frac{\phi_0 I_c}{2\pi}$  es la magnitud máxima de la energía de acoplamiento de la junta,  $\Phi_x$  es el flujo magnético externo aplicado y  $\phi_0 = \frac{h}{2e}$  el cuanto de flujo. Esta ecuación consiste en la suma de la energía magnética del inductor y la energía de acoplamiento de la junta.

Podemos definir la estructura cuántica del SQUID con el hamiltoniano cuántico [7]:

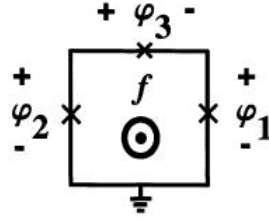
$$H = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + U(\Phi), \quad (1.3)$$

con  $\hat{Q} = -i2e\frac{\partial}{\partial\Phi}$ . De esta manera podemos identificar dos escalas de energías características: el primer término está asociado una energía de carga  $E_C = \frac{e^2}{2C}$  y el segundo a una energía de acoplamiento debido a la Junta Josephson  $E_J = \frac{h}{2e}I_c$ . Entonces podemos definir dos regímenes: para  $E_C \gg E_J$  tenemos que la carga está bien definida (régimen empleado para qubits de carga) y para  $E_C \ll E_J$  tenemos la fase bien definida (régimen empleado para qubits flujo, como el estudiado en esta tesis).

### 1.1.2. Hamiltoniano del qubit superconductor de flujo

Una implementación más actual para un qubit de flujo emplea un SQUID de tres juntas Josephson, ver figura 1.2, donde la energía inductiva es despreciable ( $\frac{\phi_0^2}{2L} \ll E_J$ ) [5]. Analizando la fase total en la espira se puede mostrar que las fases de cada una de las juntas ( $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) están limitadas por

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi f, \quad (1.4)$$



**Figura 1.2:** Esquema del qubit de flujo: consiste en un loop superconductor con tres JJ, caracterizadas por las fases  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$ , las cuales están limitadas por el flujo magnético encerrado en el loop  $f$  de la forma:  $\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi f$ , [5].

donde  $f$  es el flujo magnético aplicado al qubit en unidades del cuanto de flujo  $\phi_0 = \frac{h}{2e}$ . En este dispositivo el área transversal de la tercera juntura es menor que las otras dos por un factor  $\alpha$  tal que las energías de Josephson son  $E_{J,1} = E_{J,2} = E_J$ ,  $E_{J,3} = \alpha E_J$  y las capacitancias son  $C_1 = C_2 = C$ ,  $C_3 = \alpha C$ . Con esto podemos escribir el lagrangeano del qubit como:

$$L = \left(\frac{\phi_0}{2\pi}\right)^2 C \dot{\varphi}_p^2 + (1 + \alpha) \left(\frac{\phi_0}{2\pi}\right)^2 C \dot{\varphi}_m^2 - E_J(2 + \alpha - 2\cos(\varphi_p)\cos(\varphi_m) - \alpha\cos(2\pi f + 2\varphi_m)), \quad (1.5)$$

con  $\varphi_p = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$  y  $\varphi_m = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ , y  $C$  la capacitancia de la juntura más grande.

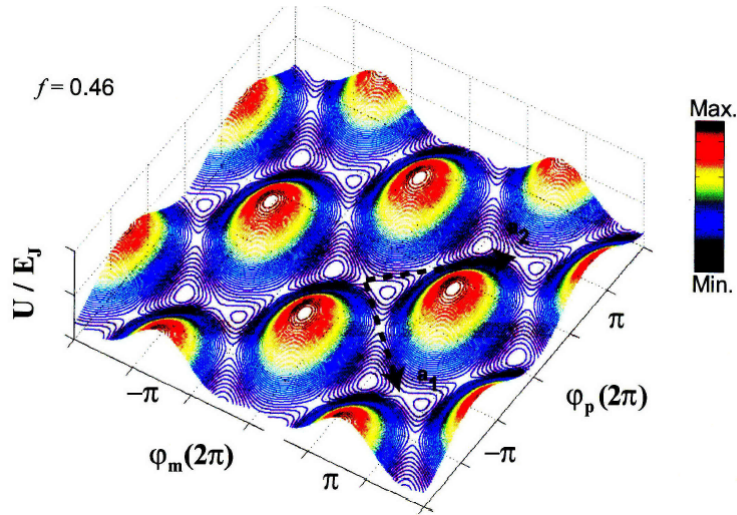
Considerando la variable  $\varphi_{p,m}$  como la fase y  $P_{p,m}$  el momento conjugado, el hamiltoniano nos queda como:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P_p^2}{M_p} + \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{M_m} - E_J(2 + \alpha - 2\cos(\varphi_p)\cos(\varphi_m) - \alpha\cos(2\pi f + 2\varphi_m)), \quad (1.6)$$

con  $M_p = 2C\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\right)^2$  y  $M_m = 2C(1 + \alpha)\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\right)^2$ . La versión cuántica de este hamiltoniano es obtenido simplemente reemplazando  $P_{p,m}$  con los operadores  $-\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi_{p,m}}$ . Definimos  $\hbar$  efectivo como  $\eta = \sqrt{\frac{8E_C}{E_J}}$ , valores típicos de los parámetros son:  $\alpha = 0,6 - 0,8$  y  $\eta = 0,1 - 0,3$ .

El hamiltoniano de la ecuación 1.6 es el mismo que para una partícula en un potencial bidimensional anisotrópico, excepto que aquí, las fases  $\varphi_{p,m}$  tienen el rol de la posición de las coordenadas. Cada celda unidad es un doble pozo bidimensional, ver figura 1.3. Los parámetros del qubit son elegidos de tal manera que las inter-barreras de "tunneling" son despreciables frente a las intra-barreras de potencial, con lo que la solución de tight-binding puede ser utilizada como una buena aproximación, quedándonos con un potencial de doble pozo unidimensional  $U(\Phi)$ , ver figura 1.4(a), (con  $\Phi$  representando el flujo en el qubit) y con un hamiltoniano de dos niveles 1.6 simplificado [5]:

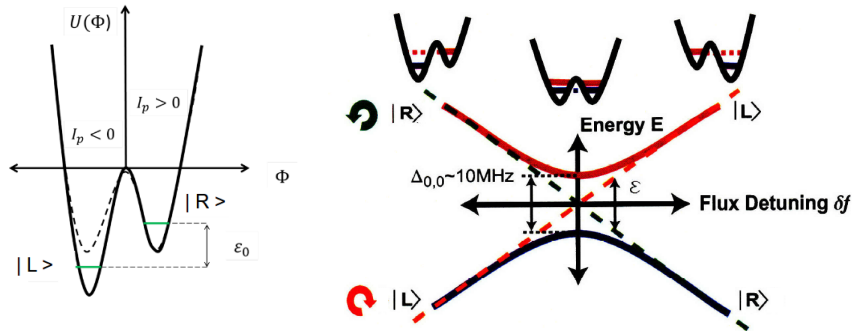




**Figura 1.3:** Gráfico del potencial bidimensional anisotrópico  $U(\varphi_m, \varphi_p)$ , en la misma se puede apreciar una celda unidad que se extiende de manera periódica [5], los sitios de la red son escritos en la base  $(a_1, a_2)$ .

$$H = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta \\ \Delta & -\epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

con  $\epsilon_0 \approx \phi_0 I_3 (f - \frac{1}{2})$  la energía de polarización ( $I_3$  corriente media en la espira) y  $\Delta = a\eta e^{-b/\eta}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes del orden de la unidad. Para mayor detalle ver apéndice A. En los qubits de flujo se cumple que  $\Delta \ll \phi_0 I_3$  y  $E_J \gg E_C$ .



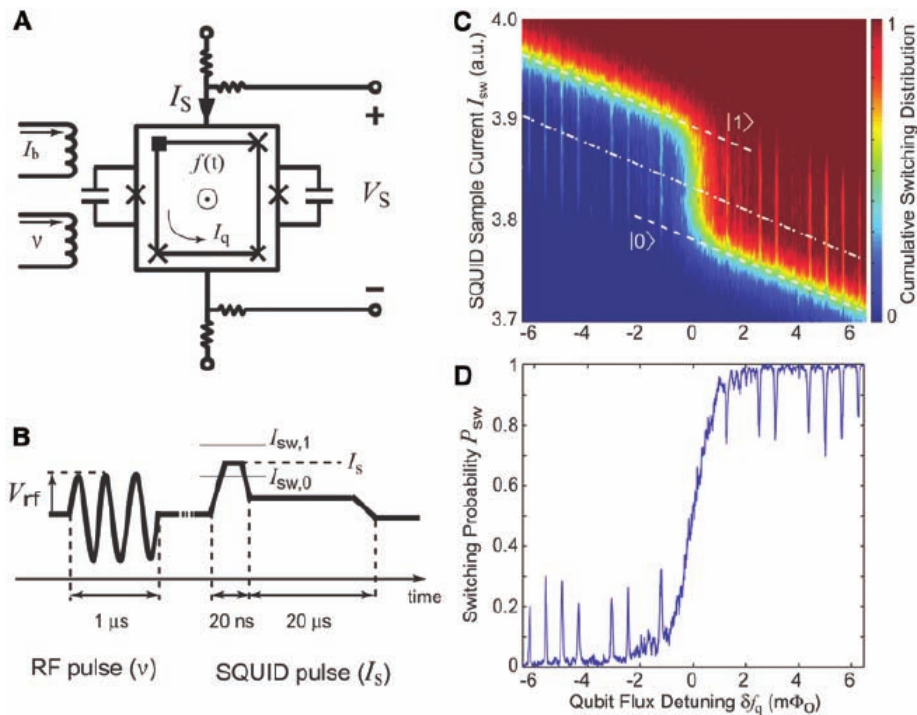
**Figura 1.4:** En la primera figura se representa el potencial unidimensional una vez que nos quedamos para un  $\varphi_m$  fijo y supusimos que las intra-barreras de potencial son grande comparadas con las inter-barreras. En la segunda figura se presenta el esquema de niveles del TLS, se observa que los niveles de energía cambian respecto al flujo de “detuning”  $\delta f$ .

En resumen, hemos reducido nuestro problema del potencial bidimensional a un problema simple de dos niveles, modelo TLS (two-level-system), donde nos hemos quedado con los niveles más bajos de energía. Estos niveles en función de  $\epsilon_0$  presentan una estructura de “avoided crossing”: en  $\epsilon_0 = 0$  (es decir  $f = \frac{1}{2}$ ) el gap de energía

es igual a  $\Delta$ . Para concluir, en la figura 1.4(b) se presentan los dos niveles más bajos de energía y su dependencia con el flujo de detuning  $\delta f = f - \frac{1}{2}$ : para  $\delta f = 0$  el doble pozo es simétrico y el sistema es una combinación simétrica o antisimétrica de las bases adiabáticas  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  (representando cada uno de los lados del doble pozo, ver apéndice A), mientras se incrementa el flujo y nos alejamos del “avoided crossing”, el doble pozo cambia, y el autoestado es  $|R\rangle$  ó  $|L\rangle$ , lo mismo sucede cuando se incrementa en el sentido opuesto. Es decir, manipulando el flujo en la espira es posible controlar el estado cuántico del sistema, útil para el diseño de una compuerta lógica cuántica. Por otra parte es posible medir el estado cuántico del sistema mediante una medición inductiva sensible al signo de la corriente de la espira.

## 1.2. Interferencia Landau-Zener-Stückelberg

### 1.2.1. Experimento de interferencia LZS en qubits superconductores



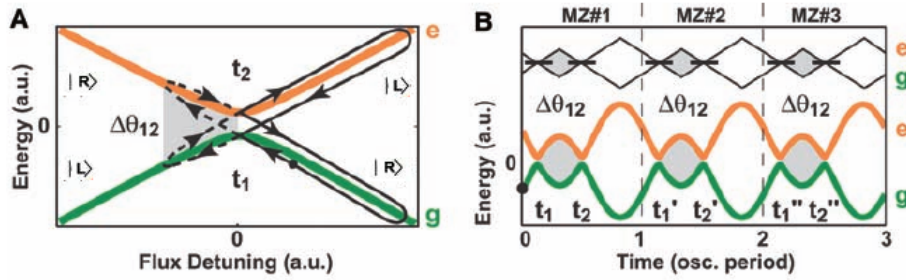
**Figura 1.5:** Se presentan: (A) Esquema del sistema experimental usado en el trabajo de Oliver et al. [4], en el se presenta el qubit de flujo de tres junturas dentro de un dc SQUID caracterizado por  $I_s$  y  $V_s$ , (B) rf pulso de duración de  $1 \mu\text{s}$ , usado para generar transiciones entre los estados del qubit, (C) función de conmutación: “qubit step” distribución de “switching”, (D) probabilidad de “switching”  $P_{sw}$  (la población en el estado  $|R\rangle$ ) considerando la dependencia con el flujo de la corriente de muestra  $I_{sw,0} < I_s < I_{sw,1}$

En el último tiempo se han realizado diferentes experimentos para manipular y

caracterizar a un qubit superconductor: considerándolo como un átomo artificial, en el cual el estado fundamental y el excitado presentan un “avoided crossing”  $\Delta$  en función del flujo magnético.

En el experimento de Oliver et al. [4] se trabaja con un qubit consistente en una espira superconductora con tres junturas Josephson, como el descrito en la sección 1.1.2. Para un flujo magnético  $f = \frac{1}{2}$ , el sistema exhibe una energía potencial de doble pozo, donde los estados de cada uno de los pozos son descritos con corrientes  $I_3$  de signos opuestos: TLS, ver figura 1.4(b). El estado del qubit es medido por un dispositivo de interferencia cuántica superconductor dc (dc SQUID), en resumen un magnetómetro sensible que distingue el flujo generado por la corriente que circula en el qubit.

En el trabajo de [4] se realizan experimentos en el régimen fuertemente forzado con excitaciones armónicas, tal que  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos(\omega t)$ , donde  $\epsilon_0$  es la energía de polarización proporcional al flujo dc de bias y  $A$  es la amplitud del campo proporcional al flujo rf de bias. Esto provee una alternativa para manipular y caracterizar al qubit.



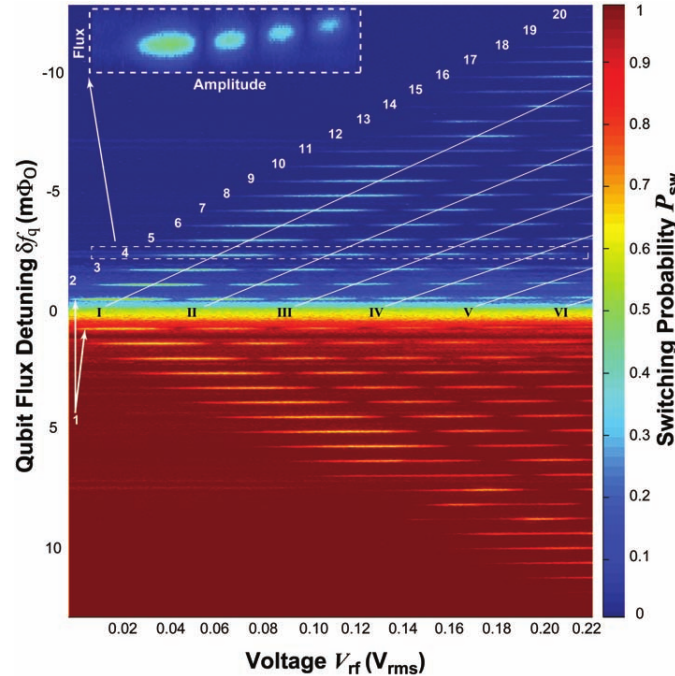
**Figura 1.6:** (A) Esquema de niveles, interferencia MZ [4] en un qubit con un campo de microondas aplicado. El estado del qubit es barrido por el campo oscilatorio  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos(\omega t)$ . Después de una transición LZ a tiempo  $t_1$  obtenemos como resultado una superposición de  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$ , que acumula una fase  $\Delta\theta_{12}$  e interfiere en la segunda transición  $t_2$ . El estado del qubit es continuamente llevado lejos del “avoided crossing” y luego es llevado al punto de origen. Este período de la evolución del qubit es una única interferencia MZ. Dependiendo de la fase  $\Delta\theta_{12}$  el estado del qubit puede ser llevado al estado excitado. (B) La correspondiente variación de la energía del qubit inducida por un período del campo rf, equivalente a las cascadas ópticas de interferómetro de MZ.

En [4] se generan transiciones entre los estados del qubit aplicando un pulso rf de  $1\mu\text{s}$  de duración a una frecuencia  $\nu = 2\pi\omega = 1,2\text{ GHz}$  y voltaje rf  $V_{rf}$ , figura 1.5(B). Luego de una espera corta de 10 ns, se lee la salida del estado del qubit empleando el dc SQUID como detector. Entonces cambiando la corriente  $I_s$  del dc SQUID y el flujo magnético  $\delta f$  se determina una función de conmutación: “qubit step”, ver figura 1.5(C): para valores específicos de  $\delta f$  el campo rf se vuelve resonante con la energía  $\Delta$ , generando absorción de  $n$ -fotones dando lugar a una transferencia parcial de población entre los estados del qubit, manifestándose en “picos” regularmente espaciados. Finalmente se obtiene la probabilidad de “switching”  $P_{sw}$  (la población en el estado  $|R\rangle$ ), ver figura 1.5(D), considerando la dependencia con el flujo de la corriente de muestra como

$$I_{sw,0} < I_s < I_{sw,1}.$$

Estos resultados experimentales son descriptos en términos de “Interferometría de Mach-Zener” (MZ): entendido como una generalización de la interferencia MZ óptico, realizada en el espacio fase del qubit. El setup convencional para MZ son dos beamsplitters: el primero divide la señal en dos ondas coherentes que viajan por dos caminos con diferentes longitudes y el segundo los recombina y superponen esas ondas generando interferencia cuántica. En [4] el equivalente de los beamsplitters es realizado por las transiciones de Landau-Zener (LZ) mediado por el “avoided crossing”.

Para una oscilación del campo externo, el qubit es barrido a través del “avoided crossing” dos veces, figura 1.6(A). A tiempo  $t_1$  el estado  $|R\rangle$  cambia a un estado de superposición de  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$ , correspondiente a la primera transición LZ. Luego en la segunda transición, a tiempo  $t_2$ , acumulan una fase relativa  $\Delta\theta_{1,2}$  e interfieren. La correspondiente evolución de las energías del estado del qubit, ver figura 1.6(B), entre las recurrentes transiciones LZ (separadas con líneas de puntos) provee un espacio fase análogo a los dos brazos de los beamsplitters de un interferómetro MZ óptico. En nuestro caso tenemos una cascada de transiciones LZ que ocurren cuando la amplitud  $A$  de campo excede la energía de polarización  $\epsilon_0$ ,  $A > |\epsilon_0|$ . Esta cascada de transiciones se conoce también como interferencia de Landau-Zener-Stückelberg (LZS) [3].

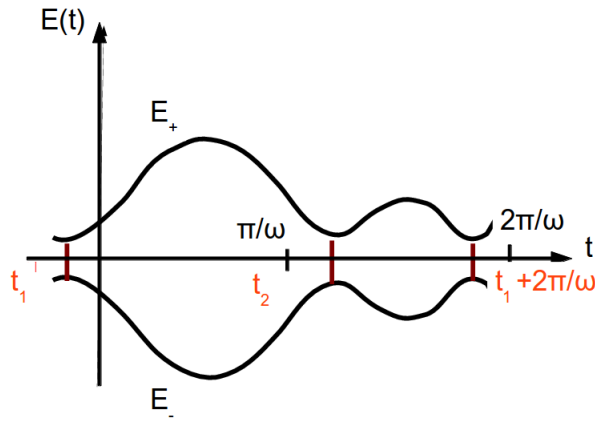


**Figura 1.7:** Resultados experimentales del trabajo de Olivier et al. [4]. Se grafica la probabilidad de “Switching”  $P_{sw}$  en función del flujo de detuning  $\delta f_q$  y voltaje  $V_{rf}$  a frecuencia  $\nu = 1,2$  GHz, las resonancias de n-fotones son indexadas de 1 a 20. Estas resonancias son resultado de la interferencia cuántica del tipo MZ.

En la figura 1.7 se presenta la  $P_{sw}$  medida en [4] en función de  $V_{rf}$  (proporcional a  $A$ ) y el flujo en la espira superconductora  $\delta f$  (proporcional a  $\epsilon_0$ ), a una frecuencia

$\nu = 1, 2$  GHz. Las resonancias de  $n$ -fotones se encuentran indexadas  $n = 1, \dots, 20$ , donde se observan las franjas de interferencia MZ del  $I$  al  $VI$  como función  $V_{rf}$ . Estas franjas presentan una dependencia con las funciones de Bessel, denominando el patrón “Bessel stair-case”. Esta interferencia multifotónica se da cuando un par consecutivo de transiciones de LZ interfiere constructivamente, es decir la fase acumulada  $\Delta\theta_{1,2} = 2\pi n$ , originando la aparición de resonancias alrededor de los valores  $\epsilon_0 = n\hbar\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ). En las siguientes secciones se presentan dos descripciones más detalladas sobre este tipo de interferencia: aproximación de impulso adiabático y aproximación de onda rotante.

### 1.2.2. Interferometría LZS: aproximación de impulso adiabático



**Figura 1.8:** Soluciones de los autovalores instantáneos  $E_{\pm}$  del hamiltoniano 1.8. Los puntos cercanos están separados por una distancia mínima  $\Delta$ : región prohibida, esta es recorrida por tiempos  $t_{1,2}$ . Se puede demostrar que cerca de esta región el sistema se desenvuelve no adiabáticamente, produciendo interferencia de los estados y como consecuencia resonancias, [3].

En el experimento de Oliver et al. [4] se aplica un campo de microondas  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A\cos(\omega t)$  de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $A$ , es decir el hamiltoniano 1.7 podemos trabajarlo como:

$$H = -\frac{1}{2}\epsilon(t)\sigma_z - \frac{1}{2}\Delta\sigma_x = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \epsilon(t) & \Delta \\ \Delta & -\epsilon(t) \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Las interferencias (probabilidades de ocupación finales) tienen lugar para valores enteros y semi-enteros de  $\Delta\theta_{1,2}/2\pi$ , como se aprecia en la figura 1.7, fenómeno conocido como: oscilaciones de Stückelberg [17]:

$$\Delta\theta_{1,2} = \frac{1}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon(t). \quad (1.9)$$

En general este tipo de experimentos son denominados de “interferencia de Landau-

Zener-Stückelberg”: la probabilidades ocupacionales de los estados  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  presentan patrones de resonancia multifotónica, generada por transiciones LZ secuenciales.

Si calculamos los valores instantáneos del hamiltoniano de la ecuación 1.8 obtenemos

$$\begin{aligned} E_{\pm}(t) &= \pm \frac{1}{2}\Omega(t), \\ \Omega(t) &= \sqrt{\Delta^2 + \epsilon(t)^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Estos niveles de energía diabáticos tienen un mínimo de distancia de  $\Delta$  la cual es realizada en un tiempo  $t_{1,2} + 2\pi\frac{n}{\omega}$  con  $\omega t_1 = \arccos(\frac{-\epsilon_0}{A})$  y  $\omega t_2 = \pi - \omega t_1$  y  $n \in \mathcal{Z}$  ver figura 1.8. Como los niveles de energía instantáneos cambian rápidamente cercanos a la región del “avoided crossing“ y se mantienen aproximadamente constante lejos de la misma, podemos intuitivamente esperar que el sistema se comporte adiabáticamente lejos de dicha región y luego la evolución cambie a no-adiabática a medida que se acerca los puntos del ”avoided crossing“, es decir es en la mínima distancia de energía donde el sistema experimenta una transición: se produce mezcla de poblaciones de los dos niveles de energía.

Una aproximación para resolver el problema de la interferencia de LZS es la aproximación del impulso adiabático [8], que se basa en que la transición no-adiabática se describe como instantánea.

Vamos a considerar la función de onda  $\Psi(t)$  para describir el estado cuántico del sistema TLS. En función del tiempo podemos descomponerla como una combinación de la base adiabática, [3]

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \sum_{\pm} b_{\pm}\varphi_{\pm}(t) = \sum_{\pm} c_{\pm}\varphi_{\pm}(t)e^{\pm i(\xi + \frac{\pi}{4})}, \\ \xi &= \frac{1}{2} \int \Omega(t)dt. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Considerando en la aproximación adiabática  $c_{\pm}$  como independiente del tiempo, la evolución en este caso entre un tiempo inicial  $t_i$  a un tiempo final  $t_f$ , intervalo temporal en el cual no tenemos transiciones LZ, puede ser descripta como:

$$\begin{aligned} \bar{b}_f(t) &= U(t_f, t_i)\bar{b}_i, \\ \bar{b}(t) &= \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}, \\ U(t_f, t_i) &= \begin{pmatrix} e^{-i\xi(t_f, t_i)} & 0 \\ 0 & e^{i\xi(t_f, t_i)} \end{pmatrix}, \\ \xi(t_f, t_i) &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \Omega(t)dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Entonces la fase adquirida durante la evolución adiabática, ver figura 1.8, es:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \Omega(t) dt, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_1 + \frac{2\pi}{\omega}} \Omega(t) dt.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Por otra parte en nuestro caso tenemos un proceso en el cual el sistema pasa por la región del "avoided crossing" periódicamente, debido al campo de microondas externo, por lo que para obtener la dinámica del sistema es importante tener en cuenta la escala temporal característica para la cual tenemos una transición LZ, que llamaremos  $t_{LZ}$

$$\begin{aligned}t_{LZ} &\approx \frac{2}{\Delta} \sqrt{\delta} \max(1, \sqrt{\delta}), \\ \delta &= \frac{\Delta^2}{4v}, \\ v &= A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon_0}{A}\right)},\end{aligned}\tag{1.14}$$

que surge de linealizar  $\epsilon(t_{1,2} + t'') \approx \pm vt'$ , lejos de la vecindad  $t = t_{1,2} + t'$ ,  $\omega|t'|^2 \ll 1$ . Con ello el tiempo entre eventos de "tunneling" es del orden de  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ . Entonces la interferencia LZS toma lugar cuando:

- las sucesivas interferencias LZ no se superponen,
- la fase coherente no es perturbada en un tiempo  $t_{LZ} < \frac{T}{2} < T_2$ , tiempo de defasaje  $T_2$ .

### 1.2.3. Interferometría LZS: Rotating Wave Aproximation

Otra aproximación conocida para tratar interferencia LZS es la "Rotating Wave Aproximation" (RWA). En este caso tenemos que las transiciones del estado fundamental al excitado se atribuyen a un número  $n$  de fotones, cuando el sistema es forzado fuertemente por el campo externo, con lo que podemos hacer una aproximación de resonancia que reduce al problema a calcular las oscilaciones de Rabi. Se puede entonces obtener soluciones aproximadas en términos de las funciones de Bessel [7],[5], para  $A > |\epsilon_0|$ .

En esta aproximación se comienza por rotar el sistema de referencia de tal manera de quitar la dependencia en el tiempo. Para ello vamos a realizar dos transformaciones al hamiltoniano de la ecuación 1.8:

$$\begin{aligned}H' &= R_z(-\phi) H R_z(\phi) - \frac{\sigma_z}{2} \hbar \frac{d\phi}{dt}, \\ |\phi'\rangle &= R_z(-\phi) |\phi\rangle,\end{aligned}\tag{1.15}$$

con  $R_z(\phi) = e^{-i\frac{\sigma_z}{2}\phi}$ ,  $\phi = \lambda \sin(\omega t)$  y  $\lambda = \frac{A}{\hbar\omega}$ .

El hamiltoniano TLS nos queda como:

$$H' = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \Delta J_k(\lambda) e^{ik\omega t} \\ \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \Delta J_k(\lambda) e^{-ik\omega t} & -\epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

con  $J_k(\lambda)$  función de Bessel de orden  $k$ ,  $k$  corresponde al número de fotones involucrados en la transición entre los estados. Como queremos estudiar las resonancias de  $n$  fotones, vamos a despreciar los términos lejos de las mismas, es decir los términos tales que  $k\hbar\omega$  no es igual a  $\epsilon_0 = n\hbar\omega$ :

$$H' = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta J_n(\lambda)(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) \\ \Delta J_n(\lambda)(e^{-in\omega t} + e^{in\omega t}) & -\epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

suponiendo que las resonancias no se superponen. Finalmente realizamos la RWA: nos quedamos sólo con una de las exponenciales de los términos fuera de la diagonal:

$$H' = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta J_n(\lambda) e^{in\omega t} \\ \Delta J_n(\lambda) e^{-in\omega t} & -\epsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Finalmente rotando el sistema de referencia alrededor de  $\hat{z}$  como  $\phi = n\omega t$ , obtenemos

$$H'' = \begin{pmatrix} \epsilon_n & \Delta J_n(\lambda) \\ \Delta J_n(\lambda) & -\epsilon_n \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

con  $\epsilon_n \equiv \epsilon_0 - n\hbar\omega$ .

El hamiltoniano 1.19 tiene como autovalores

$$E''_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_n^2} \quad (1.20)$$

y autoestados

$$\begin{aligned} |\Psi''_{-}\rangle &= \cos \frac{\xi}{2} |R\rangle + \sin \frac{\xi}{2} |L\rangle, \\ |\Psi''_{+}\rangle &= -\sin \frac{\xi}{2} |R\rangle + \cos \frac{\xi}{2} |L\rangle, \end{aligned} \quad (1.21)$$

con  $\xi = \tan^{-1}(\frac{\Delta_n}{\epsilon_n})$ .

Para un experimento típico  $\Delta \ll |\epsilon_0|$  el estado inicial puede ser considerado:

$$|\Psi(0)\rangle = |R\rangle = \cos \frac{\xi}{2} |\Psi''_{-}\rangle - \sin \frac{\xi}{2} |\Psi''_{+}\rangle. \quad (1.22)$$

Y el estado a un instante  $t$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_- t} \cos \frac{\xi}{2} |\Psi''_{-}\rangle - e^{\frac{i}{\hbar} E_+ t} \sin \frac{\xi}{2} |\Psi''_{+}\rangle. \quad (1.23)$$

Con ello la probabilidad de estar en el estado excitado es



$$p_n(t) = |\langle L | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{\Delta_n^2}{\epsilon_n^2 + \Delta_n^2} \sin^2 \frac{\sqrt{\epsilon_n^2 + \Delta_n^2} t}{2}, \quad (1.24)$$

que tiene la forma usual de las oscilaciones de Rabi. Pero la cantidad que nos interesa, tanto como para comparar con el experimento y con predicciones teóricas, es el promedio temporal de la probabilidad de transición:

$$\begin{aligned} p_n^\infty &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle 0, L | \Psi(t) \rangle|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Delta_n^2}{\epsilon_n^2 + \Delta_n^2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 J_n^2(\frac{A}{\hbar\omega})}{(\epsilon_0 - n\hbar\omega)^2 + \Delta^2 J_n^2(\frac{A}{\hbar\omega})}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Sumando todas las contribuciones obtenemos:

$$P^\infty = \sum_n p_n^\infty. \quad (1.26)$$

En el caso de resonancia multifotónica  $\epsilon_0 = n\hbar\omega + \mathcal{O}((\frac{\Delta}{\epsilon_0})^2)$  (si  $\Delta \ll \epsilon_0$ ) obtenemos como probabilidad máxima  $P^{max} = \frac{1}{2}$ , excepto cuando  $J_n(\frac{A}{\hbar\omega}) = 0$ , caso en el que  $P^{max} = 0$ . Fenómeno conocido como “coherent destruction of tunneling” [6].

Finalmente, para un qubit de flujo modelado como un TLS el patrón de interferencia en el plano  $(\epsilon_0, A)$  se encuentra modulado con las funciones de Bessel  $J_n(\frac{A}{\hbar\omega})$  en los puntos  $\epsilon_0 = n\hbar\omega$ , como se presentan en las mediciones de Oliver et al. [4] y en otros trabajos posteriores de Berns D.M. et al. [9], en el cual mediante una transformación al espacio de Fourier de  $(\epsilon_0, A)$  es posible reconstruir el espectro de energías en función de  $\epsilon_0$ , [10].



# Capítulo 2

## Sistema aislado: resolución de la dinámica del qubit superconductor

En este capítulo se describe la dinámica del qubit de flujo como un sistema de dos niveles aislado, forzado por un campo magnético externo (periódico en el tiempo). Se trabaja en el marco de la teoría generalizada de Floquet, ya que provee una formulación exacta de problemas dependientes del tiempo y una imagen combinada de un sistema de  $N$ -niveles y campos electromagnéticos con el uso de los estados de cuasienergías. Finalmente se presentan resultados numéricos para el caso de un sistema de dos niveles, calculándose las probabilidades de transición entre los respectivos estados involucrados.

### 2.1. Modelo TLS y formalismo de Floquet

Como se presentó anteriormente, sección 1.2, el modelo de sistemas cuánticos de dos niveles ('two-level-system' TLS) ha sido usado para describir una gran variedad de sistemas físicos.

El modelo TLS consiste en un sistema simplificado de dos niveles, cuyo hamiltoniano es de la forma

$$H = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta \\ \Delta & -\epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

con  $\epsilon_0$  la energía de polarización y  $\Delta$  la energía de "splitting".

Los autoestados del hamiltoniano 2.1 son

$$\Psi_- = \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)|R\rangle + \sin\left(\frac{\chi}{2}\right)|L\rangle, \Psi_+ = -\sin\left(\frac{\chi}{2}\right)|R\rangle + \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)|L\rangle, \quad (2.2)$$

con  $\chi = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta}{\epsilon_0}\right)$ .

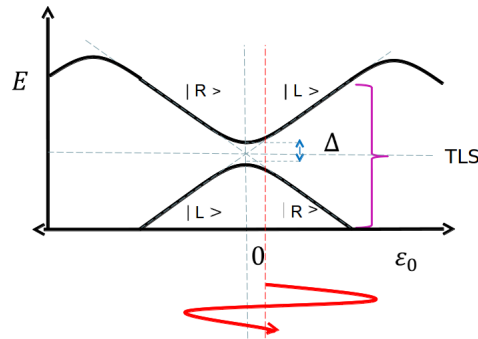
Los estados diabáticos  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  corresponden a un sentido u otro de la corriente en el qubit. Esto se puede ver calculando la corriente  $I_3$  del loop para distintos estados

del qubit: el signo del estado fundamental es el opuesto para el estado excitado lejos de  $\delta f = 0$  ( esto es útil ya que para conocer el estado del qubit se debe medir la corriente, por ejemplo mediante un magnetómetro y determinar con ello el signo).

Como se presentó en la sección 1.2.1, el hamiltoniano de un TLS sometido a un campo ac externo fuerte (campo de microondas monocromáticas) puede ser representado como [7]:

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon(t) & \Delta \\ \Delta & -\epsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

con  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos(\omega t)$ ,  $\omega$  es la frecuencia del campo ac y  $A$  es la amplitud (para mayor detalle de los parámetros ver figura 1.4(a) y 2.1).



**Figura 2.1:** Esquema de niveles del sistema TLS en función de la energía de polarización  $\epsilon_0$ , separados en  $\epsilon_0 = 0$  una cantidad  $\Delta$ , determinando una zona de 'avoided crossing'. Si  $\Delta = 0$  las soluciones corresponderían a  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$ , líneas punteadas celestes. Al aplicar un campo de microondas monocromáticas de frecuencia  $\omega$  estamos barriendo el estado del qubit de manera periódica, línea roja, pasando repetidamente por la zona de 'avoided crossing'.

### 2.1.1. Desarrollo de la teoría de Floquet

La dinámica de un sistema cuántico no relativista se rige por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.4)$$

Un caso especial es

$$H(t + \tau) = H(t), \quad (2.5)$$

invariante ante cambios de períodos  $\tau$ .

De acuerdo al teorema de Floquet [11] la ecuación 2.4 con el hamiltoniano 2.5 tiene un conjunto completo de soluciones  $|\psi_i(t)\rangle$  que es separable en el producto de un factor

de fase  $e^{-i\epsilon_i t/\hbar}$  y un vector de estado  $|u_i(t + \tau)\rangle = |u_i(t)\rangle$ ,  $i$  índice del sistema, es decir

$$|\psi_i(t)\rangle = e^{-i\epsilon_i(t-t_0)/\hbar}|u_i(t)\rangle, \quad (2.6)$$

Las fases reales  $\epsilon_i$  son denominados 'cuasi-energías', análogamente a los 'cuasi-momentos cristalinos' del teorema de Bloch [12]. Por otra parte, los estados de floquet son cuasi-periódicos en el tiempo,

$$|\psi_i(t + \tau)\rangle = e^{-i\epsilon_i(\tau)/\hbar}|u_i(t)\rangle. \quad (2.7)$$

Si reemplazamos la ecuación 2.6 en la ecuación de Schrödinger 2.4 obtenemos una ecuación para las componentes  $|u_i(t)\rangle$ ,

$$(H(t) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t})|u_i(t)\rangle = \epsilon_i|u_i(t)\rangle. \quad (2.8)$$

Se observa entonces una equivalencia a la ecuación de Schrödinger 2.4 si se define el *operador de Floquet*  $\mathcal{H}$  de la forma  $\mathcal{H} = H(t) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ , es decir

$$\mathcal{H}|u_i(t)\rangle = \epsilon_i|u_i(t)\rangle. \quad (2.9)$$

Cabe destacar que la factorización de la ecuación 2.6 no es única:  $|u_i(t)\rangle \rightarrow |u_{i(t)}^q\rangle = e^{iq\omega t}|u_i(t)\rangle$ , con  $q \in \mathbb{Z}$  conserva la periodicidad de los estados  $|u_i(t)\rangle$  y deja a los estados de Floquet invariantes si es acompañado con el cambio de fase  $\epsilon_i \rightarrow \epsilon_i^q + q\hbar\omega$  en las cuasi-energías asociadas. Además  $|u_i(t)\rangle$  adopta el rol de los estados estacionarios de los sistemas dependientes del tiempo.

El problema periódico en el tiempo puede ser transformado a un problema general de autovalores de una matriz de dimensión infinita independiente del tiempo [7]. La parte temporal del hamiltoniano  $H(t)$  de la ecuación 2.8 y las autofunciones  $|u_i(t)\rangle$  se expanden en las componentes de Fourier  $\omega$ ,

$$H(t) = \sum_K H^{[K]} e^{iK\omega t}, \quad (2.10)$$

$$|u_i(t)\rangle = \sum_K |u_i\rangle^{[K]} e^{iK\omega t}, \quad (2.11)$$

con  $H^{[K]}$  y  $|u_i\rangle^{[K]} = |u_i(K)\rangle$ , bases ortonormales. Podemos emplear la nomenclatura de los estados de Floquet como

$$|\alpha K\rangle = |\alpha\rangle|K\rangle, \quad (2.12)$$

donde  $\alpha$  es el índice de una base del sistema (en este caso  $\alpha = 1, 2$ ) y  $K \in (-\infty, \infty)$

índice de las componentes de Fourier (determina el tamaño de la matriz).

Reemplazando las ecuaciones 2.10 y 2.11 en la ecuación 2.8, y usando la notación anterior, obtenemos la siguiente matriz de Floquet

$$\sum_{\beta} \sum_Q \langle \alpha K | \mathcal{H}_{\mathcal{F}} | \beta Q \rangle \langle \beta Q | u_i(L) \rangle = \epsilon_{iL} \langle \alpha K | u_i(L) \rangle, \quad (2.13)$$

con  $\epsilon_{iL}$  es el autovalor ó cuasi-energía y  $|u_i(L)\rangle$  el correspondiente autovector y  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$  es el hamiltoniano de Floquet independiente del tiempo

$$\sum_{\beta} \sum_Q \langle \alpha K | \mathcal{H}_{\mathcal{F}} | \beta Q \rangle = \mathcal{H}_{\alpha\beta}^{[K-Q]} + K\hbar\omega\delta_{\alpha\beta}\delta_{KQ}. \quad (2.14)$$

### 2.1.2. Aplicación al qubit de flujo

El hamiltoniano 2.3 que describe la dinámica del qubit superconductor posee sólo tres componentes de Fourier distintas de cero:

$$H^{[0]} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta \\ \Delta & -\epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$H^{[+1]} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$H^{[-1]} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde  $H^{[K-Q]} + K\omega\delta_{KQ}I$  ( $I$  matriz identidad de  $2X2$ ) forma la columna  $K$ -ésima y la fila  $Q$ -ésima de la matriz de Floquet (eq. 2.14) representada en la base  $|iK\rangle$  y  $|jQ\rangle$ :

$$H_F = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_0}{2} - 2\omega & \frac{\Delta}{2} & -\frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta}{4} & \frac{\epsilon_0}{2} - 2\omega & 0 & \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A}{4} & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} - \omega & -\frac{\Delta}{2} & -\frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{4} & -\frac{\Delta}{2} & \frac{\epsilon_0}{2} - \omega & 0 & \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{4} & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} & \frac{\Delta}{2} & -\frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} & -\frac{\Delta}{2} & \frac{\epsilon_0}{2} & 0 & \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{4} & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} + \omega & \frac{A}{4} & -\frac{A}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} & -\frac{\Delta}{2} & \frac{\epsilon_0}{2} + \omega & 0 & \frac{A}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{4} & 0 & -\frac{\epsilon_0}{2} + 2\omega & -\frac{A}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} & -\frac{\Delta}{2} & -\frac{\epsilon_0}{2} + \omega & \frac{\epsilon_0}{2} + \omega \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde esta matriz corresponde a  $K = -2, -1, 0, 1, 2$  ( $K_{max} = 2$ ).

A partir de este hamiltoniano es posible obtener los autoestados de Floquet  $|u_i(L)\rangle$  y las cuasienergías  $\epsilon_{iL}$ , mediante su diagonalización y obtención de autovectores y autovalores de manera exacta. Sin embargo esta matriz es infinita lo que hace imposible su diagonalización, por ello se recurre a métodos numéricos para los cuales es necesario truncar dicha matriz para cierto valor  $K$ .

También se puede emplear el método del propagador, en el cual se obtienen los

autoestados de Floquet como los autoestados del operador evolución  $U(t_0 + \tau, t_0)$ , el cual es diagonalizado en un período  $\tau$ , ver apéndice B.

Para el caso TLS, se eligió trabajar con la diagonalización de la matriz 2.14. Sin embargo, para un sistema de más de 2 niveles computacionalmente es conveniente trabajar con el método del propagador, capítulo 5.

## 2.2. Probabilidades de transición

Es de interés calcular la probabilidad de transición entre los distintos estados cuánticos, ya que esta es la cantidad necesaria para poder comparar con el experimento.

La misma se puede calcular empleando las propiedades periódicas de los estados de Floquet [11]

$$P_{|a\rangle \rightarrow |b\rangle}(t, t_0) = \sum_{KQ} \langle bK | e^{-\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(t-t_0)} | a0 \rangle e^{iQ\omega t_0} \langle aQ | e^{-\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(t-t_0)} | bK \rangle. \quad (2.19)$$

Esta es la probabilidad de ir del estado inicial  $|a\rangle$  (estado coherente sumado sobre todo  $Q$ ) al estado final  $|b\rangle$  sumado sobre todos los posibles estados finales (suma sobre  $K$ ).

En los experimentos el tiempo inicial  $t_0$  o, equivalentemente, la fase inicial no están bien definidos. Entonces para independizarse de estas cantidades se calcula la probabilidad promediada sobre todos los tiempos iniciales  $t_0$  y sobre  $t$  en un período, obteniendo:

$$\bar{P}_{|a\rangle \rightarrow |b\rangle} = \sum_{ijKQ} |\langle b | u_i(K) \rangle|^2 |\langle a | u_j(Q) \rangle|^2 \quad (2.20)$$

[11].

## 2.3. Resolución numérica: interferencia de Landau-Zener-Stückelberg

El hamiltoniano TLS a resolver, para un qubit superconductor aislado y excitado por un campo magnético, es

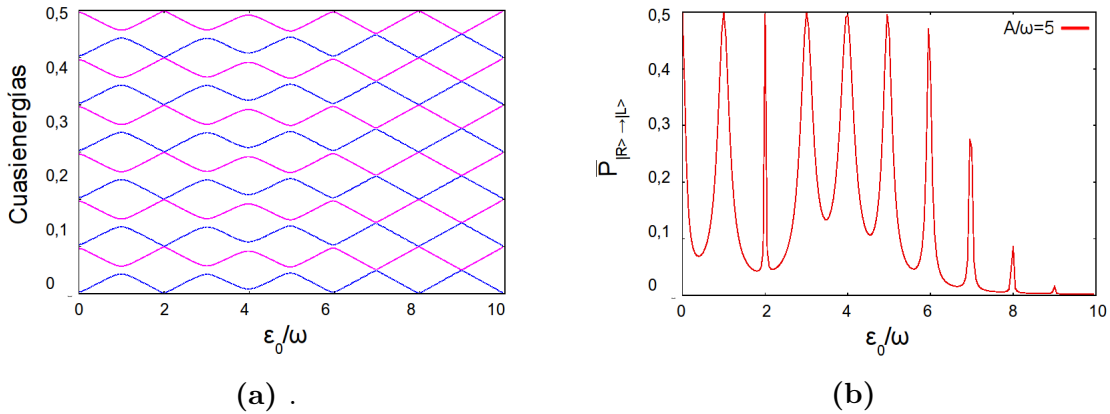
$$H = -\frac{1}{2}\epsilon(t)\sigma_z - \frac{1}{2}\Delta\sigma_x = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon(t) & \Delta \\ \Delta & -\epsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

donde  $\Delta$  es el 'tunnel splitting'.

En la sección 2.1.2 se presentó una aplicación numérica para la resolución de este problema mediante la diagonalización de una matriz de Floquet independiente del tiempo truncada para un valor  $K_{max}$ , ver ecuación 2.18. A partir de su diagonalización se

obtienen numéricamente los autoestados de Floquet, determinando con ello la evolución del estado del qubit, y sus correspondientes cuasienergías.

En esta sección se presentan los resultados numéricos. Para ello se diagonalizó la matriz 2.14 con  $K_{max} = \pm 150$  obteniéndose los autovectores  $|u_i(K)\rangle$ , estados de Floquet, y sus respectivos autovalores  $\epsilon_{iK}$ , cuasienergías.



**Figura 2.2:** Simulaciones obtenidas para un valor constante  $\frac{A}{\omega} = 5$  y un  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,5$  en función de  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ . (a) Cuasienergías. En color magenta se presentan los correspondientes a los estados de Floquet  $|iK\rangle$  y en color azul a  $|jQ\rangle$ . (b) Promedio temporal de las probabilidades de transición entre los estados  $|R\rangle \rightarrow |L\rangle$ .

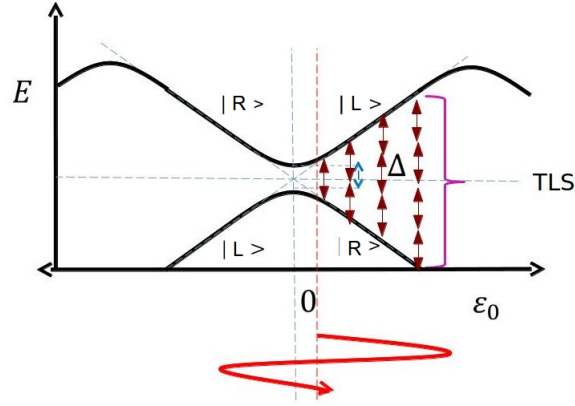
Las cuasienergías fueron obtenidas en función de la energía de polarización  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  y para un valor de  $\frac{A}{\omega} = 5$  y  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,5$  ver figura 2.2a. El valor de  $\Delta$  depende de como fue construido el qubit superconductor, por ello lo normalizamos con  $\omega$ , ya que lo que experimentalmente se puede controlar es la frecuencia del campo externo. En color magenta se representan las cuasienergías correspondientes a los estados de Floquet  $|iK\rangle$  y en color azul a  $|jQ\rangle$ , notación usada en la ecuación 2.12. Debido a la periodicidad de las cuasienergías se obtienen los “avoided crossing” en la vecindad de  $\epsilon_0 \approx n\hbar\omega$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , es decir en las resonancias multifotónicas.

Como se explicó anteriormente, se puede manipular el estado del qubit mediante el flujo aplicado en el loop. Para ello podemos calcular las probabilidades de transición entre los dos estados involucrados  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  en función de los parámetros del campo aplicado (en el experimento, es el equivalente a medir el sentido de la corriente). Con ello es posible determinar el patrón de interferencia TLS.

Se graficó la probabilidad de transición  $\overline{P}_{|R\rangle \rightarrow |L\rangle}$ , ecuación 2.20, en función de  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ , para  $\frac{A}{\omega} = 5$  y  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,5$ , ver figura 2.2b. Como se observa para  $\epsilon_0 \approx n\omega$  tenemos que el estado fundamental puede ser excitado resonantemente, en la figura 2.3 se representa de manera pictórica esta situación. Este tipo de proceso es un ejemplo de resonancia multifotónica [7] o interferencia Landau-Zener-Stückelberg (LZS) [3]: el “avoided crossing” es recorrido varias veces, con lo que la interferencia tiene lugar y su dinámica es sensible a la fase adquirida entre sucesivos cruces, sección 1.2. La interferencia LZS

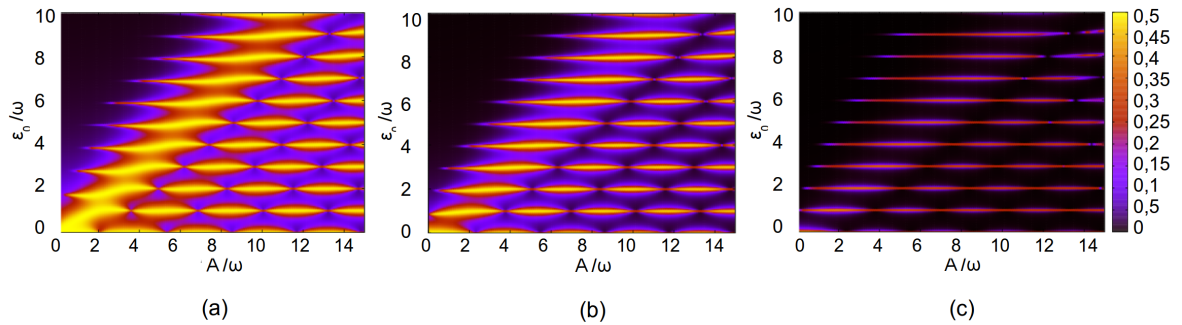


ha sido propuesta como una posible aproximación para explicar la transferencia de población de niveles de manera perfecta, y así, implementar compuertas cuánticas.



**Figura 2.3:** Esquema de niveles del sistema TLS en función de la energía de polarización  $\epsilon_0$ , separados en  $\epsilon_0 = 0$  una cantidad  $\Delta$ , determinando una zona de 'avoided crossing'. Al aplicar un campo de microondas monocromáticas de frecuencia  $\omega$  recorreremos los niveles de energía periódicamente. Cada vez que cumple que  $\epsilon_0 \approx n\hbar\omega$  el estado fundamental puede ser excitado resonantemente.

Por otra parte, se calculó la probabilidad de transición, ecuación 2.20, en función de  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  y  $\frac{A}{\omega}$  para distintos valores de  $\frac{\Delta}{\omega}$ , ver figuras 2.4(a), (b) y (c). Si observamos la figura 2.2b, vemos que las resonancias acuerdan cualitativamente con la forma funcional en la RWA, ecuación 1.25: son simétricas en las cercanías de  $\epsilon_0 = n\hbar\omega$  y para dicho valor la probabilidad máxima de transición es  $\frac{1}{2}$ . Además se observa que el ancho de los picos de resonancia aumenta a medida que lo hace  $\frac{\Delta}{\omega}$ , que concuerda cualitativamente con la probabilidad de transición en dicha aproximación.



**Figura 2.4:** Sistema aislado. Se presentan los promedios temporales de las probabilidades de transición  $\bar{P}_{|R\rangle \rightarrow |L\rangle}$  en función de  $\frac{A}{\omega}$  y  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ , en cuyo cálculo se emplearon los autoestados de Floquet obtenidos con la diagonalización de la matriz 2.18 con un tamaño de  $K_{max} = \pm 150$ . (a)  $\frac{\Delta}{\omega} = 1$ , (b)  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,5$  y (c)  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,1$

En conclusión, tenemos que la probabilidad máxima tanto para  $\frac{\epsilon_0}{\omega} > 0 (< 0)$  es  $\frac{1}{2}$ , es decir que la probabilidad de poblar los estados  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  son iguales, y el comportamiento es simétrico. Además se puede observar que el patrón de interferencia en el

plano  $(\frac{\epsilon_0}{\omega}, \frac{A}{\omega})$  se encuentra modulado por los puntos  $\epsilon_0 = n\omega$  y los ceros de las funciones de Bessel  $J_n(\frac{A}{\omega})$  [7], sección 1.2.3.

En el caso del experimento el qubit no se encuentra aislado sino que está en contacto con el mundo externo, el cual introduce ruido al sistema cuántico generando con ello disipación y decoherencia. Por ello para poder comparar con experimento, es necesario trabajar al qubit como un sistema cuántico abierto, forzado externamente y acoplado con un reservorio térmico.

# Capítulo 3

## Sistema cuántico dependiente del tiempo en contacto con un reservorio

Un sistema físico real no está aislado, sino que está en contacto con el ambiente. En este caso el estado del sistema está caracterizado por la matriz densidad  $\rho(t)$  ya que en general a todo instante de tiempo es una mezcla estadística de estados, cuya evolución está influenciada por el ambiente. Por otra parte, si el número de grados de libertad del ambiente excede al número de grados de libertad internos, el primero puede ser modelado como un baño térmico o reservorio a temperatura constante  $1/\beta$ .

En el límite de acoplamiento débil entre el sistema y el ambiente, la constante de acoplamiento  $\gamma$  es considerada como parámetro de perturbación, donde la expansión se realiza generalmente hasta segundo orden en  $\gamma$ . También se emplea la aproximación de Markov: requiere un decaimiento de las correlaciones del baño menores a la del tiempo de relajación del sistema  $\tau_c \ll t_s$ .

### 3.1. Ecuación maestra para un sistema cuántico abierto

Podemos expresar el hamiltoniano del sistema global para un sistema cuántico abierto como

$$H_{tot}(t) = H_0 \otimes \mathbb{I}_b + V(t) \otimes \mathbb{I}_b + H_{sb} + \mathbb{I}_s \otimes H_b, \quad (3.1)$$

donde  $H_0$  es el hamiltoniano del qubit aislado,  $V(t) = V(t + \tau)$  la excitación externa,  $H_b$  es el hamiltoniano de los grados de libertad de baño, y  $H_{sb}$  representa la interacción entre el sistema y el baño. Usualmente al trabajar con el hamiltoniano 3.1 se considera

$H' = V(t) \otimes \mathbb{I}_b + H_{sb}$  como una pequeña perturbación es decir

$$H_{tot}(t) = H_0 \otimes \mathbb{I}_b + H' + \mathbb{I}_s \otimes H_b, \quad (3.2)$$

con lo cual en el caso en el se aplique un campo de microondas de la forma  $V(t) = A \cos(\omega t)$  (como se trabajó en los capítulos anteriores), sólo sería válido para amplitudes  $A$  pequeñas, [14].

En nuestro trabajo, sin embargo, vamos a considerar el hamiltoniano

$$H_{tot}(t) = H_s(t) \otimes \mathbb{I}_b + H_{sb} + \mathbb{I}_s \otimes H_b, \quad (3.3)$$

con  $H_s(t)$  el hamiltoniano de sistema cuántico de interés,  $H_b$  el hamiltoniano del baño y  $H' = H_{sb}$  el hamiltoniano de interacción entre ambos. Este último es entendido, generalmente, como una pequeña perturbación del sistema desacoplado  $H_0(t) = H_s(t) + H_b$ , considerando al baño térmico en equilibrio a todo instante de tiempo y  $H_s(t + \tau) = H_s(t)$ . Con ello se resuelve  $H_s(t)$  con el formalismo de Floquet, sección 2.1.1, lo que nos permite trabajar con amplitudes  $A$  grandes, [12], [13].

La evolución del sistema y del baño están caracterizados por la ecuación de Liouville-von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{tot}(t) = [H_{tot}, \rho_{tot}], \quad (3.4)$$

con  $\rho_{tot}$  la matriz densidad del sistema completo y  $H_{tot}$  presentado en la ecuación 3.3.

En teoría de perturbaciones es conveniente trabajar en la representación de interacción respecto a  $H_0(t)$ . Es decir

$$\tilde{\rho}(t) = U(t, t_0)^{-1} \rho(t) U(t, t_0), \quad (3.5)$$

con  $U(t, t_0) = \hat{\mathcal{T}} e^{-i \int_{t_0}^t dt' \frac{H_0(t')}{\hbar}}$ , el operador evolución del sistema total desacoplado y  $\hat{\mathcal{T}}$  el operador de orden.

Con ello la ecuación 3.4 nos queda como

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{tot}(t, t_0) &= -[\tilde{H}_0(t, t_0), \tilde{\rho}_{tot}] + U_0^{-1}(t, t_0) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{tot}(t, t_0) U_0(t, t_0) \\ &= [\tilde{H}_{sb}(t, t_0), \tilde{\rho}_{tot}(t, t_0)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si integramos

$$\tilde{\rho}_{tot}(t) \equiv \tilde{\rho}_{tot}(t, 0) = \rho_{tot}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{sb}(t'), \tilde{\rho}_{tot}(t')] \quad (3.7)$$

y reinsertamos en la ecuación 3.6 obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{sb}(t), \rho_{tot}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{sb}(t), [\tilde{H}_{sb}(t'), \tilde{\rho}_{tot}(t')]]. \quad (3.8)$$

Por otra parte, el operador densidad  $\rho_{tot}(t)$  contiene toda la información estadística del sistema compuesto, pero sólo es de interés  $H_s(t)$ , es decir nos quedamos con la matriz reducida del sistema

$$\rho(t) = Tr_b(\rho_{tot}(t)), \quad (3.9)$$

donde se realiza una traza sobre los grados de libertad del baño. Con su equivalente en la representación de interacción

$$\tilde{\rho}(t, t_0) = Tr_b(\tilde{\rho}_{tot}(t, t_0)). \quad (3.10)$$

Con ello la ecuación 3.8 nos queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} Tr_b[\tilde{H}_{sb}(t), \rho_{tot}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_b[\tilde{H}_{sb}(t), [\tilde{H}_{sb}(t'), \tilde{\rho}_{tot}(t')]]. \quad (3.11)$$

Vamos a suponer primero que el hamiltoniano  $H_{sb}$  en el espacio de Hilbert del baño es en promedio cero  $Tr_b(H_{sb}\rho_b) = 0$  [14] (equivalente a decir que las fluctuaciones son al azar y en promedio  $\langle H_{sb} \rangle_b = 0$ ). Por otra parte vamos a suponer como condición inicial que el sistema de interés y el baño están descorrelacionados  $\rho_{tot}(0) = \rho(0) \otimes \rho_b$ . Sin embargo, las correlaciones entre estos sistemas aparecen durante la evolución, que son despreciados al ser de primer orden  $\mathcal{O}(H_{sb})$  en la *aproximación de Born* [12]  $\tilde{\rho}_{tot}(t) = \tilde{\rho}(t) \otimes \rho_b$ . Esta suposición se traduce a que el baño permanece invariante y se encuentra en un estado de equilibrio  $\rho_b$  a todo tiempo. Bajo estas aproximaciones el primer término del lado derecho de la ecuación 3.11 se anula.

En base a estas aproximaciones, la ecuación 3.11 nos queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_b[\tilde{H}_{sb}(t), [\tilde{H}_{sb}(t'), \tilde{\rho}(t') \otimes \rho_b]]. \quad (3.12)$$

En nuestro caso vamos a trabajar con el hamiltoniano de interacción de la forma

$$H_{sb} = \gamma \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \quad (3.13)$$

con  $\mathcal{A}$  un operador actuando en el espacio de Hilbert del sistema y  $\mathcal{B}$  en el del baño térmico. El parámetro  $\gamma$  es una medida de acoplamiento entre el sistema y el ambiente. Reemplazando en la ecuación 3.12

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = & -\frac{\gamma^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' (G(t-t') (\tilde{\mathcal{A}}(t) \tilde{\mathcal{A}}(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{\mathcal{A}}(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{\mathcal{A}}(t)) \\ & + G(t'-t) (\tilde{\rho}(t') \tilde{\mathcal{A}}(t') \tilde{\mathcal{A}}(t) - \tilde{\mathcal{A}}(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{\mathcal{A}}(t'))), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $G(t-t')$  es la función de correlación del operador de acoplamiento  $\mathcal{B}$

$$G(t-t') = \langle \tilde{\mathcal{B}}(t) \tilde{\mathcal{B}}(t') \rangle_b = Tr_b(\tilde{\mathcal{B}}(t) \tilde{\mathcal{B}}(t') \rho_b), \quad (3.15)$$

definida como un promedio del producto de dos observables medidos sobre dos tiempos diferentes, donde la parte real está relacionada a la *dinámica de las fluctuaciones* del reservorio y la parte imaginaria a la *susceptibilidad lineal* [14].

Una de las características de la función de correlación es que decae en un tiempo característico  $\tau_c$ , que es la clave de la aproximación de Markov: cualquier cambio en el estado del sistema ocurre en una escala de tiempo mayor a  $\tau_c$ , con ello

$$\tilde{\rho}(t-t', t) \approx \tilde{\rho}(t, t) = \rho(t) \quad (3.16)$$

para  $0 \leq t' \leq \tau_c$ . En base a esta aproximación la ecuación se vuelve local en el tiempo, y así la acción en el baño es *coarse grained* en ese tiempo. Además, el límite superior de la integral puede extenderse al infinito, ya que la función de correlación la suponemos cero para tiempos mayores a  $\tau_c$ .

También vamos a considerar la *aproximación de Markov* [12] en la que el estado  $\tilde{\rho}(t)$  no depende de su historia  $\tilde{\rho}(t')$  con  $t < t'$ . Esto es razonable ya que, debido a la dimensión del reservorio, cualquier modificación en el baño decae rápidamente y la información sobre las interacciones previas pueden no retornar al sistema.

Finalmente la ecuación maestra en la aproximación de Born-Markov en la representación de Schrödinger nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = & -\frac{i}{\hbar} [H_s(t), \rho(t)] - \frac{\gamma^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' (G(t') (\mathcal{A}(t) \tilde{\mathcal{A}}(t-t', t) \rho(t) - \tilde{\mathcal{A}}(t-t', t') \rho(t) \mathcal{A}(t)) \\ & + G^*(t') (\rho(t) \tilde{\mathcal{A}}(t-t') \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t) \rho(t) \tilde{\mathcal{A}}(t-t', t))). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Esta última ecuación representa toda la evolución del qubit en contacto con el reservorio: el primer término de la ecuación representa la evolución del sistema aislado excitado externamente, mientras que el segundo está relacionado con los efectos disipativos.

### 3.1.1. Representación de Floquet

Podemos representar  $\rho(t)$  en una base ortonormal completa de las funciones periódicas de Floquet  $\rho_{ij}(t) = \langle u_i(t) | \rho(t) | u_j(t) \rangle$  (presentada en el capítulo 2 e  $i, j$  los índices del sistema de  $N$ -niveles, si es TLS  $i, j = 1, 2$ ). Con ello la ecuación 3.17 queda de la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\epsilon_{ij}\right)\rho_{ij}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} (\rho_{lj}(t)R_{ik;lk}(t) + \rho_{il}(t)R_{jk;lk}^*(t) - \rho_{kl}(t)(R_{lj;ki}(t) + R_{ki;lj}^*(t))), \quad (3.18)$$

con

- $\epsilon_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$ ,
- las tasas de transición termodinámicas definidas como

$$R_{ij;kl}(t) = \sum_L R_{ij;kl}(L)e^{iL\omega t}, \quad (3.19)$$

$$R_{ij;kl}(L) = \sum_K 2\pi \frac{\gamma^2}{\hbar} \sum_K \mathcal{A}_{ij}(K+L)\mathcal{A}_{ij}^*(K)g(\epsilon_{lk} - K\hbar\omega)$$

$L, K \in \mathbb{Z}$ , que describe la probabilidad de transición de flujo entre los estados de Floquet y el proceso de decoherencia [12],

- los coeficientes de Fourier

$$\mathcal{A}_{ij}(t) = \sum_L e^{iL\omega t} \mathcal{A}_{ij}(L), \quad (3.20)$$

$$\mathcal{A}_{ij}(L) = \sum_K \langle u_i(K) | \mathcal{A} | u_j(K+L) \rangle,$$

con  $\mathcal{A}_{ij}(L)$  los elementos de matriz del observable  $\mathcal{A}$  en la base de estados de Floquet,

- y la transformada de Fourier de la función de correlación

$$g(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt G(t) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (3.21)$$

Podemos expresar la ecuación 3.18 como un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\rho}_{ij}(t) = - \sum_{k,l} M_{ij;kl}(t) \rho_{kl}(t) \quad (3.22)$$

con

$$M_{ij;kl} = \frac{1}{2} \left( \sum_m (R_{im;km} \delta_{jl} + R_{jm;lm}^* \delta_{ik}) - R_{lj;ki} - R_{ki;lj}^* \right) + \frac{i}{\hbar} \epsilon_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (3.23)$$

para la cual se realiza la aproximación  $R_{ij;kl}(t) \approx R_{ij;kl} = R_{ij;kl}(L = 0)$ . Esta aproximación corresponde a promediar  $R_{ij;kl}(t)$  en un período, suponiendo que el tiempo de relajación del sistema es mucho mayor que el período  $\tau$  [13], obteniendo

$$R_{ij;kl} = 2\pi \frac{\gamma^2}{\hbar} \sum_K \mathcal{A}_{ij}(K) \mathcal{A}_{lj}^*(K) g(\epsilon_{lk} - K\hbar\omega) \quad (3.24)$$

$$\mathcal{A}_{ij}(K) = \sum_K \langle u_i(K) | \mathcal{A} | u_j(K) \rangle,$$

Con esto, nuestro problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones independiente del tiempo, que consiste en hallar los autovalores y autovectores de la matriz  $\mathcal{M}$ , ecuación 3.23. Esta matriz posee información del acoplamiento del sistema compuesto qubit-reservorio, en nuestro caso se propuso un acoplamiento débil y lineal. Para resolverla es necesario especificar cual es el observable del sistema con el que se acopla el baño ( obtiéndose los elementos de matriz  $\mathcal{A}_{i,j}(K)$ ) como así también como es que el sistema disipa (  $g(E)$ ).

## 3.2. Baño térmico

La ecuación 3.22 describe la evolución del qubit en contanto con un reservorio (baño) térmico. Para resolver el problema se debe conocer como es la forma funcional de  $g(E)$ .

### 3.2.1. Ecuación de Lagevin

En nuestro caso consideramos un baño de osciladores independientes para el reservorio térmico, que corresponde a la aproximación usual en este tipo de problemas [13],[14].

Vamos a tomar como ejemplo un sistema con un grado de libertad, con el hamiltoniano

$$H_{tot} = H_s + H_b + H_{sb} \quad (3.25)$$

$$H_{tot} = \frac{p^2}{2} + V(x) + \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{m_n \omega_n}{2} \left( x_n - \frac{c_n}{m_n \omega_n^2} x \right)^2 \right).$$



Para este caso la ecuación de Heisenberg de movimiento que describe el sistema es:

$$\ddot{x} + \int_{t_0}^t dt' \eta(t-t') \dot{x}(t') + V'(x) = \xi(t) - 2\eta(t-t_0)x(t_0), \quad (3.26)$$

con el término de la izquierda cumpliendo el rol de la fuerza de amortiguamiento, mientras el segundo término actúa como las fluctuaciones de la fuerza. Podemos expresar  $\eta(t)$  usando la densidad espectral del baño

$$J(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_n \frac{c_n^2}{m_n \omega_n} (\delta(\omega - \omega_n) - \delta(\omega + \omega_n)), \quad (3.27)$$

con lo que  $\eta(t)$  nos queda

$$\eta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\cos(\omega t)}{\omega}. \quad (3.28)$$

Por otra parte  $\xi(t)$  es de la forma

$$\xi(t) = \sum_n c_n (x_n(t_0) \cos(\omega_n(t-t_0)) + \frac{p_n(t_0)}{m_n \omega_n} \sin(\omega_n(t-t_0))). \quad (3.29)$$

Si se considera que el baño disipa de manera óhmica

$$\begin{aligned} J_0(\omega) &= \eta\omega, \omega > 0, \\ \eta_0(t) &= 2\eta\delta(t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

la ecuación 3.26 nos queda

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + V'(x) = \xi(t) - 2\eta\delta(t-t_0)x(t_0), \quad (3.31)$$

representando la ecuación de Laguevin cuántica, que es similar a la versión clásica, salvo por término  $2\eta\delta(t-t_0)x(t_0)$ .

A partir de estos resultados nos interesa evaluar la función de correlación  $G(t-t')$ , ecuación 3.15, del operador del baño térmico  $\mathcal{B} = \sum_n c_n \omega_n$ . En este caso nos queda:

$$G(t) = \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) (n_\beta(\omega) e^{i\omega t} + (1 + n_\beta(\omega)) e^{-i\omega t}), \quad (3.32)$$

con  $n_\beta(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$  la función de Bose-Einstein,  $\beta = \frac{1}{K_B T}$ , con  $K_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura a la que se encuentra el reservorio. Redefiniendo  $J(-\omega) = -J(\omega)$  llegamos a

$$g(E) = \frac{1}{\pi} J\left(\frac{E}{\hbar}\right) n_\beta(E). \quad (3.33)$$

### 3.3. Probabilidades de transición

Debemos encontrar la evolución de cada uno de los elementos de la matriz del operador densidad del sistema resolviendo

$$\frac{d}{dt}|\rho(t)\rangle = -\mathcal{M}|\rho(t)\rangle, \quad (3.34)$$

donde reescribimos la ecuación 3.22 usando una nueva notación, en la cual representamos a la matriz  $\rho(t)$  como un vector, por ejemplo para un caso de dos niveles nos queda

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{22}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) \end{pmatrix} \equiv |\rho(t)\rangle \equiv \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) \\ \rho_{22}(t) \\ \rho_{21}(t) \\ \rho_{22}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Dado que  $H_0$  es independiente de  $t$  se diagonaliza la matriz  $\mathcal{M}$  de dimensión  $N \times N$ , ecuación 3.23, y se obtienen los autovalores  $\lambda_\mu$  y los autovectores por izquierda  $|l_\mu\rangle$  y por derecha  $|r_\mu\rangle$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}|r_\mu\rangle &= \lambda_\mu|r_\mu\rangle, \\ \langle l_\mu|\mathcal{M} &= \lambda_\mu\langle l_\mu|. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde  $|l_\mu\rangle, |r_\mu\rangle$  matrices de dimensión  $N \times N$  expresados como vectores, por ejemplo para  $N = 2$  son representados como vectores de 4 componentes:  $|l_\mu\rangle = \begin{pmatrix} l_{00} & l_{01} \\ l_{10} & l_{11} \end{pmatrix} \equiv$

$$\begin{pmatrix} l_{00} \\ l_{01} \\ l_{10} \\ l_{11} \end{pmatrix} \text{ y } |r_\mu\rangle = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} \\ r_{10} & r_{11} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_{00} \\ r_{01} \\ r_{10} \\ r_{11} \end{pmatrix}.$$

De esta manera la evolución  $\rho(t)$  nos queda como

$$\rho(t) = \sum_{\mu} \langle l_\mu|\rho(0)\rangle e^{-\lambda_\mu t} |r_\mu\rangle, \quad (3.37)$$

donde los  $\lambda_\mu \in \mathbb{C}$  con  $Re(\lambda_\mu) \geq 0$ , y los autovectores por izquierda  $|l_\mu\rangle$  y por derecha  $|r_\mu\rangle$  cumplen que

$$\begin{aligned} \langle l_\mu|r_\nu\rangle &= \delta_{\mu\nu}, \\ \sum_{\mu} |r_\nu\rangle\langle l_\mu| &= \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Además como  $\rho(t)$  representa la matriz densidad de un sistema cuántico físico debe cumplir que

$$\text{Tr}(\rho(t)) = \sum_i \rho_{ij}(t) = \sum_{ij} \rho_{ij} \delta_{ij} = (\mathbf{i}|\rho(t)) = 1, \quad (3.39)$$

con  $|\mathbf{i}\rangle = \mathbb{I}$ . Multiplicando la ecuación 3.34 por  $(\mathbf{i}|$  nos queda

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{i}|\rho(t)) = (\mathbf{i}|\mathcal{M}|\rho(t)), \quad (3.40)$$

como tiene que ser válida  $\forall |\rho\rangle$  entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}|\mathcal{M}|\rho(t)) = 0 &\Rightarrow \\ (\mathbf{i}|\mathcal{M} = 0 &\Rightarrow \\ \sum_{ij} \delta_{ij} M_{ij,kl} = \sum_i M_{ij,kl} &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Esto implica que  $(\mathbf{i}|$  es un autovector por izquierda con autovalor  $\lambda_0 = 0$  es decir

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}| = (l_0| &\Rightarrow \lambda_0 = 0 \\ (l_0|r_0) = 1 &\Rightarrow \text{Tr}(|r_0\rangle) = 1, \end{aligned} \quad (3.42)$$

con lo que al menos debe existir un autovalor nulo  $\lambda_0 = 0$ : solución estacionaria.

Una vez obtenida la evolución de  $\rho(t)$  podemos calcular la probabilidad de transición de un estado inicial  $\psi'$  a un estado final  $\psi$  como:

$$\overline{P}_\psi(t) = \sum_{ijK} \langle u_i(K)|\psi\rangle \rho_{ij}(t) \langle \psi|u_j(K)\rangle, \quad (3.43)$$

donde se ha promediado dentro de un período  $\tau$  centrado en  $t$  (tratamiento análogo al que se hizo en la ecuación 2.20 para el caso aislado).

Para el estado estacionario  $t \rightarrow \infty$ ,  $|\rho^\infty\rangle = |r_0\rangle$  (en el caso en el que el autoestado con  $\lambda_0 = 0$  sea no degenerado), obtenemos

$$\overline{P}_\psi^\infty = \sum_{ijK} \langle u_i(K)|\psi\rangle \rho_{ij}^\infty \langle \psi|u_j(K)\rangle. \quad (3.44)$$



# Capítulo 4

## Sistema abierto: Resolución de la dinámica del qubit superconductor

Como se presentó en el capítulo 2, al realizar el experimento (Oliver et.al. [4]) el sistema cuántico de interés no se encuentra aislado, sino que está en contacto con el mundo externo, en nuestro caso el circuito involucrado. Para ello en el capítulo 3 hemos propuesto en considerar el TLS en contacto con un reservorio térmico, que puede ser representado como un conjunto de osciladores independientes.

El ruido debido al ambiente puede ser “longitudinal” (componente  $\sigma_z$ ) y correspondería a un ruido electromagnético que afecta al flujo en el qubit, o bien, puede ser “transversal” (componente  $\sigma_x, \sigma_y$ ) que correspondería a un ruido de carga asociado a alguna capacitancia parasitaria con el sustrato (en el capítulo 5 detallaremos la relación entre tipos de ruidos y tipos de acoplamientos en el qubit de flujo). En este capítulo resolveremos el caso simplificado de un TLS, donde el acoplamiento con el baño es a través de un operador del sistema  $\mathcal{A} = \sigma_x$ ,  $\mathcal{A} = \sigma_z$  o una combinación lineal de ambos; mientras consideramos una densidad espectral óhmica para el baño.

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para el sistema cuántico abierto. Se determinó la dinámica del qubit de flujo para tiempos finitos y para  $t \rightarrow \infty$  (estado asintótico). Para ello se varió la forma de acoplamiento del sistema-baño y se analizó su dinámica variando los parámetros del campo de microondas.

Cabe destacar que en este capítulo se calculó la probabilidad de que el qubit se encuentre en el estado  $|R\rangle$  (estado de corriente positiva), no la de transición al  $|L\rangle$  (estado de corriente negativa), es decir

$$\begin{aligned} \overline{P}_{|R\rangle} &= \overline{\langle R|\hat{\rho}(t)|R\rangle} \\ \overline{P}_{|R\rangle} &= \sum_{ijK} \langle u_i(K)|R\rangle \rho_{ij}(t) \langle R|u_j(K)\rangle, \end{aligned} \tag{4.1}$$

haciendo uso además de la ecuación 3.43 y 3.44. Cabe destacar que todos los resultados

obtenidos se hicieron para una temperatura del reservorio de  $\frac{T}{\Delta} = 10$ ,  $J(\omega) = \gamma\omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}$ , al que le incorporamos una frecuencia de “cutoff”  $\omega_c = \frac{E_J}{\hbar}$ ,  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,1$  y como condición inicial  $\rho(0) = |R\rangle\langle R|$ .

## 4.1. Acoplamiento del sistema con el reservorio

En este trabajo hemos elegido trabajar con el observable  $\mathcal{A}$ , para el caso TLS, como

$$\mathcal{A} = p\sigma_z + (1-p)\sigma_x, \quad (4.2)$$

con  $p \in [0, 1] \in \mathbb{Z}$ , donde  $\sigma_x$  representaría un ruido de carga y  $\sigma_z$  un ruido de flujo, en la aproximación TLS para el qubit de flujo (ver capítulo 5).

Como estamos trabajando con un qubit de flujo es de esperarse que un ruido en esa componente tenga un mayor efecto en los fenómenos de decoherencia y relajación que la componente de carga. Por ello hemos resuelto nuestro problema variando el parámetro  $p$  y los parámetros del campo de microondas (la amplitud  $A$ , la frecuencia  $\omega$  y la energía de polarización  $\epsilon_0$ ). Se realiza con la finalidad de ofrecer una alternativa para poder caracterizar el estado completo qubit-reservorio, de tal manera de poder identificar el origen de las fluctuaciones según la dinámica del sistema.

## 4.2. Acoplamiento longitudinal, $\mathcal{A} = \sigma_z$

Nuestro interés es comparar los resultados del modelo propuesto con mediciones experimentales. Por ello calculamos la probabilidad  $\overline{P}_{|R\rangle}$  para el caso de solución estacionaria y para tiempos finitos. Eligiéndose como estado inicial  $|R\rangle\langle R|$  para ambos casos.

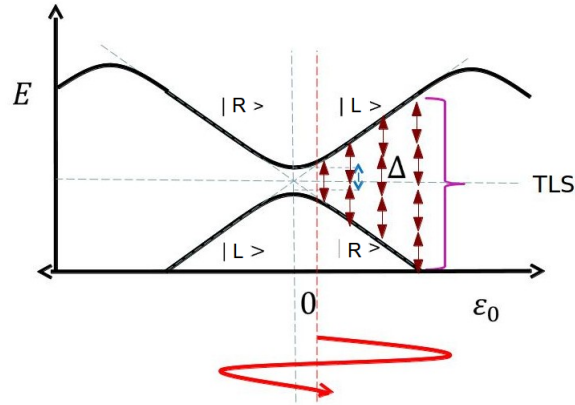
### 4.2.1. Probabilidad estacionaria

Para el caso estacionario, tenemos que

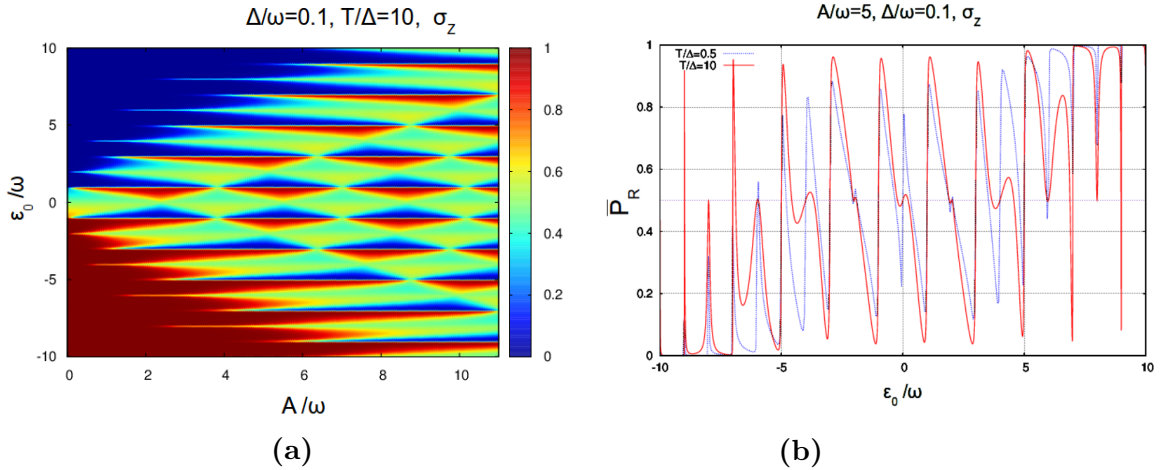
$$\overline{P}_{|R\rangle}^\infty = \overline{\langle R|\hat{\rho}_\infty|R\rangle}, \quad (4.3)$$

resolviéndose 3.44, caso  $t \rightarrow \infty$ .

En las figuras 4.2a y 4.2b se presenta para el acoplamiento longitudinal la  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  y  $\frac{A}{\omega}$ , y un corte a  $\frac{A}{\omega} = 5$ , respectivamente. Se observa que  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty$  en el espacio  $(\frac{\epsilon_0}{\omega}, \frac{A}{\omega})$  presenta un patrón de interferencia multifotónica (interferencia LZS, ver sección 1.2.1) con interferencia constructiva para  $\epsilon_0 \approx n\hbar\omega$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , ver figura 4.1. Sin embargo en este caso  $\overline{P}_{|R\rangle, max} > (<) \frac{1}{2}$ , para  $\epsilon_0 < (>) 0$  respectivamente, fenómeno denominado “inversión de población”.

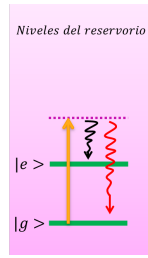


**Figura 4.1:** Esquema de niveles del sistema TLS en función de la energía de polarización  $\epsilon_0$ , separados en  $\epsilon_0 = 0$  una cantidad  $\Delta$ , determinando una zona de 'avoided crossing'. Al aplicar un campo de microondas monocromáticas de frecuencia  $\omega$  recorreremos los niveles de energía periódicamente. Cada vez que cumple que  $\epsilon_0 \approx n\hbar\omega$  el estado fundamental puede ser excitado resonantemente.



**Figura 4.2:** Frecuencias altas, acoplamiento longitudinal  $\sigma_z$ . (a) Se grafica  $\overline{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  versus  $\frac{A}{\omega}$ ,  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ , (b) se presenta un corte realizado para  $\frac{A}{\omega} = 5$ , también se grafica como varía la dependencia de  $\overline{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  con la temperatura  $\frac{T}{\Delta}$ . La escala de colores representa la población neta del qubit en el estado  $|R\rangle$ .

En este caso sólo estamos trabajando con un sistema de dos niveles, con lo que la interferencia LZS únicamente tiene lugar con los dos niveles de más baja energía. Sin embargo se observa el fenómeno de “inversión de población”, esto se debe a que el sistema se encuentra en contacto con el baño térmico, permitiendo transiciones multifotónicas mediadas por estados virtuales del reservorio [15]. Con lo cual el mecanismo que predomina es la transición a un nivel virtual del baño de energía  $E_0 + \hbar\omega$  (con  $E_0$  la energía del estado fundamental), seguida por la relajación al estado  $E_1$  (energía del estado excitado), ver figura 4.3.

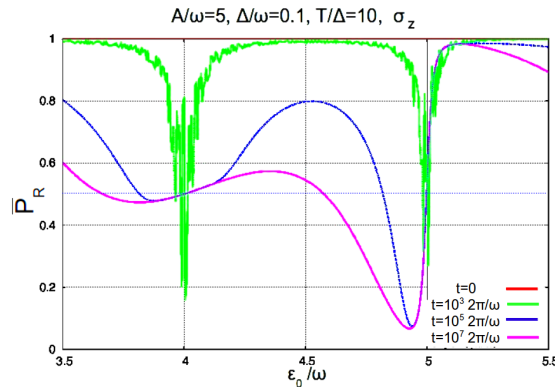


**Figura 4.3:** Esquema del niveles para el TLS con contacto con el reservorio “espectro continuo de niveles”, en el caso de acoplamiento  $\sigma_z$ . En el mismo se puede ver que el estado fundamental  $|g\rangle$  es excitado a algún nivel del baño, y luego descae con una probabilidad al estado  $|g\rangle$  o al excitado  $|e\rangle$ .

#### 4.2.2. Probabilidad a tiempos finitos

En la sección anterior se trabajó en el estado estacionario, es decir que se supuso que el sistema relajó tiempo  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo al realizarse los experimentos los tiempos  $t_{exp}$  empleados son menores a los de relajación  $t_{exp} < t_r$ , en Oliver et.al. [4].

Haciendo uso de las ecuaciones 4.1 y 3.43 se graficó  $\overline{P}_{|R\rangle}$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ , para  $\frac{A}{\omega} = 5$  y distintos tiempos  $t$ . Los resultados se presentan en la figura 4.4. Para tiempos  $t = \frac{2\pi}{\omega} 10^3$  (línea verde) el sistema presenta resonancias del tipo LZS en  $\epsilon_0 = n\hbar\omega$  con inversión de población y con picos simétricos alrededor de la región de resonancia, es decir que para tiempos cercanos al tiempo inicial el sistema y el baño están descorrelacionados. Sin embargo para tiempos mayores el sistema relaja en un tiempo  $t_{\sigma_z} \approx 10^5 \frac{2\pi}{\omega}$  y experimenta una serie de regímenes caracterizados por: la pérdida en la simetría de los picos de resonancia y el fenómeno de “inversión de población”.



**Figura 4.4:** Resonancias de 4 y 5 fotones, se presenta  $\overline{P}_{|R\rangle}$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  para acoplamiento longitudinal  $\sigma_z$ . En este caso se grafica a distintos tiempos finitos: línea roja, tiempo inicial  $t = 0$ , línea verde  $t = \frac{2\pi}{\omega} 10^3$ , línea azul  $t = \frac{2\pi}{\omega} 10^5$ , línea magenta  $t = \frac{2\pi}{\omega} 10^7$ .

En este tipo de acoplamiento tenemos como observable  $\mathcal{A} = \sigma_z$ , que representa a la operación cuántica “bit phase”, la cual sólo cambia la fase relativa entre  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$ : si se aplica por ejemplo al estado superposición  $\frac{|R\rangle+|L\rangle}{\sqrt{2}}$  obtenemos a la salida  $\frac{|R\rangle-|L\rangle}{\sqrt{2}}$ , como vemos modifica las fases relativas, por lo que podría ser uno de los factores en

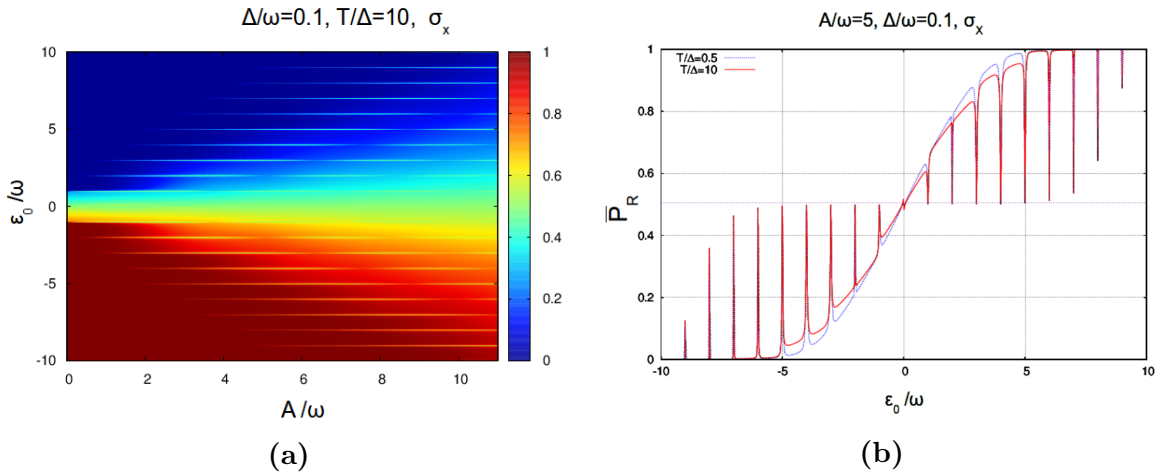


los procesos de decoherencia y genere una relajación lenta del sistema.

### 4.3. Acoplamiento trasversal, $\mathcal{A} = \sigma_x$

#### 4.3.1. Probabilidad estacionaria

Siguiendo la misma modalidad anterior, se graficó  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  y  $\frac{A}{\omega}$ , y un corte a  $\frac{A}{\omega} = 5$ , ver figuras 4.5a y 4.5b. Se elige como estado inicial  $|R\rangle\langle R|$ .



**Figura 4.5:** Frecuencias altas, acoplamiento trasversal  $\sigma_x$ . (a) Se grafica  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty$  versus  $\frac{A}{\omega}$ ,  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ , (b) se presenta un corte realizado para  $\frac{A}{\omega} = 5$ , también se grafica como varía la dependencia de  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  con la temperatura  $\frac{T}{\Delta}$ . La escala de colores representa la población neta del qubit en el estado  $|R\rangle$ .

En la figura 4.5 se observa que no existe “inversión de población“:

- $\epsilon_0 > 0$ : mientras el campo oscilatorio barre el estado fundamental y se encuentra en estos valores de  $\epsilon_0$ , el estado del qubit permanece en  $|R\rangle$ , que es el estado de menor energía, es decir  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty \approx 1$ , ver figura 4.1,
- $\epsilon_0 < 0$ : sin embargo cuando pasamos para valores negativos y el campo barre el estado fundamental, el estado  $|L\rangle$  pasa a ser el de menor energía, por ello  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty \approx 0$ , ver figura 4.1.

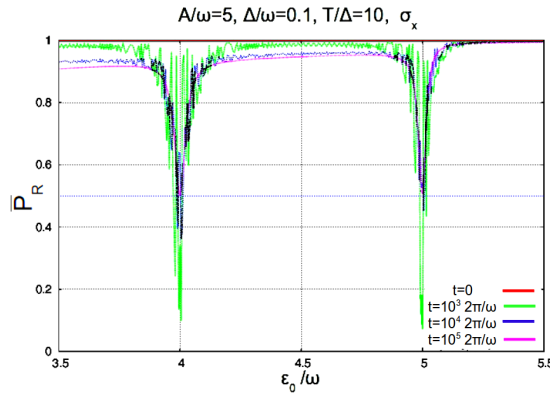
Además que se presentan las resonancias multifotónicas por las sucesivas transiciones de LZ.

Podemos realizar dos observaciones respecto a este comportamiento. Primero, para  $\frac{\epsilon_0}{\omega} = 0$  es de esperarse un salto en la probabilidad  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty(\epsilon_0 = 0^+) \approx 1$  a  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty(\epsilon_0 = 0^-) \approx 0$ , sin embargo en las simulaciones se observa que ese cambio se da de manera suave, ver figura 4.5b.

En segundo lugar,  $\sigma_x$  puede ser entendida como una operación de compuerta cuántica de un bit, la cual corresponde al "bit flip": al aplicarse a  $|R\rangle$  obtenemos como salida  $|L\rangle$  y viceversa. En el caso de nuestro sistema, genera que los niveles  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$  interactúen fuertemente entre sí, evitando que se den transiciones multifotónicas "virtuales" con algún nivel del baño, en consecuencia no hay "inversión de población" y el sistema relaja rápidamente.

### 4.3.2. Probabilidad a tiempos finitos

Se graficó  $\overline{P}_{|R\rangle}$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ , para  $\frac{A}{\omega} = 5$  y distintos tiempos  $t$ , los resultados se presentan en la figura 4.6 para el acoplamiento transversal y estado inicial  $|R\rangle\langle R|$ . Para tiempos cortos  $t = \frac{2\pi}{\omega} 10^3$  (línea verde) el sistema se comporta de manera similar que para el acoplamiento longitudinal 4.4. Pero en este caso el sistema relaja más rápido  $t_{\sigma_x} \approx 10^3 \frac{2\pi}{\omega}$ . Esto es de esperarse ya que en el segundo caso estamos excitando el sistema e introduciendo ruido por el mismo observable  $\mathcal{A} = \sigma_z$  por lo que genera que el sistema tarde aún más en alcanzar el régimen estacionario, lo contrario para  $\mathcal{A} = \sigma_x$ .



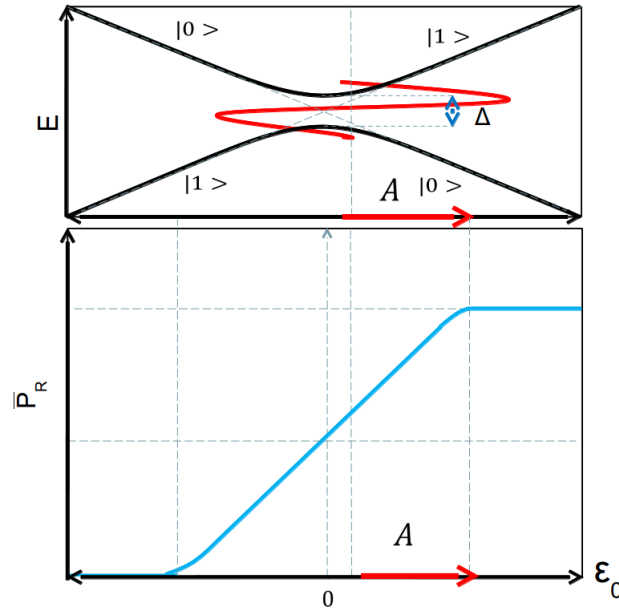
**Figura 4.6:** Resonancias de 4 y 5 fotones, se presenta  $\overline{P}_{|R\rangle}$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  para acoplamiento transversal  $\sigma_x$ . En este caso se grafica a distintos tiempos finitos: línea roja, tiempo inicial  $t = 0$ , línea verde  $t = 1 \frac{2\pi}{\omega} 10^3$ , línea azul  $t = 10 \frac{2\pi}{\omega} 10^3$ , línea magenta  $t = 100 \frac{2\pi}{\omega} 10^3$ .

Por otra parte, en este tipo de acoplamiento cuando calculamos  $\overline{P}_{|R\rangle}$  (por ejemplo en el estacionario  $\overline{P}_{|R\rangle}^\infty$ ) estamos realizando un promedio temporal sobre realizaciones, como el sistema relaja rápidamente la probabilidad puede ser calculada como el cociente entre el tiempo que el sistema pasa en el estado  $|R\rangle$  sobre el período de una oscilación completa del campo de microondas, es decir

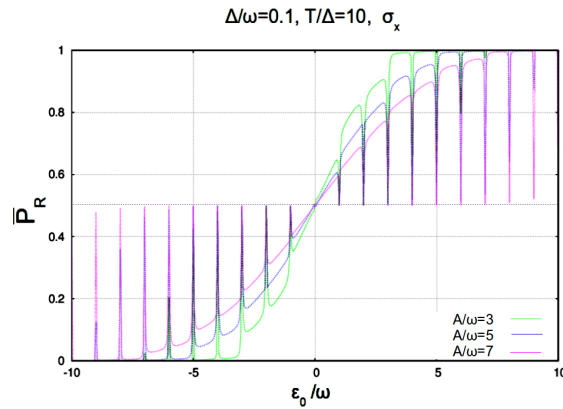
$$\overline{P}_{|R\rangle}^\infty \approx \frac{t_1}{T} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\epsilon_0}{A}\right). \quad (4.4)$$

En especial, para el límite  $\epsilon_0 \ll A$  tenemos:

$$\overline{P}_{|R\rangle}^\infty \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon_0}{A}. \quad (4.5)$$



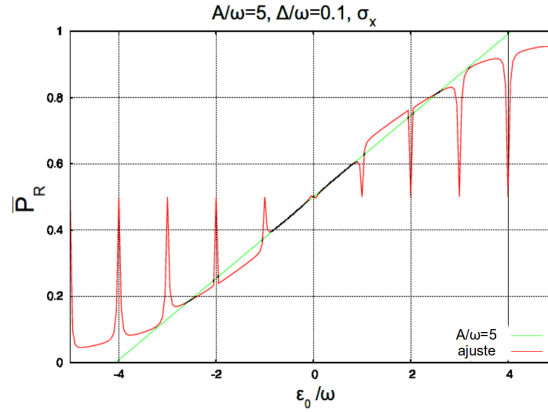
**Figura 4.7:** Acoplamiento trasversal. Se presenta un esquema simple, en el cual se determina una dependencia de  $\bar{P}_{|R\rangle}^\infty = \frac{1}{2\pi} \arcsin(-\frac{\epsilon_0}{\omega})$  (sin tener en cuenta las transiciones resonantes al estado excitado). Como vemos la transición  $\bar{P}_{|R\rangle}^\infty(\epsilon_0 = 0^+) \approx 1$  a  $\bar{P}_{|R\rangle}^\infty(\epsilon_0 = 0^-) \approx 0$  tiende a un escalón para  $A$  pequeñas.



**Figura 4.8:** Acoplamiento trasversal. Se grafica  $\bar{P}_{|R\rangle}^\infty$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  para distintas amplitudes  $\frac{A}{\omega} = 3, 5, 7$ . Se observa que para amplitudes pequeñas el pasaje de  $\bar{P}_{|R\rangle}^\infty(\epsilon_0 = 0^+) \approx 1$  a  $\bar{P}_{|R\rangle}^\infty(\epsilon_0 = 0^-) \approx 0$  tiende a un escalón.

En la figura 4.7 se presenta un esquema de dicha situación, como vemos la probabilidad de pasar de  $|R\rangle$  a  $|L\rangle$  presenta un comportamiento suave en función de la energía de polarización, similar a la presentada la figura 4.5b (sobre la cual también se observan las resonancias para cuando el sistema es excitado resonantemente). Como la dependencia es  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon_0}{A}$ , es de esperarse que a medida que aumentemos la amplitud del campo  $A$  la pendiente sea menor. Para comprobarlo se graficó  $\bar{P}_{|R\rangle}^\infty$  en función de  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  para distintas amplitudes ( $\frac{A}{\omega} = 3, 5, 7$ ), los resultados se presentan en la figura 4.8. A modo de comprobar la dependencia, se llevó a cabo el ajuste de la ecuación 4.5

para una amplitud fija  $\frac{A}{\omega} = 5$ , cuyo resultado se presenta en la figura 4.9. Para ello se ajustó la ecuación  $a + b\epsilon_0$  con  $a = \frac{1}{2}$  y  $b = \frac{1}{\pi A} = 0,064$ , obteniéndose como parámetros  $a = (0,500 \pm 0,004)$  y  $b = (0,089 \pm 0,002)$ .



**Figura 4.9:** Acoplamiento transversal. Se grafica  $\bar{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  para  $\frac{A}{\omega} = 5$  y un ajuste con la ecuación 4.5 en verde. Se observa que esta aproximación es válida para  $|\epsilon_0| \ll A$ .

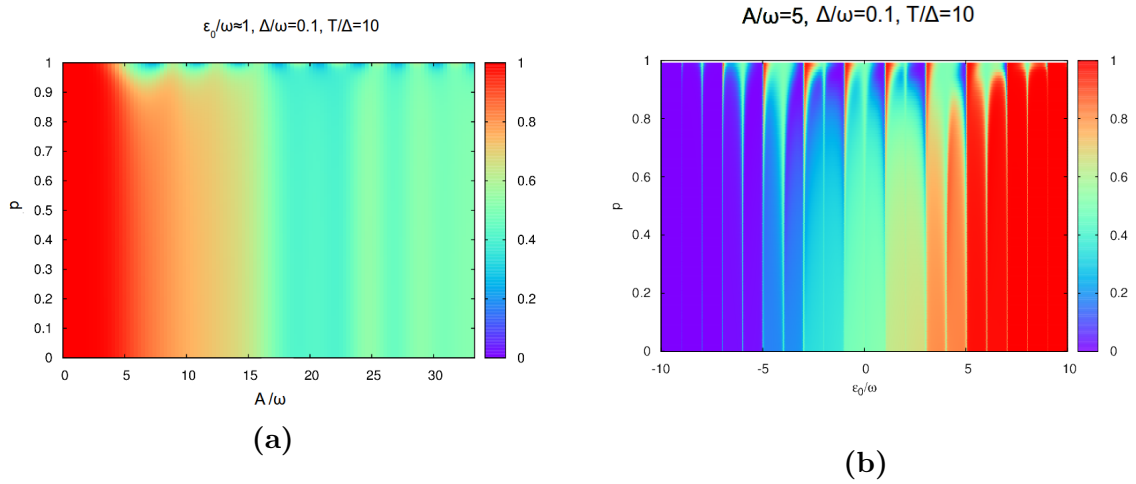
#### 4.4. Acoplamiento transversal y longitudinal

En las secciones anteriores se trabajó para dos casos extremos de acoplamiento  $\mathcal{A} = \sigma_z$  y  $\mathcal{A} = \sigma_x$ . Ahora, es de interés saber que sucede con el sistema si es que de alguna manera introducimos ruido por ambas componentes, es decir trabajar con  $\mathcal{A} = p\sigma_z + (1-p)\sigma_x$ , variando gradualmente  $p \in [0, 1]$ .

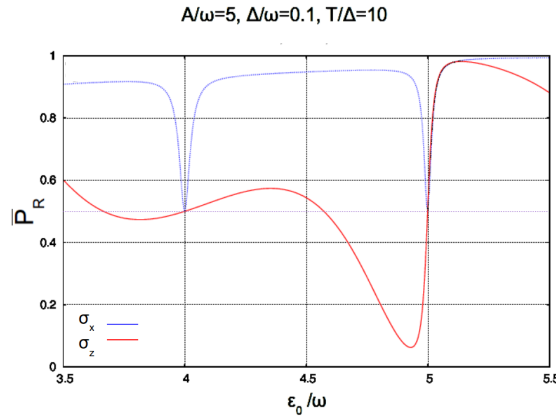
Primero se varió  $\frac{A}{\omega}$  y  $p$  cerca de la primera resonancia  $\frac{\epsilon_0}{\omega} \approx 1$ , ver figura 4.10a. En la misma se observa que sólo para  $p \approx 1$  tenemos inversión de población mientras que para  $p \ll 1$  predomina el acoplamiento transversal. Esto sorprende ya que estamos trabajando con un qubit de flujo y es de esperar que el ruido provenga de la componente de flujo (acoplamiento longitudinal  $\sigma_z$ ), además que se está excitando al qubit por esa misma componente.

Luego se graficó  $\bar{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  para distintos valores de  $p$ ,  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  y para una amplitud de campo constante  $\frac{A}{\omega} = 5$ , ver figura 4.10b. En la misma es posible observar que para  $p \ll 1$  la población máxima de quedarse en el estado fundamental es  $\frac{1}{2}$  en las resonancias ( $\epsilon_0 = n\hbar\omega$ ), mientras que para valores  $p \approx 1$  dichas poblaciones alcanzan valores mayores (menores) a  $\frac{1}{2}$ . También se observa que la forma de los picos de resonancia son simétricos respecto a  $\epsilon_0 = n\hbar\omega$  para  $p \ll 1$  mientras que para  $p \approx 1$  los picos dejan de serlo. En la figura 4.11 se presenta  $\bar{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  en función de la energía de polarización  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  para la resonancia de 4 y 5 fotones y para acoplamiento transversal  $\sigma_x$  y longitudinal  $\sigma_z$ , en el mismo se observa con mayor detalle esta diferencia.

En resumen, podemos ver que el sistema tiene una dependencia fuerte con el tipo



**Figura 4.10:** (a) Probabilidad  $\overline{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  en función de la amplitud  $\frac{A}{\omega}$  y de  $p \in [0, 1]$ , que representa el peso estadístico para las variables del sistema  $\mathcal{A}$  que se acoplan con el baño térmico, es decir  $\mathcal{A} = (1 - p)\sigma_x + p\sigma_z$ , cerca de la primera resonancia  $\frac{\epsilon_0}{\omega} \approx 1$ . (b) En este caso se grafica  $\overline{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  en función de  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  y  $p$ , a una amplitud  $\frac{A}{\omega} = 5$ . Ambos cálculos se realizaron para valores de  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,1$ ,  $\gamma = 0,001$  y  $\frac{T}{\Delta} = 10$ . La escala de colores representa la población neta del qubit en el estado  $|R\rangle$ .



**Figura 4.11:** Resonancias de 4 y 5 fotones, se presenta  $\overline{P}_{|R\rangle}^{\infty}$  versus  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  para acoplamiento longitudinal  $\sigma_z$  (en rojo) y acoplamiento trasversal  $\sigma_x$  (en azul).

de acoplamiento, generando patrones de interferencia diferentes en la dinámica. Por ejemplo, en el régimen estacionario tenemos que: para el acoplamiento trasversal se observa que la forma de los picos de resonancia es simétrica, además que la dependencia de la probabilidad con  $\epsilon_0$  presenta un "background", con una dependencia con  $A$  aproximada de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon_0}{A}$  para  $\epsilon_0 \ll A$ ; sin embargo, para el caso longitudinal los picos de resonancia son antisimétricos, observándose "inversión de población".

Se observa además que la forma de acoplamiento afecta los procesos de relajación, generando tiempos de relajación más cortos para el caso trasversal, mientras que en el longitudinal se observa una relajación más lenta del sistema.

En el caso de acoplamiento mixto, el trasversal predomina por sobre el longi-

tudinal, lo cual sorprende ya que es de esperarse que la disipación sea mayor por la componente en la cual estamos forzando el sistema, en este caso el longitudinal. Es decir que a pesar que se trabaje con un qubit de flujo las fluctuaciones de carga, aunque sean pequeñas, tienen un efecto fuerte en los procesos de disipación, decoherencia, y de relajación.

Estos fenómenos observados permitirían distinguir el tipo de acoplamiento o ruido del sistema, por lo cual experimentos realizados en el régimen estacionario permitirían distinguir por cual componente se introduce ruido y con ello disminuir la decoherencia.

# Capítulo 5

## Interferometría LZS en el qubit de flujo: sistema de $N$ niveles

### 5.1. Hamiltoniano del qubit de flujo

En este capítulo vamos a aproximar al qubit de flujo como un sistema cuántico de  $N$ -niveles forzado por un campo de microondas. Vamos a considerar que el campo aplicado es de la forma  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos(\omega t)$ , con  $\epsilon_0$  la energía de polarización,  $A$  la amplitud del campo y  $\omega$  la frecuencia.

El qubit de flujo, como se vió en el capítulo 1, consiste en un loop superconductor con tres juntas Josephson (JJ), figura 1.1. Las juntas están caracterizadas por las fases  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$ , relacionadas como

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi f, \quad (5.1)$$

con  $f = \frac{\Phi}{\phi_0}$  el flujo magnético encerrado en el loop y  $\phi_0$  el cuántico de flujo  $\frac{h}{2e}$ . Dos de las juntas tienen energía de acoplamiento  $E_J$  y capacitancia  $C$ , y la tercera tiene  $E_{J,3}$  y capacitancia  $C_3$ .

De esta manera el hamiltoniano nos queda como:

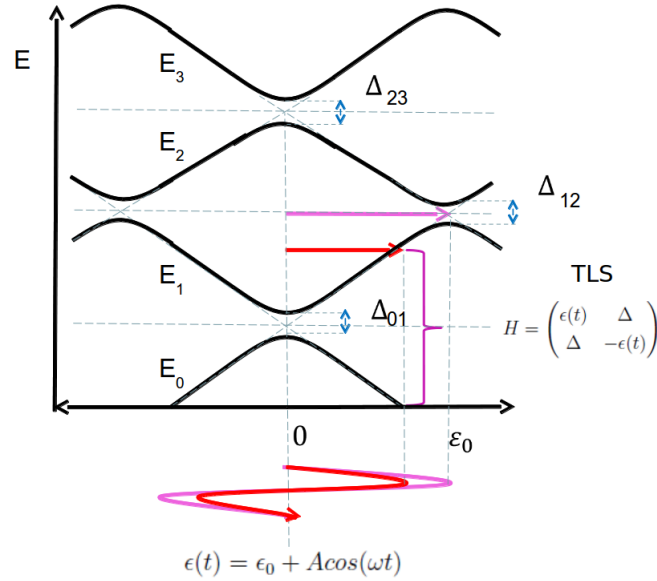
$$\mathbb{H} = -2E_C \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi_p^2} + \frac{1}{1 + 2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_m^2} \right) + E_J V(\varphi_p, \varphi_m), \quad (5.2)$$

con  $\varphi_p = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ,  $\varphi_m = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ ,  $E_C = \frac{e^2}{2C}$ ,  $V(\varphi_p, \varphi_m) = 2 + \alpha - 2 \cos \varphi_p \cos \varphi_m - \alpha \cos(2\pi f + \varphi_m)$  y  $\alpha$  factor geométrico entre las áreas transversales de la tercera junta respecto de las otras dos.

El qubit de flujo posee varios niveles discretos con energías  $E_i$  y autoestados  $|\Psi_i\rangle$ , dependientes de  $f$ ,  $\alpha$  y  $\eta = \sqrt{\frac{8E_C}{E_J}}$ . En este capítulo nos hemos quedado con los 4 niveles de más baja energía,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

El esquema de niveles del sistema corresponde al presentado en la figura 5.1, en

la misma se representa esquemáticamente los 4 niveles con energías  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$ , los cuales presentan 3 “avoided crossings”:  $\Delta_{01}$  para  $E_0 \leftrightarrow E_1$ ,  $\Delta_{12}$  para  $E_1 \leftrightarrow E_2$  y  $\Delta_{23}$  para  $E_2 \leftrightarrow E_3$ . En la figura también se presenta el barrido de los estados del qubit mediante el campo oscilatorio, con la posibilidad de alcanzar los  $\Delta_{ij}$  y realizar sucesivos cruces debido a la periodicidad del campo. De esta manera se espera observar interferencia LZS debido a las sucesivas transiciones LZ entre los estados  $E_i$ .



**Figura 5.1:** Se presenta un esquema de los 4 niveles de más baja energía. Se observa una serie de “avoided crossings” en función de  $\epsilon_0$ . A medida que se aumenta la amplitud del campo externo  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos(\omega t)$ , los “avoided crossings” son alcanzados, y debido a la periodicidad del campo son recorridos consecutivamente.

Como se explicó anteriormente el qubit real está afectado por el ambiente, el cual introduce ruido, disipación y por lo tanto decoherencia. La ecuación que determina la dinámica del sistema es la ecuación de Floquet-Markov 3.24, en este caso para 4 niveles. Debido a la complejidad numérica, para resolverlo se empleó el método del “propagador” [12]. En este método en vez de diagonalizar el operador de la ecuación  $\mathcal{H}$  2.8 para la obtención de los estados de Floquet, estos son obtenidos como autoestados del propagador  $U(t_0 + \tau, t_0)$ , ver apéndice B.

Por otra parte, vamos a suponer un acoplamiento lineal y débil, cuyo baño térmico es representado como un sistema de osciladores independientes con una densidad espectral  $J(\omega)$  óhmica, ver ecuación 3.30, y equilibrado a una temperatura  $T$ .

Los parámetros empleados en los resultados son:  $\gamma = 0,001$  acoplamiento débil con el reservorio,  $T = 0,0014 \frac{E_J}{K_B}$  temperatura de equilibrio del reservorio,  $\alpha = 0,8$  y  $\eta = 0,25$ , estos últimos son parámetros que corresponden al dispositivo experimental del qubit de flujo, y con  $J(\omega) = \gamma \omega e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}$ , al que le incorporamos una frecuencia de “cutoff”  $\omega_c = \frac{E_J}{\hbar}$ .



En este caso, se calcula la probabilidad de tener una corriente del loop positiva  $P_R$ , calculada como

$$P_R(t) = Tr(\hat{\Pi}_R \rho(t)), \quad (5.3)$$

siendo  $\hat{\Pi}_R$  el proyector sobre el subespacio de corrientes de loop positivas. Si se observa el esquema de niveles de la figura 5.1,  $P_R$  equivale a la probabilidad de encontrar al qubit en los estados de pendiente positiva.

## 5.2. Ruido de flujo y de carga

El qubit de flujo, entre otros, es un buen candidato para ser usado en computación cuántica. Para la realización de operaciones cuánticas es de interés conocer los tiempos de decoherencia, y por lo tanto resulta un punto importante conocer las posibles perturbaciones que el ambiente puede inducir en el qubit.

En general, un qubit tiene dos escalas de energía:  $E_J$ , energía Josephson de acoplamiento, y  $E_C$ , energía de carga. Como el qubit de flujo trabaja en el régimen de fase en el cual  $E_J \gg E_C$  se espera que la decoherencia esté dominada por las fluctuaciones en el flujo. Sin embargo, como se presentó en el capítulo 4, en un TLS es posible observar que las fluctuaciones en la carga generen disipación y afecten a la relajación del sistema. Además si se intenta disminuir las fluctuaciones en el flujo, el ruido de carga toma importancia en la dinámica.

En el trabajo de Nori et al. [16] se propone la construcción de un qubit de flujo en el cual se introduce una capacitancia  $C_s$  en paralelo con la JJ más pequeña. Con lo cual variando  $C_s$  es posible variar el ruido de carga. Para este caso el hamiltoniano del sistema  $\mathbb{H}$  nos queda como

$$\mathbb{H}' = E_p(n_p - \delta N_a)^2 + E_m[n_m - (\delta N_b - \delta N_c)]^2 + V(\varphi_p, \varphi_m), \quad (5.4)$$

$$V(\varphi_p, \varphi_m) = 2 + \alpha - 2 \cos \varphi_p \cos \varphi_m - \alpha \cos(2\pi(f + \delta f) + \varphi_m), \quad (5.5)$$

con  $n_k = -i \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ ,  $E_p = 2E_c$  energía de carga en la isla  $a$  y  $E_m = \frac{E_p}{1+2\beta}$  la energía efectiva de carga de las islas  $b$  y  $c$ , con  $\beta = \alpha + \frac{C_s}{C_J}$ ,  $\delta N_i$  ( $i = a, b, c$ ) ruido de carga en cada una de las islas superconductoras y  $\delta f$  ruido de flujo, ambas fluctuaciones provenientes del baño.

Se considera entonces los efectos del ambiente expandiendo el hamiltoniano  $\mathbb{H}'$  y quedándonos con el orden más bajo de los términos de interacción. Con lo que el hamiltoniano 5.4 nos queda:

$$\mathbb{H}' = \mathbb{H} + H_b + H_{sb}, \quad (5.6)$$

con  $\mathbb{H}$  el hamiltoniano de la ecuación 5.2,  $H_b$  el hamiltoniano del ambiente (baño térmico de osciladores independientes) y  $H_{sb}$  hamiltoniano del interacción tal que

$$H_{sb} = [-2E_p n_p \delta N_a - 2E_m n_m (\delta N_a - \delta N_b)] - I \phi_0 \delta f, \quad (5.7)$$

con  $I = -\alpha I_c \sin(2\pi f + 2\varphi_m)$ ,  $I_c = \frac{2\pi E_J}{\phi_0}$ . De esta manera se define

$$H_{sb} = H_{sb,t} + H_{sb,l}, \quad (5.8)$$

con  $H_{sb,t} = -2E_p n_p \delta N_a - 2E_m n_m (\delta N_a - \delta N_b)$  hamiltoniano de interacción para las fluctuaciones de carga y  $H_{sb,l} = -I \phi_0 \delta f$  para las fluctuaciones de flujo.

Típicamente el término  $E_p n_p$  es mucho menor que  $E_m n_m$  (ya que  $\langle n_p \rangle \ll \langle n_m \rangle$ ) quedando

$$\begin{aligned} H_{sb,t} &= -2E_m n_m \delta \hat{N}, \\ H_{sb,l} &= -\alpha I_c \phi_0 \sin(2\pi f + 2\varphi_m) \delta \hat{f}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

con  $\delta \hat{N}$  el operador del ruido de carga y  $\delta \hat{f}$  del ruido de flujo.

De esta manera definimos el hamiltoniano de interacción  $H_{sb,t/l} = \mathcal{A}_{t/l} \otimes \mathcal{B}_{t/l}$  para el ruido de carga como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &= -2E_m n_m, \\ \mathcal{B}_t &= \delta \hat{N}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

y para el ruido de flujo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l &= -\alpha I_c \phi_0 \sin(2\pi f + 2\varphi_m), \\ \mathcal{B}_l &= \delta \hat{f}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Cabe destacar que si se calculan los elementos de matriz de los operadores del sistema  $\langle i | \mathcal{A} | j \rangle$  en los dos niveles más bajos de energía (TLS) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &\propto \sigma_y, \text{ acoplamiento transversal} \\ \mathcal{A}_l &\propto \sigma_z, \text{ acoplamiento longitudinal,} \end{aligned} \quad (5.12)$$

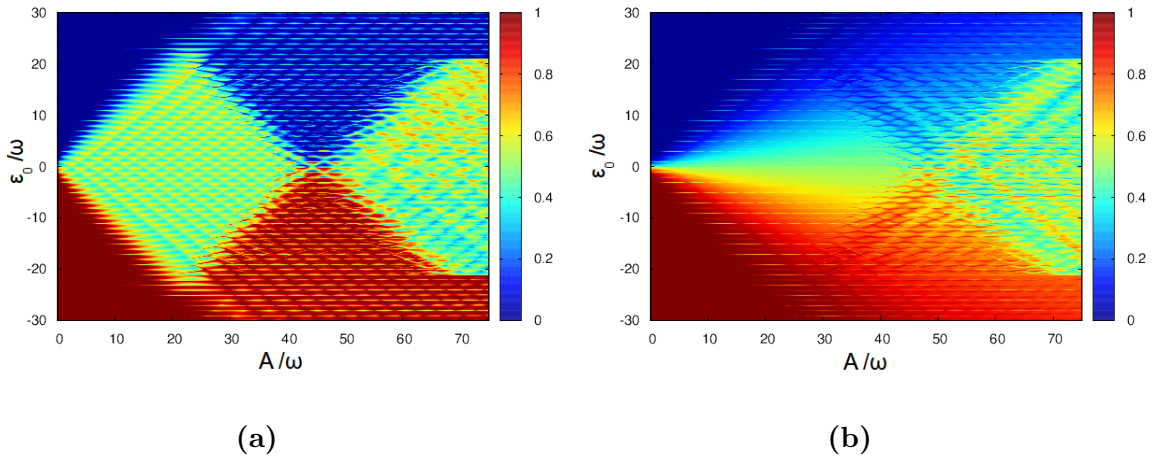
en la base definida por  $|R\rangle$  y  $|L\rangle$ .

### 5.2.1. Probabilidad estacionaria

Vamos a trabajar con un qubit de flujo aislado y abierto, considerando por separado el efecto de los acoplamientos presentados en la ecuación 5.9: fluctuaciones de carga

$H_{sb,t}$  y de flujo  $H_{sb,l}$ .

Se calculó la probabilidad de tener una corriente de loop positiva en el régimen estacionario  $\overline{P}_R^\infty$ , es decir se hizo uso de la ecuación 5.3 para  $t \rightarrow \infty$ . En las figuras 5.2a y 5.2b se presentan los resultados de  $\overline{P}_R^\infty$  versus  $(\frac{A}{\omega}, \frac{\epsilon_0}{\omega})$  para  $H_{sb,l}$  y  $H_{sb,t}$ , respectivamente. En ambos resultados se observan una estructura de diamantes, a partir del cual el espectro de niveles de energía puede ser reconstruido, figura 5.1.



**Figura 5.2:** Sistema de 4 niveles, régimen estacionario,  $\overline{P}_R$  versus  $\frac{A}{\omega}$  y  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ ,  $T = 0,0014 \frac{E_J}{K_B}$  y  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,1$ . (a) acoplamiento con ruido de flujo, (b) acoplamiento con ruido de carga. La escala de colores representa la población neta del qubit en el estado  $|R\rangle$ .

Podemos entonces distinguir dos tipos de comportamientos. Primero, para las fluctuaciones de flujo en la figura 5.2a y teniendo en cuenta el esquema de niveles de la figura 5.1, podemos distinguir distintas regiones en el patrón de diamantes:

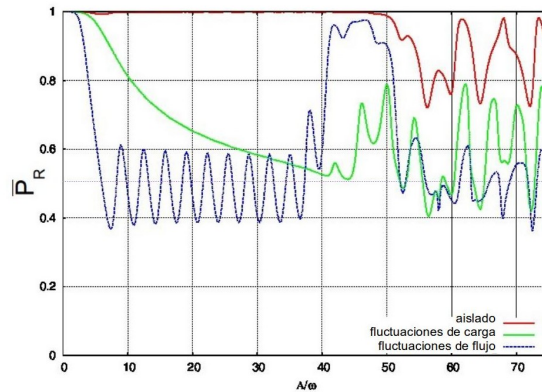
- $\frac{A}{\omega} < 20$ : el sistema se comporta de manera similar al TLS, figura 4.2a, ya que para amplitudes relativamente pequeñas sólo se alcanza el primer “avoided crossing”  $E_0 \leftrightarrow E_1$ , observándose oscilaciones LZS,
- $20 < \frac{A}{\omega} < 45$ : en este caso el 2<sup>do</sup> y 3<sup>er</sup> nivel se encuentran involucrados, se alcanza el segundo “avoided crossing”  $E_1 \leftrightarrow E_2$  y el nivel  $E_0$  es poblado debido a la rápida transición entre los estados  $E_2 \rightarrow E_0$ , con ello aumenta la población en el fundamental, probabilidad cercana a 1 (“cooling effect” [5]).
- $45 < \frac{A}{\omega} < 60$ : el “avoided crossing” entre los niveles  $E_1$  y  $E_2$  es alcanzado, con lo cual se observan nuevas oscilaciones LZS. Además los estados  $E_0$  y  $E_3$  están involucrados en la dinámica (el “avoided crossing” entre  $E_2 \leftrightarrow E_3$  y  $E_0 \leftrightarrow E_1$  son recorridos por el driving) con lo que una dependencia de la probabilidad  $\overline{P}_R^\infty$  con  $\frac{A}{\omega}$  es más compleja, observándose inversión de población.

- $60 < \frac{A}{\omega}$ : en este caso las amplitudes de trabajo son muy grandes con lo que estamos fuera de la aproximación de 4 niveles.

Para las fluctuaciones de carga podemos realizar un razonamiento análogo al caso anterior, para  $\frac{A}{\omega} < 20$  el sistema se comporta como un TLS, ver figura 4.5a, y para  $60 > \frac{A}{\omega}$  estamos fuera de los límites de la aproximación. Para los límites:

- $20 < \frac{A}{\omega} < 45$ : a diferencia del acoplamiento  $H_{sb,l}$ , no se observa un aumento considerable en la población del estado fundamental  $E_0$ . También se continúa observando el comportamiento de los resultados TLS en las figuras 4.5a y 4.5b: el salto entre  $\bar{P}_{|0\rangle}^{\infty}(\epsilon_0 > 0) \approx 1$  a  $\bar{P}_{|0\rangle}^{\infty}(\epsilon_0 < 0) \approx 0$  se da de manera suave, con una dependencia con la amplitud  $\frac{A}{\omega}$  dada por la ecuación 4.5.
- $45 < \frac{A}{\omega} < 60$ : en este caso nuevamente observamos oscilaciones LZS, ya que tenemos involucrados el “avoided crossing“  $E_1 \leftrightarrow E_2$ . Además debido a  $E_2 \leftrightarrow E_3$  y  $E_0 \leftrightarrow E_1$  son recorridos por el driving se observa “inversión de población“. El comportamiento es similar al acoplamiento  $H_{sb,l}$

En la figura 5.3 se presentan los resultados para un acoplamiento  $H_{sb,l}$  (línea azul),  $H_{sb,l}$  (línea verde) y el sistema aislado (línea roja) para  $\frac{\epsilon_0}{\omega} \approx 1$  y para diferentes valores de  $\frac{A}{\omega}$ . En la figura es posible apreciar como el sistema experimenta los series de regímenes presentados anteriormente a medida que se aumenta la amplitud.

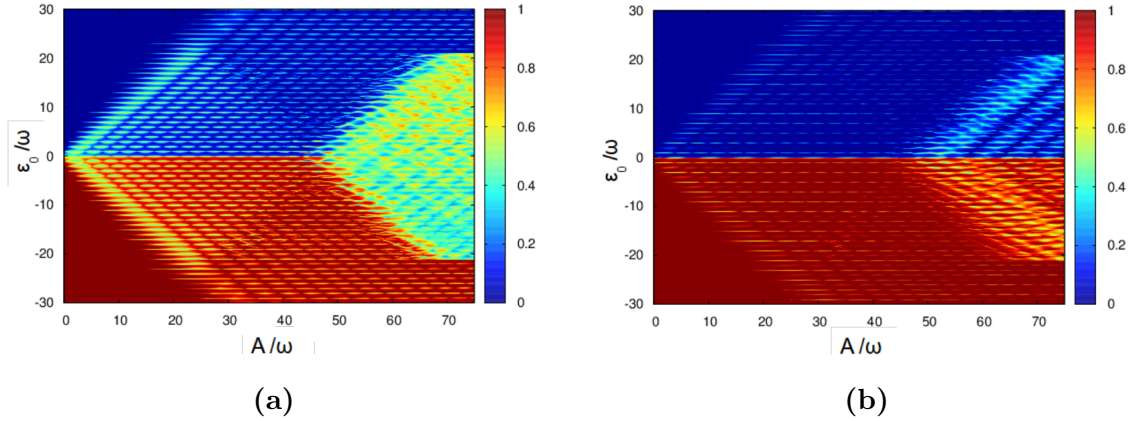


**Figura 5.3:** Sistema de 4 niveles, régimen estacionario. Se grafica  $\bar{P}_R$  versus  $\frac{A}{\omega}$ , cercano a la primera resonancia  $\frac{\epsilon_0}{\omega} \approx 1$ . Línea roja: aislado, línea verde: acoplamiento ruido de carga, línea azul: acoplamiento ruido de flujo. Se trabajó para valores de  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,1$  y  $T = 0,0014 \frac{E_J}{K_B}$ .

### 5.2.2. Probabilidad no estacionaria

Como ya se explicó anteriormente, en el experimento la medición se realiza para un tiempo  $t_{exp}$  finito menor a del correlación debido a los fenómenos de decoherencia, en el caso del sistema cuántico abierto.

En las figuras 5.4a y 5.4b se presentan los resultados numéricos de  $P_R$  para valores de  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$  y  $\frac{A}{\omega}$ , para un acoplamiento  $H_{sb,l}$  y  $H_{sb,t}$ , respectivamente. Estos cálculos fueron realizados para un tiempo  $t = 1000\tau \approx t_{exp}$ . De manera similar al caso anterior, podemos determinar una serie de regímenes.



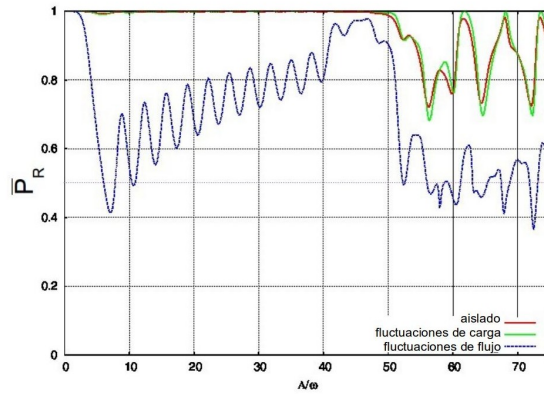
**Figura 5.4:** Sistema de 4 niveles, régimen no estacionario ( $t = 1000\tau \approx t_{exp}$ ),  $\bar{P}_R$  versus  $\frac{A}{\omega}$  y  $\frac{\epsilon_0}{\omega}$ ,  $T = 0,0014 \frac{E_J}{K_B}$  y  $\frac{A}{\omega} = 0,1$ . (a) Acoplamiento con ruido de flujo, (b) acoplamiento con ruido de carga. La escala de colores representa la población neta del qubit en el estado  $|R\rangle$ .

En el caso de las fluctuaciones de flujo, continuamos observando el patrón de interferencia de diamantes:

- $\frac{A}{\omega} < 20$ : el sistema se comporta como sistema TLS, sin embargo no se observa inversión de población, ya que sólo para tiempos del experimento mayores a los de relajación  $t_{exp} \gg t_r$  es posible observar este fenómeno, [15].
- $20 < \frac{A}{\omega} < 60$ : el sistema se comporta de manera similar al estado estacionario, es decir que al involucrarse los demás niveles el sistema relaja rápidamente.

Para el caso de las fluctuaciones de carga no se observa la estructura de diamantes, ya que el sistema se comporta como si fuese un sistema aislado:

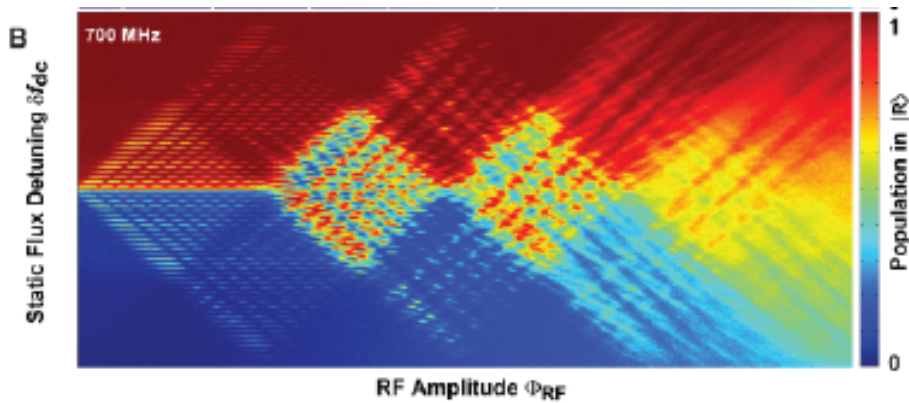
- $\frac{A}{\omega} < 45$ : en este caso el driving alcanza el primer y segundo "avoided crossing", sin embargo la interferencia LZS sólo tienen lugar entre el primer y segundo nivel, sin observarse inversión de población.
- $20 < \frac{A}{\omega} < 60$ : aquí el driving alcanza el tercer "avoided crossing", con lo que finalmente todos los niveles de energía se encuentran involucrados, de esta manera se comienza a observar un patrón más complejo originado por las consecutivas transiciones LZ entre dichos estados. Continúa no observándose inversión de población.



**Figura 5.5:** Sistema de 4 niveles, régimen no estacionario, a un tiempo  $t = 1000\tau \approx t_{exp}$ . Se grafica  $P_R$  versus  $\frac{A}{\phi_0}$ , cercano a la primera resonancia  $\frac{e\phi_0}{\omega} \approx 1$ . Línea roja: aislado, línea verde: acoplamiento ruido de carga, línea azul: acoplamiento ruido de flujo. Se trabajó para valores de  $\frac{\Delta}{\omega} = 0,1$  y  $T = 0,0014 \frac{E_J}{K_B}$ .

En la figura 5.5 se presenta la probabilidad  $P_R$  para un tiempo  $t = 1000\tau \approx t_{exp}$  para  $H_{sb,l}$  (línea azul),  $H_{sb,t}$  (línea verde) y, para comparar, sistema aislado (línea roja). En la misma se puede determinar los regímenes presentados anteriormente.

### 5.3. Comparación con resultados experimentales



**Figura 5.6:** Resultados experimentales del trabajo de Oliver et al.[17]. Se presenta una espectroscopía de diamantes obtenido para una campo externo de frecuencia  $\nu = 700\text{MHz}$ . La escala de colores representa la población neta del qubit en el estado  $|q, R(L)\rangle$ , que representan los estados diabáticos  $|q, R\rangle$  ( $q = 0, 1, 2, \dots$ ).

Finalmente vamos a comparar con resultados experimentales. En la figura 5.6 se presentan los resultados del trabajo de Oliver et al [17], en el cual se grafica la población del estado  $P_R$  (equivalente a  $1 - P_R$  en nuestro caso, depende de la convención de signos elegida para los sentidos de las corrientes) en función del flujo magnético en el loop  $\delta f_{dc}$  y del voltaje  $V$ . En dicha figura es posible observar el esquema de diamantes. Si comparamos con los resultados numéricos obtenidos, tenemos que la situación con

mayor correspondencia es para el acoplamiento  $H_{sb,l}$  (ruido de flujo) a tiempo  $t = 1000\tau$ , ver figura 5.4a.

Nuevamente estamos caracterizando el tipo de acoplamiento del qubit con el ambiente, para identificar las perturbaciones generadas sobre el estado del qubit. Además, si bien hemos identificado que para los resultados experimentales de la figura 5.6 las fluctuaciones dominantes son de flujo, esto es sólo porque se observa el mismo patrón de interferencia LZS para el primer diamante, ya que para el segundo diamante el sistema se comporta de manera similiar en cualquiera de los regímenes.

Por otra parte, resultaría interesante que se realicen mediciones para el experimento propuesto en el trabajo de Nori et al. [16], de tal manera de poder manipular el acoplamiento de flujo y de carga en un qubit de flujo, a fin de poder comprobar los resultados obtenidos.





# Capítulo 6

## Conclusiones

Desde que se presentó la idea de que un sistema cuántico puede ser usado en computación cuántica, se propusieron diversos sistemas físicos como candidatos para formar parte de este tipo de dispositivos: fotones, átomos fríos, nanosistemas superconductores, etc. Debido a la escalabilidad y a las ventajas de controlar sus estados cuánticos mediante voltajes de compuertas, de bias y flujos magnéticos, se propuso al qubit de flujo como un buen candidato para realizar operaciones de compuerta. Por ello se realizaron diversos experimentos a fin de proponer una alternativa de poder manipularlos y caracterizarlos [4],[17].

Nuestro trabajo se basó en la caracterización de la dinámica del qubit de flujo. Por ello se propuso trabajar como si fuese un sistema de 2 niveles y de 4 niveles forzado fuertemente con un campo oscilatorio, equivalente a aplicarle una compuerta lógica cuántica. Para poder representar de una manera más realista, se trabajó como si fuese un sistema abierto acoplado con un reservorio térmico.

Los resultados del sistema de 2 y 4 niveles para acoplamiento transversal y longitudinal, permitieron obtener una forma de caracterizar el sistema compuesto qubit-reservorio: es posible, según los patrones de interferencia, determinar el origen de las fluctuaciones (de flujo o de carga).

En primer lugar, para el caso del sistema de 2 niveles se obtuvo que las fluctuaciones de carga pueden jugar un rol importante en los procesos de relajación, figura 4.6, donde observamos que para el acoplamiento transversal el sistema tenía un tiempo de relajación de dos órdenes de magnitud menor que para el acoplamiento longitudinal. También se obtuvo, ver figura 4.10a, que a medida que se intenta disminuir las fluctuaciones de flujo, las fluctuaciones de carga comienzan a predominar en los procesos de relajación del sistema. Por otra parte, se observó en la figura 4.10b, que para el acoplamiento longitudinal, las resonancias multifotónicas alrededor de las condiciones de resonancias dejan de ser simétricas

Para el caso de 4 de niveles también se obtuvo una buena correspondencia con los re-

sultados experimentales de Oliver et al. [17], con el cual se determinó que predomina un acoplamiento de flujo del sistema-reservorio para amplitudes de campo relativamente pequeñas, mientras que para amplitudes de campo mayores el patrón de interferencia pasa a ser más complejo y, al parecer, independiente del acoplamiento, ver figura 5.4a. En este caso también se puede caracterizar el origen de las fluctuaciones en el qubit analizando su dinámica.

Finalmente, sería interesante que se realicen experimentos donde el tipo de acoplamiento con el baño sea controlable. Una posibilidad es empleando un circuito como el propuesto en el trabajo de Nori et al. [16] con una capacitancia variable de modo de variar el peso de las fluctuaciones carga.

# Apéndice A

## Reducción del qubit de flujo a un sistema de dos niveles

Como se presentó en el capítulo 1 el hamiltoniano del sistema nos queda como:

$$H = \frac{1}{2} \frac{P_p^2}{M_p} + \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{M_m} - E_J(2 + \alpha - 2\cos(\varphi_p)\cos(\varphi_m) - \alpha\cos(2\pi f + 2\varphi_m)), \quad (\text{A.1})$$

con  $M_p = 2C(\frac{\phi_0}{2\pi})^2$  y  $M_m = 2C(1 + \alpha)(\frac{\phi_0}{2\pi})^2$ . La versión cuántica de este hamiltoniano es obtenido simplemente reemplazando  $P_{p,m}$  con los operadores  $-\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi_{p,m}}$ , y con  $\varphi_{p,m}$  operadores.

El hamiltoniano 1.6 es el mismo que para una partícula en un potencial bidimensional anisotrópico, excepto que aquí, las fases  $\varphi_{p,m}$  tienen el rol de la posición de las coordenadas. Cada celda unidad es un doble pozo bidimensional, ver figura 1.3. Los parámetros del qubit son elegidos de tal manera que las inter-barreras de tunneling son despreciables frente a las intra-barreras de potencial, con lo que la solución de tight-binding puede ser utilizada como una buena aproximación.

Para ello usamos una combinación lineal de funciones de ondas localizadas para crear la función de onda de todo el sistema. La función de onda sobre el plano 2D puede ser escrita como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} c_{\alpha 1}[R_{00}] \\ c_{\alpha 2}[R_{00}] \\ \dots \\ c_{\alpha N}[R_{00}] \\ c_{\alpha 1}[R_{01}] \\ c_{\alpha 2}[R_{01}] \\ \dots \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , índice de las diferentes funciones de onda localizadas, y  $R_{n_1 n_2}$  son los sitios de red escritos en la base  $a_1, a_2$ , ver figura 1.3. Usando la ecuación de Bloch

$$c_{\alpha_1}[R_{n_1 n_2}] = e^{(ik \cdot R_{n_1 n_2})} c_{\alpha_1}[R_{00}] \quad (\text{A.3})$$

podemos resolver el problema como una red de un sitio, con

$$\Psi = \begin{pmatrix} c_{\alpha_1}[R_{00}] \\ c_{\alpha_2}[R_{00}] \\ \dots \\ c_{\alpha_N}[R_{00}] \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

La ecuación de Shrödinger nos queda

$$H_{ij}\Psi = E\Psi, \quad (\text{A.5})$$

con

$$H_{ij} = \sum_{n_1 n_2} \langle \Psi_i(R_{00}) | \hat{H} | \Psi_j(R_{n_1 n_2}) \rangle e^{ik \cdot R_{n_1 n_2}}, \quad (\text{A.6})$$

con  $\hat{H}$  el hamiltoniano cuántico del sistema e  $i, j$  son los distintos estados localizados. Hemos asumido que los estados localizados en la red tiene un overlap despreciable.

Vamos a considerar para las bases localizadas sólo el estado fundamental de cada lado del doble pozo:  $|0, L\rangle$  y  $|0, R\rangle$ , estados desacoplados diabáticos (“left”/“right”), considerando como cero de energía la configuración cuando los dos pozos están alineados ( $f = \frac{1}{2}$ ). Además vamos a considerar sólo la interacción a primeros vecinos. Con ello la ecuación A.5 nos queda:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_0 & -\Delta_{0,0} - \Delta_{out} e^{ik \cdot s_1} - \Delta_{out} e^{ik \cdot s_2} \\ -\Delta_{0,0} - \Delta_{out} e^{-ik \cdot s_1} - \Delta_{out} e^{-ik \cdot s_2} & \epsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{|0,L\rangle} \\ c_{|0,R\rangle} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} c_{|0,L\rangle} \\ c_{|0,R\rangle} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

con  $\Delta_{0,0} = a\eta e^{-b/\eta}$  relacionado a la velocidad de tunneling entre los dos lados del doble pozo, donde  $a$  y  $b$  son constantes del orden de la unidad,  $\Delta_{out}$  está relacionado a la velocidad de tunneling entre los sitios adyacentes de la red, con  $\Delta_0 \propto e^{\frac{E_j}{E_c}}$ ,  $E_c = \frac{e^2}{2C}$ ,  $\epsilon_0 \approx 2\frac{\partial U}{\partial f}(f - \frac{1}{2}) = \phi_0 I_3(f - \frac{1}{2})$  e  $I_3$  la corriente que circula por la tercera juntura (que es la corriente que circula por el qubit). En general los ‘avoided crossing’ son denotados  $\Delta_{q,q'}$ , con  $q$  y  $q'$  son los niveles de energía en el pozo derecho e izquierdo respectivamente. La cantidad  $(f - \frac{1}{2})$  es el flujo de ‘detuning’  $\delta f$ .

---

Como se explicó inicialmente se considera despreciable el tunneling  $\Delta_{out}$ ,  $\frac{E_j}{E_c}$  grande de tal manera de el tunneling entre pozos vecinos es completamente ignorado:

$$H = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta_{0,0} \\ \Delta_{0,0} & -\epsilon_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(\epsilon_0\sigma_z + \Delta_{0,0}\sigma_x), \quad (\text{A.8})$$

con  $\sigma_x$  y  $\sigma_z$  matrices de Pauli. [5].



# Apéndice B

## Método del propagador

En vez de diagonalizar el hamiltoniano de Floquet 2.8 para obtener los estados Floquet, podemos emplear el método del propagador [12] en el cual dichos estados son obtenidos como autoestados del propagador  $U(t_0 + \tau, t_0)$ .

La manera más simple de determinar  $U(t_0 + \tau, t_0)$  para el hamiltoniano  $H(t) = H_0 + V(t)$  es usar una expansión unitaria de la forma

$$U(t + \delta t, t) = e^{-iH_0 \frac{\delta t}{2}} e^{-iV(t + \frac{\delta t}{2})\delta t} e^{-iH_0 \frac{\delta t}{2}} + \mathcal{O}(\delta t^3) \quad (\text{B.1})$$

y calcularlo el operador evolución de un período  $\tau = N\delta t$  como

$$U(t + \delta t, t) = \Pi_{n=0}^{N-1} U((n+1)\delta t, n\delta t), \quad (\text{B.2})$$

con  $t_0 = 0$ .

Los estados de Floquet y cuasienergías  $\epsilon_i$  se obtienen de diagonalizar

$$U(\tau)|u_i(\tau)\rangle = e^{-i\epsilon_i \frac{\tau}{\hbar}}|u_i(\tau)\rangle, \quad (\text{B.3})$$

tal que  $|u_i(\tau)\rangle = |u_i(0)\rangle$ , por la periodicidad de los estados de Floquet.

Una vez diagonalizada la ecuación B.3 obtenemos  $|u_i(0)\rangle$ , con el cual podemos calcular la evolución del estado  $|u_i(t)\rangle$  como

$$|u_i(t)\rangle = e^{-i\epsilon_i \frac{t}{\hbar}} U(t)|u_i(0)\rangle. \quad (\text{B.4})$$

Para el cálculo de las probabilidades de transición, ecuación 3.43, nos interesa las componentes de Fourier  $|u_i(K)\rangle$ . Para ello usamos la transformada rápida de Fourier inversa sobre  $|u_i(t)\rangle$ , tal que

$$|u_i(t)\rangle = \sum_K |u_i(K)\rangle e^{iK\omega t}. \quad (\text{B.5})$$





# Bibliografía

- [1] Simulating physics with computers“, R. P. Feynmann, *Int. J. Theor. Phys.* 21, 467 (1982).
- [2] Exploring the Quantum/Classical Frontier, Friedman J.R and Han S, pp 59-95, Nova Science Publishers Inc. (2003), ISBN 1-59033-224-5.
- [3] Landau-Zener-Stückelber interferometry, Shechenko S.N., Ashhab S. and Nori F., *Physics Reports* 492, (2010).
- [4] Mach-Zehnder interferometry in strongly driven superconducting, Oliver W.D. et al., *Science* 310 1635, (2010).
- [5] Large amplitude driving of a persistent current qubit, David Marc Berns, submitted to the Department of Physics in partial fulfillment of requirements for the degree of Doctor of Philosophy at the Massachusetts Institute of Technology, June 2005.
- [6] Localization in a driven Two-Level dynamics. F. Grobmann & P. Hänggi, *Eur. Phys. Lett.* 18 (7), pp. 571-576 (1992).
- [7] Floquet formulation for the investigation of multiphoton quantum interference in a superconducting qubit driven by a strong ac field, Sang-Kil S., Siyuan H. and Shih-I-Chu, *Physical Review A* 79, 032301, (2009).
- [8] Adiabatic-impulse approximation for avoided level crossings: From phase-transition dynamics to Landau-Zener evolutions and back again, Bogdan Damski and Wojciech H. Zurek, *Phys. Rev. A* 73, 063405 (2006)
- [9] Amplitude spectroscopy of a solid-state artificial atom, D.M. Berns, M. Rudner, S.O. Valenzuela, K.K. Berggren, W.D. Oliver, L.S. Levitov & T.P. Orlando, *Nature* 07262, Vol 455 (2008).
- [10] Supplementary information for Amplitude spectroscopy of a solid-state artificial atom, D.M. Berns, M. Rudner, S.O. Valenzuela, K.K. Berggren, W.D. Oliver, L.S. Levitov & T.P. Orlando, *Nature* 07262, Vol 455 (2008).

- [11] Solution of the Schrödinger equation with a hamiltonian periodic in time author, Shirley J.H, Physical Review 138, B 979- B 987, 1965.
- [12] Statistical mechanics of time-periodic quantum systems, Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doctor rerum naturalium, Waltraut Wustmann, Institute für Mathematik and Naturwissenschaften Technische Universität Dresden, 2010.
- [13] Exploring Level Statistics from Quantum Chaos to Localization with the Autocorrelation Function of Spectral Determinants, S. Kolher et.al. Phys. Rev. B 58, 7219 (1998).
- [14] Atom-Photon Interactions. Basic Process and Applications, Cohen Tannoudji C, Dupont-Roc J. and Grynberg G, 2004, WILEY-YCH Verlag GmbH & Co, pag. 265.
- [15] Tailoring population inversion in Landau-Zener-Stückelberg interferometry of flux qubits, A.Ferrón, D. Domínguez and M.J. Sánchez, Phys. Rev. Lett. 109, 237005 (2012).
- [16] Low decoherence flux qubit. J.Q. You, Xuedong Hu, S. Ashhab & F. Nori, Phys. Rev. B 75 140515(R) (2007).
- [17] Large amplitude driving of a superconducting artificial atom: interferometry, cooling and amplitude spectroscopy. W.D. Oliver & S.O. Valenzuela, arXiv:0906.0185v1 [cond-mat.supr-con] 31 May 2009.

# Agradecimientos

A mis profesores y a mi director Daniel, por fomentarme el estudio de la física y cuyas enseñanzas hicieron posible que finalice la maestría.

A mi familia que me apoyó en mis decisiones. En especial a mi mamá que siempre confió en mi, quién hizo posible que inicie mis estudios y a la cual pude ver luchar una y otra vez, y aún así, nunca bajar los brazos. A mi abuela, por las infinitas risas, por aquellas tardes de mates y arroz con leche, y por las charlas por teléfono, una linda manera de acompañarme, de cuidarme y de ponernos al día. A mi papá, a mis hermanos y primos por estar siempre conmigo aún a la distancia.

A todos mis amigos: por las interminables noches de estudios, los cafés y los amaneceres compartidos en el aula, por las bromas y las risas en la oficina, por las idas a la montaña, los viajes y los vuelos en parapente, por las fiestas en el electrón y las salidas a comer.

A todos aquellos que me ayudaron y acompañaron.

