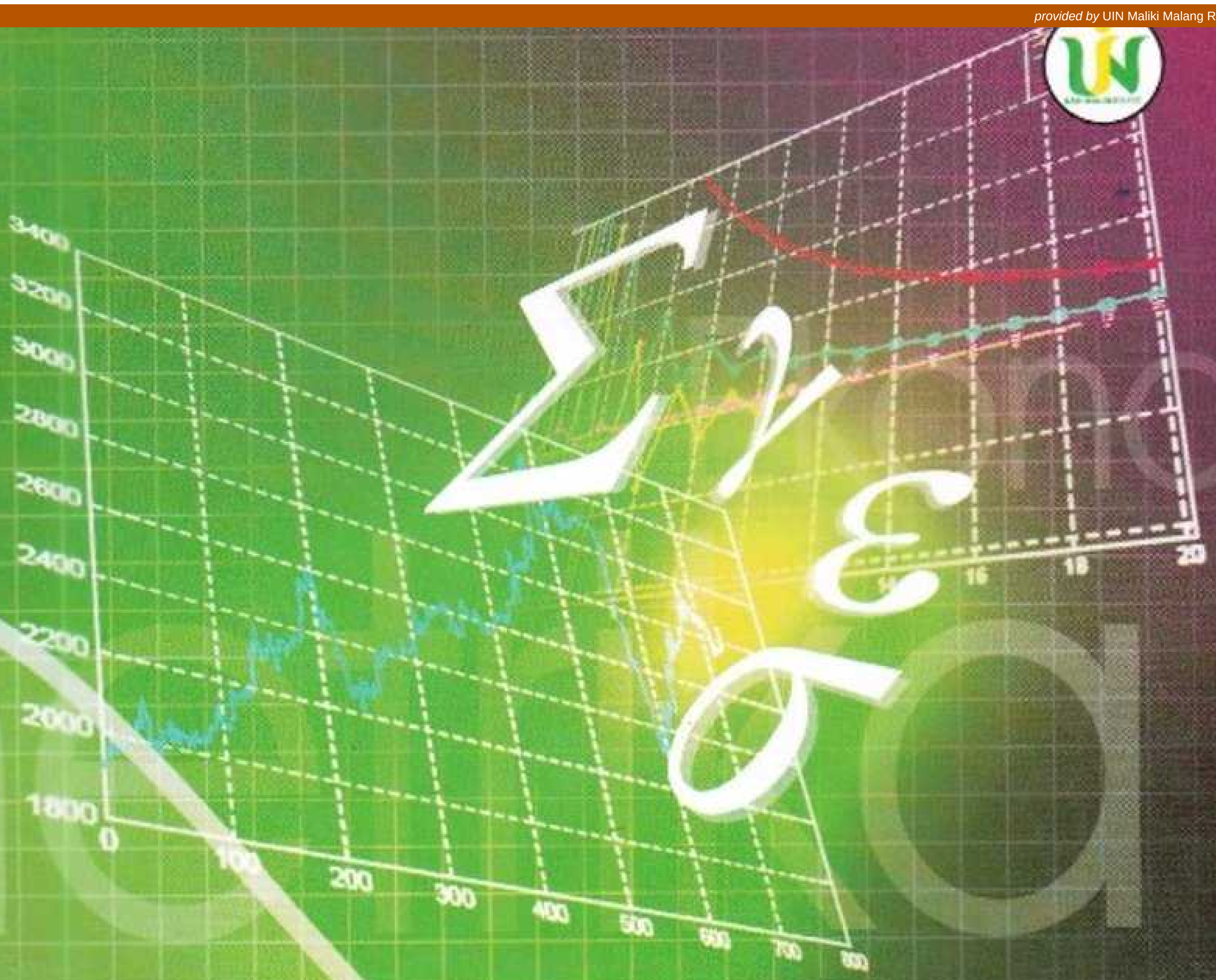

Ekonometrika

Teori & Praktik Eksperimen dengan MATLAB

Abdul Aziz, M.Si.

Daftar Isi

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah wa syukrulillah, segala puji bagi Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan penulisan Buku Ajar Matakuliah Ekonometrika yang dilengkapi dengan analisis matematis ini. Shalawat dan salam semoga selalu terlimpahkan kehadirat Nabi Muhammad SAW.

Buku Ajar Kuliah ini sengaja kami tulis guna memenuhi kebutuhan pokok mahasiswa Jurusan Matematika UIN Malang yang mengikuti matakuliah Ekonometrika. Matakuliah ini sangat penting bagi mahasiswa guna pengembangan pengetahuan dan keilmuan mereka khususnya dalam penerapan secara integrasi antara statistika, matematika dan ekonomi.

Buku ini akan sangat membantu mahasiswa dalam memahami dan mengaplikasikan konsep-konsep ekoometrika dalam setiap praktikumnya dengan bantuan bahasa pemrograman Matlab.

Akhirnya, semoga buku panduan ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa, pemerhati keilmuan statistika, terutama ekonometrika, dan penulis pada khususnya.

Malang, Januari 2007

Penulis

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 2 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mampu mengetahui, memahami dasar-dasar ekonometrika, pengertian, manfaat, dan hubunganya dengan matematika dan statsitika serta mampu mamahami konsep estimasi *moment, maximum Likelihood, least squares,* dan estimasi interval.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil melakukan estimasi secara *moment, maximum Likelihood, least squares*, dan estimasi interval.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian estimasi moment, *maximum likelihood*, *least squares*, dan estimasi interval.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter secara estimasi moment, *maximum likelihood*, dan *least squares.*
3. Mahasiswa dapat melakukan estimasi interval parameter.
4. Mahasiswa dapat membedakan ketiga metode estimasi parameter di atas.

D. Materi Pokok

1. Ekonometrika
1.1 Peranan Matematika dan Teori Statistik
1.2 Tujuan dan Manfaat Ekonometri

1.3 Struktur dan Model Ekonometri
1.4 Peranan Variabel Disturbansi pada Sebuah Model
1.2 Estimasi Parameter
1.1 Estimasi Titik
1.4 Estimasi Interval

E. Pengalaman Belajar

1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.

2. Menganalisa penurunan rumus.

3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.

4. Tanya jawab di kelas.

5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.

6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media
1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi
1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran
a. Kegiatan Awal

1. Pengajar menceritakan fenomena (realita) permasalahan statistik di masyarakat.

2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian statistik inferensi

3. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian estimasi.

4. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian parameter.

5. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian estimasi parameter.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar menjelaskan tentang pengertian metode-metode statistik inferensi, diantaranya metode moment, maximum likelihood, dan least square.
2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus metode estimasi moment, maximum likelihood, dan least square.
3. Pengajar tentang pengertian interval estimastion.
4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus interval estimation.
5. Pengajar memberikan contoh kasus penggunaan metode estimasi moment, maximum likelihood, dan least square, serta interval estimation.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan ketiga metode estimasi.
2. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk mencari kasus untuk melakukan estimasi parameter dengan ketiga metode estimasi dan sekaligus estimasi intervalnya.

Bab 1

PENDAHULUAN

1.1 Ekonometrika

Ekonometri adalah suatu ilmu yang memanfaatkan metematika dan teori statistik dalam mencari nilai parameter daripada hubungan ekonomi sebagaimana didalilkan oleh teori ekonomi. Karenanya, dalam praktek, ekonometri mencampurkan teori ekonomi dengan matematika dan teori statistik. Yang perlu diingat bahwa matematika dan teori statistik hanya merupakan alat bantu dalam melakukan analisis ekonometri yang pada hakekatnya lebih merupakan analisis ekonomi.

Ekonometri dapat dimanfaatkan untuk membuat estimasi sebuah fungsi beserta parameter-parameternya, yang selanjutnya dapat dimanfaatkan untuk membuat prediksi untuk periode yang akan datang. Disamping itu, ekonometri lebih banyak memberikan perhatiannya kepada ilmu ekonomi positif.

Aanalisis kualitatif dalam ilmu ekonomi hanya memberikan kepada kita hubungan-hubungan-hubungan yang terdapat antara variabel-variabel ekonomi. Analisis kualitatif juga mencoba mencaarikan ukuraan dari parameter-parameter yang ada dalam ekonomi. Tetapi bagaimana cara memperoleh besarnya nilai parameter-parameter tersebut?

Jawaban dari pertanyaan di atas diberikan oleh ekonometrika melalui beberapa langkah. Langkah pertama adalah menspesifikasikan model ekonomi, dalam arti menerjemahkan hubungan ekonomi yang ada berdasarkan konsep-konsep dan ketentuan-ketentuaan yang terdapat dalam teori ekonomi kedalam fungsi matematis. Kemudian model ekonomi tersebut diubah menjadi model ekonometrika. Setelah itu model ekonometrika tersebut ditaksir berdasarkan data ekonomi dengan memanfaatkan teori serta metode statistik yang relevan. Selanjutnya penaksir parameter-parameter yang diperoleh diuji perbedaannya dari nol secara statistik dan kebenarannya apakah sesuai atau tidak dengan konsep-konsep dan ketentuan-ketentuan yang ada dalam teori ekonomi. Dengan demikian ekonometri adalah suatu ilmu dan seni yang memanfaatkan matematika dan teori statistic dalam mencari nilai parameter dari hubungan ekonomi sebagaimana didalilkan oleh teori ekonomi karenanya, dalam praktek, ekonometrika mencampurkan teori ekonomi dangan matematika dan teori statistik.

1.1.1 Peranan Matematika dan Teori Statistik

Matematika dan teori statistic hanya merupakan alat bantu dalam melakukan analisis ekonometrika yang pada hakekatnya analisis ekonomi. Karenanya, bimbingan intuisi dan pemahaman yang jelas dan tepat tentang fakta ekonomi sangat diperlukan dalam memanfaatkan hasil analissis ekonometrika. Pengetahuan yang baik tentang matematika dan teori statistik secara absolut sangat diperlukan dalam memahami ekonometrika dan melakukan analisis yang berbau ekonometrika.

Ilmu matematika ekonomi hanya memperhatikan hubungan-hubungan yang tepat diantara variabel-variabel ekonomi, sedangkan ekonometrika juga memperhatikan faktor gangguan atau variabel disturbansi yang berada diluar kontrol si peneliti.

Secara matematis, suatu hubungan ekonomi dapat dituliskan dalam bentuk eksplisit atau dalam bentuk implisit. Secara eksplisit, hubungan antara variabel y dengan x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = f(X) \tag{1.1}$$

sedangkan secara implisit hubungan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(y, x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = 0 \tag{1.2}$$

Tetapi karena ekonomi adalah ilmu sosial dan variabel lainnya selain dari xi juga ikut berubah, maka dalam ekonometrika hubungan ekonomi diatas dituliskan dalam bentuk:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, e) = f(X) \tag{1.3}$$

dan

$$F(y, x_1, x_2, x_3, ..., x_k, e) = 0 \tag{1.4}$$

dimana e adalah variable (kesalahan) atau (pengganggu) yang merupakan komponen stokastik.

Variabel y dalam hubungan fungsional diatas disebut variabel tergantung atau variabel atau variabel yang diterangkan atau regresan atau prediktan, sedangkan variabel x disebut variabel bebas atau variabel , atau variabel penerang (variabel yang menerangkan), atau atau .

1.1.2 Tujuan dan Manfaat Ekonometri

Salah satu tujuan dari ekonometrika adalah untuk memberikan kontribusi dalam membuat prediksi atau ramalan-ramalan yang sangat bermanfaat bagi semua pihak. Tujuan yang kedua adalah untuk dapat memberikan sumbangan kepada pembuat kebijaksanaan atau mengambil keputusan pada berbagai tingkaat untuk dapat membuat kebijaksanaan/ pengambilan keputusan yang lebih tepat serta mengevaluasi kebijaksanaan yang telah ada. Yang ketiga, untuk dapat memberikan sumbangan kepada analisis struktur ekonometrika dan analissis lintas sektoral. Dengan bantuan ekonometrikal semuanya dapat dilakukan tanpa mengalami kesusahan.

Berdasarkan tujuan dan manfaat ekonometrika tersebut dapat disimpulkan bahwa ekonometrika lebih banyak memberikan perhatiannya kepada ilmu ekonomi positif, karena tidak diperlakukannya asumsi ceteris paribus sebagai akibat berperannya variabel disturbansi dalam model ekonometrika.

1.1.3 Struktur dan Model Ekonometri

Dasar dari struktur dan stabilitas adalah pola prilaku manusia yang rasional dan konsisten. Walaupun prilaku manusia diharapkan dapat stabil, struktur dapat berubah sepanjang waktu.

Model ekonomi matematis yang tidak mengindahkan kehadiran variabel disturbansi bersifat deterministis, sedangkan model ekonometrika yang memasukkan variabel disturbansi kedalamnya bersifat stokastis. Dalam menyusun model/ struktur biasanya tersedia 4 bentuk hubungan yang dapat dimanfaatkan yaitu:

1. Hubungan berbentuk definisi atau identitas yang tidak memerlukan pembuktian lebih lanjut atas kehadirannya, misalnya $R = PQ$ atau pendapatan penjualan (R) sama dengan jumlah barang yang dijual (Q) dikal;ikan dengan harga penjualan perunit (P).

2. Hubungan yang berkaitan dengan teknologi seperti $Q = f(K, L)$ atau keluaran yang dihasilkaan (Q) sebagai fungsi dari Kapital (K) dan tenaga kerja (L).

3. Hubungan kelembagaan seperti jumlah penerimaan pajak penjualan sama dengan volume penjualan dikalikan tarif pajak penjualan per unit yang ditetapkan oleh lembaga pemerintah.

4. Hubungan perilaku yang memperlihatkan respon sebuah variabel terhadap perubahan variabel ekonomi lainnya, misalnya $C = f(Y)$ atau pengeluaran konsumsi sebagai fungsi dari pendapatan disposebel.

1.1.4 Peranan Variabel Disturbansi pada sebuah Model

Bentuk eksplisit sebuah fungsi biasanya digunakan dalam memperhatikan hubungan sebab akibat antara variabel tergantung dan variabel-variabel bebas. Hubungan tersebut yang berbentuk linier biasanya ditulis dalam bentuk:

$$y = \sum \beta_i x_i + \varepsilon \tag{1.5}$$

pada persamaan (1.5) ϵ menunjukkan penyimpangan karena diperkirakannya fungsi yang implisit sebagai fungsi linier. Jika hubungan tersebut benar-banar linier maka ε akan sama dengan nol. Tetapi dalam kehidupan nyata, persamaan (1.5) tidak sepenuhnya berlaku sebagai akibat bekerjanya variabel pengganggu. Walaupun semua variabel bebas dapat dikontrol namun masih terdapat variabel yang tidak diperhitungkan pada variabel bebas. Variasi yang disebabkan oleh variabel pengganggu itu tidak dapat dijelaskan secara sistematis.

1.2 Estimasi Parameter

Sebuah permasalahan statistik dimulai dengan sebuah sampel data, yaitu niiai-nilai hasil pengamatan dengan satu atau beberapa variabel random (acak) yang menyatakan hasil eksperimen secara berulag-ulang. Distribusi probabilitas (peluang) dari variabel random tersebut belum diketahui, sedangkan kita ingin menggunakan data itu untuk mempelajari karakteristik dari distribusi yangbelum diketahui tersebut. Jika hasil eksperimen dapat dijelaskan dalam sebuah angka dan eksperimen itu dilakukan beralang-ulang sebanyak n kali, maka sampel tersebut memuat n variabel random . Fungsi kepadatan peluang gabungan (*joint p.d.f)* dari sampel y berbentuk $f(y|\beta)$ yang bergantung pada satu atau lebih parameter berupa nilai-nilai yang mungkin, dengan Ω sebagai ruang parameter. Peneliti selalu berasumsi untuk mengetahui bentuk matematis dari $f(y|\beta)$ dan menentukan himpunan ruang parameter Ω yang mungkin untuk nilai-nilai β.

Sebagai contoh, kita asumsikan bahwa pengeluaran orang-orang pada suatu populasi dengan pendapatan setiap tahunnya Rp. 20.000.000,- adalah mengikuti distribusi normal, $N(\beta, \sigma^2)$, dengan nilai-nilai parameter lokasi β dan parameter skala σ^2 yang belum diketahui. Estimasi (penaksiran) parmeter menggunakan sampel data untuk menentukan inferensi tentang β dan σ^2. Inferensi-inferensi ini mungkin mengambil titik khusus (point estimates) atau menentukan range nilai-nilai parameter (interval estimates). Disamping itu, kita juga menggunakan informasi tentang sampel data, yaitu informasi nonsampel yang menjelaskan secara apriori tentang distribusinya, sebagai jastifikasi nilai parameter-parameter yang belum diketahui.

1.2.1 Estimasi Titik

Tujuan estimasi titik adalah menggunakan sampel data dan informasi nonsampel (apriori) yang telah kita punya tentang distribusi peluangnya, untuk memperoleh sebuah nilai yang dapat diterima sebagai estimasi terbaik dari parameter yang belum diketahui. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menghasilkan estimator, yaitu sebuah fungsi terhadap data sampel eksperimen,

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}(y_1, y_2, ..., y_n) \tag{1.6}$$

Sebagian besar dari metode-metode itu berdasarkan pada prinsip-prinsip yang beralasan dan pertimbangan secara intuitif. Misalkan pengeluaran orang-orang pada suatu populasi dengan pendapatan setiap tahunnya Rp. 20.000.000,- adalah mendekati distribusi normal, , dengan parameter rata-rata β yang belum diketahui tetapi variansi telah diketahui, katakanlah σ^2 = Rp. 25.000.000,-. Sehingga, y merupakan pengeluaran dari setiap pendapatan Rp. 20.000.000,- dari seseorang dalam populasi ini, maka

$$y \sim N(\beta, 25.000.000) \tag{1.7}$$

Misalkan adalah sampel random dari hasil pengamatan pada populasi ini. Sehingga kita tegaskan secara ekivalen bahwa

$$y_i = \beta + e_i,\ i = 1, 2, ..., n \tag{1.8}$$

dimana e_i variabel random berdistribusi

$$e_i \sim N(0, 25.000.000) \tag{1.9}$$

dan menyatakan perbedaan atau selisih antara y_i dengan nilai rata-ratanya. Pada kasus ini, e_i mewakili semua faktor-faktor yang mempengaruhi tingkat pengeluaran selain pendapatan. Persamaan 1.8 adalah model statistik linier yang menyatakan hipotesa yang kita pertahankan tentang proses pengambilan sampel yang berkesesuaian, atau dalam kata lain, bagaimana pengamatan sampel pengeluaran dapat diperoleh. Misalkan pengamatan sampel diasumsikan bahwa pengeluaran eksperimental ekivalen dengan nilai rata-rata ditambah dengan kesalahan random e_i yang telah diketahui distribusinya dengan baik.

Estimator untuk β secara umum merupakan rata-rata aritmatik, yang diberikan sebagai

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y} \tag{1.10}$$

Estimator ini adalah variabel random, karena fungsi terhadap variabel random y_i juga merupakan varaibel random.

Metode Momen

Momen ke-r dan sebuah variabel random y di sekitar titik asal dinyatakan sebagai

$$\mu_r' = E\left[y'\right] = \begin{cases} \sum_y y^r f(y), \text{ bila y diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^r f(y)dy, \text{ bila y kontinu} \end{cases} \tag{1.11}$$

Jika p.d.f dari y adalah $f(y|\beta)$ dimana $\beta' = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k\ )$adalah vektor parameter-parameter yang belum diketahui, maka secara umum μ_r' merupakan sebuah fungsi terhadap β, tulis sebagai $\mu_r' = \mu_r'\ (\beta)$. Ide metode momen adalah menggunakan sampel random dari data, $y_1, y_2, ..., y_n$, untuk menghitung momen-momen sampel

$$\widehat{\mu}_r' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ r},\ r = 1, 2, ..., k \tag{1.12}$$

dan kemudian menyamakan sampel dengan momen sebenarnya,

$\mu_r' = \mu_r'\ (\beta)$ dan menyelesaikan sistem yang dihasilkan dari k persamaan (jika mungkin) untuk parameter-parameter yang belum diketahui. Estimator yang dihasilkan, $\widehat{\beta}$, merupakan estimator dari metode momen.

Momen pertama dan kedua sebenarnya adalah

$$\mu_1' = E[y] = \beta \tag{1.13}$$

$$\mu_2' = E\left[y^2\right] = \left(\mu_1'\right)^2 + \sigma^2 \tag{1.14}$$

Sedangkan estimator metode momen pertama dan kedua pada suatu populasi berdistribusi normal, $N(\beta, \sigma^2)$, diberikan oleh

$$\hat{\mu}_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y} = \hat{\beta} \tag{1.15}$$

$$\hat{\mu}_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} = \hat{\sigma}^2 + \hat{\beta}^2 \tag{1.16}$$

sehingga

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \bar{y}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 \tag{1.17}$$

Metode Maximum Likelihood

Misalkan y variabel random berdistribusi *Bernoulli* dengan parameter β berukuran n . Metode maximum *likelihood* akan memilih nilai β yang diketahui sedemikian hingga memaksimumkan nilai probabilitas (*likelihood*) dari gambaran sampel secara acak yang telah diperoleh secara aktual. Karena

$$f(y \mid \beta) = \beta^y (1-\beta)^{1-y} \tag{1.18}$$

untuk y = 0 atau y = 1, kita dapat menghitung probabilitas sampel random dari joint p.d.f untuk y_1, y_2,..., yn , yaitu

$$f(y_1 = 1, \ldots, y_n = 0) = f(1, \ldots, 0) = \prod_{i=1}^{n} \beta^{y_i} (1-\beta)^{1-y_i} \tag{1.19}$$

Jadi, fungsi *likelihood*-nya adalah

$$l(\beta \mid y) = f(y \mid \beta) = \beta^{\sum_{i=1}^{n} y_i} (1-\beta)^{\sum_{i=1}^{n} 1-y_i} \tag{1.20}$$

sedangkan fungsi *maximum likelihood*-nya adalah

$$L(\beta \mid y) = \ln l(y \mid \beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln \beta + \sum_{i=1}^{n} (1 - y_i) \ln (1 - \beta) \tag{1.21}$$

dan, untuk memaksimukan fungsi diperlukan

$$\frac{dL}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} (1 - y_i) \frac{1}{1 - \beta} \tag{1.22}$$

$$\frac{d^2 L}{d\beta^2} = -\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\beta^2} - \sum_{i=1}^{n} (1 - y_i) \frac{1}{(1 - \beta)^2} \tag{1.23}$$

menyamakan turunan pertama dengan nol dan menyelesaikannya menghasilkan

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.24}$$

yang merupakan nilai rata-rata sampel. Sedangkan turunan kedua selalu bernilai negatif untuk $0 < \beta < 1$, sehingga merupakan nilai maksimum global untuk fungsi *log-likelihood.*

Misalkan y adalah sampel random berukuran n dari populasi berdistrubusi normal, $N(\beta, \sigma^2)$. Maka parameter-paremeter yang belum diketahui adalah β dan σ^2. Sedangkan fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$\begin{aligned} L(\beta, \sigma^2 \mid y) &= \ln \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2} \right] \right\} \\ &= \ln \left\{ (2\pi\sigma^2)^{-T/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2} \right] \right\} \\ &= -\frac{n}{2} \ln (2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Sehingga turunan pertama dan keduanya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta \right) \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta\right)^2 \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta\right)^2 \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta\right) \tag{1.30}$$

Menyamakan turunan pertama dengan nol dan menyelesaikan untuk β dan σ^2menghasilkan

$$\widehat{\beta}_{ml} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y} \tag{1.31}$$

$$\widehat{\sigma}^2_{ml} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \widehat{\beta}_{ml}\right)^2 \tag{1.32}$$

Solusi-solusi tunggal yang secara nyata memaksimumkan fungsi *log-likelihood* dapat diperiksa dengan kondisi turunan kedua untuk maksimum lokal. Yaitu, matriks turunan kedua harus ditentukan sebagai definit negatif jika devaluasi pada solusi-solusi $\widehat{\beta}_{ml}$ dan $\widehat{\sigma}^2_{ml}$. Hal ini dikarenakan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \, \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \beta} & \frac{\partial^2 L}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\widehat{\sigma}^2_{ml}} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\widehat{\sigma}^4_{ml}} \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

yang merupakan matriks definit negatif.

Metode Estimasi Kuadrat Terkecil

Dua metode estimasi sebelumnya menggunakan asumsi untuk bentuk distribusi populasi normal. Pada kenyataannya, hal ini adalah sulit untuk memastikan distribusi populasinya. Salah satu metode yang sangat berguna dan populer adalah metode estimasi kuadrat terkecil (*least squares estimation*). Metode ini dapat digunakan untuk mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel random. Salah satu cara untuk mendefinisikan nilai tengah dari suatu himpunan data adalah dengan mencari nilai μ'_r yang meminimumkan nilai fungsi

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^r - \mu_r' \right)^2 \tag{1.34}$$

yang merupakan fungsi galat kesalahan rata-rata aproksimasi dengan data sebenarnya. Estimasi $\widehat{\mu}'_r$ merupakan variabel random yang dikatakan sebagai *least square estimator* (LSE).

Bentuk lain dari fungsi S adalah

$$S' = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i^r - \mu_r' \right| \tag{1.35}$$

yang menghasilkan estimator sebagai *least absolute derivation* (LAD) atau *minimum absolute derivation* (MAD) *estimator*. Meminimumkan sebuah fungsi dilakukan dengan menyamakan turunan pertamanya dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} -2\left(y_i - \widehat{\beta} \right)^2 = 0 \tag{1.36}$$

sehingga diperoleh

$$\widehat{\beta}_{ls} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.37}$$

1.2.2 Estimasi Interval

Terkadang terdapat permasalahan dalam menentukan interval untuk estimasi parameter, yang dalam statistik dikatakan sebagai variansi estimator. Terkadang penentuan interval estimator sangat berguna untuk memberikan range toleransi terhadap nilai-nilai estimasi yang mungkin.

Misalkan y adalah sampel random berukuran n dari populasi berdistribusi normal dengan parameter variansi yang telah diketahui. Maka estimator maximum *likelihood* untuk β adalah

$$\widehat{\beta}_{ml} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{n} \right) \tag{1.38}$$

Kita dapat menggunakan distribusi sampel ini untuk membuat pernyataan probabilitas. Karena

$$z = \frac{\hat{\beta}_{ml} - \beta}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{1.39}$$

maka

$$P\left[-z_{(\alpha/2)} \leq z \leq z_{(\alpha/2)}\right] = 1 - \alpha \tag{1.40}$$

dimana $z_{(\alpha/2)}$ adalah $\alpha/2$ persen bagian atas dari distribusi . Substitusi untuk z menghasilkan *interval estimator*,

$$P\left[\hat{\beta}_{ml} - z_{(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \beta \leq \hat{\beta}_{ml} + z_{(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \tag{1.41}$$

1.3 Tugas Eksperimen

1. Buatlah sebuah data random 100 sampel dengan eksperimen Monte Carlo dengan model linier $y = \beta + e$, dimana $\beta = 5$ dan $e_i \tilde{} U(0, 2)$ berdistribusi uniform .

2. Tampilkan histogram distribusinya dalam 30 poligon.

3. Hitunglah nilai rata-rata dan variansinya.

4. Estimasi parameter β menggunakan rata-rata setiap sampel dengan

$$\hat{\beta} = \bar{y} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} y_i$$

   bandingkan dengan nilai rata-rata sebenarnya.

5. Estimasi parameter σ^2 menggunakan variansi setiap sampel dengan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \left(y_i - \hat{\beta} \right)^2$$

   bandingkan dengan nilai variansi sebenarnya.

6. Buatlah 100 sampel variabel random normal,

$$z = \frac{y - \bar{y}}{\sigma / \sqrt{n}}$$

   buatlah histogramnya, dan hitung nilai rata-rata dan variansinya.

7. Tentukan estimasi interval untuk mean parameter dengan tingkat kepercayaan 95%.

8. Dengan estimasi interval tersebut, tentukan apakah estimasi mean parameter di atas diterima.

9. Ulangi no 1 s/d 8 dengan $e_i \tilde{} N(0, 2)$.

10. Susunlah laporan ekperimen ini dan buatlah suatu kesimpulan.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 4 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mengetahui dan memahami konsep model-model statistik linier, mengestimasi lokasi dan prediksi parameter, serta pengujian hipotesa estimasi parameter.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil menggunakan model statistik linier, mengestimasi lokasi dan prediksi parameter, erta pengujian hipotesa estimasi parameter.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat mengetahui perbedaan model statistik linier 1,2, dan 3.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi lokasi parameters.
3. Mahasiswa dapat melakukan estimasi titik paremeter.
4. Mahasiswa dapat melakukan estimasi scalar parameters.
5. Mahasiswa dapat melakukan pengujian hipotesa estimasi parameter.

D. Materi Pokok

2. Model Statistik Linier
2.1. Model Statistik Linier
    2.1.1 Linieritas
    2.1.2 Estimasi Ordinary Least Square
    2.1.3 Gauss Markov
    2.1.4 Estimasi Restricted Least Square
    2.1.5 Sum of Square Total

- 2.1.6 Coeffisien of Determination
- 2.2. Model Statistik Linier Normal
  - 2.2.1 Estimasi Maximum Likelihood
- 2.3. Pengujian Hipotesa
  - 2.3.1 Uji Rasio Likelihood
  - 2.3.2 Pengujian Hipotesa Terbatas
  - 2.3.3 Uji Goodness of Fit

E. Pengalaman Belajar

1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.
2. Menganalisa penurunan rumus.
3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.
4. Tanya jawab di kelas.
5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.
6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media

1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi

1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran

a. Kegiatan Awal

1. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model-model fungsi.
2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model-model fungsi linier.
3. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model-model fungsi nonlinier.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar menjelaskan tentang pengertian model statistik linier 1,2, dan 3.
2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus location of parameter estimator.

3. Pengajar memberikan contoh kasus penggunaan model statistik linier 1,2 dan 3, serta melakukan estimasi lokasi parameter.

4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan The Gauss – Markov Result.

5. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Estimating the Scalar Parameter.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan ketiga model statistik linier.

2. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan estimasi lokasi parameter dengan ketiga model statistik linier di atas pada kasus terdahulu (pertemuan sebelumnya).

3. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan analisa hasil estimasi lokasi parameter dan prediksi dengan ketiga model statistik linier di atas pada kasus terdahulu (pertemuan sebelumnya).

Bab 2

MODEL STATISTIK LINIER

2.1 Model Statistik Linier

2.1.1 Linieritas

Istilah linier dapat ditafsirkan dengan dua cara yang berbeda, yaitu linieritas dalam variabel atau linieritas dalam parameter. Linieritas dalam variabel adalah harapan bersyarat dari Y merupakan fungsi linier dari X_i, contohnya

$$E\left(Y \mid X_i\right)=\beta_1+\beta_2 x. \tag{2.1}$$

Dalam penafsiran seperti ini, fungsi regresi seperti

$$E\left(Y \mid X_i\right)=\beta_1+\beta_2 X^2 \tag{2.2}$$

bukan fungsi linier karena variabel x berpangkat dua. Sedangkan linieritas dalam parameter adalah harapan bersyarat dari Y merupakan fungsi linier dari parameter β, contohnya

$$E\left(Y \mid X_i\right)=\beta_1+\beta_2^{\beta_3} x \tag{2.3}$$

tetapi fungsi tersebut mungkin linier atau tidak dalam variabel x.

Dari dua penafsiran linieritas tadi, linieritas dalam parameter sangat relevan dengan pengembangan teori regresi. Jadi, istilah regresi linier akan selalu berarti suatu regresi yang linier dalam parameter, yaitu parameter β tetapi regresi tadi mungkin linier atau tidak dalam variabel bebas (variabel yang menjelaskan), yaitu variabel X.

2.1.2 Ordinary Least Square Estimator (OLS)

Misalkan model statistik linier

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + e \tag{2.4}$$

dengan sejumlah n data observasi maka model linier ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

sehingga model ini dapat disederhanakan sebagai

$$y = X\beta + e \tag{2.6}$$

Variabel e sangat memegang peran dalam model ekonometrika, tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinannya. Disamping asumsi mengenai distribusi probabilitasnya, beberapa asumsi lainnya khususnya tentang sifat statistiknya perlu dibuat dalam menerapkan metode OLS.

Berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel e sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel e adalah sama dengan nol atau

$$E(e) = 0 \tag{2.7}$$

   Yang berarti nilai bersyarat e yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai x. dengan demikian, untuk nilai x tertentu mungkin saja nilai e sama dengan nol, mungkin positif atau negative, tetapi untuk banyak nilai x secara keseluruhan nilai rata-rata e diharapkan sama dengan nol.

2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negative antara ei dan ej . Dan, tidak terdapat heteroskedastisitas antar variabel e untuk setiap observasi, atau dikatakan bahwa setiap variabel e memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel e mempunyai varian yang positif dan konstan yang nilainya σ^2, yaitu

$$Var(e_i, e_j) = \begin{cases} \sigma^2, i = j \\ 0 \ \ , i \neq j \end{cases} \tag{2.8}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \mathrm{var}(e_1) & \mathrm{cov}(e_1,e_2) & \cdots & \mathrm{cov}(e_1,e_n) \\ \mathrm{cov}(e_2,e_1) & \mathrm{var}(e_2) & \cdots & \mathrm{cov}(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(e_n,e_1) & \mathrm{cov}(e_n,e_2) & \cdots & \mathrm{var}(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

sehingga asumsí kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$Cov\,(e) = E\left[(e - E\,(e))(e - E\,(e))'\right] = E\,(ee') = \sigma^2 I_n \tag{2.10}$$

3. Variabel x dan variabel e adalah saling tidak tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$\begin{aligned} Cov\,(x_i, e_i) &= E\left[(x_i - E\,(x_i))(e_i - E\,(e_i))\right] \\ &= E\left[(x_i - \overline{x})(e_i - 0))\right] \\ &= E\left[(x_i - \overline{x})\, e_i\right] \\ &= (x_i - \overline{x})\,E\,(e_i) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dari ketiga asumsi ini diperoleh:

$$\begin{aligned} E(y) &= X\beta \\ Cov(y) &= \sigma^2 I_n \end{aligned} \tag{2.12}$$

Misalkan sampel untuk y diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $e = y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini, diharapkan akan menghasilkan komponen sistematik yang lebih berperan dari pada komponen stokastiknya. Karena bila komponen stokastik yang lebih berperan artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang y. Dengan kata lain, X tidak mampu menjelaskan y.

Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = e'e = \left(y - X\beta\right)'\left(y - X\beta\right) \tag{2.13}$$

sekecil mungkin (minimal).

Persamaan (2.13) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Dan akibatnya, transpose skalar tidak merubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} S &= (y - X\beta)'(y - X\beta) \\ &= (y' - \beta' X')(y - X\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \tag{2.14}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β [**?**, Misalkan z dan w adalah vektor-vektor k x 1 dan y = z'w scalar. Maka dy/dz = w, dy/dz' = w', dy/dw = z, dan dy/dw' = z'.],

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= 0 - 2X'y + X'X\beta + (\beta'X'X)' \\ &= -2X'y + X'X\beta + X'X\beta \\ &= -2X'y + 2X'X\beta \end{aligned} \tag{2.15}$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$X'X\beta = X'y \tag{2.16}$$

yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan

$$\hat{\beta}_{ols} = (X'X)^{-1} X'y \tag{2.17}$$

yang dinamakan sebagai penaksir (*estimator*) parameter β secara kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*, OLS).

Sedangkan estimator kuadrat terkecil untuk variannya, σ^2 , adalah

$$\hat{\sigma}_{ols} = \frac{\hat{e}'\hat{e}}{n-k} = \frac{(y - X\hat{\beta}_{ols})'(y - X\hat{\beta}_{ols})}{n-k}$$

2.1.3 Gauss Markov

Misalkan A dan c adalah sebarang matriks-matriks k x n yang bukan nol dan tidak mengandung variabel y, maka definisikan $\widehat{\beta}$, sebarang penaksir linier untuk β, sebagai

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= Ay \\ &= \left((X'X)^{-1}X'+c\right)y \\ &= (X'X)^{-1}X'y+cy\end{aligned} \tag{2.18}$$

dimana

$$\begin{aligned}E\left(\widehat{\beta}\right) &= E\left(\left((X'X)^{-1}X'+c\right)y\right) \\ &= E\left(\left((X'X)^{-1}X'+c\right)(X\beta+e)\right) \\ &= E\left((X'X)^{-1}X'X\beta+(X'X)^{-1}X'e+cX\beta+ce\right) \\ &= E\left(\beta+(X'X)^{-1}X'e+cX\beta+ce\right) \\ &= \beta+cX\beta\end{aligned}$$

Sehingga agar $\widehat{\beta}$ adalah penaksir linier yang *unbiased* maka $cX = 0 \;\; (c \neq 0,\; X \neq 0)$, sehingga diperoleh

$$\widehat{\beta} = \beta+(X'X)^{-1}X'e+ce \tag{2.19}$$

dan

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\hat{\beta}\right) &= E\left[\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)'\right] \\
&= E\left[\left(\hat{\beta}-\beta\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right] \\
&= E\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'e+ce\right)\left(\left(X'X\right)^{-1}X'e+ce\right)'\right] \\
&= E\left[\left(\left(X'X\right)^{-1}X'e+ce\right)\left(e'X\left(X'X\right)^{-1}+e'c'\right)\right] \\
&= E\left[\left(X'X\right)^{-1}X'ee'X\left(X'X\right)^{-1}+\left(X'X\right)^{-1}X'ee'c'+\right. \\
&\qquad \left. cee'X\left(X'X\right)^{-1}+cee'c'\right] \\
&= \left(X'X\right)^{-1}X'\sigma^2 IX\left(X'X\right)^{-1}+\left(X'X\right)^{-1}X'\sigma^2 Ic'+ \\
&\quad c\sigma^2 IX\left(X'X\right)^{-1}+c\sigma^2 Ic' \\
&= \sigma^2\left[\left(X'X\right)^{-1}+\left(X'X\right)^{-1}X'c'+cX\left(X'X\right)^{-1}+cc'\right] \\
&= \sigma^2\left[\left(X'X\right)^{-1}+cc'\right] \\
&= \sigma^2\left(X'X\right)^{-1}+\sigma^2 cc' \\
&= Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)+\sigma^2 cc'
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Bila A matriks k x n dengan dan rk(A'A) < k maka A'A adalah *positive semi definite* dengan nilai eigen $\lambda \geq 0$. Namun jika rk(A'A) = k maka A'A adalah *positive definite* dengan nilai eigen $\lambda > 0$, sehingga

$$
\begin{aligned}
&Cov\left(\hat{\beta}\right)-Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)=\sigma^2 cc' \\
&a'\left[Cov\left(\hat{\beta}\right)-Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)\right]a=a'\sigma^2 cc'a \\
&a'Cov\left(\hat{\beta}\right)a-a'Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)a=\sigma^2 a'cc'a\geq 0 \\
&a'Cov\left(\hat{\beta}\right)a-a'Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)a\geq 0 \\
&Var\left(a'\hat{\beta}\right)-Var\left(a'\hat{\beta}_{ols}\right)\geq 0 \\
&Var\left(a'\hat{\beta}_{ols}\right)\leq Var\left(a'\hat{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Jadi, $\widehat{\beta}_{ols}$ yang juga penaksir linier untuk β, adalah lebih baik dari pada sebarang penaksir linier *unbiased* untuk lainnya karena memenuhi

$$Var\left(a'\widehat{\beta}_{ols}\right) \leq Var\left(a'\widehat{\beta}\right) \tag{2.22}$$

untuk setiap vektor a berukuran k x 1.

Pada persamaan (2.22) *cc'* adalah *positif semi definite* sehingga berlaku

$$a'cc'a \geq 0 \tag{2.23}$$

anda juga bisa membuktikan sendiri bahwa

$$a'Cov(\widehat{\beta})a = Var(a'\widehat{\beta}) \tag{2.24}$$

untuk sebaranag vektor a berukuran k x 1.

Sifat-sifat penaksir kuadrat terkecil dari β ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\beta}_{ols}\right) &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'y\right) \\ &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'\left(X\beta + e\right)\right) \\ &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'X\beta + \left(X'X\right)^{-1} X'Xe\right) \\ &= E\left(\beta + e\right) \\ &= E\left(\beta\right) + E\left(e\right) \\ &= \beta + 0 \\ &= \beta \end{aligned} \tag{2.25}$$

yang dinamakan sifat tak bias (*unbiased estimator*), dan karena

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{ols} &= \left(X'X\right)^{-1} X'y \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'\left(X\beta + e\right) \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'X\beta + \left(X'X\right)^{-1} X'e \\ &= \beta + \left(X'X\right)^{-1} X'e \end{aligned} \tag{2.26}$$

maka

$$
\begin{aligned}
Cov(\widehat{\beta}_{ols}) &= E\left(\widehat{\beta}_{ols} - E(\widehat{\beta}_{ols})\right)\left(\widehat{\beta}_{ols} - E(\widehat{\beta}_{ols})\right)' \\
&= E\left(\widehat{\beta}_{ols} - \beta\right)\left(\widehat{\beta}_{ols} - \beta\right)' \\
&= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'e\right)\left(\left(X'X\right)^{-1} X'e\right)' \\
&= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'e\right)\left(e'X\left(X'X\right)^{-1}\right) \\
&= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'ee'X\left(X'X\right)^{-1}\right) \\
&= \left(X'X\right)^{-1} X'E\left(ee'\right)X\left(X'X\right)^{-1} \\
&= \left(X'X\right)^{-1} X'\sigma^2 I_n X\left(X'X\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(X'X\right)^{-1} X'X\left(X'X\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(X'X\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Dari *Teorema Gauss Markov* yaitu penaksir kuadrat terkecil dalam kelas penaksir linier tak bias adalah minimum. Jadi $\widehat{\beta}_{ols}$ linier, tak bias dan mempunyai variansi minimum dalam kelas semua penaksir tak bias linier dari β, maka biasanya disebut sebagai penaksir tak bias linier terbaik (*Best Linear Unbiased Estimator*, BLUE).

Misalkan model statistik linier

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 + e \tag{2.28}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
S &= e'e \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \\
&= e_1e_1 + e_2e_2 + \ldots + e_ne_n \\
&= \sum_{t=1}^{n} e_t^{\ 2} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \beta_1 x_{1t} - \beta_2 x_{2t} \right)^2 \\
&= \left(y_t - \beta_1 x_{1t} - \beta_2 x_{2t} \right)' \left(y_t - \beta_1 x_{1t} - \beta_2 x_{2t} \right) \\
&= \left(y - X\beta \right)' \left(y - X\beta \right) \\
&= y'y
\end{aligned} \tag{2.29}$$

dimana

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{12} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \beta} &= \frac{\partial\left[(y - X\beta)'(y - X\beta)\right]}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left[(y' - \beta' X')(y - X\beta)\right]}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= -2X'y + 2X'X\beta \\
&= -2\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} y + 2\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\
&= -2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} x_{2t} y_t \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} x_{2t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{2t} x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2t}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\
&= -2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\
&= -2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 \beta_1 + \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \beta_2 \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \beta_1 + n\beta_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Untuk meminimalkan nilai β_1 dan β_2 haruslah $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$, yang akan dipenuhi jika

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 \widehat{\beta}_1 + \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \widehat{\beta}_2 \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \widehat{\beta}_1 + n\widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1' y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} x_{1t}\right)^2} \begin{bmatrix} n & -\sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ -\sum_{t=1}^{n} x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.36}$$

atau

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t - \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \sum_{t=1}^{n} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} x_{1t}\right)^2} \tag{2.37}$$

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 \sum_{t=1}^{n} y_t - \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} x_{1t}\right)^2} \tag{2.38}$$

2.1.4 Restricted Least Square Estimator (RLS)

Misalkan suatu fungsi produksi *Cobb-Dauglass* (CD)

$$Q = C^{\beta} L^{1-\beta} \tag{2.39}$$

fungsi non linier, dimana:

Q = output jumlah, *quantity of product*
C = input model, *capital of product*
L = input tenaga kerja, *labour of product*

Misalkan y = ln Q dan $X\beta = \beta_1 \ln C + \beta_2 \ln L$, maka fungsi CD ini dapat dijadikan dalam bentuk linier standart, dengan syarat yang harus di penuhi (*restriction*) dalam model linier ini adalah $\beta_1 + \beta_2 = 1$, atau ditulis sebagai

$$R\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 1 = p \tag{2.40}$$

Sehingga bentuk matriksnya dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} \ln Q_1 \\ \ln Q_2 \\ \vdots \\ \ln Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln C_1 & \ln L_1 \\ \ln C_2 & \ln L_2 \\ \vdots & \vdots \\ \ln C_n & \ln L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Pandang *Lagrangean function* berikut

$$L = (y - X\beta)'(y - X\beta) + \lambda^{*}{}'(p - R\beta) \tag{2.42}$$

misalkan $\lambda^* = 2\lambda$ maka

$$\begin{aligned} L &= (y - X\beta)'(y - X\beta) + 2\lambda'(p - R\beta) \\ &= (y' - \beta' X')(y - X\beta) + 2\lambda'(p - R\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda' p - 2\lambda' R\beta \\ &= y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda' p - (2\lambda' R\beta)' \\ &= y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda' p - 2\beta' R'\lambda \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda' p - 2\beta' R'\lambda \end{aligned} \tag{2.43}$$

yang merupakan fungsi skalar, dan turunan parsialnya terhadap β adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \beta} &= -2X'y + (\beta' X' X)' + X' X\beta - 2R'\lambda \\ &= -2X'y + X'X\beta + X'X\beta - 2R'\lambda \\ &= -2X'y + 2X'X\beta - 2R'\lambda\end{aligned} \tag{2.44}$$

dengan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$\begin{aligned}X'X\widehat{\beta}_{rls} &= X'y + R'\lambda \\ \widehat{\beta}_{rls} &= (X'X)^{-1} X'y + (X'X)^{-1} R'\lambda \\ &= \widehat{\beta}_{ols} + (X'X)^{-1} R'\lambda\end{aligned} \tag{2.45}$$

Sedangkan turunan parsial terhadap λ adalah

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2p - 2R\beta \tag{2.46}$$

dengan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$p = R\widehat{\beta}_{rls} \tag{2.47}$$

Dengan persamaan (2.45) maka persamaan (2.47) dapat ditulis sebagai

$$p = R\widehat{\beta}_{ols} + R(X'X)^{-1} R'\lambda \tag{2.48}$$

sehingga diperoleh

$$\lambda = \left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1} \left(p - R\widehat{\beta}_{ols}\right) \tag{2.49}$$

Dan, dengan mensubstitusikan hasil terakhir ini ke dalam persamaan (2.45) diperoleh

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{rls} &= \widehat{\beta}_{ols} + (X'X)^{-1} R'\left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1}\left(p - R\widehat{\beta}_{ols}\right) \\ &= \beta + (X'X)^{-1} X'e + \\ &\quad (X'X)^{-1} R'\left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1}\left[p - R\left(\beta + (X'X)^{-1} X'e\right)\right] \\ &= \beta + (X'X)^{-1} X'e + \\ &\quad (X'X)^{-1} R'\left[R(X'X)^{-1} R'\right]^{-1}\left(p - R\beta - R(X'X)^{-1} X'e\right)\end{aligned} \tag{2.50}$$

Bila retriksi benar bahwa maka

$$\widehat{\beta}_{rls} = \beta + (X'X)^{-1} X'e - (X'X)^{-1} R' \left[R (X'X)^{-1} R' \right]^{-1} R (X'X)^{-1} X'e \tag{2.51}$$

sehingga

$$E\left(\widehat{\beta}_{rls}\right) = \beta \tag{2.52}$$

dan

$$\begin{aligned} Cov\left(\widehat{\beta}_{rls}\right) &= E\left[\left(\widehat{\beta}_{rls} - E\left(\widehat{\beta}_{rls}\right)\right)\left(\widehat{\beta}_{rls} - E\left(\widehat{\beta}_{rls}\right)\right)'\right] \\ &= E\left[\left(\widehat{\beta}_{rls} - \beta\right)\left(\widehat{\beta}_{rls} - \beta\right)'\right] \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} = E\Big[&\left((X'X)^{-1} X'e - (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} X'e\right) \\ &\left(e'X(X'X)^{-1} - e'X(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1}\right)\Big] \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} = E\Big[&(X'X)^{-1} X'ee'X(X'X)^{-1} - \\ &(X'X)^{-1} X'ee'X(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} - \\ &(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} X'ee'X(X'X)^{-1} + \\ &(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} X'ee'X(X'X)^{-1} R' \\ &\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1}\Big] \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$
\begin{aligned}
&= (X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} - \\
&(X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} - \\
&(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} + \\
&(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} R' \\
&\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 (X'X)^{-1} - \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} - \\
&\quad \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} + \\
&\quad \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2 (X'X)^{-1} - \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} \\
&= Cov\left(\widehat{\beta}_{ols}\right) - \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Jadi $\widehat{\beta}_{rls}$ adalah BLUE dan lebih baik dari pada $\widehat{\beta}_{ols}$ jika *positive definit* dan retriksi benar. Sebaliknya, jika restriksi tidak benar maka unbiased tetapi persamaan hasil terakhir tetap berlaku, yaitu variansinya lebih kecil.

Sifat - sifat dari β^* bila pembatas benar :

1. E(β^*) = β (β^* disebut penaksir yang tak bias dari β)

2. Cov(β^*) = Cov(β) - $\sigma^2\,(\mathrm{X'X})^{-1}\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}\mathrm{R}(\mathrm{X'X})^{-1}$

Perhatikan bahwa

$$\mathrm{Cov}(\beta) - \mathrm{Cov}(\beta^*) = \sigma^2\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1} \tag{2.58}$$

definit positif.
Ini berarti β^* lebih superior dibandingkan dengan β.
Bila restriksi (pembatas) salah, yaitu R$\beta \neq$r, maka r-R$\beta \neq 0$.
Maka

$$\begin{aligned} \beta^* &= \left(\beta + (\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{X'e}\right) + && (2.59)\\ & (\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}\left(\text{r-R}\beta - \mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{X'e}\right) && (2.60) \end{aligned}$$

Contoh :
Mencari taksiran $\beta = (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)'$, σ^2 dan Cov(β) bila β ditaksir dengan pembatas yang salah. Misalkan β^*adalah taksiran untuk β dengan pembatas yang salah, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1.1$.
Maka $R = (0\ 1\ 1)$ dengan $r = 1.1$, sehingga

$$R\beta = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \beta_2 + \beta_3 = 1.1 \neq 1.$$

Dengan mensubstitusikan β, X, e, R dan r ke persamaan (10), akan diperoleh β^*. Sehingga taksiran untuk σ^2 adalah

$$\sigma^{*2} = (\text{y-X}\beta^*)'\,(\text{y-X}\beta^*)\,/(\text{T-K})$$

dan

$$\mathrm{Cov}(\beta^*) = \sigma^{*2}(\mathrm{X'X})^{-1}$$

Sifat - sifat dari β^* bila pembatas salah :

1. E(β^*) = β + $(\mathrm{X'X})^{-1}\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}$ (r-Rβ) $\neq \beta$ (β^* disebut penaksir yang bias dari β)

2. $\mathrm{Cov}(\beta^*) = \mathrm{Cov}(\beta)$ - $\sigma^2\,(X'X)^{-1}R'\left(R\,(X'X)^{-1}\,R'\right)^{-1}R(X'X)^{-1}$

Perhatikan bahwa

$$\mathrm{Cov}(\beta) - \mathrm{Cov}(\beta^*) = \sigma^2\,(X'X)^{-1}\,R'\left(R\,(X'X)^{-1}\,R'\right)^{-1}\,R\,(X'X)^{-1} \qquad (2.61)$$

juga definit positif.

Tetapi untuk pembatas yang salah, β^* belum tentu lebih superior dari β walaupun β^* lebih presisi atau akurat.

2.1.5 Sum of Square Total (SST)

Regression Sum of Square (SSR) =

$$\sum_{i=1}^{T}\left(\hat{y}_i\text{-}\bar{\hat{y}}\right)^2 \qquad (2.62)$$

SSR menyatakan variasi nilai Y yang ditaksir di sekitar rata - ratanya.

Error Sum of Square (SSE) =

$$\hat{e}'\hat{e} = (y - X\beta)'\,(y\text{-}X\beta) \qquad (2.63)$$

Total Sum of Square (SST) =

$$\sum_{i=1}^{T}(y_i\text{-}\bar{y})^2 \qquad (2.64)$$

SST menyatakan total variasi nilai Y sebenarnya di sekitar rata - rata sampelnya.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\bar{y}\right)^2 &= \sum_{t=1}^{n}\left(y_t^{\,2}-2y_t\bar{y}+\bar{y}^2\right)\\
&= \sum_{t=1}^{n} y_t^{\,2}-2\bar{y}\sum_{t=1}^{n} y_t+n\bar{y}^2\\
&= \sum_{t=1}^{n} y_t^{\,2}-2\bar{y}\,n\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t+n\bar{y}^2\\
&= \sum_{t=1}^{n} y_t^{\,2}-2\bar{y}n\bar{y}+n\bar{y}^2\\
&= y_t{}'y_t-2n\bar{y}^2+n\bar{y}^2\\
&= y_t{}'y_t-n\bar{y}^2\\
&= \hat{y}_t{}'\hat{y}_t-n\bar{\hat{y}}^2+\hat{e}'\hat{e}\\
&= \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t-\bar{\hat{y}}\right)^2+\hat{e}'\hat{e}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

persamaan terakhir ini bisa ditulis sebagai

$$SST = SSR + SSE$$

dimana

SSR : Sum of Square Regression

SSE : Sum of Square Error (Residual)

Hubungan ini menunjukkan bahwa total variasi dalam nilai Y yang diobservasi di sekitar nilai rata - ratanya dapat dipisahkan ke dalam dua bagian, sebagian yang diakibatkan oleh garis regresi dan bagian lain diakibatkan oleh kekuatan random karena tidak semua pengamatan Y yang sebenarnya terletak pada garis yang dicocokkan.

2.1.6 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi (R^2) merupakan suatu ukuran yang menyatakan seberapa baik garis regresi sampel mencocokkan data.

Koefisien determinasi (R^2) =

$$\frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{SST}} = 1-\frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}} = 1-\frac{\hat{\mathrm{e}}'\hat{\mathrm{e}}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{y}_i\text{-}\bar{\mathrm{y}}\right)^2} \tag{2.66}$$

Adjusting $\mathrm{R}^2(\bar{\mathrm{R}}^2)$ =

$$1 - \frac{\hat{\text{e}}'\hat{\text{e}}/(\text{T-K})}{\sum_{\text{i}=1}^{\text{T}} (\text{y}_i\text{-}\bar{\text{y}})^2 /(\text{T-1})} \tag{2.67}$$

Jadi secara verbal, R^2 mengukur prosentase total variasi dalam Y yang dijelaskan oleh model regresi. Nilai R^2 terletak diantara 0 dan 1. Nilai R^2 sebesar 1 berarti kecocokan sempurna, sedangkan nilai R^2 sebesar 0 berarti tidak ada hubungan antara variabel tak bebas dengan variabel yang menjelaskan.

$$\begin{aligned} 0 \le R^2 &= \frac{SSR}{SST} \\ &= \frac{\hat{y}'\hat{y} - n\bar{\hat{y}}^2}{y'y - n\bar{y}^2} \\ &= \frac{SST - SSE}{SST} \\ &= 1 - \frac{SSE}{SST} \\ &\le 1 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Adjusted Coeffisien of Determination

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-k)}{SST/(n-1)} \tag{2.69}$$

2.2 Model Statistik Linier Normal

Penerapan metode kuadrat terkecil untuk model regresi linier tidak membuat asumsi apapun mengenai distribusi probablilitas dari *error* e. Asumsi yang dibuat hanyalah bahwa gangguan tadi mempunyai nilai yang diharapkan (rata-rata) nol, tak berkorelasi dan mempunyai variansi konstan. Dengan asumsi ini, penaksir kuadrat terkecil β dan $\hat{\sigma}^2$ memenuhi beberapa sifat statistik yang diinginkan, seperti ketakbiasan dan variansi yang minimum. Jika tujuan yang diharapkan hanya untuk melakukan penaksiran titik (*point estimation*), maka metode kuadrat terkecil sudah mencukupi. Tetapi, penaksiran titik hanyalah satu aspek inferensi statistik. Aspek lainnya adalah pengujian hipotesa.

Pandang model statistik linier berikut

$$y = X\beta + e \tag{2.70}$$

Karena tujuan dari model statistik linier ini tidak hanya sekedar sebagai statistik deskriptif, tetapi juga untuk tujuan pengambilan kesimpulan maupun penaksiran, maka disini harus diasumsikan bahwa e mengikuti distribusi probabilitas, dengan distribusi yang digunakan adalah distribusi normal dengan rata - rata nol dan variansi σ^2.

Asumsi : $\mathrm{e} \backsim \mathrm{N}(0, \sigma^2 \mathrm{I}_T)$ atau $\mathrm{e}_i \backsim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$

Ini berarti :

1. $\mathrm{E(e)} = 0$
2. $\mathrm{Cov}(e_i, e_j) = \sigma^2, \ \forall i = j$
3. $\mathrm{Cov}(e_i, e_j) = 0, \ \forall i \neq j$

2.2.1 Maximum Likelihood Estimator (ML)

Suatu metoda yang bersifat umum dari penaksiran titik dengan beberapa sifat teoretis yang lebih kuat dibandingkan dengan metoda penaksir kuadrat terkecil adalah metoda maksimum likelihood (metoda kemungkinan terbesar).

Misalkan X_i' vektor $1 \times k$, i=1,...,n., maka $\mathrm{y}_i = \mathrm{X}_i' \beta + \mathrm{e}_i$, i=1,...,m, sehingga $\mathrm{y}_i \backsim \mathrm{N}\left(\mathrm{X}_i'\beta, \sigma^2\right)$ .Fungsi distribusi peluang dari y_i jika diberikan X_i, β dan σ^2 adalah

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_i | \mathrm{X}_i, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{\mathrm{y}_i - \mathrm{X}_i'\beta}{\sigma}\right)^2\right) \tag{2.71}$$

Karena y_1,...,y_n saling bebas, diperoleh

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_1,...,\mathrm{y}n\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(\frac{-1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{y}_i - \mathrm{X}_i'\beta}{\sigma}\right)^2\right) \tag{2.72}$$

Pandang *likelihood function* berikut

$$l\left(\beta, \sigma^2 | \mathrm{X,y}\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y\text{-}X}\beta\right)'\left(\mathrm{y\text{-}X}\beta\right)\right) \tag{2.73}$$

maka fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$
\begin{aligned}
L = \ln l &= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(y' - \beta' X')(y - X\beta) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - y'X\beta - \beta' X' y + \beta' X' X\beta) \\
&= \frac{-n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y'y - (y'X\beta)' - \beta' X' y + \beta' X' X\beta\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - \beta' X' y - \beta' X' y + \beta' X' X\beta) \\
&= -\frac{T}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta' X' y + \beta' X' X\beta)
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + \beta' X' X) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2X'y + X'X\beta + (\beta' X' X)'\right) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + X'X\beta) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + 2X'X\beta) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}(X'y - X'X\beta)
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

dengan menyamakan hasil turunan ini dengan nol diperoleh

$$
\widehat{\beta}_{ml} = (X'X)^{-1} X'y \tag{2.76}
$$

yang sama dengan estimasi least square sebelumnya, sehingga juga merupakan BLUE.

$$\begin{aligned}\hat{e} &= y - X\hat{\beta} \\ &= y - X\left(X'X\right)^{-1}X'y \\ &= \left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]y \\ &= My \\ &= M\left(X\beta + e\right) \\ &= MX\beta + Me \\ &= I_nX\beta - X\left(X'X\right)^{-1}X'X\beta + Me \\ &= X\beta - X\beta + Me \\ &= Me\end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}\hat{e}'\hat{e} &= \left(Me\right)'\left(Me\right) \\ &= e'M'Me \\ &= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\ &= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\ &= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X' - X\left(X'X\right)^{-1}X' + X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\ &= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\ &= e'Me\end{aligned} \tag{2.78}$$

Sifat-sifat M:

1. simetri

$$\begin{aligned}M' &= \left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]' \\ &= I' - \left(X'\right)'\left[\left(X'X\right)^{-1}\right]'X' \\ &= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' \\ &= M\end{aligned} \tag{2.79}$$

2. idempoten

$$\begin{aligned}
M'M &= MM \\
&= \left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]\left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' - X\left(X'X\right)^{-1}X' + \\
&\quad X\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' - X\left(X'X\right)^{-1}X' + \\
&\quad X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= M
\end{aligned} \tag{2.80}$$

3. ortogonal

$$\begin{aligned}
MX &= \left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]X \\
&= IX - X\left(X'X\right)^{-1}X'X \\
&= X - X \\
&= O
\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$X'M = X'M' = \left(MX\right)' = O' = O \tag{2.82}$$

4. rank atau trace (M) = n - k , singular, noninvertible

$$\begin{aligned}
rk\left(M\right) &= tr\left(M\right) \\
&= tr\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= tr\left(I_n\right) - tr\left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= tr\left(I_n\right) - tr\left[\left(X'X\right)^{-1}X'X\right] \\
&= tr\left(I_n\right) - tr\left(I_k\right) \\
&= n - k
\end{aligned} \tag{2.83}$$

rank = banyaknya nilai eigen yang tidak nol
trace = banyaknya nilai eigen yang sama dengan satu
rk (D) = tr (D), untuk sebarang matriks diagonal D

5. nilai eigen dari M adalah 0 atau 1,

Bukti:

Misalkan q adalah vektor eigen dari M dengan nilai eigen , maka

$$\begin{aligned} MMq &= M\lambda q \\ Mq &= \lambda Mq \\ \lambda q &= \lambda\lambda q \\ (1-\lambda)\lambda q &= 0 \\ \lambda &= 1, \text{ atau} \\ \lambda &= 0 \end{aligned} \tag{2.84}$$

dan

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta\right) \tag{2.85}$$

sehingga, dengan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}^2_{ml} &= \frac{1}{n}\left(y'y - y'X\widehat{\beta}_{ml} - \widehat{\beta}_{ml}'X'y + \widehat{\beta}_{ml}'X'X\widehat{\beta}_{ml}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(y - X\widehat{\beta}_{ml}\right)'\left(y - X\widehat{\beta}_{ml}\right) \\ &= \frac{1}{n}\hat{e}'\hat{e} \\ &= \frac{1}{n}e'Me \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\sigma}^2_{ml}\right) &= E\left(\frac{e'Me}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} E\left[tr\left(e'Me\right)\right] \\
&= \frac{1}{n} E\left[tr\left(Mee'\right)\right] \\
&= \frac{1}{n} tr\left[E\left(Mee'\right)\right] \\
&= \frac{1}{n} tr\left[ME\left(ee'\right)\right] \\
&= \\
&= \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\left(n-k\right)
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

yang merupakan biased estimator, berbeda dengan estimasi least square

$$
E\left(\hat{\sigma}^2_{ols}\right) = E\left(\frac{e'Me}{n-k}\right) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n-k}\left(n-k\right) = \hat{\sigma}^2
\tag{2.88}
$$

yang merupakan unbiased estimator.

Sifat - Sifat Penaksir Maksimum Likelihood

Sifat - sifat dari β adalah

1. $\mathrm{E}(\beta) = \beta$
2. $\mathrm{Cov}(\beta) = \sigma^2 \left(\mathrm{X}'\mathrm{X}\right)^{-1}$
3. $\mathrm{E}(\tilde{\sigma}^2) \neq \sigma^2$ ($\tilde{\sigma}^2$ adalah suatu penaksir bias dari σ^2)

Penaksir σ^2 yang tak bias adalah

$$
\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathrm{e}}'\hat{\mathrm{e}}}{\text{T-K}}
\tag{2.89}
$$

karena $\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.

Dengan melihat asumsi kenormalan, terlihat bahwa dalam model regresi linier penaksir kuadrat terkecil β dan penaksir maksimum likelihood β adalah identik. Dalam sampel kecil, penaksir maksimum likelihood $\tilde{\sigma}^2$ adalah bias meskipun bias ini dapat dihilangkan dengan menggunakan penaksir kuadrat terkecil $\hat{\sigma}^2$ yang tak bias. Tetapi dengan meningkatnya ukuran sampel secara tak terbatas, penaksir maksimum likelihood dan penaksir kuadrat terkecil dari σ^2 cenderung untuk sama.

2.3 Pengujian Hipotesa

Masalah pengujian hipotesa secara statistik dengan sederhana dapat dinyatakan sebagai berikut : Apakah suatu pengamatan atau penemuan cocok dengan suatu hipotesa yang telah dinyatakan atau tidak?. Kata cocok disini berarti "cukup" dekat dengan nilai yang dihipotesakan untuk menerima hipotesa yang dinyatakan. Jadi bila suatu teori atau pengalaman sebelumnya membawa kita untuk percaya bahwa koefisien kemiringan (gradien) sebenarnya dari β_i adalah a, apakah β_1 yang diamati, misalkan nilainya b yang diperoleh dari sampel konsisten dengan hipotesa yang dinyatakan ? Jika ya, kita bisa menerima hipotesa itu, jika tidak kita akan menolaknya.

Dalam bahasa statistik, hipotesa yang dinyatakan dikenal sebagai hipotesa nol dan dilambangkan dengan lambang H_0. Hipotesa nol ini biasanya diuji terhadap hipotesa alternatif, yang dinyatakan dengan H_1, yang mungkin menyatakan bahwa $\beta_i \neq a$.

Teori pengujian hipotesa berkenaan dengan pengembangan aturan atau prosedur untuk memutuskan apakah menerima atau menolak hipotesa. Pendekatan yang akan dipakai dalam eksperimen ini adalah pengujian arti/penting (*test of significance*). Pendekatan ini mengatakan bahwa variabel (statistik atau penaksir) yang sedang dipertimbangkan mempunyai suatu distribusi probabilitas dan bahwa pengujian hipotesa meliputi pembuatan pernyataan mengenai nilai-nilai parameter seperti itu.

Dalam bahasa pengujian tingkat arti, suatu statistik dikatakan penting secara statistik (*statistically significant*) jika nilai statistik uji (statistik hitung) terletak di dalam daerah kritis. Dalam kasus ini, hipotesa nol ditolak. Sedangkan suatu pengujian dikatakan secara statistik tidak penting (*statistically insignificant*) jika nilai statistik uji terletak dalam daerah penerimaan. Dalam situasi ini, hipotesa nol bisa diterima.

Pengujian hipotesa yang akan dilakukan pada eksperimen ini terbatas pada tiga kasus, yaitu

1. Untuk masing-masing parameter β_i, dengan hipotesa

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_0 &: \beta_i = 0,\ i = 1,2,3\\ \mathrm{H}_1 &: \beta_i \neq 0,\ i = 1,2,3\end{aligned}$$

2. Untuk suatu pembatas, dengan hipotesa

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_0 &: \beta_2 + \beta_3 = 1\\ \mathrm{H}_1 &: \text{lainnya}\end{aligned}$$

3. Untuk penampilan model secara utuh (keseluruhan), dengan hipotesa

$$\begin{aligned} H_o &: \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1 &: \text{lainnya} \end{aligned}$$

Untuk ketiga kasus diatas digunakan *level of significance* (α) sebesar 5%. *Level of significance* (tingkat signifikansi) adalah peluang menolak H_1 padahal H_0 benar.

2.3.1 Uji Rasio Likelihood

Test Ratio ini digunakan untuk mengetahui kompatibilitas sampel y dengan hipotesa:

$$\begin{aligned} H_0 &: R\beta = p \\ H_1 &: R\beta \neq p \end{aligned} \tag{2.90}$$

Sebelum pengujian hipotesa ini, akan dibahas hal khusus, yaitu:

$$R = I \text{ dan } p = \beta_0 \tag{2.91}$$

sehingga hipotesa (2.90) menjadi

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta = \beta_0 \\ H_1 &: \beta \neq \beta_0 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Untuk sampel acak y_i dengan $y = X\beta + e$ dan $e\tilde{\ } N(0, \sigma^2 I_n)$ maka fungsi likelihood,

$$l\left(\beta, \sigma^2 \mid X, y\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right] \tag{2.93}$$

dan

$$l\left(\beta, \sigma^2 \mid X, y, \beta = \beta_0\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)\right] \tag{2.94}$$

sehingga estimasi untuk (2.93) adalah

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'X)^{-1} X'y \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right) \end{aligned}$$

sedangkan estimasi untuk (2.94) adalah

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \beta_0 \\ \hat{\sigma}_0^{\,2} &= \frac{1}{n}(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)\end{aligned} \tag{2.95}$$

sehingga dengan substitusi estimator ke fungsi maksimum likelihood:

$$\begin{aligned}\hat{l}(\Omega) &= \max\left[l\left(\beta, \sigma^2 \mid y, X\right)\right] \\ &= \max\left[\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right]\right] \\ &= \left(2\pi\hat{\sigma}^2\right)^{-n/2} \exp\left[\frac{-1}{2\hat{\sigma}^2}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)\right] \\ &= \left[2\pi\frac{1}{n}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)\right]^{-n/2} \exp\left[-\frac{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}{2\frac{1}{n}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}\right] \\ &= \left[\frac{2\pi}{n}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)\right]^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}\hat{l}(\omega) &= \max\left[l\left(\beta, \sigma^2 \mid y, X, \beta = \beta_0\right)\right] \\ &= \left[\frac{2\pi}{n}(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)\right]^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.97}$$

Sehingga diperoleh likelihood Ratio Test:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\hat{l}(\Omega)}{\hat{l}(\omega)} \\ &= \left[\frac{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}{(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)}\right]^{-n/2} \\ &= \left[\frac{(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)}{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}\right]^{n/2}\end{aligned} \tag{2.98}$$

dengan *rule of the game*: tolak H_0 bila λ_1 "besar".

Selanjutnya perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0) &= \left(y - X\widehat{\beta} + X\widehat{\beta} - X\beta_0\right)'\left(y - X\widehat{\beta} + X\widehat{\beta} - X\beta_0\right) \\ &= \left[\hat{e} + X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)\right]'\left[\hat{e} + X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)\right] \\ &= \left[\hat{e}' + \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'\right]\left[\hat{e} + X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)\right] \\ &= \hat{e}'\hat{e} + \hat{e}'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right) + \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'\hat{e} + \\ &\quad \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)\end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}&= (Me)'Me + (Me)'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right) + \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'Me + \\ &\quad \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right) \\ &= e'M'Me + e'M'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right) + \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'Me + \\ &\quad \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}&= e'M'Me + 0 + 0 + \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right) \\ &= \hat{e}'\hat{e} + \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right) \\ &= \left(y - X\widehat{\beta}\right)'\left(y - X\widehat{\beta}\right) + \left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta} - \beta_0\right)\end{aligned} \tag{2.101}$$

sehingga, ratio test pada (2.98) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 + \frac{\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)' X' X \left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)}{\left(y - X\widehat{\beta}\right)'\left(y - X\widehat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{\left(\widehat{\beta}-\beta\right)' X' X \left(\widehat{\beta}-\beta\right)}{\left(y - X\widehat{\beta}\right)'\left(y - X\widehat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{\left[\left(X'X\right)^{-1} X'e\right]' X' X \left[\left(X'X\right)^{-1} X'e\right]}{\left(y - X\widehat{\beta}\right)'\left(y - X\widehat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{e'X\left(X'X\right)^{-1} X'X\left(X'X\right)^{-1} X'e}{\left(y - X\widehat{\beta}\right)'\left(y - X\widehat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{e'X\left(X'X\right)^{-1} X'e}{\left(y - X\widehat{\beta}\right)'\left(y - X\widehat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{e'Ne}{e'Me} \\
&= 1 + \lambda_2
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Sifat-sifat N:

1. simetri

$$\begin{aligned}
N' &= \left[X\left(X'X\right)^{-1} X'\right]' \\
&= (X')'\left[\left(X'X\right)^{-1}\right]' X' \\
&= X\left(X'X\right)^{-1} X' \\
&= N
\end{aligned} \tag{2.103}$$

2. idempoten

$$\begin{aligned}
N'N &= NN \\
&= \left[X\left(X'X\right)^{-1} X'\right]\left[X\left(X'X\right)^{-1} X'\right] \\
&= X\left(X'X\right)^{-1} X'X\left(X'X\right)^{-1} X' \\
&= X\left(X'X\right)^{-1} X' \\
&= N
\end{aligned} \tag{2.104}$$

3.

$$
\begin{aligned}
NX &= \left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]X \\
&= X\left(X'X\right)^{-1}X'X \\
&= X
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

$$
X'N = X'N' = \left(NX\right)' = X' \tag{2.106}
$$

4. rank atau trace (N) = k

$$
\begin{aligned}
rk\left(N\right) &= tr\left(N\right) \\
&= tr\left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= tr\left[\left(X'X\right)^{-1}X'X\right] \\
&= tr\left(I_k\right) \\
&= k
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

5. nilai eigen dari N adalah 0 atau 1,

Bukti:

Misalkan q adalah vektor eigen dari N dengan nilai eigen λ , maka

$$
\begin{aligned}
NNq &= N\lambda q \\
Nq &= \lambda Nq \\
\lambda q &= \lambda\lambda q \\
\left(1-\lambda\right)\lambda q &= 0 \\
\lambda &= 1, \text{ atau} \\
\lambda &= 0
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

Sehingga jika

$$
\lambda_2 = \frac{e'Ne}{e'Me} = \frac{e'Ne/\sigma^2}{e'Me/\sigma^2} \begin{matrix} \sim \chi^2{}_k \\ \sim \chi^2{}_{n-k} \end{matrix} \tag{2.109}
$$

dan

$$
\lambda_3 = \frac{n-k}{k}\lambda_2 = \frac{\sim \chi^2{}_{k/k}}{\sim \chi^2{}_{(n-k)/(n-k)}} = \sim F_{k,n-k} \tag{2.110}
$$

maka rule of the game: tolak H_0 bila $\lambda_3 \geq$ *nilai kritis* dari $F_{k,\ n-k}$.

Hipotesa di atas adalah dalam keadaan khusus, $R = I,\ p = \beta_0$, sedangkan sekarang bersifat umum, yaitu dengan sebarang R dengan rk(R) = j.

Misalkan ,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}', \rho = O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}', rk(R) = 1 \tag{2.111}$$

dengan

$$H_0 : \beta_1 = 0,\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \tag{2.112}$$

maka dapat menggunakan *t-test* dengan nilai *t-hitung*:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)' R' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} R\left(\hat{\beta}-\beta\right)/j}{e'Me/(n-k)} \\
&= \frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)' R' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} R\left(\hat{\beta}-\beta\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(\hat{\beta}' R' - \beta' R'\right) \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\hat{\beta}-R\beta\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\hat{\beta}-R\beta\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(R\hat{\beta}-p\right)' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\hat{\beta}-p\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(\hat{\beta}_1-O\right)' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(\hat{\beta}_1-O\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \hat{\beta}_1}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \hat{\beta}_1}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1' \hat{\beta}_1}{R\left(X'X\right)^{-1} R' j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1^2}{R\left(X'X\right)^{-1} R' j\hat{\sigma}^2}
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

Atau, jika $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1}$ maka *t-hitung* menjadi

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{\widehat{\beta}_1}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2 R\left(X'X\right)^{-1} R'}} \\ &= \frac{\widehat{\beta}_1}{\sqrt{Cov\left(R\widehat{\beta}_1\right)}} \\ &= \frac{\widehat{\beta}_1}{\sqrt{Var\left(\widehat{\beta}_1\right)}} \\ &= \frac{\widehat{\beta}_1}{Std\left(\widehat{\beta}_1\right)} \sim t_{n-k}\end{aligned} \tag{2.114}$$

dengan aturan main: Tolak H_0 jika t-hitung berada pada daerah kritis dari t-tabel, t $_{n-k}$.

2.3.2 Pengujian Hipotesa Terbatas

Diberikan hipotesa nol dan hipotesa alternatif sebagai berikut :

H_0 : $\beta_2 + \beta_3 = 1$

H_1 : $\beta_2 + \beta_3 \neq 1$

Perhatikan bahwa R = (0 1 1), p = 1 dan rank(R) = 1. Dengan mensubstitusikan R, p dan rank(R) = j, nilai λ dapat dicari. Untuk pengujian hipotesa, gunakan aturan mainnya yaitu: Tolak H0 jika λ lebih besar atau sama dengan nilai kritis dari $F_{\ j,\ n-k}$

2.3.3 Uji Goodness of Fit

Pandang model statistik linier

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \tag{2.115}$$

dengan

Karena X_3 merupakan vektor yang diberikan dan umumnya unsur - unsurnya hanya memuat angka 1 saja, maka model tersebut hanya tergantung dari X_1 dan X_2.

Diberikan hipotesa nol dan hipotesa alternatif sebagai berikut :

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = 0$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}'$$

Gambar 2.1:

H$_1$: lainnya

Perhatikan bahwa

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

dan rank(R) = 2.

Dengan mensubstitusikan R, p dan rank(R) = 2, nilai λ dapat dicari. Untuk pengujian hipotesa, gunakan aturan mainnya yaitu: Tolak H$_0$ jika λ lebih besar atau sama dengan nilai kritis dari $F_{j,\ n-k}$

Untuk pengujian hipotesa dengan konstrain dan penampilan model secara keseluruhan, kita tidak dapat menggunakan uji t karena prosedur pengujian t mengasumsikan bahwa suatu sampel independen ditarik setiap saat pengujian t diterapkan. Jadi apabila sampel yang sama digunakan untuk menguji hipotesa mengenai β_1 dan β_2 secara simultan, tampaknya β_1 dan β_2 berkorelasi dan ini merupakan penyimpangan dari prosedur pengujian t.

2.4 Tugas Eksperimen

Perumusan Masalah

1. Bagaimana perbandingan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS, RLS dan ML dengan nilai yang sebenarnya ?

2. Bagaimana proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan ?

3. Bagaimana kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya ?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk:

1. Membandingkan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS, RLS dan ML dengan nilai yang sebenarnya.

2. Mengetahui proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan.

3. Membandingkan kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan simulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda pendekatan dan bantuan komputer. Dilanjutkan dengan melakukan pengujian hipotesa dan membandingkan semua hasil eksperimennya dengan hasil teori. Model regresi yang digunakan untuk eksperimen adalah model statistik linier normal dengan tiga variabel bebas X yang masing-masing berukuran $30x3$ dan vektor error e berukuran $30x1$ yang diambil secara acak dari komputer dengan asumsi e berdistribusi $N\ (0, \sigma^2 I_T)$.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun langkah-langkah/prosedur pengerjaan agar kegiatan yang dilakukan jelas dan terarah. Adapun prosedur dalam melakukan eksperimen ini adalah :

1. Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi, inferensi dan pengambilan kesimpulan pada model statistik linier. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.

2. Menentukan data-data untuk variabel X, β, σ^2 dan α. Data untuk variabel bebas X yang berukuran 30X3, parameter β dan σ^2 diambil dari data riil observasi langsung atau dari data sekunder dan *level of significance* (tingkat keberartian / tingkat signifikansi) α ditentukan sebesar 5%.

3. Membuat data vektor e berukuran 30X1. Nilai e diambil secara acak dari komputer, yang masing-masing isi selnya berdistribusi normal N(0,0.1).

4. Menyusun matriks y yang berukuran 30X1 dengan menggunakan e yang didapat pada langkah 3.

5. Melakukan penaksiran terhadap β dan σ^2. Dari data X dan y yang telah diperoleh dapat dilakukan penaksiran terhadap β dan σ^2, yaitu langkah 6-11.

6. Menaksir β dengan *Ordinary Least Square* (OLS).

7. Menaksir σ^2 yang tak bias dengan menggunakan penaksir β OLS.

8. Menaksir Cov (β), dengan menggunakan penaksir σ^2 OLS.

9. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan pembatas yang benar, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1$.

10. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan pembatas yang salah, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1.1$.

11. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan metoda *Maximum Likelihood* (ML).

12. Membandingkan hasil-hasil penaksiran pada langkah 5 dengan nilai sebenarnya yang ditentukan pada langkah 2.

13. Melakukan pengujian hipotesa, yaitu langkah 14-16.

14. Menguji hipotesa untuk masing-masing parameter β_i (dengan menggunakan uji t), yaitu $\mathrm{H}_0 : \beta_i = 0$, i=1,2,3 vs $\mathrm{H}_1 : \beta_i \neq 0$.

15. Menguji hipotesa untuk pembatas berikut (dengan menggunakan uji F), yaitu $\mathrm{H}_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ vs H_1 : lainnya.

16. Menguji hipotesa untuk penampilan model secara keseluruhan (dengan menggunakan uji F), yaitu $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ vs H_1 : lainnya.

17. Menghitung koefisien determinasi R^2 dan adjusting R^2 (R^2 yang disesuaikan).

18. Melakukan pengulangan eksperimen, yaitu langkah 5 dan langkah 7 hingga 100.000 kali dengan penyusunan y yang baru untuk setiap pengulangannya. Langkah ini dilakukan untuk membandingkannya dengan hasil penaksiran dan pengujian hipotesa yang dilakukan pertama kali.

19. Menghitung proporsi hipotesa yang tertolak pada langkah 9 untuk masing-masing hipotesa.

20. Membandingkan hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya.

21. Mengamati dan menganalisa hasil eksperimen.

22. Menyusun laporan.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 4 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mengetahui, dan memahami konsep homoskedastisitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi, serta estimasi parameter-parameter pada model statistik linier umum dengan Matriks Kovariansi Nonscalar Identity dan Matriks Kovariansi Tidak diketahui.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil menggunakan data homoskedastisitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi, serta melakukan estimasi parameter-parameter pada general linear statistical model dengan Nonscalar Identity Covariance Matrix dan an Unknown Covariance Matrix.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik linier umum dengan Matriks Kovariansi Nonscalar Identity.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik linier umum dengan Matriks Kovariansi Tidak diketahui.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian dan perbedaan homoskedastisitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi.

D. Materi Pokok

3.1. Heteroskedastisitas
3.1.1 Transformasi Persamaan Linier

3.1.2 Estimasi Generalized Least Squares
3.1.3 Estimasi Aitken
3.1.4 Pengujian Heteroskedastisitas
3.2. Autokorelasi
3.2.1 Proses Autoregressive Orde Satu
3.2.2 Estimasi Generalized Least Squares
3.2.3 Uji Asymtotik
3.2.4 Uji Durbin-Watson

E. Pengalaman Belajar
1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.
2. Menganalisa penurunan rumus.
3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.
4. Tanya jawab di kelas.
5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.
6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media
1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi
1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran
a. Kegiatan Awal

1. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model general statistik linier.

2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang estimasi parameter pada model general statistik linier.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar menjelaskan tentang pengertian The Normal General Linear Statistical Model.

2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus General linear Statistical Model with Nonscalar Identity Covariance Matrix.

3. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Homoskedasticity.

4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus General linear Statistical Model with an Unknown Covariance Matrix.

5. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Estimated Generalized Least Squares.

6. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Heteroskedasticity.

7. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Autocorrelation.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan General linear Statistical Model dengan Scalar dan Nonscalar Identity Covariance Matrix

2. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan General linear Statistical Model dengan Covariance Matrix yang diketahui dan tak diketahui.

3. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk mencari kasus baru untuk melakukan estimasi parameter dengan model heteroskedasticity, homoskedasticity, dan autocoerrelation.

4. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan analisa hasil estimasi parameter untuk model heteroskedasticity, homoskedasticity, dan autocoerrelation.

Bab 3

HETEROSKEDASTISITAS DAN AUTOKORELASI

3.1 Heteroskedastisitas

3.1.1 Transformasi Persamaan Linier

Model statistik linier yang diperumum

$$y = X\beta + e \tag{3.1}$$

dengan $e \tilde{} N(0, \Phi)$, dimana

$$\Phi = \sigma^2 \Psi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

matriks simetri dan *positive definite*. Karena Φ matriks simetri dan positive definite maka ada matriks C yang ortogonal ($CC' = C'C = I$) sedemikian hingga $C'\Phi C = D$ adalah matriks diagonal yang elemen-elemennya merupakan nilai-nilai eigen dari Φ.

Misalkan

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

dan tulis

$$W = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

maka diperoleh $W\,'D\,W = I$.

Karena $C\,'\Phi\,C = D$ maka $W\,'C\,'\Phi\,C\,W = W\,'D\,W = I$.

Misalkan $P = W\,'C\,'$ maka $I = W\,'C\,'\Phi\,C\,W = P\,\Phi\,P\,'$ akibatnya diperoleh $\Phi = P^{-1}(P\,')^{-1} = (PP\,')^{-1}$ atau $\Phi^{-1} = P\,'P$

Dari persamaan model statistik linear diperoleh transformasi model menjadi

$$Py = P(X\beta + e) = PX\beta + Pe \tag{3.5}$$

atau

$$y^* = X^*\beta + e^* \tag{3.6a}$$

dimana

$$E(e^*) = E(Pe) = PE(e) = 0 \tag{3.7}$$

dan

$$E(e^*e^{*'}) = E(Pe(Pe)') = E(Pee'P') = PE(ee')P' = P\Phi P' = I \tag{3.8}$$

sehingga persamaan model transformasi 3.6a memenuhi asumsi standard model statistik linier.

Dengan cara serupa, yaitu karena Ψ juga matriks simetri dan positive definite maka ada matriks Q sedemikian hingga $Q\,\Psi\,Q\,' = I$ dan diperoleh $\Psi = (Q\,Q\,')^{-1}$ atau $\Psi^{-1} = Q\,'Q$. Akibatnya diperoleh model statistik linier

$$Qy = Q(X\beta + e) = QX\beta + Qe \tag{3.9}$$

atau

$$y^\wedge = X^\wedge\beta + e^\wedge \tag{3.10}$$

dimana

$$E(e^\wedge) = E(Qe) = QE(e) = 0 \tag{3.11}$$

dan

$$\begin{aligned}E\left(e\wedge e\wedge'\right) &= E\left(Qe\left(Qe\right)'\right) = E\left(Qee'Q'\right)\\ &= QE\left(ee'\right)Q' = Q\Phi Q'\\ &= Q\sigma^2\Psi Q' = \sigma^2 Q\Psi Q' = \sigma^2 I\end{aligned} \tag{3.12}$$

yang memenuhi asumsi standart model statistik linier.

3.1.2 Estimasi Generalized Least Squares

Penaksir parameter-parameter pada β untuk model transformasi statistik linier yang umum, persamaan 3.6a disebut sebagai *generalized least squares estimator* (GLSE), yaitu

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{gls} &= \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}X^{*\prime}y^{*}\\ &= \left[\left(PX\right)'\left(PX\right)\right]^{-1}\left(PX\right)'\left(Py\right)\\ &= \left(X'P'PX\right)^{-1}X'P'Py\\ &= \left(X'\Phi^{-1}X\right)^{-1}X'\Phi^{-1}y\\ &= \left(X'\left(\sigma^2\Psi\right)^{-1}X\right)^{-1}X'\left(\sigma^2\Psi\right)^{-1}y\\ &= \sigma^2\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}X'\left(1/\sigma^2\right)\Psi^{-1}y\\ &= \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}X'\Psi^{-1}y\end{aligned} \tag{3.13}$$

yang merupakan *best linear unbiased estimator* (BLUE) dengan matriks kovariansi

$$\begin{aligned}Cov\left(\widehat{\beta}_{gls}\right) &= \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\\ &= \left[\left(PX\right)'\left(PX\right)\right]^{-1}\\ &= \left(X'P'PX\right)^{-1}\\ &= \left(X'\Phi^{-1}X\right)^{-1}\\ &= \left(X'\left(\sigma^2\Psi\right)^{-1}X\right)^{-1}\\ &= \sigma^2\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Jika digunakan penaksir *ordanary least squares* (OLS) terhadap β maka penaksir ini adalah tidak efisien, meskipun *unbiased estimator,* karena matriks kovariansi sebenarnya adalah

$$Cov\left(\widehat{\beta}_{ols}\right)=\left(X'X\right)^{-1}X'\Phi X\left(X'X\right)^{-1} \tag{3.15}$$

sehingga

$$Cov\left(\widehat{\beta}_{ols}\right)-Cov\left(\widehat{\beta}_{gls}\right)>0 \tag{3.16}$$

Sedangkan estimasi untuk σ^2 secara *generalized least squares* adalah

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2{}_{gls} &= \frac{1}{n-k}\left(y\wedge - X\wedge\widehat{\beta}_{gls}\right)'\left(y\wedge - X\wedge\widehat{\beta}_{gls}\right)\\
&= \frac{1}{n-k}\left(Qy-QX\widehat{\beta}_{gls}\right)'\left(Qy-QX\widehat{\beta}_{gls}\right)\\
&= \frac{1}{n-k}\left(Q\left(y-X\widehat{\beta}_{gls}\right)\right)'\left(Q\left(y-X\widehat{\beta}_{gls}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n-k}\left(y-X\widehat{\beta}_{gls}\right)'Q'Q\left(y-X\widehat{\beta}_{gls}\right)\\
&= \frac{1}{n-k}\left(y-X\widehat{\beta}_{gls}\right)'\Psi^{-1}\left(y-X\widehat{\beta}_{gls}\right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

3.1.3 Aitken Estimator (Feasible GLS Estimator)

Jika matriks Ψ tidak diketahui maka perlu adanya cara penaksiran lain yang dikenal sebagai *Aitken estimator (feasible GLS estimator)* of β atau *estimated generalized least squares* (EGLS) *estimator,* yaitu

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{egls} &= \left(X'\widehat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1}X'\widehat{\Phi}^{-1}y\\
&= \left[X'\left(\widehat{\sigma}^2\widehat{\Psi}\right)^{-1}X\right]^{-1}X'\left(\widehat{\sigma}^2\widehat{\Psi}\right)^{-1}y\\
&= \widehat{\sigma}^2\left(X'\widehat{\Psi}^{-1}X\right)^{-1}X'\left(1/\widehat{\sigma}^2\right)\widehat{\Psi}^{-1}y\\
&= \left(X'\widehat{\Psi}^{-1}X\right)^{-1}X'\widehat{\Psi}^{-1}y
\end{aligned} \tag{3.18}$$

yang juga merupakan *unbiased estimator* dengan kovariansi

$$Cov\left(\widehat{\beta}_{egls}\right) = \left(X'\widehat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} = \widehat{\sigma}^2_{egls}\left(X'\widehat{\Psi}^{-1}X\right)^{-1} \tag{3.19}$$

dimana

$$\widehat{\sigma}^2_{egls} = \frac{1}{n-k}\left(y - X\widehat{\beta}_{egls}\right)'\widehat{\Psi}^{-1}\left(y - X\widehat{\beta}_{egls}\right) \tag{3.20}$$

3.1.4 Pengujian Heteroskedastisitas

Uji Multiplikatif Heteroskedastisitas

Misalkan model statistik linier dengan

$$\begin{aligned} Cov(e_i) &= E\left(e_i^2\right) = \sigma_i^2 \\ &= \exp(z_i'\alpha) = \exp(\alpha_1)\exp(z_i^{*\prime}\alpha^*) \\ &= \sigma^2\exp(z_i^{*\prime}\alpha^*) \end{aligned} \tag{3.21}$$

diasumsikan sebagai model dengan *homokedastic errors* maka sama halnya dengan menggunakan hipotesa

$H_0 : \alpha^* = 0,$

$H_1 : \alpha^* \neq 0.$

Untuk menguji hipotesa ini digunakan estimasi

$$\widehat{\alpha} = (Z'Z)^{-1}Z'q = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i z_i'\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n} z_i \ln\hat{e}_i^2 \tag{3.22}$$

dengan

$$\hat{e} = y - \hat{y} = y - X\widehat{\beta} \tag{3.23}$$

Misalkan D adalah matriks $(Z'Z)^{-1}$ dengan menghilangkan baris pertama dan kolom pertamanya, maka

$$\widehat{\alpha}^* \sim N(\alpha^*, 4.9348D) \tag{3.24}$$

dan

$$\frac{\left(\hat{\alpha}*-\alpha*\right)'D^{-1}\left(\hat{\alpha}*-\alpha*\right)}{4.9348} \sim \chi^2_{s-1} \tag{3.25}$$

Sehingga pengujian untuk multiplicative *heteroskedastisitas* dengan cara membandingkan nilainya dengan nilai pada distribusi *Chi-square* yang sesuai, χ^2_{s-1}.

Uji Goldfield-Quandt

Hipotesa yang digunakan pada metode ini adalah

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \leq ... \leq \sigma_n^2$

Misalkan hipotesa satu adalah benar, lakukan dua regresi terpisah masing-masing berukuran sama yaitu (n - r) / 2 observasi. Hitung perbandingan residual sum of squaresnya, $\lambda = S_2 \ / \ S_1$. Di bawah hipotesa nul, λ berdistribusi F dengan derajat kebebasan $[(n-r-2k)/2, (n-r-2k)/2]$. Bandingkan nilai λ dengan titik kritis yang sesuai dari distribusi F dan terima atau tolak hipotesa nul.

Uji Breusch-Pagan

Misalkan di bawah hipotesa yang digunakan adalah

$H_0 : \alpha^* = 0$

$H_1 : \sigma_1^2 = h(z_i{}'\alpha) = h(\alpha_1 + z_i^*{}'\alpha^*)$

dimana h adalah fungsi independent terhadap t, dan

$$z_i{}' = \begin{bmatrix} 1 & z_i*' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_{i2} & \cdots & z_{is} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

dan

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha*' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Maka pengujian dilakukan pada *sum of squares total* (SST) dan *residual sum of squares* (SSR) dari regresi

$$\frac{\hat{e}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = z_i{}'\alpha + v_i \sim \chi^2_{s-1} \tag{3.28}$$

yang berdistribusi secara asimtotik sebagai χ^2_{s-1} dimana

$$\tilde{e}_i = y_i - X_i \hat{\beta}_{ols} \tag{3.29}$$

dan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i^{\,2} \tag{3.30}$$

3.2 Autokorelasi

3.2.1 Proses Autoregressive Orde Satu

Misalkan model statistik linier umum sebagai

$$y_i = X_i{}'\beta + e_i \tag{3.31}$$

dimana *error*-nya merupakan *proses autoregressive orde satu* (AR1) sebagai

$$e_i = \rho e_{i-1} + v_i \tag{3.32}$$

dengan $iid.v_i\tilde{}N(0,\sigma_v^2)$ dan matriks varian kovarian sebagai

$$\begin{aligned} Cov\left(e_i\right) = E\left(e_i^{\,2}\right) = \sigma_e^{\,2} = \frac{\sigma_v^{\,2}}{1-\rho^2} = \Phi = \sigma_v^{\,2}\Psi \\ = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.33}$$

dan

$$Cov\left(e_i, e_{i-j}\right) = E\left(e_i e_{i-j}\right) = \rho^j \sigma_e^{\,2} = \frac{\rho^j \sigma_v^{\,2}}{1-\rho^2} \tag{3.34}$$

3.2.2 Estimasi Generalized Least Squares

Jika ρ diketahui maka GLS estimator adalah BLUE. Sebagaimana pada model *heteroskedastisitas*, GLSE untuk β dilakukan serupa, persamaan 3.13. Begitu juga untuk matriks kovariansinya, persamaan 3.15, dengan estimasi variansi serupa pula, persamaan 3.17. Sebaliknya, jika ρ tidak diketahui maka dilakukan estimasi sebagai

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_{i-1}^2} \tag{3.35}$$

dan diberlakukan EGLS estimator terhadap β yang serupa pula sebagaimana model *heteroskedastisitas*, persamaan 3.18. Begitu pula berlaku untuk matriks kovariansinya, sedangkan estimasi variansinya diberlakukan sebagai $\hat{\sigma}_v^2$.

3.2.3 Uji Asimtotik

ρ diaproksimasikan berdistribusi normal dengan mean ρ dan variansi $(1 - \rho^2)/n$. Sehingga

$$z = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\sqrt{(1-\rho^2)/n}} \tag{3.36}$$

secara aproksimasi berdistribusi normal standart. Jika hipotesa nol benar $(H_0 : \rho = 0)$ maka statistik menjadi

$$z = \hat{\rho}\sqrt{n} \tag{3.37}$$

dan akibatnya, pada level signifikansi 5%, dalam test dua sisi, hipotesa nol ditolak jika

$$|z| = \left|\hat{\rho}\sqrt{n}\right| \geq 1.96 \tag{3.38}$$

3.2.4 Uji Durbin-Watson

The Durbin-Watson test didasarkan pada statistik

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{e}_i - \hat{e}_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_{i-1}^2} = \frac{\hat{e}' A\hat{e}}{\hat{e}'\hat{e}} = \frac{e' MAMe}{e' Me} \tag{3.39}$$

dimana

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \cdots & \hat{e}_n \end{bmatrix} = y - X\hat{\beta}_{ols} \tag{3.40}$$

adalah vektor *least squares residuals* dan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

3.3 Tugas Eksperimen

Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada eksperimen ini kami merumuskan beberapa permasalahan, yaitu:

1. Bagaimana perbandingan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS dan GLS, baik antar penaksir maupun dengan nilai yang sebenarnya, baik untuk Ψ yang diketahui maupun yang tidak diketahui?

2. Bagaimana proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan?

3. Bagaimana kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya, penaksir mana yang lebih baik?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk:

1. Membandingkan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS dan GLS, baik antar penaksir maupun dengan nilai yang sebenarnya, baik untuk Ψ yang diketahui maupun yang tidak diketahui.

2. Mengetahui proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan.

3. Mengatahui kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya, yaitu mengetahui penaksir mana yang lebih baik.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan kalkulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda pendekatan dan bantuan komputer dengan menggunakan pemrograman komputer. Dilanjutkan dengan melakukan pengujian hipotesa dan membandingkan semua hasil eksperimennya dengan hasil teori. Model regresi yang digunakan untuk eksperimen adalah model statistik linier umum dengan tiga variabel bebas X yang masing-masing berukuran 30x3 dan vektor error e berukuran 30x1 yang diambil secara acak dari komputer dengan asumsi e berdistribusi $N\ (0, \sigma^2\Psi)$.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 4 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mengetahui, dan memahami konsep model statistik nonlinier, serta estimasi parameter-parameter pada model statistik nonlinier umum dengan menggunakan estimasi least square dan maximum likelihood.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil menggunakan data hmodel statistik nonlinier, serta terampil melakukan estimasi parameter-parameter pada model statistik nonlinier umum dengan menggunakan estimasi least square dan maximum likelihood.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik nonlinier dengan estimasi least square.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik nonlinier dengan estimasi maximum likelihood.

D. Materi Pokok

4.1. Model Statistik Nonlinier
4.2. Kuadrat Terkecil Nonlinier
4.2.1 Iterasi Gauss-Newton
4.2.2 Iterasi Newton-Raphson
4.3. Maximum Likelihood Nonlinier
4.3.1 Iterasi Newton-Raphson
4.3.2 Iterasi BHHH

E. Pengalaman Belajar

1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.
2. Menganalisa penurunan rumus.
3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.
4. Tanya jawab di kelas.
5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.
6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media

1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi

1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran

a. Kegiatan Awal

1. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model statistik nonlinier.
2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang estimasi parameter pada model statistik nonlinier.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Least Square Gauss-Newton.
2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Least Square Newton -Raphson.
3. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Maximum Likelihood Newton -Raphson.
4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Maximum Likelihood BHHH.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan Model Statistik Nonlinier dengan Linier.

2. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan iterasi Least Square dan Maximum Likelihood.

3. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk mencari kasus baru untuk melakukan estimasi parameter dengan model Statistik Nonlinier dengan estimasi iterasi least square dan maximum likelihood.

4. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan analisa hasil estimasi parameter untuk model Statistik Nonlinier dengan estimasi iterasi least square dan maximum likelihood.

Bab 4

MODEL STATISTIK NONLINIER

4.1 Model Statistik Nonlinier

Bentuk umum dari model statistik nonlinier adalah

$$\mathrm{y} = \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta\right) + \mathrm{e} \tag{4.1}$$

dengan $e \backsim N\left(0, \sigma^2 I_T\right)$. Atau, dapat ditulis sebagai

$$y_t = f\left(x_t, \beta\right) + e_t \tag{4.2}$$

dengan $\mathrm{e}_t \backsim$i.i.d $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Akibatnya, $\mathrm{y}_t \backsim$i.i.d $\mathrm{N}(\mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right), \sigma^2)$ dengan $f\left(x_t,\beta\right)$, yaitu fungsi nonlinier dalam parameter β dan $e \backsim N\left(0, \sigma^2 I_T\right)$.

Ada dua cara untuk menaksir β pada model statistik nonlinier, yaitu dengan metoda *nonlinear least square* dan *maximum likelihood*.

4.2 Kuadrat Terkecil Nonlinier

Ada dua cara untuk menaksir β dengan metode *nonlinear least square*, yaitu

1. $\mathrm{f}(\mathrm{X},\beta)$ diaproksimasi dengan deret *Taylor* orde 1
2. $\mathrm{S}(\beta) = \left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta\right)\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta\right)\right)$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde 2

Cara penaksiran pertama dikenal sebagai iterasi Gauss Newton, sedangkan cara penaksiran kedua dikenal sevagai iterasi Newton Raphson. Secara umum, iterasi untuk mendapatkan taksiran β dengan nonlinear least square dapat ditulis dengan

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - t_n P_n \gamma_n \tag{4.3}$$

Beberapa iterasi yang dikenal adalah

1. *Gauss Newton*

$$t_n = \frac{1}{2},\ P_n = \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)' Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.4}$$

2. *Newton Raphson*

$$t_n = 1,\ P_n = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.5}$$

3. *Steepest Descent*

$$t_n \text{ bervariasi},\ P_n = I_K,\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.6}$$

4. *Marquardt-Levenberg*

$$t_n \text{ bervariasi},\ P_n = \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)' Z\left(\beta^{(n)}\right) + \lambda_n I_K \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.7}$$

5. *Quadratic Hill Climbing*

$$t_n \text{ bervariasi},\ P_n = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_K \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.8}$$

4.2.1 Iterasi Gauss Newton

Aproksimasi $f(X,\beta)$ di sekitar *initial values* $\beta^{(1)}$ dilakukan dengan menggunakan deret *Taylor* orde 1, yaitu

$$\begin{aligned} f(X,\beta) &= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \\ &= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \beta - \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Misalkan $\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} = Z\left(\beta^{(1)}\right)$. Maka

$$
\begin{aligned}
y &= f(X,\beta) + e \\
&= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\beta - \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)} + e \\
&= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta - Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)} + e \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(1)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)} &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta + \mathrm{e} \\
\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(1)}\right) &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta + \mathrm{e} \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Bentuk persamaan (4.11) dikenal sebagai model *pseudo-linier*. Dari bentuk ini, β dapat ditaksir dengan metoda *least squares*, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\beta^{(2)} &= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(1)}\right) \\
&= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(1)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)}\right) \\
&= \beta^{(1)} + \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(1)}\right)\right) \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Aproksimasi f(X,β) di sekitar $\beta^{(2)}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}(\mathrm{X},\beta) &= \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right) + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{X},\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta=\beta^{(2)}}\left(\beta - \beta^{(2)}\right) \\
&= \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta - \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Maka

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y} &= \mathrm{f}(\mathrm{X},\beta) + \mathrm{e} \\
&= \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta - \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} + \mathrm{e} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right)+\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta+\mathrm{e} \\
\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(2)}\right) &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta+\mathrm{e}
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Dari bentuk persamaan(4.15), taksir kembali β dengan metoda *least squares*, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\beta^{(3)} &= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(2)}\right) \\
&= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right)+\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)}\right) \\
&= \beta^{(2)}+\left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Sehingga, secara umum diperoleh iterasi sebagai berikut

$$
\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}+\left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(n)}\right)\right) \tag{4.17}
$$

Bila iterasi tersebut sudah konvergen, yaitu

$$
\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}=\beta^{(n+1)}\approx\beta^{(n)} \tag{4.18}
$$

maka akan diperoleh

$$
\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(n)}\right)\right)=0 \tag{4.19}
$$

atau

$$
Z\left(\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right)=0 \tag{4.20}
$$

Persamaan terakhir ini memenuhi *first order condition* (FOC) dari masalah $\min_{\beta}\left(\mathrm{S}\left(\beta\right)\right)$.

Ini ditunjukkan bahwa

$$
\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta}=-2\frac{\partial \mathrm{f}'}{\partial\beta}|\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right)=0 \tag{4.21}
$$

Atau

$$\mathrm{Z}\left(\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right)=0 \tag{4.22}$$

Jadi, bila

$$\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}=\beta^{(n+1)}\approx\beta^{(n)} \tag{4.23}$$

itu berarti FOC dari upaya untuk meminimumkan *sum of square* $\mathrm{S}(\beta)$ sudah terpenuhi dan

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta}=-2\mathrm{Z}(\beta)'(\mathrm{y}-\mathrm{f}(\mathrm{X},\beta)) \tag{4.24}$$

atau

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta} &= \mathrm{Z}(\beta)'(\mathrm{y}-\mathrm{f}(\mathrm{X},\beta)) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(n)}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Maka

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta}|_{\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}}=\mathrm{Z}\left(\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right) \tag{4.26}$$

Jadi iterasi umum diatas dapat ditulis menjadi

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)'Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\frac{\partial S(\beta)}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.27}$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Gauss Newton*.

4.2.2 Iterasi Newton Raphson

Aproksimasi $\mathrm{S}(\beta)$ di sekitar $\beta^{(1)}$ dilakukan dengan menggunakan deret *Taylor* orde 2, yaitu

$$\mathrm{S}\left(\beta\right)=\mathrm{S}\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right) \tag{4.28}$$

Perhatikan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{S}\left(\beta\right)}{\partial \beta} &= 0+\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'+2.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)\\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right)=0\end{aligned} \tag{4.29}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'=\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{4.30}$$

maka

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right) &= 0\\ \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right) &= 0\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} &= -\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right)\\ \beta^{(2)} &= \beta^{(1)}-\left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\end{aligned} \tag{4.32}$$

dengan syarat $\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}$ harus merupakan matriks positif definit agar $\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}$ mempunyai invers.

Secara umum, iterasi yang akan diperoleh adalah

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.33}$$

Bila iterasi sudah konvergen, yaitu

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)} \tag{4.34}$$

maka FOC dari masalah $\min_{\beta}\left(\mathrm{S}\left(\beta\right)\right)$ sudah dipenuhi. Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Newton Raphson* untuk nonlinear least square.

4.3 Maximum Likelihood Nonlinier

Secara umum, iterasi untuk mendapatkan taksiran β dengan maximum likelihood nonlinier dapat ditulis dengan

$$\beta^{(n+!)} = \beta^{(n)} - \mathrm{t}_n \mathrm{P}_n \gamma_n \tag{4.35}$$

Beberapa iterasi yang dikenal adalah

1. *Newton Raphson*

$$t_n = 1,\ P_n = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'} |_{\beta^{(n)}} \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \tag{4.36}$$

2. *Method of scoring*

$$t_n = 1,\ P_n = \left(E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'} |_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \tag{4.37}$$

3. *Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH)*

$$t_n = 1,\ P_n = -\left(Z^* \left(\beta^{(n)}\right)' Z^* \left(\beta^{(n)}\right) \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \tag{4.38}$$

4. *Modified BHHH*

$$t_n \text{ bervariasi},\ P_n = -\left(Z^* \left(\beta^{(n)}\right)' Z^* \left(\beta^{(n)}\right) + \lambda_n I_K \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}} \tag{4.39}$$

4.3.1 Iterasi Newton Raphson

Fungsi distribusi peluang (pdf) dari y_t diberikan oleh X_t, β dan σ^2 adalah

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2 \right) \tag{4.40}$$

Likelihood function dari β dan σ^2 diberikan oleh y_t dan X_t adalah

$$\mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2 \right) \tag{4.41}$$

Log likelihood function dari β dan σ^2 diberikan oleh y_t dan X_t adalah

$$\ln\ l_t = L_t = -\frac{1}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y_t - f\left(X_t, \beta\right)\right)^2 \qquad (4.42)$$

P.d.f gabungan dari $(y_1, ..., y_T)$ diberikan oleh X,β dan σ^2 adalah

$$\begin{aligned} f\left(y_1, ..., y_T | X,\beta, \sigma^2\right) &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-T/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma_{t=1}^{T}\left(y_t - f\left(X_t, \beta\right)\right)^2\right) \\ &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-T/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X, \beta\right)\right)'\left(y - f\left(X, \beta\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Likelihood function dari β dan σ^2 diberikan X dan y adalah

$$l\left(\beta, \sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-T/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X, \beta\right)\right)'\left(y - f\left(X, \beta\right)\right)\right) \qquad (4.43)$$

dan log likelihood function dari β dan σ^2 diberikan oleh X dan y adalah

$$\begin{aligned} L &= \Sigma_{t=1}^{T} L_t \\ &= \ln l\left(\beta, \sigma^2\right) \\ &= -\frac{T}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X, \beta\right)\right)'\left(y - f\left(X, \beta\right)\right) \\ &= -\frac{T}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2} S(\beta) \qquad (4.44) \end{aligned}$$

Maka

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = \frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} S(\beta) \qquad (4.45)$$

Menyamakannya dengan nol akan diperoleh

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\beta)}{T} \qquad (4.46)$$

Sekarang L dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} L(\beta) &= L = -\frac{T}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{S(\beta)}{T}\right)\right) - \frac{1}{2\left(\frac{S(\beta)}{T}\right)} S(\beta) \\ &= -\frac{T}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{S(\beta)}{T}\right)\right) - \frac{T}{2} \qquad (4.47) \end{aligned}$$

Aproksimasi $\mathrm{L}(\beta)$ di sekitar $\beta^{(1)}$ dengan deret Taylor orde 2, yaitu

$$\mathrm{L}(\beta) = \mathrm{L}\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)' \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{4.48}$$

Diperoleh

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\beta)}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)' + \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{4.49}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)' = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{4.50}$$

maka

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{4.51}$$

Menyamakannya dengan nol akan diperoleh

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta^{(2)} - \beta^{(1)}\right) = 0 \tag{4.52}$$

atau

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{4.53}$$

Pada umumnya diperoleh iterasi

$$\begin{aligned}
\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \\
&= \beta^{(n)} - \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}}\right) \\
&= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}}\right) \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Newton Raphson* untuk *nonlinear maximum likelihood.*

4.3.2 Iterasi Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH)

Iterasi BHHH diturunkan dari *Method of Scoring*, yaitu

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= \left(\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\mathrm{E}\left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Pandang kembali pdf dari y_t yang diberikan oleh X_t, β dan σ^2 yaitu

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2\right) \\
&= \mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat dari pdf, yaitu bahwa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) \, \mathrm{dy}_t = 1 \qquad (4.57)$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) \, \mathrm{dy}_t = 0 \qquad (4.58)$$

atau

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial\beta} \, \mathrm{dy}_t &= 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial\beta} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)} \, \mathrm{dy}_t &= 0 \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

Perhatikan

$$\mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) = \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) \qquad (4.60)$$

dan

$$\mathrm{L}_t = \log\ \mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) = \log \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) \qquad (4.61)$$

Maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} &= \frac{1}{\mathrm{l}_t\left(\beta,\sigma^2\right)}\frac{\partial \mathrm{l}_t\left(\beta,\sigma^2\right)}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}\frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}{\partial \beta} \qquad (4.62)\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} &= \frac{\partial \log \mathrm{l}_t}{\partial \beta} \\ &= \frac{\partial \log \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}{\partial \beta} \qquad (4.63)\end{aligned}$$

Dari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}{\partial \beta}\frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}\ \mathrm{dy}_t = 0 \qquad (4.64)$$

maka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta}\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)\ \mathrm{dy}_t = 0 \qquad (4.65)$$

Dengan melakukan turunan parsial pertama terhadap β' dan menyamakannya dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial}{\partial \beta'}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta}\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)\ \mathrm{dy}_t\right) = 0 \qquad (4.66)$$

akan diperoleh

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'}\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right) + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta}\frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}{\partial \beta'}\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'}\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right) + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta}\frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}{\partial \beta'}\frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)}\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'}\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right) + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'}\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'} + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'}\right)\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t,\beta,\sigma^2\right)\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'} + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'}\right) \qquad (4.67)\end{aligned}$$

Atau

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}\right) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right) \tag{4.68}$$

Berdasarkan hukum bilangan besar, taksiran untuk $\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}\right)$ adalah

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'} \tag{4.69}$$

sedangkan taksiran untuk $\mathrm{E}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right)$ adalah

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'} \tag{4.70}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'} &= -\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'} \\
\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'} &= -\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'} \\
&= -\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\right)' \\
&= -\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right)'\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right)
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Perhatikan kembali

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= \left(\mathrm{E}\left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{E}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \\
&= -\left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)'\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Diperoleh iterasi BHHH yang berbentuk

$$\begin{aligned}
\beta^{(n+!)} &= \beta^{(n)} - \mathrm{t}_n \mathrm{P}_n \gamma_n \\
&= \beta^{(n)} + \left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right)' \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \\
&= \beta^{(n)} + \left(\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right)' \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \\
&= \beta^{(n)} + \left(\mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right)' \mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right) \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \qquad (4.73)
\end{aligned}$$

dengan

$$Z^* \left(\beta^{(n)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial \beta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathrm{L}_\mathrm{T}}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{L}_\mathrm{T}}{\partial \beta_K} \end{pmatrix} \qquad (4.74)$$

Iterasi BHHH ini dapat dimodifikasi (Modified BHHH) menjadi

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(\mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right)' \mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right) + \lambda_n \mathrm{I}_\mathrm{K} \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \qquad (4.75)$$

4.4 Tugas Eksperimen

Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada eksperimen ini kami merumuskan beberapa permasalahan, yaitu

1. Bagaimana hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* pada LSE untuk model fungsi produksi CD dan CES ?

2. Bagaimana hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi BHHH dan *Modified* BHHH pada MLE untuk model fungsi produksi CD dan CES ?

3. Model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) dengan data sampel yang diberikan ?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk

1. Mengetahui hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* pada LSE untuk model fungsi produksi CD dan CES.

2. Mengetahui hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi BHHH dan *Modified* BHHH pada MLE untuk model fungsi produksi CD dan CES.

3. Mengetahui model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) dengan data sampel yang diberikan.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan kalkulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda penaksiran LSE dan MLE, yang dilakukan dengan perhitungan iterasi dengan menggunakan pemrograman komputer, hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen. Dilanjutkan dengan melakukan perhitungan data AIC dan/atau SC untuk nilai yang konvergen dari masing-masing iterasi. Dari hasil perhitungan akhir ini dapat ditentukan model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel tersebut.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun beberapa langkah prosedur yang dilakukan dari awal hinga akhir eksperimen, yaitu

1. Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi dan inferensi, khususnya model regresi statistik nonlinier umum. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.

2. Menentukan data-data sampel untuk variabel L dan K, yaitu data untuk variabel bebas X yang berukuran 30x2, dan data sampel Q, yaitu data untuk variabel tak bebas y yang berukuran 30x1.Data-data sampel ini dibuat dalam bentuk matriks LKy yang berukuran 30x3.

3. Melakukan penaksiran parameter-parameter dengan metoda *Nonlinear Least Square Estimator.*

4. Menentukan nilai awal (*initial values*) untuk parameter-parameter β, dimana nilai awal ini disesuaikan untuk setiap model iterasi untuk memperoleh kekonvergenan, dengan selisih nilai sebesar 10^{-9}.

5. Melakukan perhitungan iterasi untuk parameter-parameter β dan perhitungan iterasi untuk nilai S hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen untuk keduanya, dengan model iterasi yang digunakan adalah *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* , keduanya digunakan untuk model fungsi produksi CD dan CES.

6. Melakukan perulangan penaksiran dengan metoda *Nonlinear Maximum Likelihod Estimator.*

7. Menentukan nilai awal (*initial values*) untuk parameter-parameter β, dimana nilai awal ini disesuaikan untuk setiap model iterasi untuk memperoleh kekonvergenan, dengan selisih nilai sebesar 10^{-10}.

8. Melakukan perhitungan iterasi untuk parameter-parameter β dan perhitungan iterasi untuk nilai L hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen untuk keduanya, dengan model iterasi yang digunakan adalah BHHH dan *Modified* BHHH, keduanya untuk model fungsi produksi CD dan CES.

9. Menghitung nilai AIC dan SC pada nilai konvergen yang dihasilkan dari perhitungan iterasi.

10. Membandingkan nilai-nilai konvergen dan nilai AIC dan SC yang dihasilkan oleh iterasi BHHH dan *Modified* BHHH, keduanya untuk model fungsi produksi CD dan CES.

11. Menentukan model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel yang diberikan, dengan perbandingan nilai AIC dan SC.

12. Mengamati dan menganalisa hasil eksperimen.

13. Menyusun laporan.

Daftar Pustaka

[1] Aziz, Abdul, Ekonometrika, Teori Analisis Matematis dilengkapi Eksperimen dengan Matlab, Jakarta: Prestasi Pelajar , 2007.

[2] Bibby, John, Prediction And Improcved Estimation In lInear Models, John Wiley & Sons, 1979.

[3] Gujarati, D., Basic Econometrics, McGraw-Hill, Inc., 1978

[4] Greene, William.H, Econometrics Analysis, Macmillan, Inc., 1995

[5] Hamilton, D.J., Time Series Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 1994.

[6] Hogg & Craig, Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan, Inc., 1978.

[7] Judge, G.G., et.al., The Theory and Practice of Econometrics, John Wiley & Sons, Inc., 1985.

[8] Judge, G.G., et.al., Introduction to Theory and Practice of Econometrics, John Wiley & Sons, Inc., 1988.

[9] Netter, J., et.al., Applied Linear Statistical Models, Richard D.Irwin, Inc., 1990.

[10] Wonnacot, J.R. & Thomas Wonnacott, Econometrics, John Wiley and Sons, Inc., 1979.

[11] Walpole &Myers, Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Macmillan Inc., 1989.

Daftar Isi

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah wa syukrulillah, segala puji bagi Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan penulisan Buku Praktikum Eksperimen Matakuliah Ekonometrika yang dilengkapi dengan subrutin program komputer MATLAB ini. Shalawat dan salam semoga selalu terlimpahkan kehadirat Nabi Muhammad SAW.

Buku Praktikum Eksperimen ini sengaja kami tulis guna memenuhi kebutuhan pokok mahasiswa Jurusan Matematika UIN Malang yang mengikuti matakuliah Ekonometrika. Matakuliah ini sangat penting bagi mahasiswa guna pengembangan pengetahuan dan keilmuan mereka khususnya dalam penerapan secara integrasi antara statistika, matematika dan ekonomi.

Buku ini akan sangat membantu mahasiswa dalam memahami dan mengaplikasikan konsep-konsep ekonmetrika dalam setiap praktikumnya dengan bantuan bahasa pemrograman Matlab.

Akhirnya, semoga buku panduan ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa, pemerhati keilmuan statistika, terutama ekonometrika, dan penulis pada khususnya.

Malang, Januari 2007

Penulis

Bab 1

EKSPERIMEN ESTIMASI PARAMETER

1.1 Permasalahan

1. Buatlah sebuah data random 100 sampel dengan eksperimen Monte Carlo dengan model linier $y = \beta + e$, dimana $\beta = 5$ dan $e_i \tilde{} U(0,2)$ berdistribusi uniform .

2. Tampilkan histogram distribusinya dalam 30 poligon.

3. Hitunglah nilai rata-rata dan variansinya.

4. Estimasi parameter β menggunakan rata-rata setiap sampel dengan

$$\hat{\beta} = \bar{y} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} y_i$$

   bandingkan dengan nilai rata-rata sebenarnya.

5. Estimasi parameter σ^2 menggunakan variansi setiap sampel dengan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \left(y_i - \hat{\beta} \right)^2$$

   bandingkan dengan nilai variansi sebenarnya.

6. Buatlah 100 sampel variabel random normal,

$$z = \frac{y - \bar{y}}{\sigma / \sqrt{n}}$$

buatlah histogramnya, dan hitung nilai rata-rata dan variansinya.

7. Tentukan estimasi interval untuk mean parameter dengan tingkat kepercayaan 95%.

8. Dengan estimasi interval tersebut, tentukan apakah estimasi mean parameter di atas diterima.

9. Ulangi no 1 s/d 8 dengan $e_i \tilde{} N(0, 2)$.

10. Susunlah laporan ekperimen ini dan buatlah suatu kesimpulan.

1.2 Program Matlab Eksperimen

```
 % Eksperimen Estimasi Parameter
clc;clear;
n = 100; beta = 5; alfa = 0.05;
y1 = beta*ones(n,1) + unifrnd(0,2,n,1);
figure(1);histfit(y1,30);
title('histogram y uniform')
rata2y1 = mean(y1)
vary1 = var(y1)
betacap1 = sum(y1)/n
sigma2cap1 = sum((y1-betacap1*ones(n,1)).^2)/n
z1 = (y1-rata2y1*ones(n,1))./sqrt(vary1*n);
figure(2);histfit(z1,30);
title('histogram z normal')
rata2z1 = mean(z1)
varz1 = var(z1)
IntervalNormal = norminv([alfa/2 1-alfa/2],0,1)
IntervalBeta1=betacap1*ones(2,1)+IntervalNormal'
Betacap = betacap1
y2 = beta*ones(n,1) + normrnd(0,1,n,1);
figure(3);histfit(y2,30);
title('histogram y normal')
rata2y2 = mean(y2)
vary2 = var(y2)
betacap2 = sum(y2)/n
sigma2cap2 = sum((y2-betacap2*ones(n,1)).^2)/n
z2 = (y2-rata2y2*ones(n,1))./sqrt(vary2*n);
figure(4);histfit(z1,30);
title('histogram z normal')
rata2z2 = mean(z2)
varz2 = var(z2)
IntervalNormal = norminv([alfa/2 1-alfa/2],0,1)
IntervalBeta2=betacap2*ones(2,1)+IntervalNormal'
Betacap = betacap2
```

1.3 Isian Laporan

1. nilai rata-rata data uniform = ...
2. nilai variansi data uniform = ...
3. estimasi beta = ...
4. estimasi sigma = ...
5. nilai rata-rata data uniform yang dinormalkan = ...
6. nilai variansi data uniform yang dinormalkan = ...
7. Interval Normal = ...
8. Interval Beta = ...
9. nilai rata-rata data normal = ...
10. nilai variansi data normal = ...
11. estimasi beta = ...
12. estimasi sigma = ...
13. nilai rata-rata data normal yang dibakukan = ...
14. nilai variansi data normal yang dibakukan = ...
15. Interval Normal = ...
16. Interval Beta = ...

Gambar Histogram

1. Distribusi Data Uniform
2. Distribusi Data Uniform yang dinormalkan
3. Distribusi Data Normal
4. Distribusi Data Normal yang dibakukan

Kesimpulan

Bab 2

EKSPERIMEN MODEL STATISTIK LINIER

Perumusan Masalah

1. Bagaimana perbandingan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS, RLS dan ML dengan nilai yang sebenarnya ?
2. Bagaimana proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan ?
3. Bagaimana kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya ?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk:

1. Membandingkan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS, RLS dan ML dengan nilai yang sebenarnya.
2. Mengetahui proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan.
3. Membandingkan kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan simulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda pendekatan dan bantuan komputer dengan menggunakan software MATLAB. Dilanjutkan dengan melakukan pengujian hipotesa dan membandingkan semua hasil eksperimennya dengan hasil teori. Model regresi yang digunakan untuk eksperimen adalah model statistik linier normal dengan tiga variabel bebas X yang masing-masing berukuran $30x3$ dan vektor error e berukuran $30x1$ yang diambil secara acak dari komputer dengan asumsi e berdistribusi $N\ (0, \sigma^2 I_T)$.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun langkah-langkah/prosedur pengerjaan agar kegiatan yang dilakukan jelas dan terarah. Adapun prosedur dalam melakukan eksperimen ini adalah :

1. Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi, inferensi dan kesimpulan. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.

2. Menentukan data-data untuk variabel X, β, σ^2 dan α. Data untuk variabel bebas X yang berukuran 30X3, parameter β dan σ^2 diambil dari data riil observasi langsung atau data sekunder dengan *level of significance* (tingkat keberartian / tingkat signifikansi) α ditentukan sebesar 5%.

3. Membuat data vektor e berukuran 30X1. Nilai e diambil secara acak dari komputer, yang masing-masing isi selnya berdistribusi normal N(0,0.1).

4. Menyusun matriks y yang berukuran 30X1 dengan menggunakan e yang didapat pada langkah 3.

5. Melakukan penaksiran terhadap β dan σ^2. Dari data X dan y yang telah diperoleh dapat dilakukan penaksiran terhadap β dan σ^2, yaitu langkah 6-11.

6. Menaksir β dengan *Ordinary Least Square* (OLS).

7. Menaksir σ^2 yang tak bias dengan menggunakan penaksir β OLS.

8. Menaksir Cov (β), dengan menggunakan penaksir σ^2 OLS.

9. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan pembatas yang benar, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1$.

10. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan pembatas yang salah, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1.1$.

11. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan metoda *Maximum Likelihood* (ML).

12. Membandingkan hasil-hasil penaksiran pada langkah 5 dengan nilai sebenarnya yang ditentukan pada langkah 2.

13. Melakukan pengujian hipotesa, yaitu langkah 14-16.

14. Menguji hipotesa untuk masing-masing parameter β_i (dengan menggunakan uji t), yaitu $H_0 : \beta_i = 0$, i=1,2,3 vs $H_1 : \beta_i \neq 0$.

15. Menguji hipotesa untuk pembatas berikut (dengan menggunakan uji F), yaitu $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ vs H_1 : lainnya.

16. Menguji hipotesa untuk penampilan model secara keseluruhan (dengan menggunakan uji F), yaitu $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ vs H_1 : lainnya.

17. Menghitung koefisien determinasi R^2 dan adjusting R^2 (R^2 yang disesuaikan).

18. Melakukan pengulangan eksperimen, yaitu langkah 5 dan langkah 7 hingga 100.000 kali dengan penyusunan y yang baru untuk setiap pengulangannya. Langkah ini dilakukan untuk membandingkannya dengan hasil penaksiran dan pengujian hipotesa yang dilakukan pertama kali.

19. Menghitung proporsi hipotesa yang tertolak pada langkah 9 untuk masing-masing hipotesa.

20. Membandingkan hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya.

21. Mengamati dan menganalisa hasil eksperimen.

22. Menyusun laporan.

2.1 Input Data

Berikut ini adalah data untuk variabel bebas X, dengan ukuran X adalah 30 x 3

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Data X tersebut akan dipakai berulang-ulang dalam eksperimen ini.
Parameter β dan σ^2 juga diberikan, yaitu

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \text{ dan } \sigma^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dimana $\beta_2 + \beta_3 = 1$.

Dari variabel-variabel yang telah diberikan diatas, nilai variabel Y dapat ditaksir dengan persamaan model regresi di atas dengan menciptakan vektor e (*error*) berukuran 30x1 yang elemen-elemennya berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 0.1 yang diambil secara acak dari komputer.

Dari hasil Y dengan cara diatas dan X yang telah diberikan semula akan ditaksir parameter β dan σ^2 dengan beberapa metoda penaksiran. Selanjutnya akan dilakukan pengujian hipotesa untuk parameter-parameter tersebut.

2.2 Hasil dan Analisis Eksperimen

Estimasi parameter β (1 kali penaksiran)

Parameter $\boldsymbol{\beta}_i$	$\boldsymbol{\beta}_1$	$\boldsymbol{\beta}_2$	$\boldsymbol{\beta}_3$
Nilai β_i yang sebenarnya	....	....	....
Taksiran β_i dengan OLS	....	....	....
Taksiran β_i dengan pembatas benar	....	....	....
Taksiran β_i dengan pembatas salah	....	....	....
Taksiran β_i dengan ML	....	....	....

Hasil Analisa

....

....

....

Estimasi parameter σ^2 (1 kali penaksiran)

Nilai σ^2 yang sebenarnya	....
Taksiran σ^2 dengan OLS	....
Taksiran σ^2 dengan pembatas benar	....
Taksiran σ^2 dengan pembatas salah	....
Taksiran σ^2 dengan ML	....

Hasil Analisa

....

....

....

Estimasi Cov(β) (1 kali penaksiran)

Nilai Cov(β) sebenarnya =

$$\begin{pmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan OLS =

$$\begin{pmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan pembatas yang benar =

$$\begin{pmatrix} \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan pembatas yang salah =

$$\begin{pmatrix} \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan ML =

$$\begin{pmatrix} \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} & \text{..........} \end{pmatrix}$$

Hasil Analisa
....
....
....

Pengujian Hipotesa (1 kali penaksiran)
Nilai statistik tabel untuk tingkat signifikansi dengan $\alpha = 5\%$, yaitu

1. Untuk hipotesa 1,2 dan 3 : $t_{27} = 2.052$
2. Untuk hipotesa 4 : $F_{1,27} = 4.21$
3. Untuk hipotesa 5 : $F_{2,27} = 3.35$

dengan keputusan terima jika nilai statistik hitung < nilai statistik tabel.

Hipotesa nol vs Hipotesa satu	**Nilai hitung**	**Keputusan**
1. $H_0 : \beta_1 = 0$ vs $H_1 : \beta_1 \neq 0$	....	....
2. $H_0 : \beta_2 = 0$ vs $H_1 : \beta_2 \neq 0$	....	....
3. $H_0 : \beta_3 = 0$ vs $H_1 : \beta_3 \neq 0$	....	....
4. $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ vs H_1 :lainnya	....	....
5. $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ vs H_1 :lainnya	....	....

Hasil Analisa

....
....
....

Menaksir parameter β (100.000 kali penaksiran)

Parameter β_i	β_1	β_2	β_3
Nilai β_i yang sebenarnya	....	....	....
Rata-rata taksiran β_i dengan OLS	....	....	....
Rata-rata taksiran β_i dengan pembatas benar	....	....	....
Rata-rata taksiran β_i dengan pembatas salah	....	....	....
Rata-rata taksiran β dengan ML	....	....	....
Variansi taksiran β_i dengan OLS	....	....	....
Variansi taksiran β_i dengan pembatas benar	....	....	....
Variansi taksiran β_i dengan pembatas salah	....	....	....
Variansi taksiran β dengan ML	....	....	....

Hasil Analisa

....
....
....

Menaksir parameter σ^2 (100.000 kali penaksiran)

Nilai σ^2 yang sebenarnya	....
Rata-rata taksiran σ^2 dengan OLS	....
Rata-rata taksiran σ^2 dengan pembatas benar	....
Rata-rata taksiran σ^2 dengan pembatas salah	....
Rata-rata taksiran σ^2 dengan ML	....
Variansi taksiran σ^2 dengan OLS	....
Variansi taksiran σ^2 dengan pembatas benar	....
Variansi taksiran σ^2 dengan pembatas salah	....
Variansi taksiran σ^2 dengan ML	....

Hasil Analisa

....
....

....

Menaksir Cov(β) (100.000 kali penaksiran)

Nilai Cov(β) sebenarnya =

$$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan OLS =

$$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan pembatas yang benar =

$$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan pembatas yang salah =

$$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Taksiran Cov(β) dengan ML =

$$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Hasil Analisa
....
....
....

Pengujian Hipotesa (100.000 kali penaksiran)
Nilai statistik tabel untuk tingkat signifikansi $\alpha = 5\%$, yaitu

1. Untuk hipotesa 1,2 dan 3 : $t_{27} = 2.052$

2. Untuk hipotesa 4 : $F_{1,27} = 4.21$

3. Untuk hipotesa 5 : $F_{2,27} = 3.35$

dengan keputusan terima jika nilai statistik hitung < nilai statistik tabel.

Hipotesa nol vs Hipotesa satu	**Terima H_0**	**Tolak H_0**	%
1.$H_0 : \beta_1 = 0$ vs $H_1 : \beta_1 \neq 0$	....	....	....
2.$H_0 : \beta_2 = 0$ vs $H_1 : \beta_2 \neq 0$	....	....	....
3.$H_0 : \beta_3 = 0$ vs $H_1 : \beta_3 \neq 0$	....	....	....
4.$H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ vs H_1 :lainnya	....	....	....
5.$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ vs H_1 :lainnya	....	....	....

Hasil Analisa

....
....
....

Plot Distribusi Penaksir β, σ^2 dan Y

2.3 Kesimpulan

2.4 Program Matlab

```
% Program ini digunakan untuk menguji penaksir beta.
% Oleh Abdul Aziz, M.Si.

clc; % Membersihkan layar kerja
tic; % Mencatat waktu CPU bekerja

% Memasukkan data sampel X dengan 3 variabel bebas X1, X2 dan X3, sebanyak T observasi.
X = [ ......... ];   % Isi sesuai dengan data eksperimen

[T K] = size(X); % Mendefinisikan ordo matriks X
OBS = (1:T)' ; % Mendefinisikan jumlah observasi
X1 = X(:,1); % Mendefinisikan kolom 1 matriks X sebagai variabel 1
X2 = X(:,2); % Mendefinisikan kolom 2 matriks X sebagai variabel 2
X3 = X(:,3); % Mendefinisikan kolom 3 matriks X sebagai variabel 3

% Mendefinisikan Y dengan variabel Beta yang diketahui dan
% mengambil e sebagai vektor berdimensi T dengan entri-entri berdistribusi acak normal
% dengan mean 0 dan varian 0.1
Y = .....  *X1+ .....*X2+ ......*X3+ normrnd(0,sqrt(0.1),T,1);   % Isi sesuai dengan parameter eksperimen
B = inv(X'*X)*X'*Y; % Menaksir Beta dengan B secara OLS, dari Y dan X yang diperoleh
S2 = (Y-X*B)'*(Y-X*B)/(T-K); % Menaksir Sigma2 dengan S2 secara OLS
CovB = S2 * inv(X'*X); % Menaksir Covarian Beta dengan CovB
Ycap = X*B; % Menaksir Y dengan Ycap

% Menampilkan unrestricted estimators parameter-parameter sebelum perulangan
Taksiran_Beta_OLS_sblm_perulangan = B'
Taksiran_Sigma2_OLS_sblm_perulangan = S2
Taksiran_Covarian_Beta_sblm_perulangan = CovB

% Pengulangan taksiran bila Beta ditaksir dengan pembatas (constraint) benar
% yaitu : RBeta = Beta 2 + Beta 3 = 1 = r
R = [0 1 1];
lambda = inv(R*inv(X'*X)*R')*(R*B-1);
BC = B-inv(X'*X)*R'*lambda; % Menaksir Beta dgn BC sbg restricted estimator
```

```
S2C = (Y-X*BC)'*(Y-X*BC)/(T-K); % Menaksir Sigma2 dgn S2C sbg restricted estimator
CovBC = S2C*inv(X'*X); % Menaksir Covarian Beta dengan CovBC
YcapC = X*BC; % Menaksir Y dengan YcapC sbg restricted estimator

% Menampilkan right restricted estimators parameter-parameter
Taksiran_Pembatas_benar_Beta = BC'
Taksiran_Pembatas_benar_Sigma2 = S2C
Taksiran_Pembatas_benar_Covarian_Beta = CovBC
% Pengulangan taksiran bila Beta ditaksir dengan pembatas (constraint) salah
% yaitu : RBeta = Beta 2 + Beta 3 = 1.1 = r
R = [0 1 1];
lambdaS = inv(R*inv(X'*X)*R')*(R*B-1.1);
BCS = B-inv(X'*X)*R'*lambdaS; % Menaksir Beta dgn BCS sbg restricted estimator
S2CS = (Y-X*BCS)'*(Y-X*BCS)/(T-K); % Menaksir Sigma2 dgn S2CS sbg restricted estimator
CovBCS = S2CS*inv(X'*X); % Menaksir Covarian Beta dengan CovBCS
YcapCS = X*BCS; % Menaksir Y dengan YcapCS sbg restricted estimator

% Menampilkan wrong restricted estimators parameter-parameter
Taksiran_Pembatas_salah_Beta = BCS'
Taksiran_Pembatas_salah_Sigma2 = S2CS
Taksiran_Pembatas_salah_Covarian_Beta = CovBCS

% Mengulang penaksiran dengan maximum likelihood
BMLH = inv(X'*X)*X'*Y;
S2MLH = (Y-X*B)'*(Y-X*B)/T;
CovBMLH = S2MLH*inv(X'*X);

% Menampilkan maximum likelihood estimator
Taksiran_Beta_MLH = BMLH
Taksiran_Sigma2_MLH = S2MLH
Taksiran_Covarian_Beta_MLH = CovBMLH
VarB1 = CovB(1,1); % Mendefinisikan Variansi Penaksir Beta 1 (B1)
VarB2 = CovB(2,2); % Mendefinisikan Variansi Penaksir Beta 2 (B2)
VarB3 = CovB(3,3); % Mendefinisikan Variansi Penaksir Beta 3 (B3)

% Pengujian hipotesa Beta1, Beta2 dan Beta3
% H0 : Beta i = 0 dan H1 : Beta i <> 0 untuk i = 1,2 dan 3
% Rank(R) = j = 1
alfa = 0.05;
```

```
df = T-K;
ttabel = tinv(1-alfa/2,df); % Nilai t(1-alfa/2;T-K)=t(0.975;27)
ttest1 = B(1,1)/sqrt(VarB1) % uji-t terhadap Penaksir Beta 1 (B1)
if ttest1 > ttabel
    'Tolak H0 : Beta1 = 0'
else
    'Terima H0 : Beta1 = 0'
end
ttest2 = B(2,1)/sqrt(VarB2) % uji-t terhadap Penaksir Beta 2 (B2)
if ttest2 > ttabel
    'Tolak H0 : Beta2 = 0'
else
    'Terima H0 : Beta2 = 0'
end
ttest3 = B(3,1)/sqrt(VarB3) % uji-t terhadap Penaksir Beta 3 (B3)
if ttest3 > ttabel
    'Tolak H0 : Beta3 = 0'
else
    'Terima H0 : Beta3 = 0'
end

% Pengujian hipotesa untuk pembatas berikut :
% H0 : Beta2 + Beta3 = 1 dan H1 : lainnya
% RBeta = (0 1 1)(Beta1 Beta2 Beta3)' = Beta2 + Beta3 = 1 = r
% Rank(R) = j = 1
R4 = [0 1 1];
r4 = rank(R4);
Ftabel1 = finv(1-alfa,r4,df); % Nilai kritis distribusi F
Ftest1 = (B(2,1)+B(3,1)-1)/sqrt(S2*R4*inv(X'*X)*R4')
if Ftest1 > Ftabel1
    'Tolak H0 : Beta2 + Beta3 = 1'
else
    'Terima H0 : Beta2 + Beta3 = 1'
end

% Pengujian hipotesa untuk penampilan model secara keseluruhan :
% H0 : Beta2 = Beta3 = 0 dan H1 : lainnya
% RBeta = R(Beta1 Beta2 Beta3)' = Beta2 = Beta3 = (0 0)' = r
% Rank(R) = j = 2
R5 = [0 1 0
 0 0 1];
```

```
r5 = rank(R5);
Ftabel2 = finv(1-alfa,r5,df); % Nilai F(alfa;r,T-K)=t(0.05;2,27)
Ftest2 = ((R5*B)'*inv(R5*inv(X'*X)*R5')*(R5*B))/(2*S2)
if Ftest2 > Ftabel2
        'Tolak H0 : Beta2 = Beta3 = 0'
else
        'Terima H0 : Beta2 = Beta3 = 0'
end

SST = Y'*Y-T*mean(Y)^2; % Mendefinisikan Sum Square Total
SSE = (Y-X*B)'*(Y-X*B); % Mendefinisikan Sum Square Error
SSR = SST - SSE; % Mendefinisikan Sum Square Regression
R2 = 1 - SSE/SST % Mendefinisikan Coeffisien of determination
R2_Adjusted = 1 - (1-R2)*(T-1)/(T-K) % Mendefinisikan R2 yang disesuaikan


rep = 1e5; % Melakukan perulangan 100.000 kali
% mengalokasikan nilai-nilai ke dalam matriks
Beta = zeros(rep,3);
Sigma2 = zeros(rep,1);
BetaCP = zeros(rep,3);
Sig2CP = zeros(rep,1);
BetaCSP = zeros(rep,3);
Sig2CSP = zeros(rep,1);
BetaMLH = zeros(rep,3);
Sig2MLH = zeros(rep,1);

% Mendefinisikan nilai awal perhitungan jumlah
Terima_Beta1_nol = 0;
Tolak_Beta1_nol = 0;
Terima_Beta2_nol = 0;
Tolak_Beta2_nol = 0;
Terima_Beta3_nol = 0;
Tolak_Beta3_nol = 0;
Terima_Beta2_plus_Beta3_1 = 0;
Tolak_Beta2_plus_Beta3_1 = 0;
Terima_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1 = 0;
Tolak_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1 = 0;

for i = 1:rep;
 % Mengulang penaksiran dengan OLS estimator
```

```
YP = 0.2853*X1+0.3132*X2+0.6868*X3+normrnd(0,sqrt(0.1),T,1);
BP = inv(X’*X)*X’*YP;
S2P = (YP-X*BP)’*(YP-X*BP)/(T-K);
CovBP = S2P*inv(X’*X);

% Mengulang penaksiran dengan constraint benar
lambdaP = inv(R*inv(X’*X)*R’)*(R*BP-1);
BCP = BP-inv(X’*X)*R’*lambdaP;
S2CP = (YP-X*BCP)’*(YP-X*BCP)/(T-K);
CovBCP = S2CP*inv(X’*X);

% Mengulang penaksiran dengan constraint salah
lambdaSP = inv(R*inv(X’*X)*R’)*(R*BP-1.1);
BCSP = BP-inv(X’*X)*R’*lambdaSP;
S2CSP = (YP-X*BCSP)’*(YP-X*BCSP)/(T-K);
CovBCSP = S2CSP*inv(X’*X);

% Mengulang penaksiran dengan maximum likelihood
BMLHP = inv(X’*X)*X’*YP;
S2MLHP = (YP-X*BP)’*(YP-X*BP)/T;
CovBMLHP = S2MLHP*inv(X’*X);

Beta(i,:) = BP’; % Mengalokasikan nilai-nilai B ke dalam Beta
Sigma2(i,:) = S2P; % Mengalokasikan nilai-nilai S2 ke dalam Sigma2
BetaCP(i,:) = BCP’; % Mengalokasikan nilai-nilai B ke dalam Beta
Sig2CP(i,:) = S2CP; % Mengalokasikan nilai-nilai S2 ke dalam Sigma2
BetaCSP(i,:) = BCSP’; % Mengalokasikan nilai-nilai B ke dalam Beta
Sig2CSP(i,:) = S2CSP; % Mengalokasikan nilai-nilai S2 ke dalam Sigma2
BetaMLH(i,:) = BMLHP’; % Mengalokasikan nilai-nilai BMLHP ke dalam
BetaMLH
Sig2MLH(i,:) = S2MLHP; % Mengalokasikan nilai-nilai S2MLHP

VarB1P = CovBP(1,1); % Mendefinisikan Variansi Penaksir Beta 1 (B1)
VarB2P = CovBP(2,2); % Mendefinisikan Variansi Penaksir Beta 2 (B2)
VarB3P = CovBP(3,3); % Mendefinisikan Variansi Penaksir Beta 3 (B3)

% uji-t terhadap Penaksir Beta 1 OLS dalam perulangan
ttest1P = BP(1,1)/sqrt(VarB1P);
if ttest1P > ttabel
    Tolak_Beta1_nol = Tolak_Beta1_nol + 1;
else
```

```
        Terima_Beta1_nol = Terima_Beta1_nol + 1;
    end

    % uji-t terhadap Penaksir Beta 2 (OLS)
    ttest2P = BP(2,1)/sqrt(VarB2P);
    if ttest2P > ttabel
        Tolak_Beta2_nol = Tolak_Beta2_nol + 1;
    else
        Terima_Beta2_nol = Tolak_Beta2_nol + 1;
    end

    % uji-t terhadap Penaksir Beta 3 (OLS)
    ttest3P = BP(3,1)/sqrt(VarB3P);
    if ttest3P > ttabel
        Tolak_Beta3_nol = Tolak_Beta3_nol + 1;
    else
        Terima_Beta3_nol = Tolak_Beta3_nol + 1;
    end

    % uji-F terhadap Penaksir Beta dengan constraint benar
    Ftest1P = (BP(2,1)+BP(3,1)-1)/sqrt(S2P*R4*inv(X'*X)*R4');
    if Ftest1P > Ftabel1
        Tolak_Beta2_plus_Beta3_1 = Tolak_Beta2_plus_Beta3_1 + 1;
    else
        Terima_Beta2_plus_Beta3_1 = Terima_Beta2_plus_Beta3_1 + 1;
    end

    % uji-F terhadap Penaksir Beta dengan constraint salah
    Ftest2P = ((R5*BP)'*inv(R5*inv(X'*X)*R5')*(R5*BP))/(2*S2P);
    if Ftest2P > Ftabel2
        Tolak_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1 =
            Tolak_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1 + 1;
    else
        Terima_Beta2_plus_Beta3_l_koma_1 =
            Terima_Beta2_plus_Beta3_l_koma_1 + 1;
    end
    end;

% Menampilkan penaksir OLS parameter-parameter setelah perulangan
Rata2_taksiran_Beta_OLS_stlh_perulangan = mean(Beta)
Varian_taksiran_Beta_OLS_stlh_perulangan = var(Beta)
Rata2_taksiran_Sigma2_OLS_stlh_perulangan = mean(Sigma2)
```

```
Varian_taksiran_Sigma2_OLS_stlh_perulangan = var(Sigma2)
Taksiran_Covarian_Beta_stlh_perulangan = mean(Sigma2)*inv(X'*X)

% Menampilkan penaksir constraint benar parameter-parameter
Rata2_taks_right_restricted_Beta = mean(BetaCP)
Varian_taks_right_restricted_Beta = var(BetaCP)
Rata2_taks_right_restricted_Sigma2 = mean(Sig2CP)
Varian_taks_right_restricted_Sigma2 = var(Sig2CP)
Taks_right_restricted_Covarian_Beta = mean(Sig2CP)*inv(X'*X)

% Menampilkan penaksir constraint salah parameter-parameter
Rata2_taks_wrong_restricted_Beta = mean(BetaCSP)
Varian_taks_wrong_restricted_Beta = var(BetaCSP)
Rata2_taks_wrong_restricted_Sigma2 = mean(Sig2CSP)
Varian_taks_wrong_restricted_Sigma2 = var(Sig2CSP)
Taks_wrong_restricted_Covarian_Beta = mean(Sig2CSP)*inv(X'*X)

% Menampilkan maximum likelihood estimator
Rata2_taksiran_Beta_MLH = mean(BetaMLH)
Varian_taksiran_Beta_MLH = var(BetaMLH)
Rata2_taksiran_Sigma2_MLH = mean(Sig2MLH)
Varian_taksiran_Sigma2_MLH = var(Sig2MLH)
Taksiran_Covarian_Beta_MLH = mean(Sig2MLH)*inv(X'*X)

% Menampilkan hasil pengujian hipotesa
% Menghitung dan menampilkan proporsi hipotesa yang tertolak
Total_terima_Beta1_nol = Terima_Beta1_nol
Total_tolak_Beta1_nol = Tolak_Beta1_nol
Proporsi_hipotesa_Beta1_nol_tertolak = Tolak_Beta1_nol / rep

Total_terima_Beta2_nol = Terima_Beta2_nol
Total_tolak_Beta2_nol = Tolak_Beta2_nol
Proporsi_hipotesa_Beta2_nol_tertolak = Tolak_Beta2_nol / rep

Total_terima_Beta3_nol = Terima_Beta3_nol
Total_tolak_Beta3_nol = Tolak_Beta3_nol
Proporsi_hipotesa_Beta3_nol_tertolak = Tolak_Beta3_nol / rep

Total_terima_Beta2_plus_Beta3_1 = Terima_Beta2_plus_Beta3_1
Total_tolak_Beta2_plus_Beta3_1 = Tolak_Beta2_plus_Beta3_1
Proporsi_hipotesa_Beta2_plus_Beta3_1_tertolak
     = Tolak_Beta2_plus_Beta3_1 / rep
```

```
Total_terima_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1
      = Terima_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1
Total_tolak_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1
       = Tolak_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1
Proporsi_hipotesa_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1_tertolak
      = Tolak_Beta2_plus_Beta3_1_koma_1 / rep

Beta1 = Beta(:,1); % Mendefinisikan entri-entri kolom 1 Beta sebagai Beta1
Beta2 = Beta(:,2); % Mendefinisikan entri-entri kolom 2 Beta sebagai Beta2
Beta3 = Beta(:,3); % Mendefinisikan entri-entri kolom 3 Beta sebagai Beta3

% Menampilkan histogram Beta 1 pada figure ke-1
subplot(2,3,1);histfit(Beta1,50)
title('Penaksir \beta 1 OLS')
% Menampilkan histogram Beta 2 pada figure ke-2
subplot(2,3,2);histfit(Beta2,50)
title('Penaksir \beta 2 OLS')
% Menampilkan histogram Beta 3 pada figure ke-3
subplot(2,3,3);histfit(Beta3,50)
title('Penaksir \beta 3 OLS')
% Menampilkan histogram Sigma2 pada figure ke-4
subplot(2,3,4);histfit(Sigma2,50)
title('Penaksir {\sigma}^{2} OLS')

% Menampilkan Beta dan Sigma2 beserta 4 penaksirnya pada figure ke-5
% yaitu OLS1 (sblm perulangan), right restricted, wrong restricted
% dan OLS2 (stlh perulangan) estimators.
BP1 = Rata2_taksiran_Beta_OLS_stlh_perulangan(1,1);
BP2 = Rata2_taksiran_Beta_OLS_stlh_perulangan(1,2);
BP3 = Rata2_taksiran_Beta_OLS_stlh_perulangan(1,3);
S2P = Rata2_taksiran_Sigma2_OLS_stlh_perulangan;
Az = [0.2853 B(1,1) BC(1,1) BCS(1,1) BP1
 0.3132 B(2,1) BC(2,1) BCS(2,1) BP2
 0.6868 B(3,1) BC(3,1) BCS(3,1) BP3
 0.1 S2 S2C S2CS S2P];
subplot(2,3,5);bar(Az)
title('\beta, {\sigma}^2 & 4 penaksirnya')
xlabel('\beta1 \beta2 \beta3 {\sigma}^2')

% Menampilkan Grafik Y dan Ycap terhadap Beta OBS sebelum perulangan
% pada figure ke-6
```

```
subplot(2,3,6);plot(OBS,Y,OBS,Ycap)
title('Plot Y dan Ycap')
xlabel('Observation time')
legend('Y','Ycap')

waktu_hitung = toc % Menampilkan catatan waktu CPU bekerja
```

Bab 3

EKSPERIMEN HETEROSKEDASTISITAS DAN AUTOKORELASI

Permasalahan

1. Bagaimana perbandingan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS dan GLS, baik antar penaksir maupun dengan nilai yang sebenarnya, baik untuk Ψ yang diketahui maupun yang tidak diketahui?

2. Bagaimana proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan?

3. Bagaimana kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya, penaksir mana yang lebih baik?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk:

1. Membandingkan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS dan GLS, baik antar penaksir maupun dengan nilai yang sebenarnya, baik untuk Ψ yang diketahui maupun yang tidak diketahui.

2. Mengetahui proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan.

3. Mengatahui kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya, yaitu mengetahui penaksir mana yang lebih baik.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan kalkulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda pendekatan dan bantuan komputer dengan menggunakan software **MATLAB**. Dilanjutkan dengan melakukan pengujian hipotesa dan membandingkan semua hasil eksperimennya dengan hasil teori. Model regresi yang digunakan untuk eksperimen adalah model statistik linier umum dengan tiga variabel bebas X yang masing-masing berukuran 30x3 dan vektor error e berukuran 30x1 yang diambil secara acak dari komputer dengan asumsi e berdistribusi $N\ (0, \sigma^2\Psi)$.

3.1 Data Input

Dengan diberikan data masukan untuk variabel bebas X, yang berukuran 20 x 3, dan koefisien β sebagai

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)' = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}' \tag{3.1}$$

dibangun data tak bebas y dengan model statistik linier

$$y = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + e_t \tag{3.2}$$

dimana

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

3.2 Hasil dan Analisis Heteroskedasticity

Satu kali penaksiran (satu sampel)

Misalkan data y dibangun dengan e_t berdistribusi normal dan *independent*, dengan

$$E[e_t] = 0, \;\; E[e_t^2] = \sigma_t^2 = \exp\left(\alpha_1 + \alpha_2 x_{t2}\right) \tag{3.4}$$

dan

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)' = \left(\; \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \;\right)'. \tag{3.5}$$

Jika dilakukan estimasi terhadap β secara *ordinary least squares* maka diperoleh

$$\widehat{\beta}_{OLS} = (X\,'X)^{-1}\, X\,'y = \left(\; \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \;\right)'. \tag{3.6}$$

Dan, jika diasumsikan dengan salah, yaitu bahwa faktor error bersifat *homoskedastik*, maka estimasi matriks kovariansi yang diperoleh dengan

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{17}\left(y - X\widehat{\beta}_{OLS}\right)'\Psi^{-1}\left(y - X\widehat{\beta}_{OLS}\right) = \dots\dots\dots \tag{3.7}$$

adalah

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{\beta}_{OLS}) &= \widehat{\sigma}^2 \left(X\,'X\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Akar-akar kuadrat dari elemen-elemen diagonal matriks kovariansi merupakan standard error untuk estimasi secara OLS, yaitu ...., ..., dan .... secara urut untuk $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2$,dan $\widehat{\beta}_3$.

Sebaliknya, jika diasumsikan benar, yaitu bahwa faktor error bersifat *heteroskedastik*, maka matriks kovariansi untuk $\widehat{\beta}_{OLS}$ sebenarnya adalah

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{\beta}_{OLS}) &= \left(X\,'X\right)^{-1} X\,'\Phi X \left(X\,'X\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.9}$$

yang menghasilkan standard error untuk estimasi secara OLS yang lebih kecil dari pada dengan asumsi yang salah, yaitu ...., ..., dan ....

Dengan diperoleh $\widehat{\beta}_{OLS}$, dapat dilakukan estimasi untuk α dengan

$$Z = (1, x_{t2}) \tag{3.10}$$

$$q = \log(\widehat{e}_t^2) \tag{3.11}$$

$$\widehat{e}_t = y_t - X_t{}'\widehat{\beta} \tag{3.12}$$

diperoleh

$$\widehat{\alpha} = \left(Z'Z\right)^{-1} Z'q = \left(\ \dots\dots \quad \dots\dots\ \right)' \tag{3.13}$$

Sedangkan estimasi untuk β yang dilakukan secara *estimated generalized least squares* (EGLS), yaitu dengan

$$\widehat{\sigma}^2 = \exp(\widehat{\alpha}_1) \tag{3.14}$$

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{\sigma}^2 \exp(\widehat{\alpha}_2 x_{t2}) \tag{3.15}$$

$$\widehat{\Phi} = diag\left(\widehat{\sigma}_t^2\right) \tag{3.16}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{EGLS} &= \left(X\,'\widehat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} X\,'\widehat{\Phi}^{-1}y \\ &= \left(\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots\ \right)' \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dan, matriks kovariansinya adalah

$$\begin{aligned} Cov\left(\widehat{\beta}_{EGLS}\right) &= \left(X\,'\widehat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Jika dilakukan dengan *generalized least squares* (GLS) *estimator,* dengan asumsi yang salah, yaitu

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 x_{t2}^2 \tag{3.19}$$

sehingga bukan dengan Φ sebenarnya, katakanlah sebagai $\widetilde{\Phi}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}^*_{GLS} &= \left(X\,'\widetilde{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} X\,'\widetilde{\Phi}^{-1}y \\ &= (\;\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\;)' \end{aligned} \tag{3.20}$$

dengan matriks kovariansi

$$\begin{aligned} Cov\left(\widehat{\beta}^*_{GLS}\right) &= \left(X\,'\widetilde{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Bandingkan dengan menggunakan asumsi yang benar, yaitu dengan Φ sebenarnya, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{GLS} &= \left(X\,'\Phi^{-1}X\right)^{-1} X\,'\Phi^{-1}y \\ &= (\;\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\;)' \end{aligned} \tag{3.22}$$

dengan matriks kovariansi

$$\begin{aligned} Cov\left(\widehat{\beta}_{GLS}\right) &= \left(X\,'\Phi^{-1}X\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dari keempat hasil estimasi terhadap β di atas, dapat dibandingkan dengan tabel berikut

$$\begin{array}{ccccccc} & \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_2 & \widehat{\beta}_3 & \sqrt{Var\left(\widehat{\beta}_1\right)} & \sqrt{Var\left(\widehat{\beta}_2\right)} & \sqrt{Var\left(\widehat{\beta}_3\right)} \\ \beta & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}^*_{GLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{GLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array} \tag{3.24}$$

Hasil Analisa

....

....

....

Selanjutnya dilakukan pengujian terhadap keempat penaksir tersebut terhadap β_3 dengan uji t, untuk hipotesa

$$H_0 : \beta_3 = 0 \text{ dan } H_1 : \beta_3 \neq 0 \tag{3.25}$$

masing-masing diberlakukan dalam dua level signifikansi yang berbeda, dengan hasil

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ t\ Tabel & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}^*_{GLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{GLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array} \tag{3.26}$$

Dan untuk hipotesa

$$H_0 : \beta_3 = 1 \text{ dan } H_1 : \beta_3 \neq 1 \tag{3.27}$$

dilakukan uji F, masing-masing juga diberlakukan dalam dua level signifikansi yang berbeda, dengan hasil

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ F\ Tabel & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}^*_{GLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{GLS} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array} \tag{3.28}$$

Untuk melakukan pengujian secara *Goldfeld-Quandt test*, dilakukan pemisahan observasi yaitu dengan mengambil 8 observasi pertama dan 8 observasi terakhir. Keduanya dilakukan regresi dan menghasilkan *residual sums of squares* (SSE) secara berurutan sebagai S_1 dan S_2, yang memberikan nilai statistik F sebagai

$$F = \frac{S_2}{S_1} = ... \tag{3.29}$$

Pada level signifikansi 0.05 nilai kritis untuk $F_{(5,5)} = 5.0503$. Sehingga, keputusannnya adalah penerimaan adanya *heteroskedasticity*.

Sedangkan untuk melakukan *Breusch-Pagan test* diperlukan regresi $\widehat{e}_t^2 \,/\, \widetilde{\sigma}^2$ dimana

$$\widehat{e}_t^2 = y_t - x_t' \,\widehat{\beta} \tag{3.30}$$

dan

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{T-K}{T}\,\widehat{\sigma}^2 \tag{3.31}$$

Dengan regresi itu diperoleh nilai statistik yang relevan dari *regression sum of squares* (SSR) sebagai

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}SSR = \frac{1}{2}(SST - SSE) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{t=i}^{T}(y_t - \overline{y})^2 - \widehat{e}'\widehat{e}\right) \\ &= \frac{1}{2}(........ - ....) = ... \end{aligned} \tag{3.32}$$

Hasil Analisa

....
....
....

100 kali penaksiran (100 sampel)

Setelah dilakukan perulangan penaksiran sebanyak 100 kali dengan prosedur yang serupa pada satu kali penaksiran, diperoleh nilai rata-rata estimasi untuk keempat metode estimasi terhadap β di atas sebagai

$$\begin{array}{cccc} & \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_2 & \widehat{\beta}_3 \\ \beta & .... & .... & .... \\ \widehat{\beta}_{OLS} & .... & .... & .... \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & .... & .... & .... \\ \widehat{\beta}^*_{GLS} & .... & .... & .... \\ \widehat{\beta}_{GLS} & .... & .... & .... \end{array} \tag{3.33}$$

dengan *mean squares error matrix*

$$MSE_{OLS} = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

$$MSE_{EGLS} = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

$$MSE_{GLS\ *} = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$MSE_{GLS} = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Sedangkan rata-rata matriks kovariansinya masing-masing adalah

$$Cov(\widehat{\beta}_{OLS}) = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$Cov(\widehat{\beta}_{EGLS}) = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$Cov(\widehat{\beta}_{GLS\ *}) = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$$Cov(\widehat{\beta}_{GLS}) = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Dai hasil diatas, ternyata memang metode GLS dengan asumsi bentuk heteroskedastik yang salah menghasilkan variansi yang terbesar untuk penaksiran terhadap β_1. Namun tidak demikian untuk β_3, metode EGLS yang menghasilkan variansi yang terkecil diantara ketiga metode penaksiran lainnya. Jadi, dengan mengabaikan heteroskedastik, diperoleh estimasi terhadap β_3 yang lebih baik. Untuk lebih jelasnya, lihat gambar plot dari variansi berikut ini untuk masing-masing metode estimasi.

$$\tag{3.42}$$

$$\tag{3.43}$$

Sedangkan untuk pengujian hipotesa atas $\beta_3 = 0$, disajikan dalam bentuk proporsi sebagai

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}^{*}_{GLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{GLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3.44}$$

dan untuk pengujian hipotesa atas $\beta_3 = 1$, disajikan dalam bentuk proporsi sebagai

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}^{*}_{GLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{GLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3.45}$$

Hasil Analisa

....
....
....

3.3 Hasil dan Analisis Autocorrelation

Satu kali penaksiran (satu sampel)

Misalkan data y pada model (3.2) dibangun dengan e_t berdistribusi normal dan *independent*, dengan

$$E[e_t] = 0,\ E[e_t^2] = \sigma_v^2 \Psi = \Phi \tag{3.46}$$

dan

$$e_t = \rho\ e_{t-1} + v_t \tag{3.47}$$

dimana

$$\rho = ...\text{dan } v_t^2 = ...$$

Jika dilakukan estimasi terhadap β secara *ordinary least squares* maka diperoleh

$$\widehat{\beta}_{OLS} = (X\,'X)^{-1}\, X\,'y = \left(\ ....\quad ....\quad ....\ \right)'. \tag{3.48}$$

dengan matriks kovariansi

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{\beta}_{OLS}) &= \widehat{\sigma}^2\,(X\,'X)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.49}$$

dimana

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{17}\left(y - X\widehat{\beta}_{OLS}\right)'\Psi^{-1}\left(y - X\widehat{\beta}_{OLS}\right) = ... \tag{3.50}$$

dan

$$\widehat{\rho} = \left(\widehat{e}'_{t-1}\widehat{e}_{t-1}\right)^{-1}\ \widehat{e}'_{t-1}\ \widehat{e}_t = ... \tag{3.51}$$

Sedangkan estimasi untuk β yang dilakukan secara *estimated generalized least squares* (EGLS), dengan menggunakan $\widehat{\rho}$ untuk $'\widehat{\Phi}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{EGLS} &= \left(X\,'\widehat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} X\,'\widehat{\Phi}^{-1}y \\ &= \left(\ ....\quad ....\quad ....\ \right)' \end{aligned} \tag{3.52}$$

Dan, matriks kovariansinya adalah

$$\begin{aligned} Cov\left(\widehat{\beta}_{EGLS}\right) &= \left(X\,'\widehat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Hasil Analisa

....
....
....

Selanjutnya dilakukan pengujian terhadap kedua penaksir tersebut terhadap β_2 dengan uji t, untuk hipotesa

$$H_0 : \beta_2 = 0 \text{ dan } H_1 : \beta_2 \neq 0 \tag{3.54}$$

masing-masing diberlakukan dalam dua level signifikansi yang berbeda, dengan hasil

$$\begin{array}{lcccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ t\ Tabel & & & & \\ \widehat{\beta}_{OLS} & & & & \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & & & & \end{array} \tag{3.55}$$

Dan untuk hipotesa

$$H_0 : \beta_2 = 1 \text{ dan } H_1 : \beta_2 \neq 1 \tag{3.56}$$

dilakukan uji F, masing-masing juga diberlakukan dalam dua level signifikansi yang berbeda, dengan hasil

$$\begin{array}{lcccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ F\ Tabel & .... & .... & .... & .... \\ \widehat{\beta}_{OLS} & .... & .... & .... & .... \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & .... & .... & .... & .... \end{array} \tag{3.57}$$

Untuk pengujian atas hipotesa

$$H_0 : \rho = 0 \text{ dan } H_1 : \rho \neq 0 \tag{3.58}$$

dilakukan dengan *asymtotic test* dengan level signifikansi 0.05 yang bernilai kritis pada 1.96 menghasilkan nilai statistik

$$\left|\widehat{\rho}\sqrt{T}\right| = ... \tag{3.59}$$

sehingga menolak hipotesa nol. Selain itu, juga dapat dilakukan dengan *Durbin-Watson* test yang memberikan nilai statistik berada dalam interval kritis

$$1.1 < d = \frac{\widehat{e}' A \widehat{e}}{\widehat{e}' \widehat{e}} = ... < 1.537 \tag{3.60}$$

sehingga hipotesa nol tertolak. Kedua test ini telah membuktikan adanya hubungan *autocorrelation* pada faktor error model.

100 kali penaksiran (100 sampel)

Setelah dilakukan perulangan penaksiran sebanyak 100 kali dengan prosedur yang serupa pada satu kali penaksiran, diperoleh nilai rata-rata estimasi untuk kedua metode estimasi terhadap β di atas sebagai

$$\begin{array}{cccc} & \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_2 & \widehat{\beta}_3 \\ \beta & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3.61}$$

dengan *mean squares error matrix*

$$MSE_{OLS} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

$$MSE_{EGLS} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Sedangkan rata-rata matriks kovariansinya masing-masing adalah

$$Cov(\widehat{\beta}_{OLS}) = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

$$Cov(\widehat{\beta}_{EGLS}) = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

Terlihat bahwa estimasi EGLS sangat jauh dari nilai sebenarnya untuk β_1.

Selanjutnya dilakukan pengujian terhadap hipotesa $\beta_2 = 0$ dengan uji t disajikan dalam bentuk proporsi sebagai

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3.66}$$

Dan untuk hipotesa $\beta_2 = 1$ dilakukan uji Fsebagai

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha = 0.05 & Keputusan & \alpha = 0.10 & Keputusan \\ \widehat{\beta}_{OLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widehat{\beta}_{EGLS} & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3.67}$$

Hasil Analisa

....

....

....

3.4 Kesimpulan

3.5 Program Matlab

```
 % HETEROSKEDASTICITY
% Program ini digunakan untuk menguji penaksir beta OLS dan GLS.
clc; % Membersihkan layar kerja
tic; % Mencatat waktu CPU bekerja
disp('========================================');
disp('Program ini digunakan untuk menguji penaksir beta OLS dan GLS.')
disp('Pada Heteroskodastic Genaralized Linear Statistical Model')
disp('========================================');
% Memasukkan data sampel X dengan 3 variabel bebas
% X1, X2 dan X3, sebanyak T observasi.
X = [ ...... ];  % Isi sesuai dengan data eksperimen

[T K] = size(X); % Mendefinisikan ordo matriks X
OBS = (1:T)' ; % Mendefinisikan jumlah observasi
X1 = X(:,1);
X2 = X(:,2);
X3 = X(:,3);
iX = inv(X'*X);

% Membentuk Y dengan variabel Beta dan Alfa yang diketahui
Beta = [.....  ; ......;  .......]; Alfa = [ .....  ;  .......];  % Isi sesuai dengan data eksperimen
sig2 = exp(Alfa(1)+Alfa(2)*X2);
sigma2 = exp(Alfa(1));
Phi = diag(sig2);iP=inv(Phi);
disp('Nilai Beta sebenarnya =');disp(Beta')
disp('Nilai Alfa sebenarnya =');disp(Alfa')
disp('Nilai Variansi (Sigma2) sebenarnya =');disp(sigma2)

disp('======= Penaksiran untuk 1 sample =========');
% Membangkitkan Y
e = zeros(T,1);
for t = 1:T
 e(t)=normrnd(0,sqrt(sig2(t)));
end
Y=X*Beta+e;

% Menaksir Beta dan Alfa secara OLS
Bols=iX*X'*Y;
sigma2ols=(Y-X*Bols)'*(Y-X*Bols)/(T-K);
```

```
Z=[X1 X2]; ec=Y-X*Bols; q=log(ec.^2);
Aols=inv(Z'*Z)*Z'*q;
CovBolsc = sigma2ols*iX;
VarB1olsc = sqrt(CovBolsc(1,1));
VarB2olsc = sqrt(CovBolsc(2,2));
VarB3olsc = sqrt(CovBolsc(3,3));
CovBols = iX*X'*Phi*X*iX;
VarB1ols = sqrt(CovBols(1,1));
VarB2ols = sqrt(CovBols(2,2));
VarB3ols = sqrt(CovBols(3,3));

disp('Data Silmulasi Heteroskedastik :');
disp('y x2 x3 sig2 ec =');disp([Y X2 X3 sig2 ec])
disp('Nilai estimasi Beta secara OLS =');disp(Bols')
disp('Nilai estimasi Alfa secara OLS =');disp(Aols')
disp('Nilai estimasi Variansi Error secara OLS =');disp(sigma2ols)
disp('Matriks estimasi Kovariansi Bols =');disp(CovBolsc)
disp('Nilai estimasi Standard deviasi Bols =');disp([VarB1olsc VarB2olsc VarB3olsc]);
disp('Matriks Kovariansi Bols =');disp(CovBols)
disp('Nilai Standard deviasi Bols =');disp([VarB1ols VarB2ols VarB3ols]);

% Menaksir Beta secara EGLS
sigma2c=exp(Aols(1));
sig2c=sigma2c*exp(Aols(2)*X2);
Phic=diag(sig2c); iPc=inv(Phic);
Psic=Phic/sigma2c; iPsc=inv(Psic);
Begls=inv(X'*iPc*X)*X'*iPc*Y;
sigma2egls=(Y-X*Begls)'*iPsc*(Y-X*Begls)/(T-K);
CovBegls = inv(X'*iPc*X);
VarB1egls = sqrt(CovBegls(1,1));
VarB2egls = sqrt(CovBegls(2,2));
VarB3egls = sqrt(CovBegls(3,3));

disp('Nilai estimasi Beta secara EGLS =');disp(Begls')
disp('Nilai estimasi Variansi Error secara EGLS =');disp(sigma2egls)
disp('Matriks Kovariansi Begls =');disp(CovBegls)
disp('Nilai Standard deviasi Begls =');disp([VarB1egls VarB2egls VarB3egls]);

% Menaksir Beta secara GLS with incorrect sig2
sig2c=sigma2*X2.^2;
Phic=diag(sig2c); iPc=inv(Phic);
```

```
Psic=Phic/sigma2c; iPsc=inv(Psic);
Bglsc=inv(X'*iPc*X)*X'*iPc*Y;
sigma2glsc=(Y-X*Bglsc)'*iPsc*(Y-X*Bglsc)/(T-K);
CovBglsc = inv(X'*iPc*X);
VarB1glsc = sqrt(CovBglsc(1,1));
VarB2glsc = sqrt(CovBglsc(2,2));
VarB3glsc = sqrt(CovBglsc(3,3));

disp('Nilai estimasi Beta secara GLS =');disp(Bglsc')
disp('Nilai estimasi Variansi Error secara GLS =');disp(sigma2glsc)
disp('Matriks kovariansi Bgls =');disp(CovBglsc)
disp('Nilai Standard deviasi Bgls =');disp([VarB1glsc VarB2glsc VarB3glsc]);

% Menaksir Beta secara GLS with correct sig2
Psi=Phi/sigma2; iPs=inv(Psi);
Bgls=inv(X'*iP*X)*X'*iP*Y;
sigma2gls=(Y-X*Bgls)'*iPs*(Y-X*Bgls)/(T-K);
CovBgls = inv(X'*iP*X);
VarB1gls = sqrt(CovBgls(1,1));
VarB2gls = sqrt(CovBgls(2,2));
VarB3gls = sqrt(CovBgls(3,3));

disp('Nilai estimasi Beta secara GLS benar =');disp(Bgls')
disp('Nilai estimasi Variansi Error secara GLS benar =');disp(sigma2gls)
disp('Matriks kovariansi Bgls benar =');disp(CovBgls)
disp('Nilai Standard deviasi Bgls benar =');disp([VarB1gls VarB2gls VarB3gls]);
% Uji t terhadap penaksir Beta 3

% Type A (alfa = 0.05)==> H0 : Beta3 = 0 dan H1 : Beta3 <> 0
tTabel1 = tinv(1-0.05/2,T-K)
tTestols = Bols(3)/sqrt(CovBols(3,3))
if tTestols > tTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 OLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 OLS = 0')
end
tTestegls = Begls(3)/sqrt(CovBegls(3,3))
if tTestegls > tTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 EGLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 EGLS = 0')
```

```
end
tTestglsc = Bglsc(3)/sqrt(CovBglsc(3,3))
if tTestglsc > tTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLSc = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLSc = 0')
end
tTestgls = Bgls(3)/sqrt(CovBgls(3,3))
if tTestgls > tTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLS = 0')
end

% Type B (alfa = 0.10)==> H0 : Beta3 = 0 dan H1 : Beta3 <> 0
tTabel2 = tinv(1-0.10/2,T-K)
if tTestols > tTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 OLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 OLS = 0')
end
if tTestegls > tTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 EGLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 EGLS = 0')
end
if tTestglsc > tTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLSc = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLSc = 0')
end
if tTestgls > tTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLS = 0')
end

% Uji F terhadap penaksir Beta 3
% Type A (alfa = 0.05)==> H0 : Beta3 = 1 dan H1 : Beta3 <> 1
R1 = [0 0 1]; r1 =rank(R1);
FTabel1 = finv(1-0.05,r1,T-K)
```

```
FTestols = (Bols(3)-1)^2/(R1*CovBols*R1')
if FTestols > FTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 OLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 OLS = 1')
end
FTestegls = (Begls(3)-1)^2/(R1*CovBegls*R1')
if FTestegls > FTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 EGLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 EGLS = 1')
end
FTestglsc = (Bglsc(3)-1)^2/(R1*CovBglsc*R1')
if FTestglsc > FTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLSc = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLSc = 1')
end
FTestgls = (Bgls(3)-1)^2/(R1*CovBgls*R1')
if FTestgls > FTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLS = 1')
end

% Type B (alfa = 0.10)==> H0 : Beta3 = 1 dan H1 : Beta3 <> 1
FTabel2 = finv(1-0.10,r1,T-K)
if FTestols > FTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 OLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 OLS = 1')
end
if FTestegls > FTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 EGLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 EGLS = 1')
end
if FTestglsc > FTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLSc = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLSc = 1')
```

```
end
if FTestgls > FTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta3 GLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta3 GLS = 1')
end

% The Goldfeld-Quandt Test
% H0:sig2(1)=...=sig2(T) dan H1:sig2(1)<=...<=sig2(T)
r=4; ob=(T-r)/2;
Y1=zeros(ob,1); Y2=zeros(ob,1);
X11=zeros(ob,3); X12=zeros(ob,3);
for t = 1:ob
 Y1(t)=Y(t); Y2(t)=Y(ob+r+t);
 X11(t,:)=X(t,:); X12(t,:)=X(ob+r+t,:);
end
iX11 = inv(X11'*X11); iX12 = inv(X12'*X12);
Bob1 = iX11*X11'*Y1; Bob2 = iX12*X12'*Y2;
ec1 = Y1-X11*Bob1; ec2 = Y2-X12*Bob2;
S1=ec1'*ec1
S2=ec2'*ec2
lambda = S2/S1
df=[(T-r-2*K)/2,(T-r-2*K)/2];
FtabelGQT = finv(1-0.05,df,df)
if lambda > FtabelGQT
 disp('Tolak H0 : Homoskedasticity')
else
 disp('Terima H0 : Homoskedasticity')
end

% The Breusch-Pagan Test
% H0:sig2(1)=...=sig2(T) dan H1:sig2(t)=h(zt'*alfa)
Yb = ec.^2./(((T-K)/T)*sigma2ols);
SST = sum((Yb-mean(Yb)).^2)
Bb = iX*X'*Yb;
ecb = Yb-X*Bb;
SSE = ecb'*ecb
SSR = SST - SSE
BPT = 3.84 % Critical value 5% of Chi-Squares(1)
if SSR/2 > BPT
 disp('Tolak H0 : Homoskedasticity')
```

```
else
 disp('Terima H0 : Homoskedasticity')
end
disp(' ')

disp('======= Perulangan hingga 100 sample ========');
% Mendefinisikan nilai awal untuk perhitungan proporsi uji t dan F
Total_Terima_B3ols1_0 = 0; Total_Terima_B3egls1_0 = 0;
Total_Terima_B3glsc1_0 = 0; Total_Terima_B3gls1_0 = 0;
Total_Tolak_B3ols1_0 = 0; Total_Tolak_B3egls1_0 = 0;
Total_Tolak_B3glsc1_0 = 0; Total_Tolak_B3gls1_0 = 0;
Total_Terima_B3ols1_1 = 0; Total_Terima_B3egls1_1 = 0;
Total_Terima_B3glsc1_1 = 0; Total_Terima_B3gls1_1 = 0;
Total_Tolak_B3ols1_1 = 0; Total_Tolak_B3egls1_1 = 0;
Total_Tolak_B3glsc1_1 = 0; Total_Tolak_B3gls1_1 = 0;
Total_Terima_B3ols2_0 = 0; Total_Terima_B3egls2_0 = 0;
Total_Terima_B3glsc2_0 = 0; Total_Terima_B3gls2_0 = 0;
Total_Tolak_B3ols2_0 = 0; Total_Tolak_B3egls2_0 = 0;
Total_Tolak_B3glsc2_0 = 0; Total_Tolak_B3gls2_0 = 0;
Total_Terima_B3ols2_1 = 0; Total_Terima_B3egls2_1 = 0;
Total_Terima_B3glsc2_1 = 0; Total_Terima_B3gls2_1 = 0;
Total_Tolak_B3ols2_1 = 0; Total_Tolak_B3egls2_1 = 0;
Total_Tolak_B3glsc2_1 = 0; Total_Tolak_B3gls2_1 = 0;
Total_Tolak_GQT = 0; Total_Terima_GQT = 0; Total_Tolak_BPT = 0;
Total_Terima_BPT = 0;

rep = 100;
mseBols=zeros(K,K);mseAols=zeros(2,2);
mseBegls=zeros(K,K);mseBglsc=zeros(K,K);mseBgls=zeros(K,K);
sumCovBolsc=zeros(K,K);sumCovBols=zeros(K,K);
sumCovBegls=zeros(K,K);sumCovBglsc=zeros(K,K);sumCovBgls=zeros(K,K);

for i = 1:rep
 % Membangkitkan Y
 e = zeros(T,1);
 for t = 1:T
 e(t)=normrnd(0,sqrt(sig2(t)));
 end
 Y=X*Beta+e;

 % Menaksir Beta dan Alfa secara OLS
```

```
Bols=iX*X'*Y; Bolsp(i,:)=Bols';
mseBols=mseBols+(Bols-Beta)*(Bols-Beta)';
sigma2ols=(Y-X*Bols)'*(Y-X*Bols)/(T-K);
Z=[X1 X2]; ec=Y-X*Bols; q=log(ec.^2);
Aols=inv(Z'*Z)*Z'*q; Aolsp(i,:)=Aols';
mseAols=mseAols+(Aols-Alfa)*(Aols-Alfa)';
CovBolsc=sigma2ols*iX; sumCovBolsc=sumCovBolsc+CovBolsc;
CovBols=iX*X'*Phi*X*iX; sumCovBols=sumCovBols+CovBols;

% Menaksir Beta secara EGLS
sigma2c=exp(Aols(1));
sig2c=sigma2c*exp(Aols(2)*X2);
Phic=diag(sig2c); iPc=inv(Phic);
Psic=Phic/sigma2c; iPsc=inv(Psic);
Begls=inv(X'*iPc*X)*X'*iPc*Y;
Beglsp(i,:)=Begls';
sigma2egls=(Y-X*Begls)'*iPsc*(Y-X*Begls)/(T-K);
mseBegls=mseBegls+(Begls-Beta)*(Begls-Beta)';
CovBegls=inv(X'*iPc*X); sumCovBegls=sumCovBegls+CovBegls;

% Menaksir Beta secara GLS with incorrect sig2
sig2c=sigma2*X2.^2;
Phic=diag(sig2c); iPc=inv(Phic);
Psic=Phic/sigma2; iPsc=inv(Psic);
Bglsc=inv(X'*iPc*X)*X'*iPc*Y;
Bglscp(i,:)=Bglsc';
sigma2glsc=(Y-X*Bglsc)'*iPsc*(Y-X*Bglsc)/(T-K);
mseBglsc=mseBglsc+(Bglsc-Beta)*(Bglsc-Beta)';
CovBglsc=inv(X'*iPc*X); sumCovBglsc=sumCovBglsc+CovBglsc;

% Menaksir Beta secara GLS with correct sig2
Bgls=inv(X'*iP*X)*X'*iP*Y;
Bglsp(i,:)=Bgls';
sigma2gls=(Y-X*Bgls)'*iPs*(Y-X*Bgls)/(T-K);
mseBgls=mseBgls+(Bgls-Beta)*(Bgls-Beta)';
CovBgls=inv(X'*iP*X); sumCovBgls=sumCovBgls+CovBgls;

% Uji t terhadap penaksir Beta 3
% Type 1 ==> H0 : Beta3 = 0 dan H1 : Beta3 <> 0 (alfa = 0.05)
tTestols = Bols(3)/sqrt(CovBols(3,3));
if tTestols > tTabel1
```

```
Total_Tolak_B3ols1_0 = Total_Tolak_B3ols1_0 + 1;
else
Total_Terima_B3ols1_0 = Total_Terima_B3ols1_0 + 1;
end
tTestegls = Begls(3)/sqrt(CovBegls(3,3));
if tTestegls > tTabel1
Total_Tolak_B3egls1_0 = Total_Tolak_B3egls1_0 + 1;
else
Total_Terima_B3egls1_0 = Total_Terima_B3egls1_0 + 1;
end
tTestglsc = Bglsc(3)/sqrt(CovBglsc(3,3));
if tTestglsc > tTabel1
Total_Tolak_B3glsc1_0 = Total_Tolak_B3glsc1_0 + 1;
else
Total_Terima_B3glsc1_0 = Total_Terima_B3glsc1_0 + 1;
end
tTestgls = Bgls(3)/sqrt(CovBgls(3,3));
if tTestgls > tTabel1
Total_Tolak_B3gls1_0 = Total_Tolak_B3gls1_0 + 1;
else
Total_Terima_B3gls1_0 = Total_Terima_B3gls1_0 + 1;
end

% Type 2 ==> H0 : Beta3 = 0 dan H1 : Beta3 <> 0 (alfa = 0.10)
if tTestols > tTabel2
Total_Tolak_B3ols2_0 = Total_Tolak_B3ols2_0 + 1;
else
Total_Terima_B3ols2_0 = Total_Terima_B3ols2_0 + 1;
end
if tTestegls > tTabel2
Total_Tolak_B3egls2_0 = Total_Tolak_B3egls2_0 + 1;
else
Total_Terima_B3egls2_0 = Total_Terima_B3egls2_0 + 1;
end
if tTestglsc > tTabel2
Total_Tolak_B3glsc2_0 = Total_Tolak_B3glsc2_0 + 1;
else
Total_Terima_B3glsc2_0 = Total_Terima_B3glsc2_0 + 1;
end
if tTestgls > tTabel2
Total_Tolak_B3gls2_0 = Total_Tolak_B3gls2_0 + 1;
```

```
else
Total_Terima_B3gls2_0 = Total_Terima_B3gls2_0 + 1;
end

% Uji F terhadap penaksir Beta 3
% Type B1 ==> H0 : Beta3 = 1 dan H1 : Beta3 <> 1 (alfa = 0.05)
FTestols = (Bols(3)-1)'*(Bols(3)-1)/(R1*CovBols*R1');
if FTestols > FTabel1
Total_Tolak_B3ols1_1 = Total_Tolak_B3ols1_1 + 1;
else
Total_Terima_B3ols1_1 = Total_Terima_B3ols1_1 + 1;
end
FTestegls = (Begls(3)-1)'*(Begls(3)-1)/(R1*CovBegls*R1');
if FTestegls > FTabel1
Total_Tolak_B3egls1_1 = Total_Tolak_B3egls1_1 + 1;
else
Total_Terima_B3egls1_1 = Total_Terima_B3egls1_1 + 1;
end
FTestglsc = (Bglsc(3)-1)'*(Bglsc(3)-1)/(R1*CovBglsc*R1');
if FTestglsc > FTabel1
Total_Tolak_B3glsc1_1 = Total_Tolak_B3glsc1_1 + 1;
else
Total_Terima_B3glsc1_1 = Total_Terima_B3glsc1_1 + 1;
end
FTestgls = (Bgls(3)-1)'*(Bgls(3)-1)/(R1*CovBgls*R1');
if FTestgls > FTabel1
Total_Tolak_B3gls1_1 = Total_Tolak_B3gls1_1 + 1;
else
Total_Terima_B3gls1_1 = Total_Terima_B3gls1_1 + 1;
end

% Type 2 ==> H0 : Beta3 = 1 dan H1 : Beta3 <> 1 (alfa = 0.10)
if FTestols > FTabel2
Total_Tolak_B3ols2_1 = Total_Tolak_B3ols2_1 + 1;
else
Total_Terima_B3ols2_1 = Total_Terima_B3ols2_1 + 1;
end
if FTestegls > FTabel2
Total_Tolak_B3egls2_1 = Total_Tolak_B3egls2_1 + 1;
else
Total_Terima_B3egls2_1 = Total_Terima_B3egls2_1 + 1;
```

```
end
if FTestglsc > FTabel2
Total_Tolak_B3glsc2_1 = Total_Tolak_B3glsc2_1 + 1;
else
Total_Terima_B3glsc2_1 = Total_Terima_B3glsc2_1 + 1;
end
if FTestgls > FTabel2
Total_Tolak_B3gls2_1 = Total_Tolak_B3gls2_1 + 1;
else
Total_Terima_B3gls2_1 = Total_Terima_B3gls2_1 + 1;
end

% The Goldfeld-Quandt Test
% H0:sig2(1)=...=sig2(T) dan H1:sig2(1)<=...<=sig2(T)
r=4; ob=(T-r)/2;
Y1=zeros(ob,1); Y2=zeros(ob,1);
X11=zeros(ob,3); X12=zeros(ob,3);
for t = 1:ob
Y1(t)=Y(t); Y2(t)=Y(ob+r+t);
X11(t,:)=X(t,:); X12(t,:)=X(ob+r+t,:);
end
iX11 = inv(X11'*X11); iX12 = inv(X12'*X12);
Bob1 = iX11*X11'*Y1; Bob2 = iX12*X12'*Y2;
ec1 = Y1-X11*Bob1; ec2 = Y2-X12*Bob2;
S1=ec1'*ec1; S2=ec2'*ec2; lambda = S2/S1;
if lambda > FtabelGQT
Total_Tolak_GQT = Total_Tolak_GQT + 1;
else
Total_Terima_GQT = Total_Terima_GQT + 1;
end

% The Breusch-Pagan Test
% H0:sig2(1)=...=sig2(T) dan H1:sig2(t)=h(zt'*alfa)
Yb = ec.^2./(((T-K)/T)*sigma2ols);
SST = sum((Yb-mean(Yb)).^2);
Bb = iX*X'*Yb; ecb = Yb-X*Bb;
SSE = ecb'*ecb; SSR = SST - SSE;
if SST > BPT
Total_Tolak_BPT = Total_Tolak_BPT + 1;
else
Total_Terima_BPT = Total_Terima_BPT + 1;
```

```
 end
end

% Menampilkan hasil perulangan
disp('Rata-rata nilai estimasi Beta secara OLS =');disp(mean(Bolsp))
disp('Rata-rata nilai estimasi Alfa secara OLS =');disp(mean(Aolsp))
disp('Rata-rata nilai estimasi Beta secara EGLS =');disp(mean(Beglsp))
disp('Rata-rata nilai estimasi Beta secara GLSc =');disp(mean(Bglscp))
disp('Rata-rata nilai estimasi Beta secara GLS =');disp(mean(Bglsp))
disp('MSE nilai estimasi Beta secara OLS =');disp(mseBols/rep)
disp('MSE nilai estimasi Alfa secara OLS =');disp(mseAols/rep)
disp('MSE nilai estimasi Beta secara EGLS =');disp(mseBegls/rep)
disp('MSE nilai estimasi Beta secara GLSc =');disp(mseBglsc/rep)
disp('MSE nilai estimasi Beta secara GLS =');disp(mseBgls/rep)
disp('Rata-rata matriks kovariansi Beta OLS =');disp(sumCovBols/rep)
disp('Rata-rata matriks kovariansi Beta EGLS =');disp(sumCovBeglsc/rep)
disp('Rata-rata matriks kovariansi Beta GLSc =');disp(sumCovBglsc/rep)
disp('Rata-rata matriks kovariansi Beta GLS =');disp(sumCovBgls/rep)
disp('Total terima B3ols = 0 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3ols1_0);
disp('Total terima B3egls = 0 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3egls1_0);
disp('Total terima B3glsc = 0 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3glsc1_0);
disp('Total terima B3gls = 0 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3gls1_0);
disp('Total terima B3ols = 0 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3ols2_0);
disp('Total terima B3egls = 0 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3egls2_0);
disp('Total terima B3glsc = 0 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3glsc2_0);
disp('Total terima B3gls = 0 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3gls2_0);
disp('Total terima B3ols = 1 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3ols1_1);
disp('Total terima B3egls = 1 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3egls1_1);
disp('Total terima B3glsc = 1 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3glsc1_1);
disp('Total terima B3gls = 1 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B3gls1_1);
disp('Total terima B3ols = 1 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3ols2_1);
disp('Total terima B3egls = 1 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3egls2_1);
disp('Total terima B3glsc = 1 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3glsc2_1);
disp('Total terima B3gls = 1 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B3gls2_1);
disp('Total terima Ho Goldfeld-Quandt Test');disp(Total_Terima_GQT);
disp('Total terima Ho Breusch-Pagan Test');disp(Total_Terima_BPT);

figure(1);subplot(2,1,1);plot(Bolsp(:,1),'b')
hold on;plot(Bolsp(:,2),'r')
hold on;plot(Bolsp(:,3),'g')
title('Estimasi Beta secara OLS');
```

```
legend('\beta 1','\beta 2','\beta 3')
subplot(2,1,2);plot(Beglsp(:,1),'b')
hold on;plot(Beglsp(:,2),'r')
hold on;plot(Beglsp(:,3),'g')
title('Estimasi Beta secara EGLS');
legend('\beta 1','\beta 2','\beta 3')

figure(2);subplot(2,1,1);plot(Bglscp(:,1),'b')
hold on;plot(Bglscp(:,2),'r')
hold on;plot(Bglscp(:,3),'g')
title('Estimasi Beta secara GLS*');
legend('\beta 1','\beta 2','\beta 3')
subplot(2,1,2);plot(Bglsp(:,1),'b')
hold on;plot(Bglsp(:,2),'r')
hold on;plot(Bglsp(:,3),'g')
title('Estimasi Beta secara GLS');
legend('\beta 1','\beta 2','\beta 3')

waktu_hitung = toc % Menampilkan catatan waktu CPU bekerja
```

```
% AUTOCORRELATION
% Program ini digunakan untuk menguji penaksir beta OLS dan GLS.
clc; % Membersihkan layar kerja
tic; % Mencatat waktu CPU bekerja
disp('========================= ==========');
disp('Program ini digunakan untuk menguji penaksir beta OLS dan GLS.')
disp('Pada Autocorrelation Genaralized Linear Statistical Model')
disp('====================================');
% Memasukkan data sampel X dengan 3 variabel bebas
% X1, X2 dan X3, sebanyak T observasi.
X = [1 14.53 16.74; 1 15.30 16.81; 1 15.92 19.50; 1 17.41 22.12
 1 18.37 22.34; 1 18.83 17.47; 1 18.84 20.24; 1 19.71 20.37
 1 20.01 12.71; 1 20.26 22.98; 1 20.77 19.33; 1 21.17 17.04
 1 21.34 16.74; 1 22.91 19.81; 1 22.96 31.92; 1 23.69 26.31
 1 24.82 25.93; 1 25.54 21.96; 1 25.63 24.05; 1 28.73 25.66];

[T K] = size(X); % Mendefinisikan ordo matriks X
OBS = (1:T)' ; % Mendefinisikan jumlah observasi
X1 = X(:,1); % Mendefinisikan kolom 1 matriks X sebagai var B1
X2 = X(:,2); % Mendefinisikan kolom 2 matriks X sebagai var B2
X3 = X(:,3); % Mendefinisikan kolom 3 matriks X sebagai var B3
iX = inv(X'*X);

% Membentuk Y dengan variabel Beta, ro dan sig2v yang diketahui
Beta = [10; 1; 1]; ro = 0.8; sig2v = 6.4;
% Mengkonstruksi Psi sebenarnya
PsiM = zeros(T,T);
for i = 1:T
 for j = i:T
 PsiM(i,j) = ro^(j-i);
 end
end
for j = 1:T
 for i = j:T
 PsiM(i,j) = ro^(i-j);
 end
end
PsiK = 1/(1-ro^2);
Psi = PsiK*PsiM;

% Mengkonstruksi Phi = sig2v*Psi sebenarnya
```

```
Phi = sig2v*Psi;
CovBeta = iX*X'*Phi*X*iX;
disp('Nilai Beta sebenarnya =');disp(Beta')
disp('Matriks Kovariansi Beta =');disp(CovBeta)
disp('Nilai sigma2v sebenarnya');disp(sig2v)
disp('Nilai ro sebenarnya =');disp(ro')

disp('======== Penaksiran untuk 1 sample =========');
% Membangkitkan Y
e = zeros(T,1);
for t = 2:T
 e(t) = ro*e(t-1)+normrnd(0,sqrt(sig2v));
end
Y=X*Beta+e;

% Menaksir Beta secara OLS
Bols=iX*X'*Y;
sigma2ols=(Y-X*Bols)'*(Y-X*Bols)/(T-K);
CovBols = sigma2ols*inv(X'*X);
% Menaksir ro dengan menggunakan ecap
ec = Y-X*Bols; A = zeros(T-1,1); B = zeros(T-1,1);
for t = 1:T-1
 A(t)=ec(t+1); B(t)=ec(t);
end
roc = inv(B'*B)*B'*A;
disp('Data Silmulasi Autocorrelation :');
disp('y x2 x3 ecap =');disp([Y X2 X3 ec])
disp('Nilai estimasi Beta secara OLS =');disp(Bols')
disp('Matriks kovariansi Bols =');disp(CovBols)
disp('Nilai estimasi sigma2v OLS =');disp(sigma2ols)
disp('Nilai estimasi ro secara OLS =');disp(roc)

% Mengkonstruksi Psicap dengan rocap
PsiMc = zeros(T,T);
for i = 1:T
 for j = i:T
 PsiMc(i,j) = roc^(j-i);
 end
end
for j = 1:T
 for i = j:T
```

```
 PsiMc(i,j) = roc^(i-j);
 end
end
PsiKc = 1/(1-roc^2);
Psic = PsiKc*PsiMc;

% Mengkonstruksi Phicap = sig2v*Psicap sebenarnya
Phic = sig2v*Psic; iPc=inv(Phic);
% Menaksir Beta secara EGLS
Begls=inv(X'*iPc*X)*X'*iPc*Y;
sigma2egls=(Y-X*Begls)'*(Y-X*Begls)/(T-K);
CovBegls = inv(X'*iPc*X);
disp('Nilai estimasi Beta secara EGLS =');disp(Begls')
disp('Matriks kovariansi Begls =');disp(CovBegls)
disp('Nilai estimasi sigma2v EGLS =');disp(sigma2egls)

% Uji t terhadap penaksir Beta 2
% Type A (alfa = 0.05)==> H0 : Beta2 = 0 dan H1 : Beta2 <> 0
tTabel1 = tinv(1-0.05/2,T-K)
tTestols = Bols(2)/sqrt(CovBols(2,2))
if tTestols > tTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta2 OLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta2 OLS = 0')
end
tTestegls = Begls(2)/sqrt(CovBegls(2,2))
if tTestegls > tTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta2 EGLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta2 EGLS = 0')
end

% Type B (alfa = 0.10)==> H0 : Beta2 = 0 dan H1 : Beta2 <> 0
tTabel2 = tinv(1-0.10/2,T-K)
if tTestols > tTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta2 OLS = 0')
else
 disp('Terima H0 : Beta2 OLS = 0')
end
if tTestegls > tTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta2 EGLS = 0')
```

```
else
 disp('Terima H0 : Beta2 EGLS = 0')
end

% Uji F terhadap penaksir Beta 2
% Type A (alfa = 0.05)==> H0 : Beta2 = 1 dan H1 : Beta2 <> 1
R1 = [0 1 0]; r1 =rank(R1);
FTabel1 = finv(1-0.05,r1,T-K)
FTestols = (Bols(2)-1)^2/(R1*CovBols*R1')
if FTestols > FTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta2 OLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta2 OLS = 1')
end
FTestegls = (Begls(2)-1)^2/(R1*CovBegls*R1')
if FTestegls > FTabel1
 disp('Tolak H0 : Beta2 EGLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta2 EGLS = 1')
end

% Type B (alfa = 0.10)==> H0 : Beta2 = 1 dan H1 : Beta2 <> 1
FTabel2 = finv(1-0.10,r1,T-K)
if FTestols > FTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta2 OLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta2 OLS = 1')
end
if FTestegls > FTabel2
 disp('Tolak H0 : Beta2 EGLS = 1')
else
 disp('Terima H0 : Beta2 EGLS = 1')
end

% The Asymtotic Test
% H0: ro = 0 dan H1: ro <> 0 (alfa = 0.05)
%z = (roc-ro)/sqrt((1-ro^2)/T);
z = roc*sqrt(T)
AT = 1.96; %critical value alfa = 0.05
if abs(z) >= AT
 disp('Tolak H0 : ro = 0')
```

```
else
 disp('Terima H0 : ro = 0')
end

%The Durbin-Watson Test
% H0: ro = 0 dan H1: ro <> 0
Ad = [1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 1];
d = (ec'*Ad*ec)/(ec'*ec);
if and(d>1.1,d<1.537)
 disp('Tolak H0 : ro = 0')
else
 disp('Terima H0 : ro = 0')
end
disp(' ')

disp('===== Perulangan hingga 100 sample ======');
% Mendefinisikan nilai awal untuk perhitungan proporsi uji t dan F
Total_Terima_B2ols1_0 = 0; Total_Terima_B2egls1_0 = 0;
Total_Tolak_B2ols1_0 = 0; Total_Tolak_B2egls1_0 = 0;
Total_Terima_B2ols1_1 = 0; Total_Terima_B2egls1_1 = 0;
Total_Tolak_B2ols1_1 = 0; Total_Tolak_B2egls1_1 = 0;
Total_Terima_B2ols2_0 = 0; Total_Terima_B2egls2_0 = 0;
```

```
Total_Tolak_B2ols2_0 = 0; Total_Tolak_B2egls2_0 = 0;
Total_Terima_B2ols2_1 = 0; Total_Terima_B2egls2_1 = 0;
Total_Tolak_B2ols2_1 = 0; Total_Tolak_B2egls2_1 = 0;
Total_Tolak_AT = 0; Total_Terima_AT = 0;
Total_Tolak_DWT = 0; Total_Terima_DWT = 0;

rep = 100;
mseBols=zeros(K,K); mseBegls=zeros(K,K);
sumCovBols=0; sumCovBegls=0;
for i = 1:rep
 % Membangkitkan Y
 e = zeros(T,1);
 for t = 2:T
 e(t) = ro*e(t-1)+normrnd(0,sqrt(sig2v));
 end
 Y=X*Beta+e;

 % Menaksir Beta secara OLS
 Bols=iX*X'*Y; Bolsp(i,:)=Bols';
 mseBols=mseBols+(Bols-Beta)*(Bols-Beta)';
 sigma2ols=(Y-X*Bols)'*(Y-X*Bols)/(T-K);
 CovBols = sigma2ols*inv(X'*X);
 sumCovBols=sumCovBols+CovBols;

 % Menaksir ro dengan menggnakan ecap
 ec = Y-X*Bols; A = zeros(T-1,1); B = zeros(T-1,1);
 for t = 1:T-1
 A(t)=ec(t+1); B(t)=ec(t);
 end
 roc = inv(B'*B)*B'*A;

 % Mengkonstruksi Psicap dengan rocap
 PsiMc = zeros(T,T);
 for i = 1:T
 for j = i:T
 PsiMc(i,j) = roc^(j-i);
 end
 end
 for j = 1:T
 for i = j:T
 PsiMc(i,j) = roc^(i-j);
```

```
end
end
PsiKc = 1/(1-roc^2);
Psic = PsiKc*PsiMc;

% Mengkonstruksi Phicap = sig2v*Psicap sebenarnya
Phic = sig2v*Psic; iPc=inv(Phic);

% Menaksir Beta secara EGLS
Begls=inv(X'*iPc*X)*X'*iPc*Y; Beglsp(i,:)=Begls';
mseBegls=mseBegls+(Begls-Beta)*(Begls-Beta)';
sigma2egls=(Y-X*Begls)'*(Y-X*Begls)/(T-K);
CovBegls = inv(X'*iPc*X);
sumCovBegls=sumCovBegls+CovBegls;

% Uji t terhadap penaksir Beta 2
% Type A (alfa = 0.05)==> H0 : Beta2 = 0 dan H1 : Beta2 <> 0
tTestols = Bols(2)/sqrt(CovBols(2,2));
if tTestols > tTabel1
Total_Tolak_B2ols1_0 = Total_Tolak_B2ols1_0 + 1;
else
Total_Terima_B2ols1_0 = Total_Terima_B2ols1_0 + 1;
end
tTestegls = Begls(2)/sqrt(CovBegls(2,2));
if tTestegls > tTabel1
Total_Tolak_B2egls1_0 = Total_Tolak_B2egls1_0 + 1;
else
Total_Terima_B2egls1_0 = Total_Terima_B2egls1_0 + 1;
end

% Type B (alfa = 0.10)==> H0 : Beta2 = 0 dan H1 : Beta2 <> 0
if tTestols > tTabel2
Total_Tolak_B2ols2_0 = Total_Tolak_B2ols2_0 + 1;
else
Total_Terima_B2ols2_0 = Total_Terima_B2ols2_0 + 1;
end
if tTestegls > tTabel2
Total_Tolak_B2egls2_0 = Total_Tolak_B2egls2_0 + 1;
else
Total_Terima_B2egls2_0 = Total_Terima_B2egls2_0 + 1;
end
```

```
% Uji F terhadap penaksir Beta 2
% Type A (alfa = 0.05)==> H0 : Beta2 = 1 dan H1 : Beta2 <> 1
FTestols = (Bols(2)-1)'*(Bols(2)-1)/(R1*CovBols*R1');
if FTestols > FTabel1
Total_Tolak_B2ols1_1 = Total_Tolak_B2ols1_1 + 1;
else
Total_Terima_B2ols1_1 = Total_Terima_B2ols1_1 + 1;
end
FTestegls = (Begls(2)-1)'*(Begls(2)-1)/(R1*CovBegls*R1');
if FTestegls > FTabel1
Total_Tolak_B2egls1_1 = Total_Tolak_B2egls1_1 + 1;
else
Total_Terima_B2egls1_1 = Total_Terima_B2egls1_1 + 1;
end

% Type B (alfa = 0.10)==> H0 : Beta2 = 1 dan H1 : Beta2 <> 1
if FTestols > FTabel2
Total_Tolak_B2ols2_1 = Total_Tolak_B2ols2_1 + 1;
else
Total_Terima_B2ols2_1 = Total_Terima_B2ols2_1 + 1;
end
if FTestegls > FTabel2
Total_Tolak_B2egls2_1 = Total_Tolak_B2egls2_1 + 1;
else
Total_Terima_B2egls2_1 = Total_Terima_B2egls2_1 + 1;
end

% The Asymtotic Test
% H0: ro = 0 dan H1: ro <> 0 (alfa = 0.05)
%z = (roc-ro)/sqrt((1-ro^2)/T);
z = roc*sqrt(T);
AT = 1.96; %critical value alfa = 0.05
if abs(z) >= AT
Total_Tolak_AT = Total_Tolak_AT + 1;
else
Total_Terima_AT = Total_Terima_AT + 1;
end

%The Durbin-Watson Test
% H0: ro = 0 dan H1: ro <> 0
```

```
 d = (ec'*Ad*ec)/(ec'*ec);
 if and(d>1.1,d<1.537)
 Total_Tolak_DWT = Total_Tolak_DWT + 1;
 else
 Total_Terima_DWT = Total_Terima_DWT + 1;
 end
end

% Menampilkan hasil perulangan
disp('Rata-rata nilai estimasi Beta secara OLS =');disp(mean(Bolsp))
disp('Rata-rata nilai estimasi Beta secara EGLS =');disp(mean(Beglsp))
disp('MSE nilai estimasi Beta secara OLS =');disp(mseBols/rep)
disp('MSE nilai estimasi Beta secara EGLS =');disp(mseBegls/rep)
disp('Rata-rata matriks kovariansi Beta OLS =');disp(sumCovBols/rep)
disp('Rata-rata matriks kovariansi Beta EGLS =');disp(sumCovBegls/rep)
disp('Total terima B2ols = 0 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B2ols1_0);
disp('Total terima B2egls = 0 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B2egls1_0);
disp('Total terima B2ols = 0 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B2ols2_0);
disp('Total terima B2egls = 0 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B2egls2_0);
disp('Total terima B2ols = 1 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B2ols1_1);
disp('Total terima B2egls = 1 alfa = 0.05');disp(Total_Terima_B2egls1_1);
disp('Total terima B2ols = 1 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B2ols2_1);
disp('Total terima B2egls = 1 alfa = 0.10');disp(Total_Terima_B2egls2_1);
disp('Total terima Asymtotic Test');disp(Total_Terima_AT);
disp('Total terima Durbin-Watson Test');disp(Total_Terima_DWT);

waktu_hitung = toc % Menampilkan catatan waktu CPU bekerja
```

Bab 4

EKSPERIMEN MODEL STATISTIK NONLINIER

Perumusan Masalah

1. Bagaimana hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* pada LSE untuk model fungsi produksi CD dan CES ?

2. Bagaimana hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi BHHH dan *Modified* BHHH pada MLE untuk model fungsi produksi CD dan CES ?

3. Model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) dengan data sampel yang diberikan ?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk

1. Mengetahui hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* pada LSE untuk model fungsi produksi CD dan CES.

2. Mengetahui hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi BHHH dan *Modified* BHHH pada MLE untuk model fungsi produksi CD dan CES.

3. Mengetahui model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) dengan data sampel yang diberikan.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan kalkulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda penaksiran LSE dan MLE, yang dilakukan dengan perhitungan iterasi dengan menggunakan software **MATLAB,** hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen. Dilanjutkan dengan melakukan perhitungan data AIC dan/atau SC untuk nilai yang konvergen dari masing-masing iterasi. Dari hasil perhitungan akhir ini dapat ditentukan model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel tersebut.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun beberapa langkah prosedur yang dilakukan dari awal hinga akhir eksperimen, yaitu

1. Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi dan inferensi, khususnya model regresi statistik tak linier umum. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.

2. Menentukan data-data sampel untuk variabel L dan K, yaitu data untuk variabel bebas X yang berukuran 30x2, dan data sampel Q, yaitu data untuk variabel tak bebas y yang berukuran 30x1.Data-data sampel ini dibuat dalam bentuk matriks LKy yang berukuran 30x3.

3. Melakukan penaksiran parameter-parameter dengan metoda *Nonlinear Least Square Estimator.*

4. Menentukan nilai awal (*initial values*) untuk parameter-parameter β, dimana nilai awal ini disesuaikan untuk setiap model iterasi untuk memperoleh kekonvergenan, dengan selisih nilai sebesar 10^{-9}.

5. Melakukan perhitungan iterasi untuk parameter-parameter β dan perhitungan iterasi untuk nilai S hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen untuk keduanya, dengan model iterasi yang digunakan adalah *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* , keduanya digunakan untuk model fungsi produksi CD dan CES.

6. Melakukan perulangan penaksiran dengan metoda *Nonlinear Maximum Likelihod Estimator.*

7. Menentukan nilai awal (*initial values*) untuk parameter-parameter β, dimana nilai awal ini disesuaikan untuk setiap model iterasi untuk memperoleh kekonvergenan, dengan selisih nilai sebesar 10^{-10}.

8. Melakukan perhitungan iterasi untuk parameter-parameter β dan perhitungan iterasi untuk nilai L hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen untuk keduanya, dengan model iterasi yang digunakan adalah BHHH dan *Modified* BHHH, keduanya untuk model fungsi produksi CD dan CES.

9. Menghitung nilai AIC dan SC pada nilai konvergen yang dihasilkan dari perhitungan iterasi.

10. Membandingkan nilai-nilai konvergen dan nilai AIC dan SC yang dihasilkan oleh iterasi BHHH dan *Modified* BHHH, keduanya untuk model fungsi produksi CD dan CES.

11. Menentukan model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel yang diberikan, dengan perbandingan nilai AIC dan SC.

12. Mengamati dan menganalisa hasil eksperimen.

13. Menyusun laporan.

4.1 Input Data

Pandang kembali model statistik non linier

$$\mathrm{y}_t = \mathrm{f}\ (\mathrm{X}_t, \beta) + \mathrm{e}_t \tag{4.1}$$

Data X dan y diberikan dalam matriks LKy, dimana dua kolom pertama merupakan data X dan kolom terakhir merupakan data y, yang akan dipakai untuk model fungsi produksi CD dan CES dalam eksperimen ini. Dari data sampel di atas akan dilakukan penaksiran parameter-parameter β secara berulang. Untuk kedua model fungsi itu digunakan metoda penaksiran LSE dan MLE.

Bentuk umum iterasinya adalah

$$\beta^{n+1} = \beta^n - \mathrm{t}_n\ \mathrm{P}_n\ \gamma_n \tag{4.2}$$

dengan γ_n untuk LSE adalah

$$\gamma_n = \frac{\delta \mathrm{S}}{\delta \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.3}$$

untuk dan γ_n untuk MLE adalah

$$\gamma_n = \frac{\delta \mathrm{L}}{\delta \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.4}$$

dengan n menunjukkan iterasi ke n sedangkan t_n adalah suatu konstanta.

Berikut ini adalah data sampel untuk variabel bebas X (L dan K) dan y (Q) dalam satu matriks dengan ukuran 30x3, yaitu

$$LKy = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Sedangkan keadaan khusus untuk masing-masing iterasi dalam eksperimen ini adalah sebagai berikut

A **Fungsi Produksi CD**

$$\mathrm{y} = \beta_1 \mathrm{L}^{\beta_2} \mathrm{K}^{\beta_3} \tag{4.6}$$

1. *Gauss Newton*

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1 \\ \mathrm{t}_n &= 0.5 \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}(\beta^n)'\mathrm{Z}(\beta^n)]^{-1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

2. *Marquardt Levenberg*

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1 \\ \mathrm{t}_n &= 0.5 \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}(\beta^n)'\mathrm{Z}(\beta^n) + \lambda_n \mathrm{I}_k]^{-1} \\ \lambda_n &= 0.5 \end{aligned} \tag{4.8}$$

3. BHHH

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1 \\ \mathrm{t}_n &= 1, 2, 3, ... \text{ (bervariasi)} \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}^*(\beta^n)'\mathrm{Z}^*(\beta^n)]^{-1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

4. *Modified* BHHH

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_3 = 1, \beta_2 = 0.5 \\ \mathrm{t}_n &= 1, 2, 3, ... \text{ (bervariasi)} \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}^*(\beta^n)'\mathrm{Z}^*(\beta^n) + \lambda_n \mathrm{I}_k]^{-1} \\ \lambda_n &= 0.5 \end{aligned} \tag{4.10}$$

B **Fungsi Produksi CES**

$$\mathrm{y} = \beta_1 \left(\beta_2 \mathrm{L}^{\beta_3} + (1 - \beta_2)\, \mathrm{K}^{\beta_3}\right)^{\beta_4/\beta_3} \tag{4.11}$$

1. *Gauss Newton*

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_3 = \boldsymbol{\beta}_4 = 1, \beta_2 = 0.5 \\ \mathrm{t}_n &= 0.5 \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}(\beta^n)'\mathrm{Z}(\beta^n)]^{-1} \end{aligned} \tag{4.12}$$

2. *Marquardt Levenberg*

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_3 = \boldsymbol{\beta}_4 = 1, \beta_2 = 0.5 \\ \mathrm{t}_n &= 0.5 \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}(\beta^n)'\mathrm{Z}(\beta^n) + \lambda_n \mathrm{I}_k]^{-1} \\ \lambda_n &= 0.5 \end{aligned} \tag{4.13}$$

3. BHHH

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 1, \beta_2 = 0.5 \\ \mathrm{t}_n &= 1, 2, 3, ...(\text{bervariasi}) \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}^*(\beta^n)'\mathrm{Z}^*(\beta^n)]^{-1} \end{aligned} \tag{4.14}$$

4. *Modified* BHHH

$$\begin{aligned} \text{Nilai awal parameter } \beta^0 &: \beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 1,\ \beta_2 = 0.5 \\ \mathrm{t}_n &= 1, 2, 3, ...(\text{bervariasi}) \\ \mathrm{P}_n &= [\mathrm{Z}^*(\beta^n)'\mathrm{Z}^*(\beta^n) + \lambda_n \mathrm{I}_k]^{-1} \\ \lambda_n &= 0.5 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dalam perhitungan iterasi-iterasi LSE tersebut, perhitungan tidak hanya dilakukan untuk parameter β saja tetapi juga untuk f dan S, dengan S adalah fungsi objektif yang akan diminimumkan dengan bentuk

$$\mathrm{S} = (\mathrm{y} - \mathrm{f})\ '(\mathrm{y} - \mathrm{f}) \tag{4.16}$$

dan f merupakan fungsi terhadap X dan β dengan bentuk fungsi sesuai dengan model fungsi produksi CD atau CES.

Dari hasil perhitungan masing-masing iterasi akan diperoleh kekonvergenan untuk nilai parameter-parameter dengan menentukan

$$\left\|\beta^{n+1} - \beta^n\right\| \leq 10^{-9} \tag{4.17}$$

dan

$$|\mathrm{S} - \mathrm{S}_{\text{new}}| \leq 10^{-9} \tag{4.18}$$

Sedangkan dalam perhitungan iterasi-iterasi MLE, perhitungan tidak hanya dihitung untuk parameter β saja tetapi juga untuk f dan L, dengan L adalah fungsi objektif yang akan dimaksimumkan dengan bentuk

$$L = \log(\textit{likelihood function})$$

dimana fungsi *likelihood*nya adalah

$$l(\beta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\mathrm{T}/2} \exp\left(-\frac{[\mathrm{y} - \mathrm{f}\ (\mathrm{X}, \beta)]\ '[\mathrm{y} - \mathrm{f}\ (\mathrm{X}, \beta)]}{2\sigma^2}\right) \tag{4.19}$$

dan f merupakan fungsi terhadap X dan β dengan bentuk fungsi sesuai dengan model fungsi produksi CD atau CES.

Dari hasil perhitungan masing-masing iterasi akan diperoleh kekonvergenan untuk nilai parameter-parameter dengan menentukan

$$\left\|\beta^{n+1} - \beta^{n}\right\| \leq 10^{-9} \tag{4.20}$$

dan

$$\left|L - L_{\text{new}}\right| \leq 10^{-9} \tag{4.21}$$

Kemudian dari hasil konvergensi L tersebut dihitung pula nilai AIC, yaitu

$$\text{AIC} = -2\log(\text{ML}) + 2\,(\#\beta)$$

dan SC, yaitu

$$\text{SC} = -2\log(\text{ML}) + (\log(\text{T}))\,(\#\beta)$$

untuk masing-masing fungsi produksi. Fungsi produksi yang memberikan nilai AIC dan/atau SC yang paling kecil akan dipilih sebagai model fungsi yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel.

4.2 Hasil dan Analisis Eksperimen

Fungsi Cobb Douglas (CD)

NLS Gauss Newton Iterations

Hasil output iterasi *Gauss-Newton* untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan S dengan fungsi produksinya *Cobb Douglas* adalah

n	β_1	β_2	β_3	S
0	**1**	**1**	**1**	
1	....	....	....	....
2	....	....	....	....
3	....	....	....	....
4	....	....	....	....
5	....	....	....	....
6	....	....	....	....
7	....	....	....	....
8	....	....	....	....
9	....	....	....	....
10	....	....	....	....
11	....	....	....	....
12	....	....	....	....
13	....	....	....	....
14	....	....	....	....
15	....	....	....	....

S, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil NLS untuk fungsi CD dengan iterasi Gauss Newton adalah

b1	b2	b3	S
....	....	....	....

NLS Marquardt Levenberg Iterations

Hasil output iterasi *Marquardt Levenberg* untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan S dengan fungsi produksinya *Cobb Douglas* adalah:

untuk $\lambda = 0.5,\ t_n = 0.5$:

n	β_1	β_2	β_3	S
0	**1**	**1**	**1**	
1	....	....	....	....
2	....	....	....	....
3	....	....	....	....
4	....	....	....	....
5	....	....	....	....
6	....	....	....	....
7	....	....	....	....
8	....	....	....	....
9	....	....	....	....
10	....	....	....	....
11	....	....	....	....
12	....	....	....	....
13	....	....	....	....
14	....	....	....	....
15	....	....	....	....

untuk $\lambda = 0.011,\ t_n = 0.5$:

n	β_1	β_2	β_3	S
0	**1**	**1**	**1**	
1	....	....	....	....
2	....	....	....	....
3	....	....	....	....
4	....	....	....	....
5	....	....	....	....
6	....	....	....	....
7	....	....	....	....
8	....	....	....	....
9	....	....	....	....
10	....	....	....	....
11	....	....	....	....
12	....	....	....	....
13	....	....	....	....
14	....	....	....	....
15	....	....	....	....

S, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....
Hasil NLS untuk fungsi CD dengan iterasi Marquardt Levenberg adalah

b1	b2	b3	S
....	....	....	....

Hasil Analisa

Jika $\lambda = 0.5$, iterasi *Marquardt Levenberg* akan konvergen setelah iterasi ke-......... . Berbeda jika $\lambda = 0.011$, dengan t_n yang sama, iterasi *Marquardt Levenberg* akan konvergen setelah iterasi ke-............ Meskipun nilai-nilai penaksiran parameter β yang dihasilkan berbeda untuk setiap λ, diperoleh nilai S yang sama. Dan, penaksiran untuk parameter-parameter β_1, β_2 dan β_3 dapat dikatakan sama dengan metode iterasi Gauss-Newton, karena mempunyai ketelitian yang sangat dekat. Nilai S yang diperoleh dari kedua metoda iterasi tersebut juga sama. Dengan mengubah nilai λ pada metode *Marquardt Levenberg* akan diperoleh iterasi konvergensi yang berbeda pula, gambar berikut menunjukkan perolehan *break iteration* untuk nilai λ yang berubah dalam step 0.001, dengan $t_n = 0.5$.

MLE BHHH Iterations

Hasil output iterasi BHHH untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan L dengan fungsi produksinya *Cobb Douglas* adalah

Untuk $t_n = 1$:

n	β_1	β_2	β_3	L
0	**1**	**1**	**1**	
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

L, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil MLE untuk fungsi CD dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
1.47810631505514	0.37409264380881	0.57246925343746

s2	L	Nilai AIC	Nilai SC
0.01814483339646	-13.91425382313125	33.82850764626251	38.03209979124897

Untuk $t_n = 3$:

L, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....

s2	L	Nilai AIC	Nilai SC
....	....	....	....

Untuk $t_n = 20$:

n	β_1	β_2	β_3	L
0	**1**	**1**	**1**	
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

L, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....
Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3	
....	....	....	
s2	L	Nilai AIC	Nilai SC
....	....	....	....

MLE Modified BHHH Iterations

Hasil output iterasi *Modified* BHHH untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan L dengan fungsi produksinya *Cobb Douglas* adalah

Untuk $\lambda = 0.5,\ t_n = 1$:

n	β_1	β_2	β_3	L
0	**1**	**1**	**1**	
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

L, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....

s2	L	Nilai AIC	Nilai SC
....	....	....	....

Untuk $\lambda = 0.5, \ t_n = 3$:

n	β_1	β_2	β_3	L
0	**1**	**1**	**1**	
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

L, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....
Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....

s2	L	Nilai AIC	Nilai SC
....	....	....	....

Untuk $\lambda = 0.5,\ t_n = 30$:

n	β_1	β_2	β_3	L
0	**1**	**1**	**1**	
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

L, β_1, β_2 dan β_3 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....

s2	L	Nilai AIC	Nilai SC
....	....	....	....

Hasil Analisa

....
....
....

Fungsi Constant Elasticity of Substitution (CES)

NLS Gauss Newton Iterations

Hasil output iterasi *Gauss Newton* untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ dan S dengan fungsi produksinya *Constant Elasticity of Substitution* adalah

untuk $\beta^0 = [\ ....\quad ....\quad ....\quad ....\ ]$

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	S
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

NLS Marquardt Levenberg Iterations

Hasil output iterasi *Marquardt Levenberg* untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ dan S dengan fungsi produksinya *Constant Elasticity of Substitution* adalah sebagai berikut:

untuk $\beta^0 = \left[\text{........} \quad \text{........} \quad \text{........} \quad \text{........} \right], \lambda = 0.5,\ t_n = 0.5$

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	S
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

untuk $\beta^0 = [\ \text{........}\quad \text{........}\quad \text{........}\quad \text{........}\ ],\ \lambda = 0.5,\ t_n = 0.5$

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	S
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

MLE BHHH Iterations

Hasil output iterasi BHHH untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ dan L dengan fungsi produksinya *Constant Elasticity of Substitution* adalah

Untuk $t_n = 1$:

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	L
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

L, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan β_4 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....
Hasil MLE untuk fungsi CES dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....
b4	s2	L
....	....	....

Nilai AIC = ...

Nilai SC = ...

Untuk $t_n = 3$:

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	L
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

L, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan β_4 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....
Hasil MLE untuk fungsi CES dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....
b4	s2	L
....	....	....

Nilai AIC = ...

Nilai SC = ...

Untuk $t_n = 20$:

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	L
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

L, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan β_4 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil MLE untuk fungsi CES dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....
b4	s2	L
....	....	....

Nilai AIC = ...

Nilai SC = ...

MLE Modified BHHH Iterations

Hasil output iterasi *Modified* BHHH untuk parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ dan L dengan fungsi produksinya *Constant Elasticity of Substitution* adalah

Untuk $\lambda = 0.5, t_n = 1$:

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	L
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

L, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan β_4 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil MLE untuk fungsi CES dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....
b4	s2	L
....	....	....

Nilai AIC = ...

Nilai SC = ...

Untuk $\lambda = 0.5, t_n = 3$:

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	L
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

L, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan β_4 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....
Hasil MLE untuk fungsi CES dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....
b4	**s2**	**L**
....	....	....

Nilai AIC = ...

Nilai SC = ...

Untuk $\lambda = 0.5, t_n = 15$:

n	β_1	β_2	β_3	β_4
0				
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....
	....	....	....	....

n	L
0	....
	....
	....
	....
	....
	....
	....

L, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dan β_4 sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah ....

Hasil MLE untuk fungsi CES dengan iterasi BHHH adalah

b1	b2	b3
....	....	....

b4	s2	L
....	....	....

Nilai AIC = ...

Nilai SC = ...

Hasil Analisa

....
....
....

Perbandingan Hasil Iterasi

Sebagai bahan perbandingan antara fungsi produksi CD dan CES, hasil output diatas disajikan dalam bentuk berikut

		LSE
	Gauss-Newton	**Marquardt Levenberg**
Fungsi CD		$(\lambda = 0.011,\ t_n = 0.5)$
β_1	....	....
β_2	....	....
β_3	....	....
S	....	....
Fungsi CES		$(\ \lambda = 0.5,\ t_n = 0.5)$
β_1	....	....
β_2	....	....
β_3	....	....
β_4	....	....
S	....	....

		MLE
	BHHH	**Modified BHHH**
Fungsi CD	$(t_n = \ 20)$	$(t_n = \ 30)$
β_1	....	....
β_2	....	....
β_3	....	....
σ^2	....	....
L	....	....
AIC	....	....
SC	....	....
Fungsi CES	$(t_n = \ 20)$	$(t_n = \ 15)$
β_1	....	....
β_2	....	....
β_3	....	....
β_4	....	....
σ^2	....	....
L	....	....
AIC	....	....
SC	....	....

Hasil Analisa

....

....

....

4.3 Kesimpulan

4.4 Program Matlab

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Nonlinear Least Square dengan iterasi Gauss-Newton
    % Cobb-Douglass Production function
    % Oleh : Abdul Aziz, M.Si.
    % Linked files : f1, numgradf1, numgradS1
    % Program ini akan menaksir parameter b1, b2 dan b3
    % pada fungsi produksi Cobb-Douglass
    % yaitu : Q = b1.(L^b2).(L^b3)

    clc; tic; format long;
    % Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
    LKy = [.................... ]; % Isi sesuai data eksperimen

    L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
    % Gauss-Newton Iterations
    % Definisi initial values
    b = ones(3,1); % nilai awal untuk b1=1 b2=1 b3=1
    k = length(b);
    T = length(x);
    e = eye(k); % matriks identitas berukuran k
    f = f1(b,x); % memanggil fungsi f1 dg variabel b dan x
    S = (y-f)'*(y-f); % nilai awal S
    repkon = 100; % Jumlah iterasi untuk konvergensi S
    for i = 1:repkon;
     z = numgradf1(b,x); % Numerical gradient of f1
     zS = numgradS1(b,x,y); % Numerical gradient of S1
     step = -0.5*inv(z'*z)*zS; % Gauss-Newton iterations
     bnew = b + step; fnew = f1(bnew,x); Snew = (y-fnew)'*(y-fnew);

     % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
     if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
     disp('S Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
     disp(i); disp(' '); break;
     end;
     % Melanjutkan iterasi hingga S konvergen atau iterasi terakhir
     Iterasi_ke = i
     b = bnew
     f = f1(b,x);
     S = (y-f)'*(y-f)
```

```
 % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
 % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
 % atau dengan merubah initial values pada b
 if i == repkon
 disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !');
 disp('atau ubahlah initial values untuk b');
 disp(' ');
 end;
end;
bnls = bnew
Snls = S
% Hasil akhir iterasi Gauss-Newton
disp('Hasil Nonlinear Least Square untuk fungsi CD dg iterasi Gauss-Newton adalah:');
disp('b1 b2 b3 S ='); [bnls' Snls]'
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Script File NLSCDM.m
% Nonlinear Least Square dengan iterasi Marquardt-Levenberg
% Cobb-Douglass Production function
% Oleh : Abdul Aziz, M.Si.
% Linked files : f1, numgradf1, numgradS1
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2 dan b3
% pada fungsi produksi Cobb-Douglass
% yaitu : y = b1.(L^b2).(L^b3)

clc; tic; format long;
% Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy = [.................... ]; % Isi sesuai data eksperimen
L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
% Marquardt-Levenberg Iterations
% Definisi initial values
%b = [1;1;1]; %ones(3,1); % nilai awal untuk b1=1 b2=1 b3=1
%k = length(b); %T = length(x);
%e = eye(k); % matriks identitas berukuran k
%f = f1(b,x); % memanggil fungsi f1 dg variabel b dan x
%S = (y-f)'*(y-f); % nilai awal S
b = [1;1;1]; %ones(3,1); % nilai awal untuk b1=1 b2=1 b3=1
lambda = 0.011;
tn = 0.5;
k = length(b); T = length(x);
e = eye(k); % matriks identitas berukuran k
f = f1(b,x); % memanggil fungsi f1 dg variabel b dan x
S = (y-f)'*(y-f); % nilai awal S
repkon = 100; % Jumlah iterasi untuk konvergensi S
for i = 1:repkon;
 z = numgradf1(b,x); % Numerical gradient of f1
 zS = numgradS1(b,x,y); % Numerical gradient of S1
 step = -tn*inv(z'*z+lambda*e)*zS;
 bnew = b + step; fnew = f1(bnew,x); Snew = (y-fnew)'*(y-fnew);

 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
 disp('S Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
 disp(i); disp(' ');
 break;
 end;
```

```
 % Melanjutkan iterasi hingga S konvergen atau iterasi terakhir
 Iterasi_ke = i
 b = bnew
 f = f1(b,x); S = (y-f)'*(y-f)

 % Jika konvergen setelah lebih dari 100 iterasi
 % menampilkan hasil iterasi b dan S setiap 10% jumlah iterasi
 %if mod(i,repkon/10) == 0
 %disp('Hasil per 10% iterasi untuk b1 b2 b3 S :'); [b' Snew]
 %end;

 % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
 % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
 % atau dengan merubah initial values pada b
 if i == repkon
 disp('S belum konvergen, iterasi perlu ditambah !');
 disp('atau ubahlah initial values untuk b,lambda atau tn');
 disp(' ');
 end
end
bnls = bnew
Snls = S
% Hasil akhir iterasi Marquardt-Levenberg
disp('Hasil Nonlinear Least Square untuk fungsi CD dg iterasi Marquardt-Levenberg adalah:');
disp('b1 b2 b3 S '); [bnls' Snls]'
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Script File MLECDB.m
% Nonlinear Maximum Likelihood Estimation dengan iterasi BHHH
% Cobb-Douglass Production function
% Oleh : Abdul Aziz, M.Si.
% Linked files : f1, L1, Lt1, numgradL1, numgradLt1
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2 dan b3
% pada fungsi produksi Cobb-Douglass
% yaitu : y = b1.(L^b2).(L^b3)
clc; tic; format long;
% Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy = [.................. ]; % Isi sesuai data eksperimen
L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
% Berndt, Hall, Hall and Hausman (BHHH) Iterations
% Definisi initial values
b = ones(3,1); % nilai awal untuk b1=1 b2=1 b3=1
tn = 30;
k = length(b);
T = length(y);
repkon = 100; % Jumlah iterasi untuk konvergensi L
for i = 1:repkon;
 L = L1(b,x,y); % Memanggil fungsi L1 dg variabel b,x,y
 z = numgradL1(b,x,y); % Numerical gradient of L1
 zt = numgradLt1(b,x,y); % Numerical gradient of Lt1
 step = tn*inv(zt'*zt)*z; % BHHH iterations
 bnew = b + step;
 Lnew = L1(bnew,x,y);
 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(L-Lnew) <= 1e-9
 disp('L Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
 disp(i);
 disp(' ');
 break;
 end;
 % Melanjutkan iterasi hingga L konvergen atau iterasi terakhir
 Iterasi_ke = i;
 b = bnew;
 L = Lnew;
 % menampilkan hasil iterasi b dan L setiap 10% jumlah iterasi
 if mod(i,repkon/10) == 0
 disp('Hasil per 10% iterasi untuk i b1 b2 b3 L :');
```

```
 [i b' Lnew]
 end;

 % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
 % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
 % atau dengan merubah initial values pada b
 if i == repkon
 disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !');
 disp('atau ubahlah initial values untuk b, atau tn');
 disp(' ');
 end;
end;
bmle = bnew;
Lmle = Lnew;
f = f1(bmle,x);
s2mle = (y-f)'*(y-f)/T;
% Hasil akhir iterasi BHHH
disp('Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dg iterasi BHHH adalah:');
disp('b1 b2 b3 s2 L');
[bmle' s2mle Lmle]
% Perhitungan AIC dan SC
AIC = -2*Lnew+2*k
SC = -2*Lnew+log(T)*k
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Script File MLECDMB.m
% Nonlinear Maximum Likelihood Estimation dengan iterasi Modified BHHH
% Cobb-Douglass Production function
% Oleh : Abdul Aziz, M.Si.
% Linked files : f1, L1, Lt1, numgradL1, numgradLt1
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2 dan b3
% pada fungsi produksi Cobb-Douglass
% yaitu : y = b1.(L^b2).(L^b3)

clc; tic; format long;
% Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy = [.................... ]; % Isi sesuai data eksperimen

L=LKy(:,1);K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
% Modified BHHH Iterations
% Definisi initial values
b = ones(3,1); % nilai awal untuk b1=1 b2=1 b3=1
lambda = 0.5;
tn = 30;
k = length(b);
T = length(y);
repkon = 50; % Jumlah iterasi untuk konvergensi L
e = eye(k);
for i = 1:repkon;
 L = L1(b,x,y); % Memanggil fungsi L1 dg variabel b,x,y
 z = numgradL1(b,x,y); % Numerical gradient of L1
 zt = numgradLt1(b,x,y); % Numerical gradient of Lt1
 step = tn*inv(zt'*zt+lambda*e)*z; % Modified BHHH iterations
 bnew = b + step;
 Lnew = L1(bnew,x,y);

 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(L-Lnew) <= 1e-9
 disp('L Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
 disp(i);
 disp(' ');
 break;
 end;
 % Melanjutkan iterasi hingga L konvergen atau iterasi terakhir
 b = bnew;
```

```
 % menampilkan hasil iterasi b dan L setiap 10% jumlah iterasi
 if mod(i,repkon/10) == 0
 disp(’Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 L :’);
 [i b’ Lnew]
 end;

 % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
 % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
 % atau dengan merubah initial values pada b
 if i == repkon
 disp(’S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !’);
 disp(’atau ubahlah initial values untuk b’);
 disp(’ ’);
 end
end
end
bmle = bnew;
Lmle = Lnew;
f = f1(bmle,x); s2mle = (y-f)’*(y-f)/T;

% Hasil akhir iterasi Modified BHHH
disp(’Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dg iterasi Modified BHHH adalah:’);
disp(’b1 b2 b3 s2 L’); [bmle’ s2mle Lmle]
% Perhitungan AIC dan SC
AIC = -2*Lnew+2*k
SC = -2*Lnew+log(T)*k
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Script File NLSCESG.m
% Nonlinear Least Square dengan iterasi Gauss-Newton
% Constant Elasticity of Substitution (CES) Production function
% Oleh : Abdul Aziz, M.Si.
% Linked files : f2, numgradf2, numgradS2
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2,b3 dan b4
% pada fungsi produksi CES
% yaitu : y = b1*(b2*L.^b3.+(1-b2)*K.^b3).^(b4/b3)

clc; tic; format long;
% Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy = [.................... ];  % Isi sesuai data eksperimen

L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
% Gauss-Newton Iterations
% Definisi initial values
b = [1.5;1.5;1;1]; % nilai awal untuk b
k = length(b);
T = length(x);
e = eye(k); % matriks identitas berukuran k
f = f2(b,x); % memanggil fungsi f2 dg variabel b dan x
S = (y-f)'*(y-f); % nilai awal S
repkon = 100; % Jumlah iterasi untuk konvergensi S
for i = 1:repkon;
 z = numgradf2(b,x); % Numerical gradient of f2
 zS = numgradS2(b,x,y); % Numerical gradient of S2
 step = -0.5*inv(z'*z)*zS; % Gauss-Newton iterations
 bnew = b + step;
 fnew = f2(bnew,x);
 Snew = (y-fnew)'*(y-fnew);

 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
 disp('S Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
 disp(i);
 disp(' ');
 break;
 end;
 % Melanjutkan iterasi hingga S konvergen atau iterasi terakhir
 Iterasi = i
```

```
  b = bnew
  f = f2(b,x);
  S = (y-f)'*(y-f)

  % menampilkan hasil iterasi b dan S setiap 10% jumlah iterasi
  if mod(i,repkon/10) == 0
  disp('Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 b4 S :'); [ i b' Snew]
  end;

  % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
  % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
  % atau dengan merubah initial values pada b
  if i == repkon
  disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !');
  disp('atau ubahlah initial values untuk b');
  disp(' ');
  end;
end;
bnls = bnew;
Snls = S;
% Hasil akhir iterasi Gauss-Newton
disp('Hasil Nonlinear Least Square untuk fungsi CES dg iterasi Gauss-Newton
adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 S ');
[bnls' Snls]
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Script File NLSCESM.m
% Nonlinear Least Square dengan iterasi Marquardt-Levenberg
% Constant Elasticity of Substitution (CES) Production function
% Oleh : Abdul Aziz,M.Si.
% Linked files : f2, numgradf2, numgradS2
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2,b3 dan b4
% pada fungsi produksi CES
% yaitu : y = b1*(b2*L.^b3.+(1-b2)*K.^b3).^(b4/b3)

clc; tic; format long;
% Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy = [.................... ]; % Isi sesuai data eksperimen
L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
% Marquardt-Levenberg Iterations
% Definisi initial values
b = [0.5;0.5;1;1];; % nilai awal untuk b1=1 b2=1 b3=1
k = length(b);
T = length(x);
e = eye(k); % matriks identitas berukuran k
f = f2(b,x); % memanggil fungsi f2 dg variabel b dan x
S = (y-f)'*(y-f); % nilai awal S
lambda = 0.5;
repkon = 50; % Jumlah iterasi untuk konvergensi S
for i = 1:repkon;
 z = numgradf2(b,x); % Numerical gradient of f2
 zS = numgradS2(b,x,y); % Numerical gradient of S2
 step = -0.5*inv(z'*z+lambda*e)*zS;
 bnew = b + step;
 fnew = f2(bnew,x);
 Snew = (y-fnew)'*(y-fnew);

 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
 disp('S Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
 disp(i);
 disp(' ');
 break;
 end;
 % Melanjutkan iterasi hingga S konvergen atau iterasi terakhir
 b = bnew;
```

```
f = f2(b,x);
S = (y-f)'*(y-f);

% menampilkan hasil iterasi b dan S setiap 10% jumlah iterasi
if mod(i,repkon/10) == 0
disp('Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 b4 S :');
[i b' Snew]
end;

% Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
% maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
% atau dengan merubah initial values pada b
if i == repkon
disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !');
disp('atau ubahlah initial values untuk b');
disp(' ');
end;
end;
bnls = bnew; Snls = S;
% Hasil akhir iterasi Marquardt-Levenberg
disp('Hasil Nonlinear Least Square untuk fungsi CES dg iterasi Marquardt-Levenberg adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 S '); [bnls' Snls]
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Script File MLECESB.m
% Nonlinear Maximum Likelihood Estimation dengan iterasi BHHH
% Constant Elasticity of Substitution (CES) Production function
% Oleh : Abdul Aziz, M.Si.
% Linked files : f2, L2, Lt2, numgradL2, numgradLt2
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2,b3 dan b4
% pada fungsi produksi CES
% yaitu : y = b1*(b2*L.^b3.+(1-b2)*K.^b3).^(b4/b3)

clc; tic; format long;
% Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy = [.................... ];  % Isi sesuai data eksperimen
L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
% Berndt, Hall, Hall and Hausman (BHHH) Iterations
% Definisi initial values
b = [1;0.5;1;1]; % nilai awal untuk b
tn = 20;
k = length(b);
T = length(y);
repkon = 100; % Jumlah iterasi untuk konvergensi L
for i = 1:repkon;
 L = L2(b,x,y); % Memanggil fungsi L2 dg variabel b,x,y
 z = numgradL2(b,x,y); % Numerical gradient of L2
 zt = numgradLt2(b,x,y); % Numerical gradient of Lt2
 step = tn*inv(zt'*zt)*z; % BHHH iterations
 bnew = b + step;
 Lnew = L2(bnew,x,y);
 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(L-Lnew) <= 1e-9
 disp('L Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
 disp(i);
 disp(' ');
 break;
 end;
 % Melanjutkan iterasi hingga L konvergen atau iterasi terakhir
 b = bnew;
 % menampilkan hasil iterasi b dan L setiap 10% jumlah iterasi
 if mod(i,repkon/10) == 0
 disp('Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 b4 L :');
 [i b' Lnew]
```

```
  end;

  % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
  % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
  % atau dengan merubah initial values pada b
  if i == repkon
  disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !');
  disp('atau ubahlah initial values untuk b');
  disp(' ');
  end;
end;
bmle = bnew;  Lmle = Lnew; f = f2(bmle,x); s2mle = (y-f)'*(y-f)/T;
% Hasil akhir iterasi BHHH
disp('Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CES dg iterasi BHHH adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 s2 L'); [bmle' s2mle Lmle]
% Perhitungan AIC dan SC
AIC = -2*Lnew+2*k
SC = -2*Lnew+log(T)*k
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Script File MLECESMB.m
% Nonlinear Maximum Likelihood Estimation dengan iterasi Modified BHHH
% Constant Elasticity of Substitution (CES) Production function
% Oleh : Abdul Aziz, M.Si.
% Linked files : f2, L2, Lt2, numgradL2, numgradLt2
% Program ini akan menaksir parameter b1, b2,b3 dan b4
% pada fungsi produksi CES
% yaitu : y = b1*(b2*L.^b3.+(1-b2)*K.^b3).^(b4/b3)

clc; tic; format long;
% Penyajian matriks LKy (L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy = [.................... ]; % Isi sesuai data eksperimen
L = LKy(:,1);
K = LKy(:,2);
y = LKy(:,3);
x = [L K];
% Modified BHHH Iterations
% Definisi initial values
b = [1;0.5;1;1]; % nilai awal untuk b
k = length(b);
T = length(y);
repkon = 100; % Jumlah iterasi untuk konvergensi L
lambda = 0.5;
tn = 15;
e = eye(k);
for i = 1:repkon;
 L = L2(b,x,y); % Memanggil fungsi L2 dg variabel b,x,y
 z = numgradL2(b,x,y); % Numerical gradient of L2
 zt = numgradLt2(b,x,y); % Numerical gradient of Lt2
 step = tn*inv(zt'*zt+lambda*e)*z; % Modified BHHH iterations
 bnew = b + step;
 Lnew = L2(bnew,x,y);
 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(L-Lnew) <= 1e-9
 disp('L Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
 disp(i);
 disp(' ');
 break;
 end;
 % Melanjutkan iterasi hingga L konvergen atau iterasi terakhir
```

```
 b = bnew;

 % menampilkan hasil iterasi b dan L setiap 10% jumlah iterasi
 if mod(i,repkon/10) == 0
 disp('Hasil iterasi untuk i 1 b2 b3 b4 L :');
 [i b' Lnew]
 end;

 % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
 % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
 % atau dengan merubah initial values pada b
 if i == repkon
 disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !');
 disp('atau ubahlah initial values untuk b');
 disp(' ');
 end;
end;
bmle = bnew; Lmle = Lnew; f = f2(bmle,x); s2mle = (y-f)'*(y-f)/T;
% Hasil akhir iterasi BHHH
disp('Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CES dg iterasi Modified BHHH adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 s2 L'); [bmle' s2mle Lmle]
% Perhitungan AIC dan SC
AIC = -2*Lnew+2*k
SC = -2*Lnew+log(T)*k
waktu_hitung = toc
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% f1 fungsi produksi Cobb-Douglass
% f = f1(b,x) berordo T x 1
L = x(:,1);
K = x(:,2);
b1 = b(1,:);
b2 = b(2,:);
b3 = b(3,:);
f = b1*(L.^b2).*(K.^b3);

function f = f2(b,x)
% f2 fungsi produksi CES
% f = f2(b,x) berordo T x 1
L = x(:,1);
K = x(:,2);
b1 = b(1,:);
b2 = b(2,:);
b3 = b(3,:);
b4 = b(4,:);
f = b1*(b2*L.^b3+(1-b2)*K.^b3).^(b4/b3);

function z = numgradf1(b,x)
% Numerical gradient of f1
% z = Z(b) berordo T x k
k = length(b);
h = 1e-7;
e = eye(k);
for j = 1:k;
 bplus = b + h*e(:,j);
 bmin = b - h*e(:,j);
 fplus = feval('f1',bplus,x);
 fmin = feval('f1',bmin,x);
 z(:,j) = (fplus - fmin) / (2*h);
end;

function z = numgradf2(b,x)
% Numerical gradient of f2
% z = Z(b) berordo T x k
k = length(b);
h = 1e-7;
e = eye(k);
```

```
for j = 1:k;
 bplus = b + h*e(:,j);
 bmin = b - h*e(:,j);
 fplus = feval('f2',bplus,x);
 fmin = feval('f2',bmin,x);
 z(:,j) = (fplus - fmin) / (2*h);
end;

function z = numgradS1(b,x,y)
% Numerical gradient of S
% z = Z(b) berordo k x 1
k = length(b);
h = 1e-7;
e = eye(k);
for j = 1:k;
 bplus = b + h*e(:,j);
 bmin = b - h*e(:,j);
 fplus = feval('f1',bplus,x);
 fmin = feval('f1',bmin,x);
 Splus = (y-fplus)'*(y-fplus);
 Smin = (y-fmin)'*(y-fmin);
 z(j,:) = (Splus - Smin) / (2*h);
end;

function z = numgradS2(b,x,y)
% Numerical gradient of S
% z = Z(b) berordo k x 1
k = length(b);
h = 1e-7;
e = eye(k);
for j = 1:k;
 bplus = b + h*e(:,j);
 bmin = b - h*e(:,j);
 fplus = feval('f2',bplus,x);
 fmin = feval('f2',bmin,x);
 Splus = (y-fplus)'*(y-fplus);
 Smin = (y-fmin)'*(y-fmin);
 z(j,:) = (Splus - Smin) / (2*h);
end;

function L = L1(b,x,y)
```

```
% L1 fungsi log of likelihood untuk fungsi produksi Cobb-Douglass
% L = L1(b,x,y) berordo 1 x 1
% L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f)'*(y-f)/s2)
T = length(x);
f = f1(b,x);
s2 = (y-f)'*(y-f)/T;
L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f)'*(y-f)/s2);

function L = L2(b,x,y)
% L2 fungsi log of likelihood untuk fungsi produksi CES
% L = L2(b,x,y) berordo 1 x 1
% L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f)'*(y-f)/s2)
T = length(x);
f = f2(b,x);
s2 = (y-f)'*(y-f)/T;
L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f)'*(y-f)/s2);

function L = Lt1(b,x,y)
% Lt1 fungsi log of likelihood untuk fungsi produksi Cobb-Douglass
% L = Lt1(b,x,y) berordo T x 1
% L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f)'*(y-f)/s2)
T = length(y);
f = f1(b,x);
s2 = (y-f)'*(y-f)/T;
L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f).^2./s2);

function L = Lt2(b,x,y)
% Lt2 fungsi log of likelihood untuk fungsi produksi CES
% L = Lt2(b,x,y) berordo T x 1
% L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f)'*(y-f)/s2)
T = length(y);
f = f2(b,x);
s2 = (y-f)'*(y-f)/T;
L = -0.5 * (log(2*pi*s2)+(y-f).^2./s2);

function z = numgradL1(b,x,y)
% Numerical gradient of L1
% z = Z*(b) berordo K x 1
k = length(b);
h = 1e-7;
e = eye(k);
```

```
for j = 1:k;
 bplus = b + h*e(:,j);
 bmin = b - h*e(:,j);
 Lplus = feval('L1',bplus,x,y);
 Lmin = feval('L1',bmin,x,y);
 z(j,:) = (Lplus - Lmin) / (2*h);
end;

function z = numgradL2(b,x,y)
% Numerical gradient of L2
% z = Z*(b) berordo K x 1
k = length(b);
h = 1e-7;
e = eye(k);
for j = 1:k;
 bplus = b + h*e(:,j);
 bmin = b - h*e(:,j);
 Lplus = feval('L2',bplus,x,y);
 Lmin = feval('L2',bmin,x,y);
 z(j,:) = (Lplus - Lmin) / (2*h);
end;
```

Bab 5

EKSPERIMEN MODEL ARCH DAN GARCH

Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada eksperimen ini kami merumuskan beberapa permasalahan, yaitu

1. Bagaimana model regresi untuk nilai tukar mata uang Yen Jepang (JPY, ¥) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp)?
2. Bagaimana model regresi untuk nilai tukar mata uang United Arab Emirat Dirham (AED) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp)?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk

1. Mengetahui model regresi untuk nilai tukar mata uang Yen Jepang (JPY, ¥) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp).
2. Mengetahui model regresi untuk nilai tukar mata uang United Arab Emirat Dirham (AED) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp)?

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental yang up to date didownload dari situs *http://www.oanda.com/convert/fxhistory.* Kemudian dilakukan time plot guna mengetahui model regresinya, dan estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda penaksiran LSE dan MLE, yang dilakukan secara iterasi dengan menggunakan software **MATLAB** , hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen. Dilanjutkan dengan melakukan perhitungan data AIC dan/atau SC untuk nilai yang konvergen dari kedua model. Dari hasil perhitungan akhir ini dapat ditentukan model fungsi nilai tukar mata uang mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel tersebut.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun beberapa langkah prosedur yang dilakukan dari awal hinga akhir eksperimen, yaitu

1. Tahap Persiapan:
   (a) Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi dan inferensi, khususnya model regresi statistik linier umum. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.
   (b) Menentukan data-data sampel untuk nilai mata uang asing terhadap rupiah yang berukuran Tx1.
   (c) Membuat time series baru dari logaritma data original berukuran T, dan first differencenya yang berukuran T-1.
   (d) Melakukan time plot terhadap data original dan first difference dari logaritma data original.
2. Melakukan penaksiran untuk mean parameters dan variansi *secara least square,* untuk model ARCH(1), dimana langkah 2.b,c dan d dilakukan secara iterasi hingga diperoleh konvergensi untuk mean parameter dan variansi dengan norm < 0.00001 :
   (a) Penaksiran terhadap β secara OLS,
   $$\widehat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X\,'X)^{-1}\,X\,'Y \tag{5.1}$$
   dimana
   $$Y_t = \nabla \log R_t = \log R_t - \log R_{t-1} \tag{5.2}$$
   $$X_t = \begin{pmatrix} 1 & \log R_{t-1} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$
   (b) Penaksiran terhadap α secara OLS.
   $$\widehat{\alpha}_{OLS} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \end{pmatrix} = (Z\,'Z)^{-1}\,Z\,'h \tag{5.4}$$

dimana

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 & e_t^2 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$h_t = e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \tag{5.6}$$

$$e_t = Y_t - X_t{}'\widehat{\beta}_{OLS} \tag{5.7}$$

(c) Penaksiran terhadap α secara GLS.

$$\widehat{\alpha}_{GLS} = \left(Z\,'\widehat{\Psi}_{OLS}^{-1}\; Z\right)^{-1} Z\,'\widehat{\Psi}_{OLS}^{-1}\; \widehat{h} \tag{5.8}$$

dimana

$$\widehat{h}_t = Z_t{}'\widehat{\alpha}_{OLS} = \widehat{\alpha}_0 + \widehat{\alpha}_1 e_{t-1}^2 \tag{5.9}$$

$$\widehat{\Psi}_{OLS} = diag\left(\widehat{h}_t\right) \tag{5.10}$$

(d) Penaksiran terhadap β secara GLS,

$$\widehat{\beta}_{GLS} = \left(X\,'\widehat{\Psi}_{GLS}^{-1}\; X\right)^{-1} X\,'\widehat{\Psi}_{GLS}^{-1}\; Y \tag{5.11}$$

dimana

$$\widehat{\Psi}_{GLS} = diag\left(\widehat{h}_t\right) \tag{5.12}$$

$$\widehat{h}_t = Z_t{}'\widehat{\alpha}_{GLS} \tag{5.13}$$

3. Melakukan penaksiran untuk mean parameters dan variansi secara *maximum likelihood,* untuk model GARCH(1,1), dimana langkah estimasi parameter-parameter variansi dilakukan secara iterasi *modified* BHHH hingga diperoleh konvergensi untuk parameter-parameter variansi dan nilai log-likelihood dengan norm $\leq$ 1e-6 :

   (a) Penaksiran terhadap β secara OLS,

$$\widehat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X\,'X)^{-1} X\,'Y \tag{5.14}$$

dimana

$$Y_t = \nabla \log R_t = \log R_t - \log R_{t-1} \tag{5.15}$$

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & \log R_{t-1} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

(b) Penaksiran terhadap α secara iterasi Modified BHHH,

$$\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} - t_n P_n \gamma_n \tag{5.17}$$

dimana

$$t_n = 1,\ P_n = -\left(Z^*\left(\alpha^{(n)}\right)' Z^*\left(\alpha^{(n)}\right) + \lambda_n I_K\right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial \alpha}|_{\alpha^{(n)}} \tag{5.18}$$

$$Z^*\left(\beta^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial L_1}{\partial \beta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L_T}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial L_T}{\partial \beta_K} \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

$$L = -\frac{1}{2}\left(\log(2\pi h_t) + \frac{e^2}{h_t}\right) \tag{5.20}$$

4. Menghitung dan membandingkan nilai AIC dan SC untuk kedua model, ARCH(1) dan GARCH(1,1), guna mengetahui model yang lebih cocok untuk data.

5. Mengamati dan menganalisa hasil eksperimen.

6. Menyusun laporan.

5.1 Data Input

Input data pada eksperimen ini adalah nilai mata uang Yen Jepang terhadap Rupiah Indonesia dan Dirham United Emirat Arab terhadap Rupiah Indonesia, selama dua tahun yaitu sejak tanggal 1 Januari 2000 sampai dengan 31 Desember 2001, yang kami download dari situs FXHistory: http://www.oanda.com/ confert/fxhistory. Sebelum melakukan estimasi terhadap parameter-parameternya, data proses stokastik ini kami plot terhadap waktu guna mengetahui gerakan perubahan nilai mata uang asing tersebut, seperti pada gambar berikut. Kita lihat pada gambar tersebut, kedua proses stokastik atau time series ini tidak stasioner (secara visual). Namun, time plot data first difference dari nilai logaritmanya menunjukkan regresi yang stasioner.

Sehingga kita bisa menggunakan model statistik

$$Y_t = {X_t}'\beta + e_t \tag{5.21}$$

dimana

$$Y_t = \nabla \log R_t = \log R_t - \log R_{t-1} \tag{5.22}$$

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & \log R_{t-1} \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Mean parameter β pada model statistik (7.1) dapat diestimasi secara *ordinary least square*, yaitu

$$\widehat{\beta}_{OLS} = (X\,'X)^{-1}\,X\,'Y \tag{5.25}$$

sehingga diperoleh residual

$$e_t = Y_t - X_t{}'\widehat{\beta}_{OLS} \tag{5.26}$$

yang akan dimodelkan sebagai *autoregressive conditional heteroscedastic,* $ARCH(1)$,

$$h_t = e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \tag{5.27}$$

dengan estimasi parameter variansi α secara OLS,

$$\begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \end{pmatrix} = (Z\,'Z)^{-1}\,Z\,'h \tag{5.28}$$

dimana

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 & e_t^2 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

atau *generalized autoregressive conditional heteroscedastic,* $GARCH(1,1)$,

$$h_t = e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \theta_1 h_{t-1} \tag{5.30}$$

dengan estimasi parameter variansi α secara iterasi *modified* BHHH,

$$\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} - t_n P_n \gamma_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \theta_1 \end{pmatrix}' \tag{5.31}$$

dimana

$$t_n = 1,\ P_n = -\left(Z^*\left(\alpha^{(n)}\right)' Z^*\left(\alpha^{(n)}\right) + \lambda_n I_K\right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial \alpha}|_{\alpha^{(n)}} \tag{5.32}$$

$$Z^*\left(\beta^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial L_1}{\partial \beta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L_T}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial L_T}{\partial \beta_K} \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

5.2 Hasil dan Analisa Eksperimen

NILAI TUKAR MATA UANG ¥ - Rp
Model ARCH(1)

1. Hasil taksiran β secara OLS:

$$\widehat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{...............} \\ \text{...............} \end{pmatrix}$$

2. Hasil iterasi taksiran α secara OLS:

Iterasi	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$
1	....	....
2	....	....
3	....	....

3. Hasil iterasi taksiran β secara GLS:

Iterasi	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$
1	....	....
2	....	....
3	....	....

4. Hasil iterasi taksiran α secara GLS:

Iterasi	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$
1	....	....
2	....	....
3	....	....

5. Nilai Log-likelihood, AIC dan SC dari parameter variansi secara OLS:

$$L = \text{...............}$$
$$AIC = \text{...............}$$
$$SC = \text{...............}$$

6. Nilai Log-likelihood, AIC dan SC dari parameter variansi secara GLS:

$$L = \text{...............}$$
$$AIC = \text{...............}$$
$$SC = \text{...............}$$

Model GARCH(1,1)

1. Hasil taksiran β secara OLS:

$$\widehat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

2. Dengan tn =2, step (λ) =25 dan nilai awal sebagaimana pada iterasi ke-0, estimasi parameter-parameter variansi secara modified BHHH ini mencapai konvergen pada iterasi ke-42:

Iterasi	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$
0	0.00015	0.006
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

Iterasi	$\widehat{\theta}_1$	L
0	0.009	
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

3. Nilai Log-likelihood, AIC dan SC dari parameter variansi:

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$AIC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$SC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dari hasil di atas ternyata pada model ARCH(1)diperoleh nilai Log-likelihood yang lebih besar, yaitu ...., sehingga diperoleh nilai AIC dan SC yang lebih kecil, ... dan ...., dari pada nilai Log-likelihood pada model GARCH(1,1) yang menghasilkan nilai AIC dan SC yang lebih besar, yaitu secara berurutan ...., ...dan .... Sehingga model ARCH(1) lebih cocok untuk data sampel nilai tukar mata uang Yen Jepang terhadap Rupiah Indonesia.

NILAI TUKAR MATA UANG Dirham-Rupiah
Model ARCH(1)

1. Hasil taksiran β secara OLS:

$$\widehat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

2. Hasil iterasi taksiran α secara OLS:

Iterasi	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$
1	....	....
2	....	....
3	....	....

3. Hasil iterasi taksiran β secara GLS:

Iterasi	$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$
1	....	....
2	....	....
3	....	....

4. Hasil iterasi taksiran α secara GLS:

Iterasi	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$
1	....	....
2	....	....
3	....	....

5. Nilai Log-likelihood, AIC dan SC dari parameter variansi secara OLS:

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$AIC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$SC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. Nilai Log-likelihood, AIC dan SC dari parameter variansi secara GLS:

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$AIC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$SC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Model GARCH(1,1)

1. Hasil taksiran β secara OLS:

2. $$\widehat{\beta}_{OLS} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

3. Dengan tn =2, step (λ) =25 dan nilai awal sebagaimana pada iterasi ke-0, estimasi parameter-parameter variansi secara modified BHHH ini mencapai konvergen pada iterasi ke-53:

Iterasi	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$
0	0.00015	0.006
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

Iterasi	$\widehat{\theta}_1$	L
0	0.009	
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

4. Nilai Log-likelihood, AIC dan SC dari parameter variansi:

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$AIC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$SC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dari hasil di atas ternyata pada model ARCH(1)diperoleh nilai Log-likelihood yang lebih besar, yaitu ...., sehingga diperoleh nilai

AIC dan SC yang lebih kecil, ... dan ...., dari pada nilai Log-likelihood pada model GARCH(1,1) yang menghasilkan nilai AIC dan SC yang lebih besar, yaitu secara berurutan ...., ...dan .... Sehingga model ARCH(1) lebih cocok untuk data sampel nilai tukar mata uang Dirham Emirat Arab terhadap Rupiah Indonesia.

5.3 Kesimpulan

5.4 Program Matlab

```
clc;tic;format long;
disp('==========================================')
disp('Program Estimasi Parameter untuk model ARCH(1)')
disp('Oleh : Abdul Aziz,M.Si. ')
disp('==========================================')
DataYRAR; % Melihat data di file DataYRAR.m
% YR untuk data Yen - Rupiah
% AR untuk data Dirham - Rupiah
rp = AR;
T = length(rp);
lrp = log(rp);
y = lrp(2:T)-lrp(1:T-1);
x = [ones(T-1,1) lrp(1:T-1)];
T = length(y);
% OLS Estimation
parmean = inv(x'*x)*x'*y; % Taksiran Beta OLS
parmeanOLS = parmean;
parvar = ones(2,1); % Nilai Awal Taksiran alfa0 dan alfa1
for i = 1:5
parvarold = parvar;
parmeanold = parmean;
e = y-x*parmean;
e2 = e.^2;
z = [ones(T-1,1) e2(1:T-1,1)];
edot = e2(2:T,1);
parvarOLS = inv(z'*z)*z'*edot; % Taksiran Alfa OLS
h0 = z*parvarOLS;
psiOLS = diag(h0);
parvar = inv(z'*inv(psiOLS)*z)*z'*inv(psiOLS)*edot; % Taksiran Alfa GLS
h = z*parvar;
psi = diag(h);
x1 = x(1:T-1,:);
y1 = y(1:T-1,:);
parmean = inv(x1'*inv(psi)*x1)*x1'*inv(psi)*y1; % Taksiran Beta GLS
tol = norm([(parvarold-parvar);(parmeanold-parmean)]);
if tol < 0.00001, break, end;
hasil(i,:) = [parvarOLS' parvar' parmean'];
end
% Menampilkan hasil output
```

```
disp('Hasil taksiran OLS Beta1 Beta2 :');
disp(parmeanOLS');
disp('Hasil iterasi taksiran OLS Alfa0 Alfa1 :');
disp(hasil(:,1:2));
disp('Hasil iterasi taksiran GLS Beta1 Beta 2 Alfa0 Alfa1 :');
disp(hasil(:,3:6));
figure(1);subplot(2,1,1);plot(rp)
title('Time Plot Nilai Tukar Mata Uang Dirham-Rupiah')
D = diff(log(rp));
subplot(2,1,2);plot(D)
title('Time Plot First Difference Logaritma Nilai Tukar Mata Uang Dirham-Rupiah')
xlabel('Tanggal (1 Jan 2000 s/d 31 Des 2001)')
% Perhitungan Fungsi Log-likelihod, AIC dan SC (OLS dan GLS)
Lo = 0; L = 0;
for i = 1:T-1
Lo = Lo+log(h0(i))+(y1(i)-x1(i,:)*parmean)^2/h0(i);
L = L+log(h(i))+(y1(i)-x1(i,:)*parmean)^2/h(i);
end
Lo = -0.5*T*log(2*pi)-0.5*Lo
L = -0.5*T*log(2*pi)-0.5*L
AICo = -2*Lo+2*numpar
SCo = -2*Lo+log(T)*numpar
AIC = -2*L+2*numpar
SC = -2*L+log(T)*numpar
CPU_Time = toc
```

```
% Script File MLECDB.m
clc; clear all; format long; tic;
disp('================================================')
disp('Program Estimasi Parameter untuk model GARCH(1,1)')
disp('dengan Nonlinear Maximum Likelihood Estimation, iterasi BHHH')
disp('Oleh : Abdul Aziz, M.Si. ')
disp('===============================================')
% Linked files : h5, L5, Lt5, numgradL5, numgradLt5
global x y parmean e e2 h0 T K;
DataYRAR; % Melihat data di file DataYRAR.m
% YR untuk data Yen - Rupiah
% AR untuk data Dirham - Rupiah
rp = AR;
T0 = length(rp);
lrp = log(rp);
y = lrp(2:T0)-lrp(1:T0-1);
T0 = length(y);
x = [ones(T0,1) lrp(1:T0)];
[T K] = size(x);
% OLS Estimation
parmean = inv(x'*x)*x'*y; % Taksiran Beta OLS
e = y-x*parmean;
e2 = e.^2;
h0 = e2'*e2/(T0-2);
% Nilai Awal Taksiran theta1 alfa0 dan alfa1
parvar = [15e-5; 0.006; 0.009];
parvarawal = parvar;
tn = 2;
numpar = length(parvar); % number of variance parameter
rep = 20; % Jumlah iterasi untuk konvergensi L
for i1 = 1:2
for i2 = 1:rep
 L = L5(parvar); % Memanggil fungsi L5
 z = numgradL5(parvar); % Numerical gradient of L5
 zt = numgradLt5(parvar); % Numerical gradient of Lt5
 step1 = 25;
 step = tn*inv(zt'*zt+step1*eye(numpar))*z; % Modified BHHH iterations
 parvarnew = parvar + step;
 Lnew = L5(parvarnew);
 % Jika S sudah konvergen maka program dihentikan
 if norm(parvarnew-parvar) <= 1e-6 & abs(L-Lnew) <= 1e-6
```

```
    disp('L Sudah konvergen, dengan jumlah iterasinya adalah:');
    disp(i2)
    disp(' ')
    break;
    end;
    % Melanjutkan iterasi hingga L konvergen atau iterasi terakhir
    Iterasi_ke = i2;
    parvar = parvarnew;
    L = Lnew;
    % menampilkan hasil iterasi a dan L setiap 10% jumlah iterasi
    if mod(i2,rep/5) == 0
    disp('Hasil per 10% iterasi untuk alfa0 alfa1 theta1 L :');
    Iterasi_ke = i2
    [parvar' Lnew]
    end;

    % Jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
    % maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
    % atau dengan merubah initial values pada b
    if i2 == rep
    disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah !');
    disp('atau ubahlah initial values untuk parvar, atau step1');
    disp(' ');
    end
   end
   psi = diag(h5(parvarnew));
   parmean = inv(x'*inv(psi)*x)*x'*inv(psi)*y;
   end
   % Hasil akhir iterasi BHHH
   ParvarAwal = parvarawal
   Step1 = step1
   tn = tn
   parvarmle = parvarnew;
   Lmle = Lnew;
   disp('Hasil Maximum Likelihood Estimation untuk fungsi CD dg iterasi BHHH
adalah:');
   disp(' alfa0 alfa1 theta1 L = ');[parvarmle' Lmle]
   % Perhitungan AIC dan SC
   AIC = -2*Lnew+2*numpar
   SC = -2*Lnew+log(T)*numpar
   waktu_hitung = toc
```

```
function h = h5(a)
global x y parmean e e2 h0 T K;
h = zeros(T,1);
h(1,1) = a(1)+a(2)*h0+a(3)*h0;
for i = 1:T-1
 h(i+1,1) = a(1)+a(2)*e2(i,1)+a(3)*h(i,1);
end

function L = L5(a)
% L5 fungsi log of likelihood untuk model GARCH(1,1)
% L = L1(a) berordo 1 x 1
global x y parmean e e2 h0 T K;
psi = diag(h5(a));
T = length(x);
L = -0.5*(T*log(2*pi) + sum(log(h5(a))) + e'*inv(psi)*e);

function L = Lt5(a)
% Lt5 fungsi log of likelihood
% L = Lt5(a) berordo T x 1
global x y parmean e e2 h0 T K;
T = length(y);
L = -0.5*(log(2*pi*h5(a))+e2./h5(a));

function z = numgradL5(a)
% Numerical gradient of L5
% z = Z*(a) berordo K x 1
global x y parmean e e2 h0 T K;
d = 1e-7;
ey = eye(3);
for j = 1:3
 aplus = a + d*ey(:,j);
 amin = a - d*ey(:,j);
 Lplus = feval('L5',aplus);
 Lmin = feval('L5',amin);
 z(j,:) = (Lplus - Lmin) / (2*d);
end;

function z = numgradLt5(a)
% Numerical gradient of Lt5
% z = Z*(a) berordo T x numpar
global x y parmean e e2 h0 T K;
```

```
d = 1e-7;
ey = eye(3);
for j = 1:3
 aplus = a + d*ey(:,j);
 amin = a - d*ey(:,j);
 Ltplus = feval('Lt5',aplus);
 Ltmin = feval('Lt5',amin);
 z(:,j) = (Ltplus - Ltmin) / (2*d);
end;
```

Bab 6

EKSPERIMEN MODEL VAR

Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada eksperimen ini kami merumuskan beberapa permasalahan, yaitu

1. Bagaimana estimasi parameter untuk model VAR(1) dan VAR(2) melalui dekomposisi *Cholesky* dengan asumsi tambahan:

   (a) $\sigma_y^2 = \sigma_z^2$ dan $\beta_{12} = 0$

   (b) $\sigma_y^2 = \sigma_z^2$ dan $\beta_{21} = 0$

2. Bagaimana *granger causality* kedua time series pada data series1 dan series2?

3. Bagaimana *impulse response function* kedua time series terhadap data series1 dan series2?

4. Bagaimana distribusi dan critical value untuk t-test pada proses non-stasioner secara simulasi dengan kasus:

   (a) True process: $y_t = \ y_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan estimated regression: $y_t = a\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

   (b) True process: $y_t = \ y_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan estimated regression: $y_t = c + a\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

   (c) True process: $y_t = c + \ y_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan estimated regression: $y_t = c + a\ y_{t-1} + \varepsilon_t$

   (d) True process: $y_t = c + \ y_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan estimated regression: $y_t = c + a\ y_{t-1} + bt + \varepsilon_t$

masing-masing model dengan siginifikansi kepercayaan 5% dan 10%?

Tujuan Eksperimen
Eksperimen ini bertujuan untuk

1. Mengetahui perbandingan hasil estimasi parameter untuk model VAR(1) dan VAR(2) melalui dekomposisi *Cholesky* dengan asumsi tambahan yang berbeda.

2. Mengetahui *granger causality* kedua time series pada data series1 dan series2.

3. Mengetahui *impulse response function* kedua time series terhadap data series1 dan series2.

4. Mengetahui distribusi dan critical value untuk t-test pada proses non-stasioner secara simulasi dengan tiga model yang berbeda dan masing-masing model dengan siginifikansi kepercayaan 5% dan 10%.

Metoda Eksperimen
Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan time plot guna mengetahui model regresinya, dan estimasi terhadap beberapa parameter dengan metoda penaksiran OLS dengan dekomposisi *Cholesky,* yang dilakukan secara iterasi. Dilanjutkan dengan melakukan perhitungan data AIC dan/atau SC untuk nilai maximum log-likelihoodnya. Dari hasil perhitungan akhir ini dapat ditentukan model VAR yang lebih sesuai (paling cocok) untuk kedua data sampel tersebut. Unit root test dilakukan dengan perulangan data simulasi dengan menggunakan software **MATLAB,** hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen.

Prosedur Eksperimen
Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun beberapa langkah prosedur yang dilakukan dari awal hinga akhir eksperimen, yaitu

1. Eksperimen pertama:

   (a) Menentukan data-data sampel untuk Series1 dan Series2 yang berukuran Tx2.

   (b) Melakukan time plot terhadap data.

   (c) Melakukan estimasi OLS terhadap parameter dari bentuk baku VAR(1) dan VAR(2), masing-masing untuk kedua data.

(d) Melakukan perhitungan estimasi parameter-parameter pada bentuk primitif VAR dari perolehan estimasi parameter bentuk baku.

(e) Melakukan perhitungan *impulse response function* dari hasil perolehan parameter bentuk primitif dan baku.

(f) Melakukan time plot pada *impulse response function.*

(g) Menghitung nilai maximum log-likelihood, AIC dan SC.

2. Eksperimen kedua:

   (a) Membangkitkan dua true process dengan model random walk tanpa drift dan dengan drift berukuran 50 x 1.

   (b) Melakukan perhitungan t-test untuk empat kasus.

   (c) Mengulangi langkah (a) dan (b) hingga 50000.

   (d) Menentukan titik kritis dengan signifikansi 0.05 dan 0.10 untuk keempat kasus.

   (e) Melakukan time plot terhadap dua true process yang dibangkitkan terakhir kali.

   (f) Melakukan histogram untuk distribusi t-test pada keempat kasus.

   (g) Membandingkan hasil titik kritis keempat dengan tabel B.6. dalam Hamilton, D.J. (1994).

3. Menganalisa hasil ouput program.

4. Mengambil kesimpulan dan menyusun laporan.

6.1 Data Input

Data input pada eksperimen ini adalah proses stokastik Series1 dan Series2 yang masing-masing terdiri dari dua time series, berukuran 501 x 2. Masing-masing data akan dicari model regresinya berupa VAR(1) atau VAR(2). Penaksiran parameter-parameter secara OLS dilakukan dari bentuk baku VAR, kemudian dengan dekomposisi *Cholesk*y diperoleh penaksiran parameter-parameter pada bentuk primitif (structural) VAR-nya. Dari hasil perolehan parameter ini dihitung nilai maximum log-likelihoodnya guna menentukan model VAR yang lebih sesuai, diantara VAR(1) dan VAR(2), melalui perbandingan nilai AIC atau SC.

Esperimen kedua, untuk mengetahui unit roots test pada proses nonstasioner yang dibangkitkan secara random white noise, menggunakan dua model true process yaitu: *random walk* tanpa *drift,*

$$y_t = y_{t-1} + e_t \tag{6.1}$$

dan *random walk* dengan *drift,*

$$y_t = 1 + y_{t-1} + e_t \tag{6.2}$$

Critical value untuk t-test proses nonstasioner ini dilakukan secara simulasi dengan beberapa kasus:

1. Kasus 1, time series yang dibangkitkan dengan model true process pertama, (6.1), yang akan diestimasi dengan model regresi tanpa konstanta ataupun time trend,
$$y_t = a\ y_{t-1} + e_t \tag{6.3}$$
2. Kasus 2, time series yang dibangkitkan dengan model true process pertama, (6.1), yang akan diestimasi dengan model regresi dengan konstanta tanpa time trend,
$$y_t = c + a\ y_{t-1} + e_t \tag{6.4}$$
3. Kasus 3, time series yang dibangkitkan dengan model true process kedua, (6.2), yang akan diestimasi dengan model regresi dengan konstanta tanpa time trend,
$$y_t = c + a\ y_{t-1} + e_t \tag{6.5}$$
4. Kasus 4, time series yang dibangkitkan dengan model true process kedua, (6.2), yang akan diestimasi dengan model regresi dengan konstanta dan time trend,
$$y_t = c + a\ y_{t-1} + bt + e_t \tag{6.6}$$

6.2 Hasil dan Analisa Eksperimen

DATA SERIES 1

Time plot data Series1 nampak pada gambar berikut,

Regresi VAR(1)

Dengan model baku VAR(1),

$$X_t = A_0 + A_1 \; X_{t-1} + e_t \tag{6.7}$$

hasil estimasi OLS terhadap parameternya adalah

$$\widehat{A}_0 = \begin{bmatrix} \text{................} \\ \text{................} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

dan

$$\widehat{A}_1 = \begin{bmatrix} \text{................} & \text{................} \\ \text{................} & \text{................} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Dengan dekomposisi *Cholesky,* dari hasil penaksiran parameter bentuk bakunya diperoleh penaksiran parameter-parameter pada bentuk struktural VAR(1) ,

$$B \; X_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 \; X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{6.10}$$

Jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \tag{6.11}$$

dan

$$\beta_{21} = 0 \tag{6.12}$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{................} \\ \text{................} & 1 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

yang jika diperbesar sebagai

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dimana kedua pengaruh ini berganti tanda positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{21}, relatif lebih kecil dan positif, mendekati nol, berbeda dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh y_t pada z_t, $\beta_{21} = 0$. Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Namun, jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \tag{6.16}$$

dan

$$\beta_{12} = 0 \tag{6.17}$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

.

.

yang jika diperbesar sebagai

.

.

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, bernilai positif dan berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dengan nilai berganti positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap

$\{z_t\}$, Φ_{21}, bernilai besar dan negatif, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh z_t pada y_t, $\beta_{12} = 0$.Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Regresi VAR(2)

Dengan model baku VAR(2),

$$X_t = A_0 + A_1\ X_{t-1} + A_2\ X_{t-2} + e_t \tag{6.21}$$

hasil estimasi OLS terhadap parameternya adalah

$$\widehat{A}_0 = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

$$\widehat{A}_1 = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

dan

$$\widehat{A}_2 = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

Dengan dekomposisi *Cholesky,* dari hasil penaksiran parameter bentuk bakunya diperoleh penaksiran parameter-parameter pada bentuk struktural VAR(2) ,

$$B\ X_t = \Gamma_0 + \Gamma_1\ X_{t-1} + \Gamma_2\ X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{6.25}$$

Jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \tag{6.26}$$

dan

$$\beta_{21} = 0 \tag{6.27}$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{...............} & \text{...............} \\ \text{...............} & \text{...............} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

.

.

yang jika diperbesar pada interval [0,20] sebagai

.

.

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dimana kedua pengaruh ini berganti tanda positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{21}, relatif lebih kecil dan positif, mendekati nol, berbeda dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh y_t pada z_t, $\beta_{21} = 0$. Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Namun, jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \quad (6.31)$$

dan

$$\beta_{12} = 0 \quad (6.32)$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

.

.

yang jika diperbesar pada interval [0,20] sebagai

.

.

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, bernilai positif dan berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dengan nilai berganti positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap

$\{z_t\}$, Φ_{21}, bernilai besar dan negatif, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh z_t pada y_t, $\beta_{12} = 0$.Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Perbadingan Nilai AIC dan SC

Dari perolehan panaksiran parameter-parameter tersebut di atas dapat ditentukan nilai maximum log-likelihhod, AIC dan SC untuk model VAR(1) dan VAR(2), sebagai berikut:

$Model$	$VAR(1)$	$VAR(2)$
L	....	....
AIC	....	....
SC	....	....

Sehingga, dapat dikatakan bahwa data Series1 lebih sesuai dimodelkan sebagai VAR(1) dengan nilai AIC dan SC yang lebih kecil.

DATA SERIES 2

Time plot data Series1 nampak pada gambar berikut,

.

.

Regresi VAR(1)

Dengan model baku VAR(1),

$$X_t = A_0 + A_1 \; X_{t-1} + e_t \tag{6.37}$$

hasil estimasi OLS terhadap parameternya adalah

$$\widehat{A}_0 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

dan

$$\widehat{A}_1 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.39}$$

Dengan dekomposisi *Cholesky,* dari hasil penaksiran parameter bentuk bakunya diperoleh penaksiran parameter-parameter pada bentuk struktural VAR(1) ,

$$B\ X_t = \Gamma_0 + \Gamma_1\ X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{6.40}$$

Jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \tag{6.41}$$

dan

$$\beta_{21} = 0 \tag{6.42}$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.43}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.45}$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

.

.

yang jika diperbesar sebagai

.

.

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dimana kedua pengaruh ini berganti tanda positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{21}, relatif lebih kecil, mendekati nol, berbeda dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh y_t pada z_t, $\beta_{21} = 0$. Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Namun, jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \tag{6.46}$$

dan

$$\beta_{12} = 0 \tag{6.47}$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.49}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

.

.

yang jika diperbesar sebagai

.

.

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, bernilai positif dan berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dengan nilai berganti positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{21}, bernilai besar dan negatif, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh z_t pada y_t, $\beta_{12} = 0$.Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Regresi VAR(2)

Dengan model baku VAR(2),

$$X_t = A_0 + A_1 \; X_{t-1} + A_2 \; X_{t-2} + e_t \tag{6.51}$$

hasil estimasi OLS terhadap parameternya adalah

$$\widehat{A}_0 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.52}$$

$$\widehat{A}_1 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

dan

$$\widehat{A}_2 = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{6.54}$$

Dengan dekomposisi *Cholesky,* dari hasil penaksiran parameter bentuk bakunya diperoleh penaksiran parameter-parameter pada bentuk struktural VAR(2) ,

$$B \; X_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 \; X_{t-1} + \Gamma_2 \; X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{6.55}$$

Jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \tag{6.56}$$

dan

$$\beta_{21} = 0 \tag{6.57}$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & .... \\ .... & 1 \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} .... \\ .... \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix} \tag{6.60}$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

.

.

yang jika diperbesar sebagai

.

.

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dimana kedua pengaruh ini berganti tanda positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{21}, relatif lebih kecil dan positif, mendekati nol, berbeda dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh y_t pada z_t, $\beta_{21} = 0$. Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Namun, jika diasumsikan

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \tag{6.61}$$

dan

$$\beta_{12} = 0 \tag{6.62}$$

maka diperoleh estimasi

$$\widehat{B} = \begin{bmatrix} 1 & .... \\ .... & 1 \end{bmatrix} \tag{6.63}$$

$$\widehat{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} .... \\ .... \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

$$\widehat{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix} \tag{6.65}$$

dan

$$\widehat{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix} \tag{6.66}$$

Sehingga diperoleh *impulse response function* dengan time plot berikut.

.

.

yang jika diperbesar sebagai

.

.

Nampak pada gambar bahwa pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{12}, bernilai positif dan berbanding terbalik dengan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{y_t\}$, Φ_{11}, dengan nilai berganti positif dan negatif. Sedangkan pengaruh $\{y_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{21}, bernilai besar dan negatif, berbanding terbalik dengan pengaruh $\{z_t\}$ terhadap $\{z_t\}$, Φ_{22}, yang sangat besar dan posistif. Hal ini dikarenakan asumsi yang digunakan yaitu mengabaikan pengaruh z_t pada y_t, $\beta_{12} = 0$.Pengaruh-pengaruh pada saat t ini akan terus menurun, *decline*, dengan bertambahnya waktu.

Perbadingan Nilai AIC dan SC

Dari perolehan panaksiran parameter-parameter tersebut di atas dapat ditentukan nilai maximum log-likelihhod, AIC dan SC untuk model VAR(1) dan VAR(2), sebagai berikut:

$Model$	$VAR(1)$	$VAR(2)$
L	....	....
AIC	....	....
SC	....	....

Sehingga, dapat dikatakan bahwa data Series2 lebih sesuai dimodelkan sebagai VAR(2) dengan nilai AIC dan SC yang lebih kecil.

Dickey-Fuller Unit Roots Test

Berikut ini merupakan hasil output simulasi komputer untuk mengetahui distribusi dan nilai kritis t-test pada proses nonstasione dengan menggunakan estimasi OLS terhadap residual varaince

$$t = \frac{\widehat{\alpha} - 1}{\sqrt{Var(\widehat{\alpha})}} \tag{6.67}$$

dimana

$$\widehat{\alpha} = (x\,'x)^{-1}x\,'y \tag{6.68}$$

dan

$$Cov(\widehat{\alpha}) = \widehat{\sigma}^2(x\,'x)^{-1} = \frac{\widehat{e}\,'\widehat{e}}{T-1}(x\,'x)^{-1} \tag{6.69}$$

dengan menggunakan data simulasi berukuran 50 yang dilakukan perulangan hingga 50000 perulangan dengan dua model true process, (6.1) dan (6.2), yang time plot data terakhirnya,

.

.

dengan perolehan nilai kritis sebagai,

	0.05	0.10
Kasus 1	....	....
Kasus 2	....	....
Kasus 3	....	....
Kasus 4	....	....

Hasil perolehan ini sudah mendekati dari tabel B.6 Hamilton, J.D.(1994).

Distribusi titik kritis untuk masing-masing kasus nampak seperti empat gambar berikut:

.

.

6.3 Kesimpulan

6.4 Program Matlab

```
clc;clear all;
    disp('=====================================')
    disp('Penaksiran parameter pada model Bivariate VAR(1)')
    disp('Bentuk primitif : B X(t) = T0 + T1 X(t-1) + E(t)')
    disp('Bentuk baku : X(t) = A0 + A1 X(t-1) + e(t)')
    disp('Created by Abdul Aziz, M.Si. ')
    disp('===================================')

    disp('1. VAR(1) untuk data series1 ')
    load series1
    y = x(:,1);
    z = x(:,2);
    T = length(x);
    y1 = y(2:T,1);
    z1 = z(2:T,1);
    x = [ones(T-1,1) y(1:T-1,1) z(1:T-1,1)];
    ay = inv(x'*x)*x'*y1;
    az = inv(x'*x)*x'*z1;
    A0 = [ay(1) az(1)]'
    A1 = [ay(2:3)'; az(2:3)']
    ey = y1-x*ay;
    ez = z1-x*az;
    cov = cov(ey,ez);
    corr = corrcoef(ey,ez);
    b12 = corr(1,2);

    disp('1.a. Asumsi b21 = 0')
    B = [1 b12;0 1]
    for i = 1:50
        phi = A1^(i-1)*inv(B);
        phi11(i,:) = phi(1,1);
        phi12(i,:) = phi(1,2);
        phi21(i,:) = phi(2,1);
        phi22(i,:) = phi(2,2);
    end
    T0 = B*A0
    T1 = B*A1

    figure(1);axis=[1:T]';
```

```
        plot(axis,y,'b',axis,z,'r')
        title('Time Plot Data Series1')
        xlabel('time');ylabel('value')
        legend('y series','z series')
        grid on

figure(2);axis=[1:i]';
        plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
        title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR1 b21=0)')
        xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
        legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
        grid on

disp('1.b. Asumsi b12 = 0')
b21 = corr(2,1);
B = [1 0;b21 1]
for i = 1:50
        phi = A1^(i-1)*inv(B);
        phi11(i,:) = phi(1,1);
        phi12(i,:) = phi(1,2);
        phi21(i,:) = phi(2,1);
        phi22(i,:) = phi(2,2);
end
T0 = B*A0
T1 = B*A1

figure(3);axis=[1:i]';
        plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
        title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR1 b12=0)')
        xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
        legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
        grid on


% Perhitungan nilai log-likelihood, AIC dan SC
ex = [ey ez];
ic = inv(cov);
sig = 0;
T = length(ex);
for i = 1:T
        sig = sig+ex(i,:)*ic*ex(i,:)';
```

```
end
L = -0.5*(T*2*log(2*pi)-T*log(norm(ic))+sig)
AIC = -2*L+2*6
SC = -2*L+log(T)*6


disp('=====================================')
clear all;
disp('2. VAR(1) untuk data series2 ')
load series2
y = x(:,1);
z = x(:,2);
T = length(x);
y1 = y(2:T,1);
z1 = z(2:T,1);
x = [ones(T-1,1) y(1:T-1,1) z(1:T-1,1)];
ay = inv(x'*x)*x'*y1;
az = inv(x'*x)*x'*z1;
A0 = [ay(1) az(1)]'
A1 = [ay(2:3)'; az(2:3)']
ey = y1-x*ay;
ez = z1-x*az;
cov = cov(ey,ez);
corr = corrcoef(ey,ez);
b12 = corr(1,2);

disp('2.a. Asumsi b21 = 0')
B = [1 b12;0 1]
for i = 1:50
      phi = A1^(i-1)*inv(B);
      phi11(i,:) = phi(1,1);
      phi12(i,:) = phi(1,2);
      phi21(i,:) = phi(2,1);
      phi22(i,:) = phi(2,2);
end
T0 = B*A0
T1 = B*A1

figure(4);axis=[1:T]';
      plot(axis,y,'b',axis,z,'r')
      title('Time Plot Data Series2')
```

```
        xlabel('time');ylabel('value')
        legend('y series','z series')
        grid on

figure(5);axis=[1:i]';
        plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
        title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR1 b21=0)')
        xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
        legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
        grid on


disp('2.b. Asumsi b12 = 0')
b21 = corr(2,1);
B = [1 0;b21 1]
for i = 1:50
        phi = A1^(i-1)*inv(B);
        phi11(i,:) = phi(1,1);
        phi12(i,:) = phi(1,2);
        phi21(i,:) = phi(2,1);
        phi22(i,:) = phi(2,2);
end
T0 = B*A0
T1 = B*A1

figure(6);axis=[1:i]';
        plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
        title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR1 b12=0)')
        xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
        legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
 grid on

% Perhitungan nilai log-likelihood, AIC dan SC
ex = [ey ez];
ic = inv(cov);
sig = 0;
T = length(ex);
for i = 1:T
        sig = sig+ex(i,:)*ic*ex(i,:)';
end
L = -0.5*(T*2*log(2*pi)-T*log(norm(ic))+sig)
```

```
AIC = -2*L+2*6
SC = -2*L+log(T)*6


disp('==================================')
clear all;
disp('3. VAR(2) untuk data series1 ')
load series1
y = x(:,1);
z = x(:,2);
T = length(x);
y2 = y(3:T,1);
z2 = z(3:T,1);
x = [ones(T-2,1) y(2:T-1,1) z(2:T-1,1) y(1:T-2,1) z(1:T-2,1)];
ay = inv(x'*x)*x'*y2;
az = inv(x'*x)*x'*z2;
A0 = [ay(1) az(1)]'
A1 = [ay(2:3)'; az(2:3)']
A2 = [ay(4:5)'; az(4:5)']
ey = y2-x*ay;
ez = z2-x*az;
cov = cov(ey,ez);
corr = corrcoef(ey,ez);
b12 = corr(1,2);

disp('3.a. Asumsi b21 = 0')
B = [1 b12;0 1]
for i = 1:50
     phi = A1^(i-1)*inv(B);
     phi11(i,:) = phi(1,1);
     phi12(i,:) = phi(1,2);
     phi21(i,:) = phi(2,1);
     phi22(i,:) = phi(2,2);
end
T0 = B*A0
T1 = B*A1
T2 = B*A2

figure(7);axis=[1:i]';
     plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
     title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR2 b21=0)')
```

```
        xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
        legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
        grid on


disp('3.b. Asumsi b12 = 0')
b21 = corr(2,1);
B = [1 0;b21 1]
for i = 1:50
        phi = A1^(i-1)*inv(B);
        phi11(i,:) = phi(1,1);
        phi12(i,:) = phi(1,2);
        phi21(i,:) = phi(2,1);
        phi22(i,:) = phi(2,2);
end
T0 = B*A0
T1 = B*A1
T2 = B*A2

figure(8);axis=[1:i]';
        plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
        title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR2 b12=0)')
       xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
      legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
 grid on


% Perhitungan nilai log-likelihood, AIC dan SC
ex = [ey ez];
ic = inv(cov);
sig = 0;
T = length(ex);
for i = 1:T
        sig = sig+ex(i,:)*ic*ex(i,:)';
end
L = -0.5*(T*2*log(2*pi)-T*log(norm(ic))+sig)
AIC = -2*L+2*6
SC = -2*L+log(T)*6


disp('====================================')
```

```
clear all;
disp('4. VAR(2) untuk data series2 ')
load series2
y = x(:,1);
z = x(:,2);
T = length(x);
y2 = y(3:T,1);
z2 = z(3:T,1);
x = [ones(T-2,1) y(2:T-1,1) z(2:T-1,1) y(1:T-2,1) z(1:T-2,1)];
ay = inv(x'*x)*x'*y2;
az = inv(x'*x)*x'*z2;
A0 = [ay(1) az(1)]'
A1 = [ay(2:3)'; az(2:3)']
A2 = [ay(4:5)'; az(4:5)']
ey = y2-x*ay;
ez = z2-x*az;
cov = cov(ey,ez);
corr = corrcoef(ey,ez);
b12 = corr(1,2);

disp('4.a. Asumsi b21 = 0')
B = [1 b12;0 1]
for i = 1:50
    phi = A1^(i-1)*inv(B);
    phi11(i,:) = phi(1,1);
    phi12(i,:) = phi(1,2);
    phi21(i,:) = phi(2,1);
    phi22(i,:) = phi(2,2);
end
T0 = B*A0
T1 = B*A1
T2 = B*A2

figure(9);axis=[1:i]';
    plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
    title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR2 b21=0)')
    xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
    legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
 grid on
```

```
disp('4.b. Asumsi b12 = 0')
b21 = corr(2,1);
B = [1 0;b21 1]
for i = 1:50
      phi = A1^(i-1)*inv(B);
      phi11(i,:) = phi(1,1);
      phi12(i,:) = phi(1,2);
      phi21(i,:) = phi(2,1);
      phi22(i,:) = phi(2,2);
end
T0 = B*A0
T1 = B*A1
T2 = B*A2

figure(10);axis=[1:i]';
      plot(axis,phi11,'b',axis,phi12,'r',axis,phi21,'g',axis,phi22,'c')
      title('Time Plot Impulse Response Functions (VAR2 b12=0)')
      xlabel('n-ahead time');ylabel('value')
      legend('\Phi11','\Phi12','\Phi21','\Phi22')
      grid on


% Perhitungan nilai log-likelihood, AIC dan SC
ex = [ey ez];
ic = inv(cov);
sig = 0;
T = length(ex);
for i = 1:T
      sig = sig+ex(i,:)*ic*ex(i,:)';
end
L = -0.5*(T*2*log(2*pi)-T*log(norm(ic))+sig)
AIC = -2*L+2*6
SC = -2*L+log(T)*6

disp('========================================')
```

```
clc;clear all;tic;
disp('==========================================')
disp('Dickey-Fuller Unit Roots Test pada model AR(1)')
disp('Untuk 4 kasus yang dibangkitkan 2 model random walk')
disp('Created by Abdul Aziz, M.Si. ')
disp('==========================================')
rep = 50000 ;
for j = 1:rep
 T = 50 ;
 if mod(j,rep/10)==0
      iterasi = j
 end
 y = fy(T); ya = y(:,1); yb = y(:,2);
 T = length(ya);
 ya1 = ya(2:T,1) ; yb1 = yb(2:T,1) ;

 % Kasus 1:
 % True process : y(t) = y(t-1) + e(t)
 % Estimated regression : y(t) = a y(t-1) + e(t)
 x1 = [ya(1:T-1,1)] ;
 beta1 = inv(x1'*x1)*x1'*ya1 ;
 e1 = ya1 - x1*beta1 ;
 sigma21 = e1'*e1/(T-1) ;
 covb1 = sigma21*inv(x1'*x1) ;
 ttest1 = (beta1-1)/sqrt(covb1) ;
 t1(j,1) = ttest1;


 % Kasus 2:
 % True process : y(t) = y(t-1) + e(t)
 % Estimated regression : y(t) = 1 + a y(t-1) + e(t)
 x2 = [ones(T-1,1) ya(1:T-1,1)] ;
 beta2 = inv(x2'*x2)*x2'*ya1 ;
 e2 = ya1 - x2*beta2 ;
 sigma22 = e2'*e2/(T-2) ;
 covb2 = sigma22*inv(x2'*x2) ;
 ttest2 = (beta2(2,1)-1)/sqrt(covb2(2,2)) ;
 t2(j,1) = ttest2;


 % Kasus 3:
```

```
 % True process : y(t) = 1 + y(t-1) + e(t)
 % Estimated regression : y(t) = 1 + a y(t-1) + e(t)
 x3 = [ones(T-1,1) yb(1:T-1,1)] ;
 beta3 = inv(x3'*x3)*x3'*yb1 ;
 e3 = yb1 - x3*beta3 ;
 sigma23 = e3'*e3/(T-2) ;
 covb3 = sigma23*inv(x3'*x3) ;
 ttest3 = (beta3(2,1)-1)/sqrt(covb3(2,2)) ;
 t3(j,1) = ttest3;


 % Kasus 4:
 % True process : y(t) = 1 + y(t-1) + e(t)
 % Estimated regression : y(t) = 1 + a y(t-1) + t + e(t)
 x4 = [ones(T-1,1) yb(1:T-1,1) (1:T-1)'] ;
 beta4 = inv(x4'*x4)*x4'*yb1 ;
 e4 = yb1 - x4*beta4 ;
 sigma24 = e4'*e4/(T-3) ;
 covb4 = sigma24*inv(x4'*x4) ;
 ttest4 = (beta4(2,1)-1)/sqrt(covb4(2,2)) ;
 t4(j,1) = ttest4;
end ;
time = toc

criticalvalue5p1 = prctile(t1,5)
criticalvalue5p2 = prctile(t2,5)
criticalvalue5p3 = prctile(t3,5)
criticalvalue5p4 = prctile(t4,5)
criticalvalue10p1 = prctile(t1,10)
criticalvalue10p2 = prctile(t2,10)
criticalvalue10p3 = prctile(t3,10)
criticalvalue10p4 = prctile(t4,10)

figure(1);axis=[1:T]';
      plot(axis,ya,axis,yb)
      legend('y(t) = y(t-1) + e(t)','y(t) = 1 + y(t-1) + e(t)')
      title('True Process');grid on
figure(2);histfit(t1,30);title('Distribusi Critical Value Kasus 1')
figure(3);histfit(t2,30);title('Distribusi Critical Value Kasus 2')
figure(4);histfit(t3,30);title('Distribusi Critical Value Kasus 3')
figure(5);histfit(t4,30);title('Distribusi Critical Value Kasus 4')
```

=======================================

```
function y = fy(T)
e = randn(T,1) ;
ya(1,1) = 0 ;
yb(1,1) = 0 ;
for i = 1:T
 ya(i+1,1) = ya(i,1) + e(i,1) ;
 yb(i+1,1) = 1 + yb(i,1) + e(i,1) ;
end
y = [ya yb];
```

=====================================

6.5 Data Input

Bab 7

EKSPERIMEN ALGORITMA GENETIKA

Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada eksperimen ini kami merumuskan beberapa permasalahan, yaitu

1. Bagaimana estimasi parameter untuk model regresi nilai tukar mata uang Yen Jepang (JPY, ¥) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp) secara Genetic Algorithm?
2. Bagaimana estimasi parameter untuk model regresi nilai tukar mata uang United Arab Emirat Dirham (AED) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp) secara Genetic Algorithm?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk

1. Mengetahui hasil estimasi parameter untuk model regresi nilai tukar mata uang Yen Jepang (JPY, ¥) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp) secara Genetic Algorithm.
2. Mengetahui hasil estimasi parameter untuk model regresi nilai tukar mata uang United Arab Emirat Dirham (AED) terhadap Rupiah Indonesia (IDR, Rp) secara Genetic Algorithm.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental yang didownload dari situs *http://www.oanda.com/convert/fxhistory.* Kemudian dilakukan time plot guna mengetahui model regresinya, dan estimasi terhadap beberapa parameter dengan metoda penaksiran parameter Genetic Algorithm, yang dilakukan secara iterasi dengan menggunakan software **MATLAB.,** hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen. Dilanjutkan dengan melakukan perhitungan data AIC dan/atau SC untuk nilai yang konvergen dari kedua model. Dari hasil perhitungan akhir ini dapat ditentukan model fungsi nilai tukar mata uang mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel tersebut.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun beberapa langkah prosedur yang dilakukan dari awal hinga akhir eksperimen, yaitu

1. Tahap Persiapan:

   (a) Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi dan inferensi, khususnya model regresi statistik linier umum. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.

   (b) Menentukan data-data sampel untuk nilai mata uang asing terhadap rupiah yang berukuran Tx1.

   (c) Membuat time series baru dari logaritma data original berukuran T, dan first differencenya yang berukuran T-1.

   (d) Melakukan time plot terhadap data original dan first difference dari logaritma data original.

2. Melakukan penaksiran untuk mean parameters dan variance parameter *secara lgenetic algorithm,* untuk model ARCH(1), yang dilakukan secara iterasi hingga diperoleh konvergensi pada generasi 50 untuk mean parameter dan variansi:

   Preparing phase

1. (a) Menentukan panjang interval sebagai range nilai-nilai parameter. Pada eksperimen ini panjang intervalnya adalah [0, 1] untuk β_1,[-1, 0] untuk β_2, [0, 1] untuk variance parameters $\alpha_{0,}$ $\alpha_{1,}$dan θ_1.

   (b) Menentukan banyaknya digit (*bits*) untuk string biner. Pada eksperimen ini banyaknya digit adalah 16 *bits* untuk setiap gen biner. Dengan panjang interval 1 dan digit 16 *bits* akan diperoleh hasil dengan ketelitian $\frac{1}{2^{16}-1} = 1.5259 \times 10^{-5}$.

(c) Menentukan ukuran populasi, yaitu sebanyak observasi$\times$banyaknya parameter (#*par*) pada data, yaitu 30×4 untuk model ARCH(1) dan 30×5 untuk model GARCH(1,1).

Create a population of individuals

(d) Membentuk populasi gen dalam string biner secara acak (random) dari komputer dalam selang interval dimana untuk setiap hasil bilangan random itu akan menempati satu *bits*. Sehingga bila ada 3 parameter akan diperlukan bilangan random sebanyak $\#par \times 16 \times 30$ sebagai populasi awal. Bilangan random yang kurang dari nilai ketelitian akan ditulis sebagai string 1 dan selebihnya sebagai string 0.

Evaluation of the fitness

(e) Mengubah setiap genotip kromosom yang terdiri dari 16 string biner menjadi fenotipnya, yaitu bilangan desimal yang menyatakan variabel b1, b2, a1 dan a2, untuk model ARCH(1), b1, b2, a1, a2 dan t1 untuk model GARCH(1,1).

(f) Mencari nilai fungsi objektif (negatif log-likelihood) dari nilai variabel pada langkah e.

(g) Mengubah nilai fungsi objektif menjadi nilai *fitness* dimana nilainya sama dengan nilai maksimum fungsi objektif pada langkah f dikurangi dengan nilai fungsinya.

Selection of the highest fitness

(h) Dari langkah g, akan diperoleh kromosom yang terbaik, yaitu yang memiliki nilai *fitness* terbesar.

(i) Kromosom terbaik pertama ini akan menjadi induk pada populasi kedua yang akan menghasilkan populasi (generasi) selanjutnya.

Create a new population

(j) Menghitung peluang untuk setiap kromosom pada populasi awal sebagai proporsi nilai fungsinya terhadap total nilai fungsi.

(k) Menghitung peluang kumulatif untuk setiap kromosom.

(l) Membangun bilangan random r dalam range interval.

(m) Jika $Q_{i-1} < r \leq Q_i$, maka kromosom ke-i akan menjadi induk pertama.

(n) Mengulangi langkah l dan m untuk memperoleh induk kedua.

(o) Membangun lagi bilangan random r dalam range interval. Jika bilangan itu kurang dari peluang *cross over* (dalam eksperimen ini peluang *cross over* nya adalah 1), maka pasangan kromosom akan dilakukan *cross over*. *Cross over* dilakukan dengan menukar gen (string biner) yang terletak setelah suatu bilangan bulat terbesar dari pembulatan $r \times \#par \times 16$.

(p) Mengulangi langkah l sampai dengan o sebanyak 14 kali yang akan menghasilkan 28 elemen populasi.

(q) Dari hasil pada langkah p ditambah dengan 2 induk pada langkah i, diperoleh populasi (generasi) kedua.

(r) Mengulangi langkah e sampai dengan q untuk membangun generasi berikutnya sampai beberapa generasi, misalkan 50 generasi.

2. Membandingkan nilai-nilai parameter dan nilai fungsi yang dihasilkan pada setiap generasi.

3. Menghitung nilai AIC dan SC pada nilai fungsi objektif *maximum log-likelihood* yang dihasilkan dari perhitungan iterasi.

4. Membandingkan nilai AIC dan SC yang dihasilkan untuk model ARCH(1) dan GARCH(1,1).

5. Dari hasil no 3 dapat ditentukan model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel yang diberikan.

6. Menyusun laporan.

7.1 Data Input

Input data pada eksperimen ini adalah nilai mata uang Yen Jepang terhadap Rupiah Indonesia dan Dirham United Emirat Arab terhadap Rupiah Indonesia, selama dua tahun yaitu sejak tanggal .... sampai dengan .... , yang kami download dari situs FXHistory:

http://www.oanda.com/ confert/fxhistory. Sebelum melakukan estimasi terhadap parameter-parameternya, data proses stokastik ini kami plot terhadap waktu guna mengetahui gerakan perubahan nilai mata uang asing tersebut, seperti pada gambar berikut. Kita lihat pada gambar tersebut, kedua proses stokastik atau time series ini tidak stasioner (secara visual). Namun, time plot data first difference dari nilai logaritmanya menunjukkan regresi yang stasioner.

Sehingga kita bisa menggunakan model statistik

$$Y_t = {X_t}'\beta + e_t \tag{7.1}$$

dimana

$$Y_t = \nabla \log R_t = \log R_t - \log R_{t-1} \tag{7.2}$$

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & \log R_{t-1} \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Mean parameter β pada model statistik (7.1) dapat diestimasi dengan metode Genetic Algorithm, sehingga diperoleh residual

$$e_t = Y_t - {X_t}'\widehat{\beta}_{GA} \tag{7.5}$$

yang akan dimodelkan sebagai *autoregressive conditional heteroscedastic*, $ARCH(1)$,

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 \tag{7.6}$$

atau dimodelkan sebagai *generalized autoregressive conditional heteroscedastic*, $GARCH(1,1)$,

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \theta_1 h_{t-1} \tag{7.7}$$

dengan estimasi mean parameters,

$$\widehat{\beta}_{GA} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

dan variance parameters,

$$\widehat{\alpha}_{GA} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \\ \widehat{\theta}_1 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

yang akan diestimasi dengan metode Genetic Algorithm, yaitu dengan memaksimumkan fungsi log-likelihood,

$$L(\beta, \alpha, \theta) = -\frac{1}{2}\left[T \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^{T} \ln h_t + (y - X\beta)' \, \Psi^{-1} (y - X\beta)\right] \tag{7.10}$$

7.2 Hasil dan Analisa Eksperimen

NILAI TUKAR MATA UANG ¥ - Rp

Model ARCH(1)

Hasil output estimasi mean parameter dan variance parameter untuk model ARCH(1) nilai tukar mata uang Yen Jepang terhadap Rupiah Indonesia, dengan iterasi genetic algorithm hingga 50 generasi adalah sebagai berikut:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

* Tanda - - berarti + karena fungsi objektif adalah meminimumkan negatif dari fungsi log-likelihood, sehingga untuk mencari nilai maksimum sama dengan negatif dari nilai minimum fungsi objektif.

Dari hasil output tersebut dapat dilihat bahwa perolehan nilai fungsi maximum log-likelihoodnya semakinbaik, sama atau lebih besar dari nilai iterasi sebelumnya, sehingga iterasi terakhir merupakan hasil terbaik untuk estimasi mean parameter

$$\widehat{\beta}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

dan variance parameter

$$\widehat{\alpha}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

dengan nilai maximum log-likelihood

$$L = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7.13}$$

yang menghasilkan nilai

$$AIC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7.14}$$

dan

$$SC = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{7.15}$$

Model GARCH(1,1)

Hasil output estimasi mean parameter dan variance parameter untuk model GARCH(1,1) nilai tukar mata uang Yen Jepang terhadap Rupiah Indonesia, dengan iterasi genetic algorithm hingga 50 generasi adalah sebagai berikut:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

* Tanda - - berarti + karena fungsi objektif adalah meminimumkan negatif dari fungsi log-likelihood, sehingga untuk mencari nilai maksimum sama dengan negatif dari nilai minimum fungsi objektif.

Dari hasil output tersebut dapat dilihat bahwa perolehan nilai fungsi maximum log-likelihoodnya semakinbaik, sama atau lebih besar dari nilai iterasi sebelumnya, sehingga iterasi terakhir merupakan hasil terbaik untuk estimasi mean parameter

$$\widehat{\beta}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .... \\ .... \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

dan variance parameter

$$\widehat{\alpha}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .... \\ .... \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

dengan nilai maximum log-likelihood

$$L = ... \tag{7.18}$$

yang menghasilkan nilai

$$AIC = ... \tag{7.19}$$

dan

$$SC = ... \tag{7.20}$$

NILAI TUKAR MATA UANG Dirham - Rupiah
Model ARCH(1)

Hasil output estimasi mean parameter dan variance parameter untuk model ARCH(1) nilai tukar mata uang Dirham United Arab Emirat terhadap Rupiah Indonesia, dengan iterasi genetic algorithm hingga 50 generasi adalah sebagai berikut:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

* Tanda - - berarti + karena fungsi objektif adalah meminimumkan negatif dari fungsi log-likelihood, sehingga untuk mencari nilai maksimum sama dengan negatif dari nilai minimum fungsi objektif.

Dari hasil output tersebut dapat dilihat bahwa perolehan nilai fungsi maximum log-likelihoodnya semakinbaik, sama atau lebih besar dari nilai iterasi sebelumnya, sehingga iterasi terakhir merupakan hasil terbaik untuk estimasi mean parameter

$$\widehat{\beta}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{................} \\ \text{................} \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

dan variance parameter

$$\widehat{\alpha}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{................} \\ \text{................} \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

dengan nilai maximum log-likelihood

$$L = \text{................} \tag{7.23}$$

yang menghasilkan nilai

$$AIC = \text{................} \tag{7.24}$$

dan

$$SC = \text{................} \tag{7.25}$$

Model GARCH(1,1)

Hasil output estimasi mean parameter dan variance parameter untuk model GARCH(1,1) nilai tukar mata uang Dirham United Arab Emirat terhadap Rupiah Indonesia, dengan iterasi genetic algorithm hingga 50 generasi adalah sebagai berikut:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

* Tanda - - berarti + karena fungsi objektif adalah meminimumkan negatif dari fungsi log-likelihood, sehingga untuk mencari nilai maksimum sama dengan negatif dari nilai minimum fungsi objektif.

Dari hasil output tersebut dapat dilihat bahwa perolehan nilai fungsi maximum log-likelihoodnya semakinbaik, sama atau lebih besar dari nilai iterasi sebelumnya, sehingga iterasi terakhir merupakan hasil terbaik untuk estimasi mean parameter

$$\widehat{\beta}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{................} \\ \text{................} \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

dan variance parameter

$$\widehat{\alpha}_{GA} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_0 \\ \widehat{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{................} \\ \text{................} \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

dengan nilai maximum log-likelihood

$$L = \text{................} \tag{7.28}$$

yang menghasilkan nilai

$$AIC = \text{................} \tag{7.29}$$

dan

$$SC = \text{................} \tag{7.30}$$

7.3 Kesimpulan

7.4 Program Matlab

```
clc;clear all;tic;format long;
disp('======================================')
disp('Program Estimasi Parameter untuk model ARCH(1)')
disp('Dengan metode Genetic Algorithm')
disp('Oleh : Abdul Aziz, M.Si ')
disp('======================================')

DataYRAR; % Melihat data di file DataYRAR.m
% YR untuk data Yen - Rupiah
% AR untuk data Dirham - Rupiah
T = length(YR);
lrp = log(YR);
y = lrp(2:T)-lrp(1:T-1);
x = [ones(T-1,1) lrp(1:T-1)];
T = length(y);
global x y e e2 h0 T K;

disp('Iterasi Genetic Algorithm');
disp('pada fungsi Maximum Log-Likelihood untuk model ARCH(1)');
generation_n = 50; % Number of generations
popuSize = 30; % Population size
xover_rate = 1.0; % Crossover rate
mutate_rate = 0.01; % Mutation rate
bit_n = 16; % Bit number for each input variable
global OPT_METHOD % optimization method.
obj_fcn = 'ARCH1_Lfunction'; % Objective function
var_n = 4; % Number of input variables
range = [0, 1; -1, 0; 0, 1; 0, 1]; % Range of the input variables

t=cputime;
% Initial random population
popu = rand(popuSize, bit_n*var_n) > 0.5;
fprintf('Initial population.\n');
for i=1:popuSize
    for j=1:bit_n*var_n
        fprintf('%1.0f ',popu(i,j));
    end
    fprintf('\n');
end
```

```
upper = zeros(generation_n, 1);
average = zeros(generation_n, 1);
lower = zeros(generation_n, 1);

% Main loop of GA
for i = 1:generation_n;
    k=i;
    % delete unnecessary objects
    delete(findobj(0, 'tag', 'member'));
    delete(findobj(0, 'tag', 'individual'));
    delete(findobj(0, 'tag', 'count'));
    % Evaluate objective function for each individual
    fcn_value = evalpopu(popu, bit_n, range, obj_fcn);
    if (i= =1),
        fprintf('Initial population\n ');
        for j=1:popuSize
            fprintf('L(%1.10f, %1.10f, %1.10f, %1.10f)= -%2.10f\n', ...
            bit2num(popu(j, 1:bit_n), range(1,:)), ...
            bit2num(popu(j, bit_n+1:2*bit_n), range(2,:)), ...
            bit2num(popu(j, 2*bit_n+1:3*bit_n), range(3,:)), ...
            bit2num(popu(j, 3*bit_n+1:4*bit_n), range(4,:)), ...
            fcn_value(j));
        end
    end

    % Fill objective function matrices
    upper(i) = max(fcn_value);
    average(i) = mean(fcn_value);
    lower(i) = min(fcn_value);

    % display current best
    [best, index] = min(fcn_value);
    g = generation_n;
    if mod(i,g/50)==0
        fprintf('Generation %i: ', i);
        fprintf('L(%1.10f, %1.10f, %1.10f, %1.10f)= -%2.10f\n', ...
        bit2num(popu(index, 1:bit_n), range(1,:)), ...
        bit2num(popu(index, bit_n+1:2*bit_n), range(2,:)), ...
        bit2num(popu(index, 2*bit_n+1:3*bit_n), range(3,:)), ...
        bit2num(popu(index, 3*bit_n+1:4*bit_n), range(4,:)), ...
        best);
```

```
        end
        % generate next population via selection, crossover and mutation
        popu = nextpopu(popu, fcn_value, xover_rate, mutate_rate,k);
    end

    disp('* Tanda - - berarti + karena fungsi objektif adalah meminimumkan negatif dari fungsi log-likelihood,');
    disp(' sehingga untuk mencari nilai maksimum sama dengan negatif dari nilai minimum fungsi objektif.');
    % perhitungan nilai AIC dan SC
    L = -min(fcn_value);
    AIC = -2*L+2*4
    SC = -2*L+log(T)*4
    e=cputime-t;
    fprintf('the CPU Time for the whole calculation=%10.5f\n',e);
```

```
clc;clear all;tic;format long;
disp('================================')
disp('Program Estimasi Parameter untuk model GARCH(1,1)')
disp('Dengan metode Genetic Algorithm')
disp('Oleh : Abdul Aziz ')
disp('================================')

DataYRAR; % Melihat data di file DataYRAR.m
% YR untuk data Yen - Rupiah
% AR untuk data Dirham - Rupiah
T = length(YR);
lrp = log(YR);
y = lrp(2:T)-lrp(1:T-1);
x = [ones(T-1,1) lrp(1:T-1)];
T = length(y);
global x y e e2 h0 T K;

disp('Iterasi Genetic Algorithm');
disp('pada fungsi Maximum Log-Likelihood untuk model GARCH(1,1)');
generation_n = 50; % Number of generations
popuSize = 30; % Population size
xover_rate = 1.0; % Crossover rate
mutate_rate = 0.01; % Mutation rate
bit_n = 16; % Bit number for each input variable
global OPT_METHOD % optimization method.
obj_fcn = 'GARCH11_Lfunction'; % Objective function
var_n = 5; % Number of input variables
range = [0,1;-1,0;0,1;0,1;0,1]; % Range of the input variables

t=cputime;
% Initial random population
popu = rand(popuSize, bit_n*var_n) > 0.5;
fprintf('Initial population.\n');
for i=1:popuSize
    for j=1:bit_n*var_n
        fprintf('%1.0f ',popu(i,j));
    end
    fprintf('\n');
end
upper = zeros(generation_n, 1);
average = zeros(generation_n, 1);
```

```
lower = zeros(generation_n, 1);

% Main loop of GA
for i = 1:generation_n;
      k=i;
      % delete unnecessary objects
      delete(findobj(0, 'tag', 'member'));
      delete(findobj(0, 'tag', 'individual'));
      delete(findobj(0, 'tag', 'count'));

      % Evaluate objective function for each individual
      fcn_value = evalpopu(popu, bit_n, range, obj_fcn);
      if (i= =1),
           fprintf('Initial population\n ');
           for j=1:popuSize
                fprintf('L(%1.10f,%1.10f,%1.10f,%1.10f,%1.10f)= -%2.10f\n', ...
                bit2num(popu(j, 1:bit_n), range(1,:)), ...
                bit2num(popu(j, bit_n+1:2*bit_n), range(2,:)), ...
                bit2num(popu(j, 2*bit_n+1:3*bit_n), range(3,:)), ...
                bit2num(popu(j, 3*bit_n+1:4*bit_n), range(4,:)), ...
                bit2num(popu(j, 4*bit_n+1:5*bit_n), range(5,:)), ...
                fcn_value(j));
           end
      end

      % Fill objective function matrices
      upper(i) = max(fcn_value);
      average(i) = mean(fcn_value);
      lower(i) = min(fcn_value);

      % display current best
      [best, index] = min(fcn_value);
      g = generation_n;
      if mod(i,g/50)==0
           fprintf('Generation %i: ', i);
           fprintf('L(%1.10f,%1.10f,%1.10f,%1.10f,%1.10f)= -%2.10f\n', ...
           bit2num(popu(index, 1:bit_n), range(1,:)), ...
           bit2num(popu(index, bit_n+1:2*bit_n), range(2,:)), ...
           bit2num(popu(index, 2*bit_n+1:3*bit_n), range(3,:)), ...
           bit2num(popu(index, 3*bit_n+1:4*bit_n), range(4,:)), ...
           bit2num(popu(index, 4*bit_n+1:5*bit_n), range(5,:)), ...
```

```
            best);
        end

        % generate next population via selection, crossover and mutation
        popu = nextpopu(popu, fcn_value, xover_rate, mutate_rate,k);
    end

    disp('* Tanda - - berarti + karena fungsi objektif adalah meminimumkan negatif dari fungsi log-likelihood,');
    disp(' sehingga untuk mencari nilai maksimum sama dengan negatif dari nilai minimum fungsi objektif.');
    % perhitungan nilai AIC dan SC
    L = -min(fcn_value);
    AIC = -2*L+2*5
    SC = -2*L+log(T)*5
    e=cputime-t;
    fprintf('the CPU Time for the whole calculation=%10.5f\n',e);
```

```
function L = ARCH1_Lfunction(input)
global OPT_METHOD % optimization method
global PREV_PT % previous data point, used by simplex
global x y e e2 h0 T K;
b1 = input(1); b2 = input(2);
parmean = [b1; b2];
a1 = input(3); a2 = input(4);
parvar = [a1; a2];
e = y-x*parmean;
e2 = e.^2;
h0 = e2'*e2/(T-2);
psi = diag(h5a(parvar));
% Meminimumkan -L ekivalen dengan memaksimumkan L
L = 0.5*(T*log(2*pi) + sum(log(h5a(parvar))) + e'*inv(psi)*e);
PREV_PT = [b1 b2 a1 a2];

function L = GARCH11_Lfunction(input)
global OPT_METHOD % optimization method
global PREV_PT % previous data point, used by simplex
global x y e e2 h0 T K;
b1 = input(1); b2 = input(2);
parmean = [b1; b2];
a1 = input(3); a2 = input(4); t1 = input(5);
parvar = [a1; a2; t1];
e = y-x*parmean;
e2 = e.^2;
h0 = e2'*e2/(T-2);
psi = diag(h5a(parvar));
% Meminimumkan -L ekivalen dengan memaksimumkan L
L = 0.5*(T*log(2*pi) + sum(log(h5(parvar))) + e'*inv(psi)*e);
PREV_PT = [b1 b2 a1 a2 t1];

function h = h5a(a)
global x y parmean e e2 h0 T K;
h = zeros(T,1);
h(1,1) = a(1)+a(2)*h0;
for i = 1:T-1
    h(i+1,1) = a(1)+a(2)*e2(i,1);
end

function h = h5(a)
```

```
global x y parmean e e2 h0 T K;
h = zeros(T,1);
h(1,1) = a(1)+a(2)*h0+a(3)*h0;
for i = 1:T-1
    h(i+1,1) = a(1)+a(2)*e2(i,1)+a(3)*h(i,1);
end

function num = bit2num(bit, range)
% BIT2NUM Conversion from bit string representations to decimal numbers.
% BIT2NUM(BIT, RANGE) converts a bit string representation BIT ( a 0-1
% vector) to a decimal number, where RANGE is a two-element vector
% specifying the range of the converted decimal number.
% For example:
% bit2num([1 1 0 1], [0, 15])
% bit2num([0 1 1 0 0 0 1], [0, 127])
integer = polyval(bit, 2);
num = integer*((range(2)-range(1))/(2^length(bit)-1)) + range(1);

function out = evaleach(string, bit_n, range, obj_fcn)
% EVALEACH Evaluation of each individual's fitness value.
% bit_n: number of bits for each input variable
% string: bit string representation of an individual
% range: range of input variables, a ver_n by 3 matrix
% fcn: objective function (a MATLAB string)
var_n = length(string)/bit_n;
input = zeros(1, var_n);
for i = 1:var_n,
input(i) = bit2num(string((i-1)*bit_n+1:i*bit_n), range(i, :));
end
out = feval(obj_fcn, input);

function fitness = evalpopu(popu, bit_n, range, obj_fcn)
%EVALPOPU Evaluation of the population's fitness values.
% population: 0-1 matrix of popu_n by string_leng
% bit_n: number of bits used to represent an input variable
% range: range of input variables, a var_b by 3 matrix
% fcn: objective function (a MATLAB string)
global count
pop_n = size(popu, 1);
fitness = zeros(pop_n, 1);
for count = 1:pop_n,
```

```
fitness(count) = evaleach(popu(count, :), bit_n, range, obj_fcn);
end
```

```
function new_popu = nextpopu(popu, fitness, xover_rate, mut_rate,k)
new_popu = popu;
popu_s = size(popu, 1);
string_leng = size(popu, 2);
% ====== ELITISM: find the best two and keep them
tmp_fitness = fitness;
[junk, index1] = min(tmp_fitness); % find the best
tmp_fitness(index1) = max(tmp_fitness);
[junk, index2] = min(tmp_fitness); % find the second best
new_popu([1 2], :) = popu([index1 index2], :);

% rescaling the fitness
fitness = max(fitness) - fitness;% keep it positive
total = sum(fitness);
if(k==1)
    fprintf('the fitnesses after minus\n');
    for i=1:popu_s
        fprintf('%10.3f \n',fitness(i));
    end
    fprintf('the sum of fitnesses %10.5f\n',total);
end
if total == 0,
    fprintf('=== Warning: converge to a single point ===\n');
    fitness = ones(popu_s, 1)/popu_s;% sum is 1
else
    fitness = fitness/sum(fitness); % sum is 1
end
cum_prob = cumsum(fitness);
if(k==1)
    fprintf('the probability of each chromosome, and the cumulative sum \n');
    for i=1:popu_s
        fprintf('%10.3f %10.3f\n',fitness(i),cum_prob(i));
    end
end

% ====== SELECTION and CROSSOVER
for i = 2:popu_s/2,
    % === Select two parents based on their scaled fitness values
    tmp = find(cum_prob - rand > 0);
    parent1 = popu(tmp(1), :);
    tmp = find(cum_prob - rand > 0);
```

```
        parent2 = popu(tmp(1), :);
        % === Do crossover
        if rand < xover_rate,
            % Perform crossover operation
            xover_point = ceil(rand*(string_leng-1));
            new_popu(i*2-1, :) = ...
            [parent1(1:xover_point) parent2(xover_point+1:string_leng)];
            new_popu(i*2, :) = ...
            [parent2(1:xover_point) parent1(xover_point+1:string_leng)];
        end

        if(k= =1)
            fprintf('xover_point = %d \n', xover_point);
            fprintf('parent1\n');
            for j=1:string_leng
                fprintf('%d ',parent1(j));
            end
            fprintf('\n');
            fprintf('parent2\n');
            for j=1:string_leng
                fprintf('%d ',parent2(j));
            end
            fprintf('\n');
            fprintf('new_popu1\n');
            for j=1:string_leng
                fprintf('%d ',new_popu(i*2-1,j))
            end
            fprintf('\n');
            fprintf('new_popu2\n');
            for j=1:string_leng
                fprintf('%d ',new_popu(i*2,j))
            end
            fprintf('\n');
            % disp(new_popu(i*2-1, :));
            % disp(new_popu(i*2, :));
        end
        % keyboard;
    end

    if(k= =1)
        fprintf('the result after crossover of the first population\n');
```

```
        for i=1:popu_s
            for j=1:string_leng
                fprintf('%d ',new_popu(i,j))
            end
            fprintf('\n');
            fprintf('\n');
        end
    end

    % ====== MUTATION (elites are not subject to this.)
    mask = rand(popu_s, string_leng) < mut_rate;
    new_popu = xor(new_popu, mask);
    if(k==1)
        fprintf('the result after mutation of the first population\n');
        for i=1:popu_s
            for j=1:string_leng
                fprintf('%d ',new_popu(i,j))
            end
            fprintf('\n');
            fprintf('\n');
        end
    end

    % restore the elites
    new_popu([1 2], :) = popu([index1 index2], :);
```

Hadirnya buku ini akan membantu mahasiswa dalam memahami dan mengaplikasikan konsep-konsep ekonometrika dalam setiap praktikum dengan bantuan bahasa pemrograman Matlab. Buku ini ditulis dan disusun secara sistematis dan bertahap yang dimulai dari konsep pengenalan ekonometrika, tentang pengertian, peranan matematika dan teori statistik hingga tujuan dan manfaat ekonometrika; bab selanjutnya mengenai estimasi parameter yang meliputi estimasi titik dan estimasi interval; dilanjutkan dengan analisis model statistik linier, heteroskedastisitas dan autokorelasi, hingga model statistik nonlinier dengan metode estimasi *least square* dan *maximum likelihood*; model *time-varying volatility* juga dibahas dengan beberapa model regresi dan metode estimasi sampai metode pengujian model; analisis teoritis dalam buku ini diakhiri dengan model GARCH dengan metode estimasi maksimum *likelihood* dan algoritma genetika.

Buku ini dilengkapi dengan contoh praktikum eksperimen lengkap dengan analisis dan pembahasan hingga kesimpulan setiap eksperimen, dengan bantuan matlab, di mana programnya juga dilampirkan secara lengkap sehingga mahasiswa dapat mengikuti, memahami dan memodifikasi program sesuai dengan kebutuhannya. Praktikum eksperimen diawali dengan eksperimen estimasi parameter, kemudian eksperimen model statistik linier dengan metode estimasi *least square* dan maksimum *likelihood*; dilanjutkan dengan eksperimen model heteroskedastisitas dan autokorelasi, hingga model statistik nonlinier dengan metode estimasi least square dan maksimum *likelihood* secara iteratif numerik. Eksperimen model ARCH dan GARCH juga dibahas hingga model VAR dan *Unit Roots Test* untuk data nonstasioner. Eskperimen dengan metode estimasi parameter algoritma genetika mengakhiri praktikum ekonometrika pada buku ini.

UIN-MALIKI PRESS
Jalan Gajayana 50 Malang 65144
Telepon/Faksimile 0341-573225
e-mail: admin@uinmalikipress.com
http://uinmalikipress.com

ISBN 978-602-958-304-5